中国科学: 数学 2015 年 第 45 卷 第 9 期: 1389 ~ 1402
www.scichina.com math.scichina.com
《中国科学》杂志社 SCIENCE CHINA PRESS

综 述

均匀划分

献给徐利治教授 95 华诞

马俊①, 叶永南②*, 雷洪川②

① 上海交通大学数学系, 上海 200240;
② 台湾中研院数学研究所, 台北 10617
E-mail: majun904@sjtu.edu.cn, mayeh@math.sinica.edu.tw, hclei@math.sinica.edu.tw

收稿日期: 2015-01-30; 接受日期: 2015-03-25; * 通信作者
高等学校博士学科点专向科研基金 (批准号: 20110073120068) 和台湾自然科学基金 (批准号: 101-2115-M-001-013-MY3) 资助项目

摘要 如果一个集合能划分成两两不交且元素个数都相同的一些子集合, 则称这些子集合组成原集合的一个均匀划分. Chung-Feller 定理证明了自由 Dyck 路能被均匀划分, 而其中一类为 Dyck 路. 本文从 Chung-Feller 定理及其推广出发, 综述关于组合对象的均匀划分的研究成果.

关键词 泊车函数 波动理论 Chung-Feller 定理 Dyck 路 格路 均匀划分 有根格路

MSC (2010) 主题分类 05A15, 05A18

1 引言

格路 (lattice path) 是组合数学中的基本模型, 它是二维平面上连接 $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ 中点的路径, 与其他组合结构如树、置换、杨表、连分数、不相交划分、不相交分拆等有密切关系, 同时在化学、物理、概率论和计算机科学中也有着重要的应用. 研究格路的方法主要有反射原理[1] (reflection principle)、矩阵的行列式[2]、连分数[3] 等. 关于格路的计数的研究是组合计数理论的经典课题, 目前仍然是研究热点之一, 它也是均匀划分研究的基础.

众所周知, 从原点出发走到点 $(2n,0)$ 的自由 Dyck 路共有 $\binom{2n}{n}$ 条, 一个重要的定理是, 这些格路能被均匀划分为 $n+1$ 类, 其中的一类是半长为 n 的 Dyck 路. 这一结论最早于 1909 年出现在 MacMahon 的论文 [4] 中. 1949 年, Chung 和 Feller [5] 用分析的方法给出了证明. 1967 年, Narayana [6] 用循环置换的方法给出了这一定理的组合证明, 并称其为 Chung-Feller 定理. Mohanty [7] 和 Narayana [8] 在其关于格路的专著中分别详细介绍了 Chung-Feller 定理.

一般地, 如果一个集合能划分成两两不交的一些子集合, 则这些子集合组成原集合的一个划分, 若这些子集合的元素个数都相等, 则称为均匀划分. 如果原集合的每个元素有适当和自然的权重, 而划分后这些子集的元素权重和相同, 则也称这些子集为原集合的均匀划分. 组合对象的均匀划分问题近年来逐渐引起了国内外专家学者的兴趣, 之前的研究对象比较少, 结果主要与 Dyck 路和 Motzkin 路

英文引用格式: Ma J, Yeh Y-N, Lei H C. Uniform partitions (in Chinese). Sci Sin Math, 2015, 45: 1389–1402, doi: 10.1360/N012015-00062

有关, 证明的方法大多是构造子集之间的双射. 文献 [9] 开始从生成函数的观点来研究组合对象的均匀划分, 提出了大量有均匀划分性质的格路. 在接下来的一系列文献中, 相关的研究取得了很大进展.

本文从 Chung-Feller 定理及其推广出发, 介绍与组合对象的均匀划分有关的研究成果. 本文的内容安排如下: 第 2 节介绍几类经典格路的均匀划分的结果, 如 Dyck 路、Motzkin 路、Schröder 路等; 第 3 节介绍如何从生成函数的观点来研究组合对象的均匀划分; 第 4 节介绍波动理论中与均匀划分相关的结果; 第 5 节介绍关于均匀划分研究的其他结果; 最后, 第 6 节提出两个公开问题.

2 几类经典格路的均匀划分

首先介绍一些关于格路的基本定义和记号.

定义 2.1 给定向量集 $S \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, 称由 S 中元素构成的序列 $L = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ 为一条格路, n 称为步数 (size), S 称为步集 (step set). L 对应一条从 $P_0 = (0,0)$ 出发经过点 $P_1, P_2, \ldots, P_n$ 的折线, 满足

$$\overrightarrow{P_{i-1}P_i} = s_i,$$

称终点 $P_n = (x_n, y_n)$ 的横坐标 x_n 为 L 的长, 纵坐标 y_n 为 P_n 的高度. 若 x_n 是偶数, 则称其一半为 L 的半长. 若点 $P_i = (x_i, y_i)$ 满足对任意点 $P_j = (x_j, y_j)$ 有 $y_j \geqslant y_i$, 则称其为 L 的一个极小点.

给定步集 S, 以 S 为步集且终点高度为 l 的格路称为 (S, l) 路, 其中不会走到 x 轴下方的格路称为 (S^+, l) 格路. 分别记长为 n 的 (S, l) 路和 (S^+, l) 路组成的集合为 $\mathcal{P}_n(l)$ 和 $\mathcal{P}_n^+(l)$.

当 $S = \{(1,1), (1,-1)\}$ 时, 我们分别称对应于 $(1,1)$ 和 $(1,-1)$ 的步为向上步和向下步, 分别记为 U 和 D. 易知半长为 n 的 $(S,0)$ 路的数目为

$$|\mathcal{P}_{2n}(0)| = \binom{2n}{n}.$$

若 $(S,0)$ 路 L 有 $2k$ 步位于 x 轴下方, 则称为一条缺陷数等于 k 的自由 Dyck 路. 缺陷数为 0 (即不会走到 x 轴下方) 的自由 Dyck 路即是经典的 Dyck 路, 半长为 n 的 Dyck 路的数目为 Catalan 数

$$c_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n},$$

生成函数

$$C(x) := \sum_{n \geqslant 0} c_n x^n$$

满足

$$C = 1 + xC^2.$$

经典的 Chung-Feller 定理主要研究自由 Dyck 路的均匀划分.

定理 2.2 [4, 5] (Chung-Feller 定理) 设 $S = \{(1,1), (1,-1)\}$, 对任意 $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, 半长为 n、缺陷数为 k 的自由 Dyck 路的数目为 Catalan 数 c_n, 与 k 的取值无关.

定理 2.2 证明了所有的半长为 n 的自由 Dyck 路能划分成 $n+1$ 个数量相等的集合, 每个集合的元素个数都为 Catalan 数, 且同一集合中的格路具有相同的缺陷数. 易知 Catalan 数

$$c_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n},$$

也可以写为

$$c_n = \frac{1}{2n+1}\binom{2n+1}{n} = \frac{1}{n}\binom{2n}{n-1}.$$

一个自然的问题是, 这个等式有没有类似的均匀划分组合解释. Callan [10] 在 2004 年用终点高度不同的格路给出了组合解释; 2009 年, Huq [11] 在他的博士论文中根据循环引理[12] 的思想给出了不同的组合解释, 同时在 Narayana 数的研究上也得到了类似结果. 2002 年, Eu 等人[13] 研究了 Catalan 数和 Motzkin 数的生成函数的 Taylor 展开式, 传统上 Taylor 展开式的余项在函数理论、数值逼近和渐近分析等领域主要用于数值的定量分析, 而在文献 [13] 中, 他们通过寻找展开式余项的组合解释, 利用双射证明了一个加细形式的 Chung-Feller 定理.

当 $S=\{(1,1),(1,0),(1,-1)\}$ 时, $(S,0)$ 路称为自由 Motzkin 路, 而 $(S^+,0)$ 路称为 Motzkin 路, 长为 n 的 Motzkin 路的数目 $|\mathcal{P}_n^+(0)|$ 为 Motzkin 数 m_n, 其生成函数 $M(x):=\sum_{n\geqslant 0} m_n x^n$ 满足

$$M = 1 + xM + x^2M^2.$$

同时, 称 $(S^+,1)$ 中除第一步外都不会走到直线 $y=1$ 下方的格路为 lifted-Motzkin 路, 长为 $n+1$ 的 lifted-Motzkin 路的数目也为 m_n. Shapiro [14] 提到了常见的 Motzkin 路没有均匀划分, 但一位匿名审稿人提出了均匀划分 lifted-Motzkin 路的方法, 文中未给出严格证明的过程, 但指出可以由循环引理或生成函数的方法得到证明. Eu 等人[13] 也研究了 Motzkin 路上的均匀划分.

定理 2.3 [13, 15]　设 $S=\{(1,1),(1,0),(1,-1)\}$. 对任意 $k\in\{0,1,\ldots,n\}$, 易知长为 $n+1$ 的 $(S,1)$ 路中最右极小点左边有 k 步的格路的数目为 Motzkin 数 m_n, 其中 $k=0$ 时即是长为 $n+1$ 的 lifted-Motzkin 路.

此时, 最右极小点把终点高度为 1 的自由 Motzkin 路分成了左右两段, 因此, 我们称这种划分为左 - 右型的. 类似地, 经典的 Chung-Feller 定理中, x 轴把自由 Dyck 路分成了上下两部分, 所以, 我们称为上 - 下型的.

当 $S=\{(1,1),(2,0),(1,-1)\}$ 时, $(S,0)$ 路称为自由 Schröder 路, 半长为 n 的自由 Schröder 路数目为中心 Delannoy 数

$$d_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n+k}{k},$$

起始几项为 1、3、13 和 63. $(S^+,0)$ 路称为大 Schröder 路, 或简称为 Schröder 路. 半长为 n 的 Schröder 路的数目为 (大) Schröder 数 r_n, 生成函数 $R(x)=\sum_{n\geqslant 0} r_n x^n$ 满足

$$R = 1 + xR + xR^2.$$

对任意自由 Schröder 路 L, 若 L 中位于 x 轴下方的部分投影到 x 轴上的线段总长为 $2k$, 则称 k 为 L 的缺陷数. 缺陷数为 0 的自由 Schröder 路即是 Schröder 路. 易知自由 Schröder 路的数目并不能被整数 $n+1$ 整除, 如 $d_3=13$, 甚至是素数, 因此不存在传统意义上的均匀划分, 这也是均匀划分问题的一个难点. Eu 等人[16] 研究了 Schröder 路的生成函数, 在自由 Schröder 路上定义了一个自然的权重函数, 由此得到了赋权自由 Schröder 路的一个上 - 下型均匀划分.

定理 2.4 [16]　设 $S=\{(1,1),(2,0),(1,-1)\}$, $k\in\{0,1,\ldots,n\}$. 对 $L\in\mathcal{P}_{2n}(0)$, 若 L 的最后一步为 $(1,1)$, 则 L 的权重为 2, 否则为 1. 对任意 $k\in\{0,1,\ldots,n\}$, 半长为 n 缺陷数为 k 的自由 Schröder 路的总权重为 Schröder 数 r_n.

以上文献证明了自由 Dyck 路和自由 Schröder 路有上 - 下型的均匀划分, 自由 Motzkin 路有左 - 右型的均匀划分. 一个自然的问题是, 这些格路是否同时具有上 - 下型和左 - 右型均匀划分? 2009 年, Ma 和 Yeh [17] 研究了三类不同步集上的有根格路的均匀划分, 自由 Dyck 路、lifted-Motzkin 路和自由 Schröder 路的均匀划分都是其中的特殊情形, 由此肯定地回答了这一问题.

除以上提到的文献外, 文献 [18–24] 也研究了格路的均匀划分问题, 给出了 Chung-Feller 定理的各种证明和一些特殊格路上的均匀划分的结果, 主要的证明方法为构造不同子集上的同构对应. 构造这些双射的技巧性很强, 没有统一的方法或原则, 只能对具体问题进行具体分析. 直到 2009 年, Liu 等人[9] 介绍了一个一般化的方法, 在接下来的一系列文献中, 大家开始从生成函数观点来研究组合对象的均匀划分.

3 从生成函数的观点来研究均匀划分问题

本节介绍如何从生成函数的观点来研究均匀划分问题. 首先介绍一些定义和记号.

定义 3.1 [9,17] 给定一个由组合对象组成的集合 Ω, θ 为从 Ω 到非负整数集 $\mathbb{N}$ 的一个映射, 称 θ 为定义在组合模型 Ω 上的一个参数. 令 $\overline{\Omega}$ 为一个包含 Ω 的组合模型, $\overline{\theta}$ 和 δ 为两个定义在 $\overline{\Omega}$ 上的参数, 满足 $\overline{\theta}\mid_{\Omega}=\theta$, 且对任意 $L\in\overline{\Omega}$ 有 $0\leqslant\delta(L)\leqslant\overline{\theta}(L)$. 记

$$\Omega_n=\{L\in\Omega\mid\theta(L)=n\},\quad \overline{\Omega}_{n,k}=\{L\in\overline{\Omega}\mid\overline{\theta}(L)=n,\delta(L)=k\}.$$

若对任意 $k\in\{0,1,\ldots,n\}$, 有 $|\Omega_n|=|\overline{\Omega}_{n,k}|$ (或在赋权的意义下, 子集合的权重和相等), 且存在 $t\in\{0,1,\ldots,n\}$ 使得 $\Omega_n=\overline{\Omega}_{n,t}$ (一般地, $t=0$), 则称 $(\overline{\Omega},\overline{\theta},\delta)$ 为 (Ω,θ) 的均匀划分扩张 (uniform partition extension) 或 Chung-Feller 扩张 (Chung-Feller extension), 称 δ 为均匀划分扩张参数.

定理 2.2–2.4 描述了几种经典格路的均匀划分扩张. 在定理 2.2 中, 步集 $S=\{(1,1),(1,-1)\}$, Ω 为 $(S^+,0)$ 路, $\overline{\Omega}$ 为 $(S,0)$ 路, θ 和 $\overline{\theta}$ 均为格路的半长, δ 为格路位于 x 轴下方步数的一半. 在定理 2.3 中, $S=\{(1,1),(1,0),(1,-1)\}$, Ω 为 lifted-Motzkin 路, $\overline{\Omega}$ 为 $(S,1)$ 路, θ 和 $\overline{\theta}$ 均为格路的长, δ 为格路最右极小点左边的步数. 而定理 2.4 中, $S=\{(1,1),(2,0),(1,-1)\}$, Ω 为 $(S^+,0)$ 路, $\overline{\Omega}$ 为 $(S,0)$ 路, θ 和 $\overline{\theta}$ 均为格路的半长, δ 也为缺陷数, 这时, 自由 Schröder 路的均匀划分是在赋权意义下的. 这三种情形中 δ 的取法各不相同, 该如何定义均匀划分扩张里的参数 δ 是比较困难的.

关于均匀划分的研究主要有两个核心问题:

(1) 已知组合对象 (Ω,θ) 和 $(\overline{\Omega},\overline{\theta},\delta)$, 证明 $(\overline{\Omega},\overline{\theta},\delta)$ 为 (Ω,θ) 的均匀划分扩张;

(2) 给定组合对象 (Ω,θ), 寻找适当的组合模型 $(\overline{\Omega},\overline{\theta})$ 以及合适的扩张参数 δ, 并证明 $(\overline{\Omega},\overline{\theta},\delta)$ 为 (Ω,θ) 的均匀划分扩张.

文献 [9] 定义了生成函数的 Chung-Feller 型. 设 $G(x)$ 为序列 $(g_0,g_1,\ldots)$ 的生成函数, 则 $G(x)$ 的 Chung-Feller 型 (Chung-Feller type) 为

$$\mathrm{CF}_G(x,y)=\frac{G(x)-yG(xy)}{1-y}. \tag{3.1}$$

如果组合模型 $(\overline{\Omega},\overline{\theta},\delta)$ 是 (Ω,θ) 的均匀划分扩张. 设 $g_n=|\Omega_n|$, Ω 的生成函数为

$$G(x)=\sum_{n\geqslant 0}g_nx^n,$$

则 $\overline{\Omega}$ 的二元生成函数必须满足如下等式:

$$\begin{aligned}\sum_{n\geqslant 0}\sum_{k=0}^{n}|\overline{\Omega}_{n,k}|x^n y^k &= \sum_{n\geqslant 0} g_n x^n(1+y+\cdots+y^n)\\ &= \sum_{n\geqslant 0} g_n x^n \frac{1-y^{n+1}}{1-y} = \frac{G(x)-yG(xy)}{1-y}.\end{aligned} \tag{3.2}$$

注 3.2　以上证明过程均可逆, 因此, $(\overline{\Omega},\overline{\theta},\delta)$ 是 (Ω,θ) 的均匀划分扩张当且仅当 $(\overline{\Omega},\overline{\theta},\delta)$ 的生成函数是 (Ω,θ) 的生成函数的 Chung-Feller 型. 根据这一结论, 我们可以重新证明许多已知定理, 大大简化了这些定理的证明过程.

以经典的 Chung-Feller 定理为例. 记 $A(x) := xC(x)$, 则由 $C = 1 + xC^2$, 有 $x = A(x) - A(x)^2$, 因此, $C(x)$ 的 Chung-Feller 型为

$$\begin{aligned}\mathrm{CF}_C(x,y) &= \frac{C(x)-yC(xy)}{1-y} = \frac{A(x)-A(z)}{x-z}\bigg|_{z=xy}\\ &= \frac{A(x)-A(z)}{A(x)-A(x)^2-(A(z)-A(z)^2)}\bigg|_{z=xy}\\ &= \frac{1}{1-(A(x)+A(xy))}.\end{aligned}$$

另一方面, 对于任意自由 Dyck 路, 以路径上位于 x 轴上的点将其分段, 每一段称为一个分支, 则每个分支的生成函数为 $A(x)$ 或 $A(xy)$, 其中 y 的指数为格路的缺陷数. 由此, 自由 Dyck 路的二元生成函数为 $\frac{1}{1-(A(x)+A(xy))}$, 与 $C(x)$ 的 Chung-Feller 型 $\mathrm{CF}_C(x,y)$ 相等, 因此, 自由 Dyck 路是 Dyck 路的均匀划分扩张.

根据这一思想, Liu 等人 [9] 重新证明了定理 2.2 和 2.3, 并且把 $G(x)$ 推广为多元生成函数, 发现了步集 $\{(1,1),(1,-d),(1,0)\}$ 上的广义 (k- 染色) Motzkin 路的均匀划分扩张, 同时还得到了与 (大或小) Schröder 路有关的一系列结果. 受这一思想启示, 他们考虑赋权自由 Schröder 路作为 Chung-Feller 扩张, 这些赋权的组合模型很难由双射或其他组合方法得到.

Ma 和 Yeh [17] 对以下三类步集上的格路进行了研究,

$$\begin{aligned}S_1 &= \{(2i-1,-1)\mid i\in A\}\cup\{(2j,0)\mid j\in B\}\cup\{(1,1)\},\\ S_2 &= \{(i,-1)\mid i\in A\}\cup\{(j,0)\mid j\in B\}\cup\{(1,1)\},\\ S_3 &= \{(1,-2i+1)\mid i\in A\}\cup\{(2j,0)\mid j\in B\}\cup\{(1,1)\},\end{aligned}$$

其中 A 和 B 为有限的正整数集. 他们定义了有根格路和上 - 下型扩张参数 δ 及左 - 右型扩张参数 δ', 证明了相应的有根格路为这些格路的均匀划分扩张. 这些结果蕴含了定理 2.2–2.4. 接下来介绍文献 [17] 的主要结论.

对 $S\in\{S_1,S_2,S_3\}$, 定义函数 $w: S\mapsto\mathbb{R}$ 及 $\theta: S\mapsto\mathbb{N}$. 称 w 为 S 的权重函数, θ 为 S 的长度函数. 对任意 (S,l) 路 $L=(s_1,s_2,\ldots,s_n)$, 令其权重及 θ- 长分别为

$$w(L)=\prod_{i=1}^{n} w(s_i),\quad \theta(L)=\sum_{i=1}^{n}\theta(s_i).$$

记 Ω 为 $(S^+,0)$ 路的集合.

定义 3.3 [17] 设 $L=(s_1,s_2,\ldots,s_n)$ 为 (S,l) 路, 对任意 $t\in\{0,1,\ldots,\theta(s_n)-1\}$,

(1) 若 $L\in\Omega$, 则我们称序对 $[L;t]$ 为有根 θ-$(S^+,0)$ 路;

(2) 若 L 为 $(S,1)$ 路, 则称序对 $[L;t]$ 为有根 θ-$(S,1)$ 路.

记有根 θ-$(S,1)$ 路的集合为 $\overline{\Omega}$. 对任意 $[L;s]\in\overline{\Omega}$, 设 L 从原点 P_0 出发依次经过点 $P_1,P_2,\ldots,P_n$, P_i 坐标为 (x_i,y_i). 记 L 中位于 x 轴上或 x 轴下方的点的指标集为 $\mathscr{N}(L)$, 即

$$\mathscr{N}(L)=\{i\mid y_i\leqslant 0, i\in\{1,2,\ldots,n\}\}.$$

令 $m(L)$ 为 L 的最右极小点的指标, 即

$$m(L)=\max\left\{i\;\middle|\; y_i=\min_{0\leqslant j\leqslant n} y_j\right\}.$$

文献 [17] 定义了两种均匀扩张参数 δ 和 δ':

$$\delta([L;t])=\sum_{i\in\mathscr{N}(L)}\theta(s_i)+t,\quad \delta'([L;t])=\sum_{i=1}^{m(L)}\theta(s_i)+t.$$

定理 3.4 [17] 当 $S=S_1$ 时, 对任意 $i\in A$, $j\in B$, a_i 和 b_j 均为任意实数. 令

$$w(s)=\begin{cases}a_i, & 若\ s=(2i-1,-1),\\ b_j, & 若\ s=(2j,0),\\ 1, & 若\ s=(1,1),\end{cases}$$

$$\theta(s)=\begin{cases}i-1, & 若\ s=(2i-1,-1),\\ j, & 若\ s=(2j,0),\\ 1, & 若\ s=(1,1).\end{cases}$$

此时, 对任意 $(S,0)$ 路 L, $\theta(L)$ 为 L 的半长且 (Ω,θ) 的生成函数 $G(x):=\sum_{L\in\Omega}w(L)x^{\theta(L)}$ 满足方程

$$G(x)=1+\left(\sum_{j\in B}b_jz^j\right)G(x)+\left(\sum_{i\in A}a_iz^i\right)G(x)^2.$$

对任意 $[L;t]\in\overline{\Omega}$, 定义 $\overline{\theta}([L;t])=\theta(L)-1$, 则在赋权的意义下,

(1) $(\overline{\Omega},\overline{\theta},\delta)$ 是 (Ω,θ) 的上 - 下型均匀划分扩张;

(2) $(\overline{\Omega},\overline{\theta},\delta')$ 是 (Ω,θ) 的左 - 右型均匀划分扩张.

由定理 3.4 可以得到无限多均匀划分的例子. 当 $A=\{1\}$, $B=\emptyset$ 且 $a_1=1$ 时, 由定理 3.4 可直接推出经典的 Chung-Feller 定理和自由 Dyck 路的左 - 右型均匀划分. 以下为一个新的例子.

例 3.5 [17] 设 $A=\{1,3\}$, $B=\emptyset$, 步集 $S=S_1=\{(1,1),(1,-1),(5,-1)\}$, w 恒为 1, $a_1=0$, $a_3=2$, 则由定理 3.4 可知, $(S^+,0)$ 路的生成函数满足

$$G(x)=1+(x+x^3)G(x)^2.$$

图 1 为 Ω 中半长为 3 的所有 6 条格路. 图 2 和 3 分别为对应于扩张参数 δ 和 δ' 的均匀扩张 $\{\overline{\Omega}_{3,k}\mid k=0,1,2,3\}$. 为了在图中标示有根 θ-$(S,1)$ 路 (L,s), 我们在坐标 $(a-s,0)$ 放置一个黑点, 这里 a 为 L 的终点横坐标.

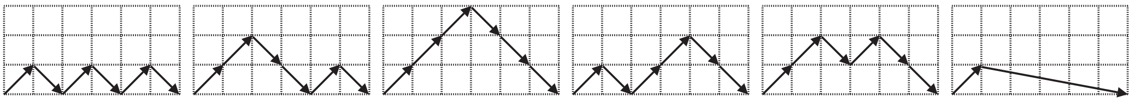

图 1　步集为 $S = \{(1,1),(1,-1),(5,-1)\}$, Ω_3 中的所有格路, 每条路的起始点为 $(0,0)$, 经过 $(0,0)$ 点的横轴和纵轴分别为 x- 轴和 y- 轴

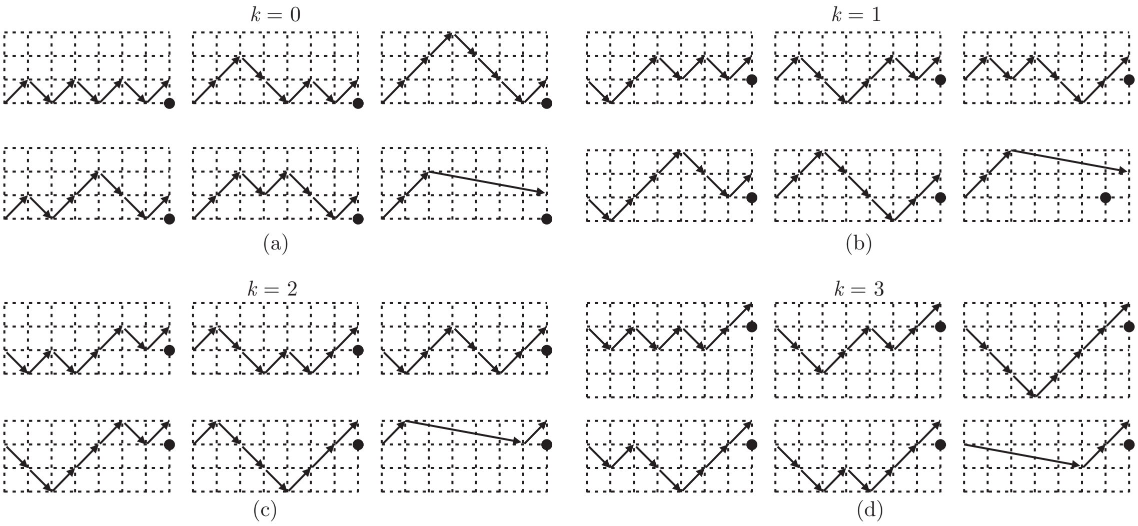

图 2　$\overline{\theta}(L)=3$, $\delta([L;t])=k$ 的所有 24 条有根 θ-$(S,1)$ 路 $[L;t]$, 每条路的起始点为 $(0,0)$, 经过 $(0,0)$ 点的横轴和纵轴分别为 x- 轴和 y- 轴

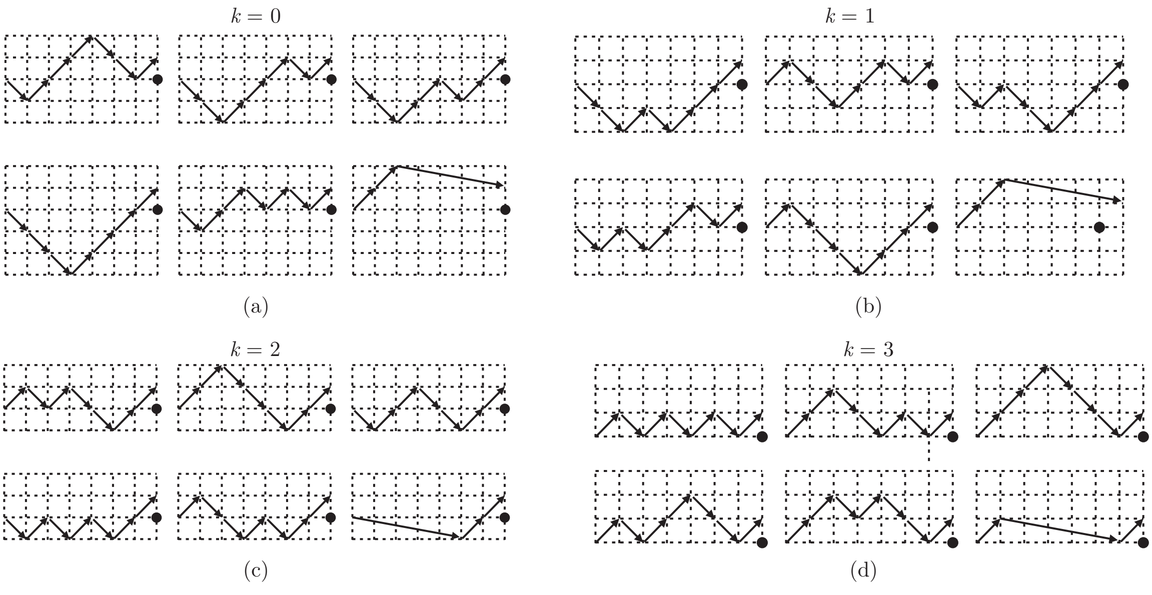

图 3　$\overline{\theta}(L)=3$, $\delta'([L;t])=k$ 的所有 24 条有根 θ-$(S,1)$ 路 $[L;t]$, 每条路的起始点为 $(0,0)$, 经过 $(0,0)$ 点的横轴和纵轴分别为 x- 轴和 y- 轴

类似于 $S=S_1$ 的情形, 文献 [17] 给出了 $S=S_2$ 时 $(S^+,0)$ 路的左 - 右型和上 - 下型均匀划分扩张, 以及 $S=S_3$ 情形的上 - 下型均匀划分扩张.

对于给定的组合对象 (Ω,θ), 寻找其均匀划分扩张是困难的, 尤其是扩张参数 δ 的定义. 不过可以从其生成函数出发得到一些启示. 寻找其均匀划分扩张的一般思路为

(1) 找 Ω 的生成函数 $G(x)$ 满足的代数方程;

(2) 考虑 $G(x)$ 的 Chung-Feller 型

$$\mathrm{CF}_G(x)=\frac{G(x)-yG(xy)}{1-y},$$

根据 $G(x)$ 满足的方程适当分解 Chung-Feller 型 $\mathrm{CF}_G(x)$ 为 $P(x,y)Q(x,y)$;

(3) 找到 $P(x,y)$ 和 $Q(x,y)$ 的组合解释;

(4) 最后得到 $\mathrm{CF}_G(x)$ 的组合解释.

在定理 3.4 的证明中, Chung-Feller 型 $\mathrm{CF}_G(x)$ 对应于上 - 下型扩张参数 δ 的分解为 $P_1(x,y)Q_1(x,y)$, 其中

$$P_1(x,y)=1+\sum_{i\in B}b_ix^iG(x)\sum_{j=0}^{i-1}y^j+\sum_{i\in A}a_ix^iG(x)^2\sum_{j=0}^{i-2}y^j,$$
$$Q_1(x,y)=\frac{1}{1-\sum_{i\in B}b_ix^iy^i-\sum_{i\in A}a_ix^iy^iG(xy)-\sum_{i\in A}a_ix^iy^{i-1}G(x)}.$$

而另一个对应于左 - 右型扩张参数 δ' 的分解为 $P_2(x,y)Q_2(x,y)$, 其中

$$P_2(x,y)=P_1(x,y),\quad Q_2(x,y)=\frac{G(xy)}{1-G(x)G(xy)(\sum_{i\in A}a_ix^iy^{i-1})}.$$

Li 等人[25] 发展了这一方法. 对任意满足代数方程

$$G(x)=1+\sum_{j=1}^{r}\sum_{i=j-1}^{m}a_{ij}x^iG(x)^j,\quad a_{ij}\in\mathbb{R} \tag{3.3}$$

的函数 $G(x)$, 他们定义了以 $G(x)$ 作为生成函数的格路 (Ω,θ), 以及相应的有根格路 $(\overline{\Omega},\overline{\theta})$; 同时定义了两种扩张参数 δ 和 δ', 证明了有根格路 $(\overline{\Omega},\overline{\theta},\delta)$ 和 $(\overline{\Omega},\overline{\theta},\delta')$ 分别为格路 (Ω,θ) 的上 - 下型和左 - 右型均匀划分扩张. 最近, Ma 等人[26] 研究了有根循环置换在有根格路上的作用.

4 波动理论中的均匀划分

对独立同分布的随机变量序列 $X_1,X_2,\dots,X_n$, 其部分和 $s_i:=X_1+X_2+\cdots+X_i$ 的波动性质在随机过程理论里扮演着重要的角色. 对于部分和序列, 其正项的个数以及达到最大值的最小指标的分布都是波动理论中大家感兴趣的研究对象.

给定实数序列 $\vec{r}=(r_1,r_2,\dots,r_n)$, 令

$$s_0=0,\quad s_1=r_1,\quad s_2=r_1+r_2,\quad \dots,\quad s_n=r_1+r_2+\cdots+r_n.$$

记 $p(\vec{r})$ 为部分和 $s_1,s_2,\dots,s_n$ 中正实数的个数, $m(\vec{r})$ 为部分和序列中取得最大值时的最小指标, 即

$$p(\vec{r})=|\{i\mid s_i>0\}|,\quad m(\vec{r})=\min\Big\{i\ \Big|\ s_i=\max_{0\leqslant k\leqslant n}s_k\Big\}.$$

$[n]$ 和 $[n]-1$ 分别表示整数集 $\{1,2,\dots,n\}$ 和 $\{0,1,\dots,n-1\}$. 记 $\mathfrak{S}_n$ 为 $[n]$ 上的置换群. 对任意 $\sigma=\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n\in\mathfrak{S}_n$, 令 $\vec{r}_\sigma=(r_{\sigma_1},r_{\sigma_2},\dots,r_{\sigma_n})$, 对任意 $i\in[n]-1$, 定义

$$N(\vec{r};i)=|\{\sigma\in\mathfrak{S}_n\mid p(\vec{r}_\sigma)=i\}|,\quad \Pi(\vec{r};i)=|\{\sigma\in\mathfrak{S}_n\mid m(\vec{r}_\sigma)=i\}|,$$

则有 $N(\vec{r};i)=\Pi(\vec{r};i)$. 这是波动理论里的一个基本定理, 其证明和推广参见文献 [27–32].

给定 $i\in[n]$, 令 $\vec{r}_i=(r_i,\dots,r_n,r_1,\dots,r_{i-1})$, 称其为 $\vec{r}$ 的第 i 个循环置换. 定义集合

$$\mathscr{P}(\vec{r})=\{p(\vec{r}_i)\mid i\in[n]\},\quad \mathscr{M}(\vec{r})=\{m(\vec{r}_i)\mid i\in[n]\}.$$

Spitzer [33] 证明了循环置换有以下性质.

引理 4.1 [33] (Spitzer 组合引理) 令 $\vec{r}$ 为一个部分和 $s_1,s_2,\dots,s_n$ 两两不同且总和 $s_n=0$ 的 n 元实数序列, 则

$$\mathscr{P}(\vec{r})=\mathscr{M}(\vec{r})=[n]-1.$$

许多组合对象的均匀划分都是 Spitzer 组合引理的推论. Narayana [6] 证明了以下引理, 并根据这一结果得到了 Chung-Feller 定理的组合证明. 这一引理可由 Spitzer 组合引理推出.

引理 4.2 [6] 令 $\vec{r}$ 是和为 1 的 n 元整数序列, 则 $\mathscr{P}(\vec{r})=[n]$.

对于 $\mathscr{M}(\vec{r})$, Ma 和 Yeh [34] 证明了以下引理.

引理 4.3 [34] 令 $\vec{r}$ 是和为 1 的 n 元整数序列, 则 $\mathscr{M}(\vec{r})=[n]$.

Raney [35] 发现对任意和为 1 的 n 元整数序列 $\vec{r}$, 在其循环置换中恰有唯一的一个满足部分和皆为正数. Graham 等人[36] 在他们的书中给了这一结论的一个简单证明.

对任意和为 s 的 n 元实数序列 $\vec{r}$, 易知 $s>0$ 时,

$$\mathscr{M}(\vec{r})\subseteq[n],\quad \mathscr{P}(\vec{r})\subseteq[n],$$

而 $s\leqslant 0$ 时,

$$\mathscr{M}(\vec{r})\subseteq[n]-1,\quad \mathscr{P}(\vec{r})\subseteq[n]-1.$$

2010 年, Huang 等人[37] 得到了包含关系中等号成立的充分必要条件.

定理 4.4 [37] 令 $\vec{r}=(r_1,r_2,\dots,r_n)$ 是和为 s 的 n 元实数序列, $(s_0,s_1,\dots,s_n)$ 是对应的部分和序列.

(1) 若 $s>0$, 则

(i) $\mathscr{M}(\vec{r})=[n]$ 的充分必要条件是, 对任意 $1\leqslant i\leqslant m(\vec{r})-1$ 均有 $s_j-s_i\geqslant s$;

(ii) $\mathscr{P}(\vec{r})=[n]$ 的充分必要条件是, 对任意 $1\leqslant i<j\leqslant n$ 均有 $s_j-s_i\notin\{x\in\mathbb{R}\mid 0<x<s\}$.

(2) 若 $s\leqslant 0$, 则

(i) $\mathscr{M}(\vec{r})=[n]-1$ 的充分必要条件是, 对任意 $m(\vec{r})+1\leqslant i\leqslant n-1$ 均有 $s_i-s_j\geqslant s$;

(ii) $\mathscr{P}(\vec{r})=[n]-1$ 的充分必要条件是, 对任意 $1\leqslant i<j\leqslant n$ 均有 $s_j-s_i\notin\{x\in\mathbb{R}\mid s\leqslant x\leqslant 0\}$.

当序列取整数, 且和为 0 或 1 时, 这一结果蕴涵了引理 4.1–4.3, 其中 $\mathscr{M}$ 和 $\mathscr{P}$ 分别对应左 - 右型和上 - 下型均匀划分. 他们还把这一结果推广到了 $s>n\theta$ 和 $s\leqslant n\theta$ 的情形, 其中 θ 为任意实数.

定理 4.5 [37] 令 $\vec{r}=(r_1,r_2,\dots,r_n)$ 是和为 s 的 n 元实数序列, $(s_0,s_1,\dots,s_n)$ 是其对应的部分和序列, θ 为任意实数. 记

$$p(\vec{r};\theta)=|\{i\mid s_i>i\cdot\theta\}|,\qquad m(\vec{r};\theta)=\min\Big\{i\ \Big|\ s_i-i\cdot\theta=\max_{0\leqslant k\leqslant n}(s_k-k\cdot\theta)\Big\},$$

$$\mathscr{P}(\vec{r};\theta)=\{p(\vec{r}_i;\theta)\mid i\in[n]\},\quad \mathscr{M}(\vec{r};\theta)=\{m(\vec{r}_i;\theta)\mid i\in[n]\}.$$

(1) 若 $s>n\theta$, 则

(i) $\mathscr{M}(\vec{r};\theta)=[n]$ 的充分必要条件是, 对任意 $1\leqslant i\leqslant m(\vec{r};\theta)-1$ 均有

$$s_j-s_i\geqslant s-(n-j+i)\theta;$$

(ii) $\mathscr{P}(\vec{r};\theta)=[n]$ 的充分必要条件是, 对任意 $1\leqslant i<j\leqslant n$ 均有

$$s_j-s_i\notin\{x\in\mathbb{R}\mid(j-i)\theta<x<s-(n-j+i)\theta\}.$$

(2) 若 $s\leqslant n\theta$, 则

(i) $\mathscr{M}(\vec{r};\theta)=[n]-1$ 的充分必要条件是, 对任意 $m(\vec{r};\theta)+1\leqslant i\leqslant n-1$ 均有

$$s_i-s_j<s-(n+j-i)\theta;$$

(ii) $\mathscr{P}(\vec{r};\theta)=[n]-1$ 的充分必要条件是, 对任意 $1\leqslant i<j\leqslant n$ 均有

$$s_j-s_i\notin\{x\in\mathbb{R}\mid s-(n-j+i)\theta\leqslant x\leqslant(j-i)\theta\}.$$

类似地, 根据这一引理, 当取整数序列时, $\mathscr{P}(\vec{r};\theta)=[n]$ 或 $[n]-1$ 保证了格路可依照被直线 $y=\theta x$ 切割的情形均匀划分为 $n+1$ 类, $\mathscr{M}(\vec{r};\theta)=[n]$ 或 $[n]-1$ 保证了格路可依照被直线 l 切割的情形划分为 $n+1$ 类, 其中 l 为经过距离直线 $y=\theta x$ 的第一个最远点且与 $y=\theta x$ 垂直的直线. 由此可见, 上 - 下或左 - 右型均匀划分均是这种 "倾斜" 型均匀划分的特殊情形.

例 4.6 令 $\vec{r}=(2,1,1,-2)$, $\theta=0.5$, 则有表 1 中所示的结果, $\mathscr{P}(\vec{r};\theta)=\{0,1,2,3\}$, $\mathscr{M}(\vec{r};\theta)=\{0,1,2,3\}$, 见图 4.

表 1 $\vec{r}$ 对应的循环置换的参数值

i	$\vec{r}_i$	$p(\vec{r}_i)$	$m(\vec{r})$
1	$(2,1,1,-2)$	3	3
2	$(-2,2,1,1)$	0	0
3	$(1,-2,2,1)$	1	1
4	$(1,1,-2,2)$	2	2

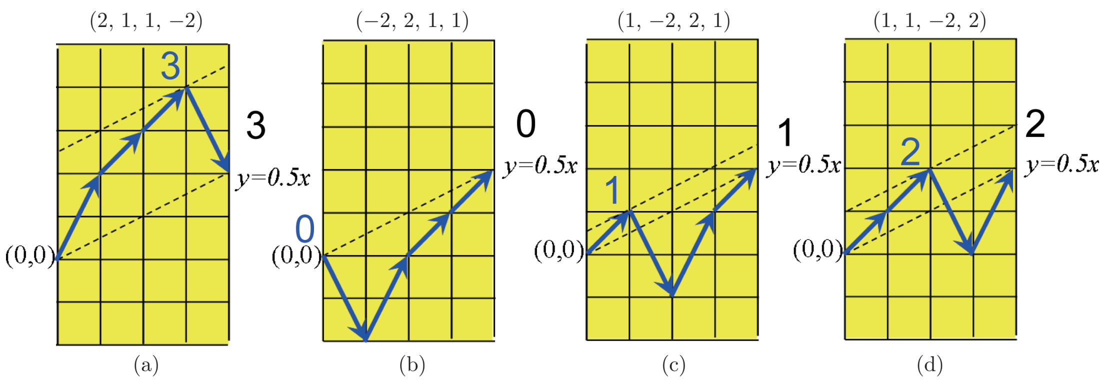

图 4 整数序列 $\vec{r}=(2,1,1,-2)$ 对应的格路的划分

5　关于均匀划分的其他研究

本节简要介绍一些关于均匀划分的其他研究成果. Ma 和 Yeh [23] 研究了加细的自由 Dyck 路的均匀划分. 对于一条从原点 P_0 出发经过点 $P_1, P_2, \ldots, P_{2n}$ 的自由 Dyck 路 $L = (s_1, s_2, \ldots, s_{2n})$, 若 $s_i = (1,1)$ 且 $s_{i+1} = (1,-1)$, 则称点 P_i 为一个山峰 (peak); 若 $s_i = (1,-1)$ 且 $s_{i+1} = (1,1)$, 则称点 P_i 为一个山谷 (valley); 若 $s_i = s_{i+1} = (1,1)$, 则称 P_i 为一个双升 (double ascent); 若 $s_i = s_{i+1} = (1,-1)$, 则称 P_i 为一个双降 (double descent). 记 $p_{n,m,k}(v_{n,m,k}, a_{n,m,k}, d_{n,m,k})$ 为长为 $2n$、x 轴下方有 $2m$ 步且山峰 (山谷、双升、双降) 数为 k 的自由 Dyck 路的数目. 易知,

$$p_{n,m,k} = v_{n,n-m,k}, \quad a_{n,m,k} = d_{n,m,k},$$

故只需研究山峰和双升即可. 记

$$P_{n,m}(x) = \sum_{k=1}^{n} p_{n,m,k} x^k.$$

他们首先证明了, 对任意 $n \geqslant 1$, $1 \leqslant m \leqslant n$, $P_{n,m}(x)$ 满足如下互反律:

$$P_{n,m}(x) = x^n P_{n,n-m}\left(\frac{1}{x}\right),$$

或者等价地, $p_{n,m,k} = p_{n,n-m,n-k}$. 虽然 $p_{n,m,k}$ 的取值与 m 有关, 但他们发现了 $p_{n,m,k} + p_{n,m,n-k}$ 的取值与 m 无关, 由此得到了一个另类的均匀划分.

定理 5.1 [23]　设 $n \geqslant 1$, $1 \leqslant k \leqslant \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, 则对任意 $1 \leqslant m \leqslant n-1$ 有

$$p_{n,m,k} + p_{n,m,n-k} = p_{n,m,k} + p_{n,n-m,k} = \frac{2(n+2)}{n(n-1)} \binom{n}{k-1} \binom{n}{k+1}.$$

然后他们分别用代数方法和组合方法证明了 $a_{n,m,k}$ 的取值也与 m 无关, 由此也可以得到一个均匀划分.

定理 5.2 [23]　设 $n \geqslant 0$, $0 \leqslant k \leqslant n-1$, 则对任意 $0 \leqslant m \leqslant n$ 有

$$a_{n,m,k} = \frac{1}{k+1} \binom{n-1}{k} \binom{n}{k}.$$

泊车函数[38] 也是组合计数的主要研究对象之一. 设有 n 个司机, 标记为 $\{1, 2, \ldots, n\}$, 以及 $n+1$ 个排成环形的车位, 按顺时针方向依次标记为 $0, 1, 2, \ldots, n$. 在这 $n+1$ 个车位中, 每个司机心中有个偏好的停车位 a_i, 我们记 L 为序列 $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, 称为一个长度为 n 的偏好停车位函数, 定义参数 $\overline{\theta}(L) = n$. 以 $\overline{\Omega}_n$ 表示长度等于 n 的偏好停车位函数的集合, 令 $\overline{\Omega} := \bigcup_{n \geqslant 0} \overline{\Omega}_n$. 易知

$$\overline{\Omega}_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_i \in \{0, 1, \ldots, n\}\}, \quad |\overline{\Omega}_n| = (n+1)^n.$$

司机按其指标顺序依次进入停车区域, 每个司机都先开到他偏好的车位, 如果这个车位是空的, 则停这个车位, 否则停到顺时针方向下一个空的车位上. 这样, 对任意 $L \in \overline{\Omega}$, 最后均有一个车位是空的, 记其指标为 $\delta(L)$. 若 $\delta(L) = 0$, 则称 L 是一个泊车函数. 以 Ω_n 记长度为 n 的泊车函数的集合, 令

$$\Omega = \bigcup_{n \geqslant 0} \Omega_n, \quad \theta = \overline{\theta} \mid_{\Omega} .$$

1969 年, Riodan 证明了如下定理.

定理 5.3 [39] 对任意 $k \in \{0,1,\ldots,n\}$, 令 $\overline{\Omega}_{n,k} := \{L \in \Omega_n \mid \delta(L) = k\}$, 则 $|\overline{\Omega}_{n,k}| = |\Omega_n|$, 与 k 的选取无关.

因此, $(\overline{\Omega}, \overline{\theta}, \delta)$ 是泊车函数 (Ω, θ) 的均匀划分扩张.

除了泊车函数, 我们也希望在其他组合模型上研究均匀划分问题, 如树、不相交分拆[40] (noncrossing partition) 等.

6 公开问题

给定正整数集 A, 2003 年, Eu 等人[41] 分别研究了两类 Dyck 路: 满足山峰高度不能为 A 中数的 Dyck 路; 满足山峰高度必须包含于 A 的 Dyck 路. 他们的一个主要结果是, 当 A 为正偶数集时, 第一类 Dyck 路的数目为移位的 Motzkin 数; 而当 A 为正奇数集时, 第一类 Dyck 路的数目为 Riodan 数. 他们还得到了其他正整数集 A 上的结果. 在他们之前, Deutsch [42] 证明了 $A = \{1\}$ 时第一类 Dyck 路的数目为 Fine 数[43]. 其他相关结果参见文献 [44,45]. 我们感兴趣的问题是, 如何定义 $\overline{\Omega}$, 使得 $(\overline{\Omega}, \overline{\theta}, \delta)$ 为这两类 Dyck 路的均匀划分扩张.

前文中提到的格路都位于二维平面上, 在三维空间中也可以定义格路. 设

$$S = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\},$$

记以 S 为步集从 $(0,0,0)$ 出发走到 (n,n,n) 的格路的集合为 $\overline{\Omega}_n$, 定义参数 $\overline{\theta}$ 为格路步数的 1/3. 易知

$$|\overline{\Omega}_n| = \binom{3n}{n,n,n}.$$

记 Ω_n 为 $\overline{\Omega}_n$ 中经过的每个点的坐标均满足 $z \geqslant y \geqslant x$ 的格路的集合, $|\Omega_n|$ 称为三维 Catalan 数, 由文献 [46] 可知,

$$|\Omega_n| = \frac{2}{(n+1)^2(n+2)}\binom{3n}{n,n,n}.$$

令

$$N(n) = \frac{(n+1)^2(n+2)}{2},$$

则有

$$|\overline{\Omega}_n| = N(n)|\Omega_n|.$$

一个自然的问题是, 如何在 $\overline{\Omega}_n$ 上定义一个自然的、有趣的扩张参数 δ, 使得 $(\overline{\Omega}, \overline{\theta}, \delta)$ 为 (Ω, θ) 的均匀划分扩张.

致谢 作者对审稿人的意见和建议表示衷心的感谢.

参考文献

1 André D. Calcul des probabilités. Solution directe du probléme résolu par M Bertrand. C R Math Acad Sci Paris, 1887, 105: 436–437

2 Gessel I, Viennot G. Binomial determinants, paths, and hook length formulae. Adv Math, 1985, 58: 300–321

3 Flajolet P. Combinatorial aspects of continued fractions. Discrete Math, 1980, 32: 125–161

4 MacMahon P A. Memoir on the theory of the partitions of numbers. Philos Trans R Soc Lond Ser A, 1909, 209: 153–175

5 Chung K L, Feller W. On fluctuations in-coin tossing. Proc Natl Acad Sci USA, 1949, 35: 605–608
6 Narayana T V. Cyclic permutation of lattice paths and the Chung-Feller theorem. Scand Actuar J, 1967, 1967: 23–30
7 Mohanty S G. Lattice Path Counting and Applications. New York: Academic Press, 1979
8 Narayana T V. Lattice Path Combinatorics, with Statistical Applications. Toronto/Buffalo: University of Toronto Press, 1979
9 Liu S C, Wang Y, Yeh Y-N. Chung-Feller property in view of generating functions. Electron J Combin, 2011, 18: #P104
10 Callan D. Why is $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}=\frac{1}{2n+1}\binom{2n+1}{n}=\frac{1}{n}\binom{2n}{n-1}$. Http://www.stat.wisc.edu/∼callan/notes, 2004
11 Huq A. Generalized Chung-Feller theorems for lattice paths. PhD Thesis. Boston: Brandeis University, 2009
12 Dershowitz D, Zaks S. The cycle lemma and some applications. European J Combin, 1990, 11: 35–40
13 Eu S-P, Liu S-C, Yeh Y-N. Taylor expansions for Catalan and Motzkin numbers. Adv Appl Math, 2002, 29: 345–357
14 Shapiro L W. Some open questions about random walks, involutions, limiting distributions, and generating functions. Adv Appl Math, 2001, 27: 585–596
15 Woan W J. Uniform partitions of lattice paths and Chung-Feller generalizations. Amer Math Monthly, 2001, 108: 556–559
16 Eu S-P, Fu T-S, Yeh Y-N. Refined Chung-Feller theorem for lattice paths. J Combin Theory Ser A, 2005, 112: 143–162
17 Ma J, Yeh Y-N. Generalizations of Chung-Feller theorems. Bull Inst Math Acad Sin (NS), 2009, 4: 299–332
18 Callan D. Pair them up!: A visual approach to the Chung-Feller theorem. College Math J, 1995, 26: 196–198
19 Cameron N. The combinatorics of even trees. Congr Numer, 2000, 147: 129–143
20 Chen W Y C, Li N Y, Shapiro L W. The butterfly decomposition of plane trees. Discrete Appl Math, 2007, 155: 2187–2201
21 Chen Y M. Note: The Chung-Feller theorem revisited. Discrete Math, 2008, 308: 1328–1329
22 Jewett R I, Ross K A. Random walk on Z. College Math J, 1995, 26: 196–198
23 Ma J, Yeh Y-N. Refinements of $(n;m)$-Dyck paths. European J Combin, 2011, 32: 92–99
24 Shapiro L W, Woan W J. Some generating function proofs of old and new results in probability. Congr Number, 2000, 143: 193–205
25 Li S H, Ma J, Yeh Y-N. Uniform partition extensions, a generating function perspective. Sci China Math, in press, 2015
26 Ma J, Shen H, Yeh Y-N. Rooted cyclic permutations of lattice paths and uniform partitions. Discrete Math, 2015, 338: 1111–1125
27 Altschul R. Another proof for a combinatorial lemma in fluctuation theory. Math Scand, 1972, 31: 123–126
28 Andersen E S. On sums of symmetrically dependent random variables. Scand Actuar J, 1953, 1953: 123–138
29 Baxter G. Notes for a seminar in stochastic processes. Department of Mathematics, University of Minnesota, 1957
30 Brandt A. A generalization of a combinatorial theorem of Sparre Andersen about sums of random variables. Math Scand, 1961, 9: 352–358
31 Feller W. On combinatorial methods in fluctuation theory. In: Grenander U, eds. Probability and Statistics: The Harald Cramér Volume. New York: John Wiley and Sons, 1959, 75–91
32 Hobby C, Pyke R. Remarks on the equivalence principle in fluctuation theory. Math Scand, 1963, 12: 19–24
33 Spitzer F. A combinatorial lemma and its application to probability theory. Trans Amer Math Soc, 1956, 82: 323–339
34 Ma J, Yeh Y-N. Generalizations of Chung-Feller theorem II. ArXiv:0903.0705, 2009
35 Raney G N. Functional composition patterns and power series reversion. Trans Amer Math Soc, 1960, 94: 441–451
36 Graham R L, Knuth D E, Patashnik O. Concrete Mathematics. 2nd ed. Reading: Addison-Wesley, 1994
37 Huang P-Y, Ma J, Yeh Y-N. Cyclic permutations of sequences and uniform partitions. Electron J combin, 2010, 17: #R117
38 Song C. Combinatorial theory of q,t-Schröder polynomials, parking functions and trees. PhD Thesis. Philadelphia: University of Pennsylvania, 2004
39 Riordan J. Ballots and trees. J Combin Theory, 1969, 6: 408–411
40 Chen W Y C, Deng E Y P, Du R R X, et al. Crossings and nestings of matchings and partitions. Trans Amer Math Soc, 2007, 359: 1555–1575
41 Eu S-P, Liu S-C, Yeh Y-N. Dyck paths with peaks avoiding or restricted to a given set. Stud Appl Math, 2003, 111: 453–465
42 Deutsch E. Dyck path enumeration. Discrete Math, 1999, 204: 167–202
43 Fine T. Extrapolation when very little is known about the source. Inform Control, 1970, 16: 331–359
44 Mansour T. Counting peaks at height k in a Dyck path. J Integer Seq, 2002, 5: 1–10

45 Peart P, Woan W J. Dyck paths with no peaks at height k. J Integer Seq, 2001, 4: 1–6
46 MacMahon P A. Combinatory Analysis. New York: Chelsea Pub Co, 1960

Uniform partitions

MA Jun, YEH Yeong-Nan & LEI HongChuan

Abstract If a set can be partitioned into disjoint subsets which have the same cardinality, then we call the set has a uniform partition. The classic Chung-Feller theorem says that a free Dyck path has a uniform partition, and one of the subsets is a Dyck path. In this paper, from classic Chung-Feller theorem and its generalizations, we survey the research on uniform partitions for combinatorial objects.

Keywords **parking function, fluctuation theory, Chung-Feller theorem, Dyck path, lattice path, uniform partition, rooted lattice path**

MSC(2010) **05A15, 05A18**

doi: 10.1360/N012015-00062