

引力波孤立子的能量问题

葛 墨 林*

(南开数学研究所理论物理研究室, 天津)

摘 要

本文用引力场具有第一类约束的正则形式讨论了 Belinsky-Zakharov (BZ) 引力波孤立子的能量问题。

关键词: 引力波, 孤立子, 引力场能量的正则形式

自从 Belinsky-Zakharov^[1]指出度规仅仅依赖于时间 t 与坐标 z 的 Einstein 方程属于可积系统以来, 引力波孤立子的研究一直引起人们很大的兴趣。使用 BZ 解生成技术, 可以由给定的种子解生成一系列新的孤立子解, 这为求解 Einstein 方程新引力波解提供了系统方案。BZ 引力的线元为

$$-dS^2 = f(t, z)(-dt^2 + dz^2) + g_{ab}(t, z)dx^a dx^b, \quad (1)$$

其中 $a, b = 1, 2$, g_{ab} 组成 2×2 矩阵, 以 g 表示。取光速 $c = 1$ 的单位, 可以引入光锥坐标 $\xi = (z + t)/2$ 与 $\eta = (z - t)/2$, g 的行列式 $\det g = \alpha^2$ 仅仅依赖于 ξ 与 η 。BZ 生成技术的一个重要特点是在解的生成过程中保持 $\det g$ 不变, 也就是说, 任何“规格”化的多孤立子解度规的 $\det g$ 与种子解的行列式相同。不同的种子解可以引出一系列新的引力波孤立子解。众所周知, 在 BZ 工作的基础上, BZ 引力波孤立子解的研究获得了很大的成功^[1]。但是相关的引力波孤立子的能量问题却一直没能解决。然而, 我们知道, 原始的“孤立子”的概念却是与空间中能量的局部性质密切相关的。因而判断引力波孤立子能量行为是个很重要的问题。阻碍成功地讨论这种能量问题的主要原因在于熟知的引力场能量-动量张量的赝张量性质。关于这个赝张量, 历史上很多作者曾提出过多种具体形式, 然而也引起过许多争论, 因而似乎单纯基于这些赝张量本身讨论引力波孤立子的能量是不能令人很好信服的, 还由于 BZ 多个孤立子解的复杂性等原因, 对 BZ 引力波孤立子能量问题的讨论事实上没有多大进展。

然而近十年来, 满足渐近平坦边界条件的引力场能量正定性定理^[2]的成功讨论, 使我们对引力场能量问题的认识有了新的飞跃。在文献[2]的基础上, Faddeev 用物理语言系统地总结了引力场作为具有第一类约束的 Hamilton 正则形式^[3], 这些工作成功地解决了引力场的能量问题。

众所熟知, 在讨论引力场能量时, 由于等效原理, 没有必要要求引力场局域能量处处正定, 物理的要求应是全空间整体能量非负^[3]。在通常四维时空的讨论中, 常常要求当 $r \rightarrow \infty$ 时引

本文 1988 年 8 月 27 日收到, 1989 年 6 月 12 日收到修改稿。

* 还在兰州大学任职。

力度规以特定幂次“均匀”地趋于零。这对于椭球对称的稳定引力场(如 Ernst 方程)是显然的。这一要求实际是孤岛状引力源的结果。我们知道引力场具有第一类约束的 Hamilton 形式是电磁场的直接推广,唯一的不同在于从电磁场的能量表达式 ($B^2 + E^2$, B 为磁场, E 为电场)可以直接读出其正定性 (Coulomb 作用表现为约束),而引力场则不显然^[3]。因而上面对 γ 幂次衰减均匀性的要求相当于电磁理论中“点源”的对应。然而,我们知道,以 $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ 为拉氏密度的电磁理论具有第一类约束的 Hamilton 形式完全适合于对电磁波能量的讨论,这在电磁理论是不言而喻的,因为空间整体能量的概念并不依赖于“引起”这一能量是质点还是场。这一事实在表达形式上的不同仅仅在于对沿 z 轴传播的电磁波,这只能定义沿 z 轴单位截面积柱体的能量。现在我们将这一显然的物理考虑应用于引力波的情况。BZ 曾详细地讨论了依赖于 (t, z) 的引力波孤子问题^[1],作者也曾采用新的行波种子解讨论了行波型孤子解^[2]。这些解存在于有限的空间区域,有的是不传播的,有的是能传播的,而且行为上象一个引力粒子。象讨论电磁波一样,我们可以在经典引力理论中限制所有度规分量只依赖于 (t, z) 两个变量,然后利用 BZ 线元直接代入,计算垂直于 z 轴的单位截面柱体的能量。在此,我们不先验地作任何能量正定性假定,而是从直接模型相关的计算结果作出有关能量值的断言。这就如同在电磁理论中,将磁场、电场直接代入求能量一样。但现在情况要比电磁场平面波情况要好得多,因为现在的引力波是孤子,其沿 z 轴收敛程度很高。事实上,这种处理在 $1+1$ 维孤子理论的能量讨论中是司空见惯的。其主要不同在于存在两个系列的约束^[3]。

如上所述,如果我们只讨论经典理论,就可以将引力场拉氏函数的变形限制在度规分量只依赖于 (t, z) 的引力场,也就是将文献[3]中的形式直接限制在 BZ 引力上。换句话说,如果不考虑路径积分,可以直接将这一限制加于经典 Hamilton 系统,因而用具有第一类约束的正则形式讨论 BZ 引力。这样一来,不但可以把 BZ 引力波孤立子能量问题的讨论建立在严格的基础之上,而且还将大大简化运算的过程,当然,这种处理不能推广到量子引力,因为这样作不可能包括偏离相空间经典轨道任何起伏的贡献,然而对经典理论,这样作是很可靠的。

在本文中我们将在文献[3]的基础上讨论 BZ 引力波孤立子的能量问题。由引力场正则形式的一般讨论,它的正确性不局限于引力场能量-动量张量所引起的不确定性。我们的结果如下:

(1) 得到了沿传播方向 (z 轴)单位截面柱面内 BZ 引力波能量的一般公式, 它的形式极其简单,仅依赖于 $z = \pm\infty$ 处的 $\det g$ 的性质;

(2) 由于 BZ 引力波孤立子解的生成不改变 $\det g$ (规格化以后), 因而任何复杂的孤立子的引力能均等于生成它的种子解的能量;

(3) 因而当 $z \rightarrow \pm\infty$ 时,没有任何奇异行为的引力波孤立子具有零能量,这与引力场能量正定性定理以及引力场自身高度非线性耦合性质相符;

(4) 以 Landau 形式的引力场能量-动量张量独立地计算了相应的能量, 给出与上述正则形式相同的结果。这与文献[3]的普遍结论一致。

我们首先从文献[3]的引力场正则形式出发。引力系统的拉氏函数

$$L = \int (dx) \sqrt{-g} \{ g^{\mu\nu} (\Gamma_{\mu\alpha}^{\alpha} \Gamma_{\nu\alpha}^{\alpha} - \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} \Gamma_{\alpha}^{\alpha}) + \mathcal{L}_m \}, \quad (2)$$

可以改写为具有第一类约束的广义 Hamilton 形式

$$L = \int (dx) (\Pi_{ik} \dot{q}^{ik} + \Pi^a \dot{q}_a - \lambda^0 C_0 - \lambda^k C_k - h), \quad (3)$$

其中 $\mu, \nu = 1, 2, 3, 4; i, j, k = 1, 2, 3$, 且

$$q^{ik} = h^{0i} h^{0k} - h^{00} h^{ik}, \quad h^{\mu\nu} = \sqrt{-g} g^{\mu\nu},$$

$$\Pi_{ik} = \frac{1}{h^{00}} L_{,ik}. \quad (4)$$

重复指标代表求和。在(3)式中不定乘子

$$\lambda^0 = 1 + \frac{1}{h^{00}}, \quad \lambda^k = \frac{h^{0k}}{h^{00}}, \quad (5)$$

而第一类约束为

$$C_0 = q^{ik} q^{mn} (\Pi_{ik} \Pi_{mn} - \Pi_{im} \Pi_{kn}) + \gamma R_3 - T_{00}, \quad (6)$$

$$C_k = 2\nabla_i (q^{il} \Pi_{il}) - 2\nabla_i (\Pi^{il} \Pi_{ik}) - T_{0k}, \quad (6')$$

其中 T_{00} 与 T_{0k} 为物质的能-动张量部分,

$$r = \det(g_{ik}), \quad R_3 = g^{ik} (\partial_k \gamma_{im} - \partial_m \gamma_{ik} + \gamma_{in} \gamma_{mk} - \gamma_{ik} \gamma_{mn}). \quad (7)$$

R_3 为与 γ_{ii} 相应的标曲率。系统的 Hamilton 量为

$$h = -C_0 - \partial_i \partial_k q^{ik}. \quad (8)$$

现在我们将这个一般形式应用到线元(1), 并且在经典场情况加上 $g = g(t, z)$ 的限制, 此时对三维体积的积分约化为对 dz 的积分 (设横截面为 1), 于是拉氏量与 Hamilton 量变为

$$L = \int dz (\Pi_{ik} \dot{q}^{ik} - \lambda^0 C_0 + \lambda^k C_k - h), \quad (9)$$

$$H = - \int dz (C_0 + \partial_i \partial_j q^{ij}). \quad (10)$$

单位横截面的能量为

$$E = H|_{\dot{q}=0} = - \int dz \partial_i \partial_j q^{ij}, \quad (11)$$

上式中引力常数 k 取为 1. 形如(1)式的度规给出

$$h^{00} = -\alpha, \quad h^{ab} = \alpha f g^{ab}, \quad h^{33} = \alpha,$$

$$q^{ab} = -\alpha^2 f g^{ab}, \quad q^{33} = -\alpha^2, \quad \text{其余为零.} \quad (12)$$

相应的克氏符号为

$$\Gamma_{00}^0 = \Gamma_{33}^0 = \Gamma_{03}^0 = \frac{1}{2} (\ln f)_{,t}, \quad \Gamma_{ab}^0 = \frac{1}{2f} (g_{ab})_{,t},$$

$$\Gamma_{33}^3 = \Gamma_{00}^3 = \Gamma_{30}^3 = \frac{1}{2} (\ln f)_{,z}, \quad \Gamma_{ab}^3 = \frac{1}{2f} (g_{ab})_{,z},$$

$$\Gamma_{0a}^b = \Gamma_{ab}^0 = \frac{1}{2} g^{ac} (g_{cb})_{,t}, \quad \Gamma_{3b}^a = \Gamma_{ab}^3 = \frac{1}{2} g^{ac} (g_{cb})_{,z},$$

$$(13)$$

其中下标中的逗号“,”表示相应的偏微商。于是经过标准的计算^[4] 我们有

$$R_3 = \frac{1}{2f} \{ 2(\ln \alpha)_{,zz} + [(\ln f)_{,z}]^2 + \frac{1}{2} \text{tr}(g^{-1} g_{,z} g^{-1} g_{,z})$$

$$+ g^{ab} [(g_{ab})_{,zz} - (g_{ac})_{,z} g^{cd} (g_{db})_{,z}] + \frac{1}{2} (\ln \alpha)_{,z} (\ln \alpha)_{,z} \}$$

$$+ (\ln \alpha)_{,z} (\ln \alpha)_{,z}, \quad (14)$$

$$C_0 = (q^{ab} \Pi_{ab})^2 - q^{ab} q^{cd} \Pi_{ac} \Pi_{bd} + 2q^{33} \Pi_{33} q^{ab} \Pi_{ab} + \alpha f R_3. \quad (15)$$

将上面诸式代入(11)式,并满足约束,得到

$$E = - \int dz (q^{33})_{,zz} = \int dz (\alpha^2)_{,zz} = \int dz \sqrt{-g} \varepsilon, \quad (16)$$

其中 $\varepsilon = \partial_{zz}(\alpha^2)/\sqrt{-g}$ 为单位长度、单位截面内的引力能密度. 非常有趣的简洁的形式便可以从(16)式得到

$$E = (\det g)_{,z} \Big|_{-\infty}^{+\infty}. \quad (17)$$

上式告诉我们,引力波的能量仅仅与 $\pm\infty$ 处的 $\det g$ 的微商有关,它立即导致以下结论:

(1) 由于 BZ 解生成技术在规格化之后不改变 $\det g$, 所以任何生成的解与其种子解的能量相同:

(2) 如果物理上要求 $z \rightarrow \pm\infty$ 时,引力波孤立子渐近平坦,即

$$g_{ab}(t, z) \rightarrow \delta_{ab} \text{ 平滑, } z \rightarrow \pm\infty, \quad (18)$$

则(17)式给出零结果.

在 BZ 以前工作中,种子解一般不依赖于 t , 因此,行为良好的孤立子解具有零引力能,即 $E = 0$. 如果不使 $E = 0$, 则必定使解具有某种奇异性.

(18)式所导致的结果,从物理上看是非常自然的. 因为没有物质奇点,也没有任何因引力自作用而引起的奇点并具有良好的边界行为的引力场必定具有零能量. 而此时的孤立子由于引力场的高度非线性自作用形成“斥力”与“引力”的平衡,这在正能定理允许的范围导致能量为零.

按文献[3]的分析,从正则形式代入约束后得出的结论与 Einstein 原始的引力场能量-动量张量的计算结果是一致的. 然而在 BZ 理论中孤立子的生成过程不改变引力常数的阶数,这表示在这个理论中, Landau 形式张量应当给出相同的结果. 下面我们用具体计算验证这个考虑. 在 $k = c = 1$ 单位中, Landau 形式张量

$$\begin{aligned} t_L^{\mu\nu} = & (2\Gamma_{1\tau}^\alpha \Gamma_{\sigma\rho}^\rho - \Gamma_{1\rho}^\sigma \Gamma_{\tau\sigma}^\rho - \Gamma_{1\sigma}^\alpha \Gamma_{\tau\rho}^\rho)(g^{\mu\lambda} g^{\nu\tau} - g^{\mu\nu} g^{\lambda\tau}) \\ & + g^{\mu\lambda} g^{\tau\sigma} (\Gamma_{\lambda\rho}^\nu \Gamma_{\tau\rho}^\rho - \Gamma_{\tau\sigma}^\rho \Gamma_{\lambda\rho}^\rho - \Gamma_{\sigma\rho}^\nu \Gamma_{\lambda\tau}^\rho - \Gamma_{\lambda\tau}^\nu \Gamma_{\sigma\rho}^\rho) \\ & + g^{\nu\lambda} g^{\tau\sigma} (\Gamma_{\lambda\rho}^\mu \Gamma_{\tau\sigma}^\rho + \Gamma_{\tau\sigma}^\mu \Gamma_{\lambda\rho}^\rho - \Gamma_{\sigma\rho}^\mu \Gamma_{\lambda\tau}^\rho - \Gamma_{\lambda\tau}^\mu \Gamma_{\sigma\rho}^\rho) \\ & + g^{\lambda\tau} g^{\sigma\rho} (\Gamma_{1\sigma}^\mu \Gamma_{\tau\rho}^\nu - \Gamma_{\lambda\tau}^\mu \Gamma_{\sigma\rho}^\nu). \end{aligned} \quad (19)$$

对 BZ 引力它可以化为 $t_\mu^0 = g_{\mu\alpha} t^{0\alpha}$ 的表达式

$$\begin{aligned} t_\mu^0 = & g^{00} \{ 2\Gamma_{33}^3 \Gamma_{\mu 0}^3 + 2\Gamma_{3a}^3 \Gamma_{\mu 0}^3 - 2\Gamma_{00}^0 \Gamma_{\mu 0}^0 - \Gamma_{0a}^b \Gamma_{\mu b}^a - 2\Gamma_{00}^0 \Gamma_{\mu a}^a - \Gamma_{0a}^a \Gamma_{\mu b}^b \} \\ & - \delta_\mu^0 g^{00} \{ 4(\Gamma_{33}^3)^2 - 4(\Gamma_{00}^0)^2 - 8\Gamma_{00}^0 \Gamma_{0a}^a + 8\Gamma_{33}^3 \Gamma_{3a}^a - 3(\Gamma_{0a}^a)^2 \\ & + 3(\Gamma_{3a}^a)^2 + \Gamma_{0a}^b \Gamma_{0b}^a - \Gamma_{3a}^b \Gamma_{3b}^a \} \\ & + g^{00} \{ 2\Gamma_{33}^3 \Gamma_{\mu 3}^0 - 2\Gamma_{00}^0 \Gamma_{\mu 0}^0 + 2\Gamma_{3a}^3 \Gamma_{\mu 3}^0 - 4\Gamma_{0a}^a \Gamma_{\mu 0}^0 - \Gamma_{0a}^b \Gamma_{\mu b}^a + \Gamma_{0a}^a \Gamma_{\mu b}^b \} \\ & + (g^{00})^2 \{ g_{00} \delta_\mu^0 [2(\Gamma_{33}^3)^2 - 2(\Gamma_{00}^0)^2 + 2\Gamma_{33}^3 \Gamma_{3a}^a - 4\Gamma_{00}^0 \Gamma_{0a}^a - (\Gamma_{0a}^a)^2 + \Gamma_{0a}^b \Gamma_{0b}^a] \\ & + g_{33} \delta_\mu^3 [4\Gamma_{00}^0 \Gamma_{3a}^a - 2\Gamma_{33}^3 \Gamma_{3a}^a + \Gamma_{0a}^b \Gamma_{3b}^b - \Gamma_{0a}^a \Gamma_{3b}^b] \} \\ & + \delta_\mu^0 g^{00} \{ 2(\Gamma_{00}^0) - 2(\Gamma_{33}^3)^2 + \Gamma_{0a}^b \Gamma_{0b}^a - (\Gamma_{0a}^a)^2 \} \\ & - g^{00} \delta_\mu^3 [\Gamma_{0a}^a \Gamma_{3b}^b - \Gamma_{3a}^a \Gamma_{0b}^b]. \end{aligned}$$

将有关克氏符号代入上式,注意到上式可化为

$$\begin{aligned} t_{\mu}^0 = & \delta_{\mu}^0 \{ \Gamma_{3a}^b \Gamma_{3b}^a + \Gamma_{0a}^b \Gamma_{0b}^a - 2\Gamma_{00}^0 \Gamma_{0a}^a - 2\Gamma_{33}^3 \Gamma_{3a}^a - 3(\Gamma_{3a}^a)^2 - (\Gamma_{0a}^a)^2 \} \\ & + \delta_{\mu}^3 \{ 2\Gamma_{3a}^b \Gamma_{0b}^a - 2\Gamma_{33}^3 \Gamma_{0a}^a - 2\Gamma_{00}^0 \Gamma_{3a}^a - 4\Gamma_{0a}^a \Gamma_{3b}^b \}, \end{aligned} \quad (20)$$

经过计算得到

$$\begin{aligned} t_{\mu}^0 = & \frac{1}{f\alpha^2} \{ \delta_{\mu}^0 [\alpha\alpha_{,tt} + \alpha\alpha_{,zz} + 2(\alpha_{,z})^2] \\ & + 2\delta_{\mu}^3 [\alpha\alpha_{,tz} + \alpha_{,t}\alpha_{,z}] \}. \end{aligned} \quad (21)$$

考虑到 $\alpha_{,tt} = \alpha_{,zz}$, 于是得到

$$t_L^{00} = \frac{2}{\alpha^2 f^2} (\alpha\alpha_{,z})_{,z}, \quad (22)$$

即有

$$\sqrt{-g}\varepsilon_L = 2\partial_z(\alpha\alpha_{,z}) = (\alpha^2)_{,zz}. \quad (23)$$

上式与由正则形式得到的 (16) 式是完全一样的。这样,具有第一类约束的正则形式的 BZ 理论中,引力辐射能与 Landau 膨胀量结果是相同的。这与文献[3]的一般提法相符。现在有趣之处是,引力波孤立子也符合这个结论。

通过以上讨论,可以看到,从具有第一类约束的正则形式出发,讨论 BZ 引力的孤立子解的能量问题是非常可靠和方便的。而且还可以看到,由于引力场的高度非线性自作用,引力场形成的孤立子在能量行为方面有它自己的特点,而无奇异的 BZ 引力波孤立子将具有零能量的物理行为。因此,从这个意义上说,现有一些 BZ 引力孤子解具有奇异行为可能不完全是坏事,它们或许正反映了作为引力“孤子”的物理行为。如何将这结果推广到 $a, b = 1, 2, \dots, N(N \geq 3)$ 的相应可积理论,是个有物理兴趣的课题。

作者感谢延智达、Belinsky 和 Kuchar 及吴咏时的有益讨论和帮助。

参 考 文 献

- [1] Belinsky, V. A. & Zakharov, V. E., *Sov. Phys., JETP* **48**(1978), 985; **50**(1979), 1;
Belinsky, V. A., *Sov. Phys., JETP* **50**(1979), 623;
Kitchingham, D. W., *Class. Quantum Gravit.*, **3**(1986), 133;
Belinsky, V. A. & Ruffini, *Phys. Lett.*, **B89**(1980), 197;
钟在哲, *Scientia Sinica, Series A*, **31**(1988), 436;
葛墨林、延智达, *中国科学A辑*, 1987, 8: 844.
- [2] Schoen, P. & Yau S. T., *Phys. Rev. Lett.*, **42**(1979)547;
Comm. Math. Phys., **65**(1979)45; **79**(1981)231;
Witten, E., *Comm. Math. Phys.*, **80**(1981), 381.
- [3] Faddeev, L. D., *Uspekhi Fizyk*, **136**(1982), 435.
- [4] 朗道-栗弗席茨, 场论(任朗、袁炳南译), 人民教育出版社, 1959.
- [5] Diaz, M. C., Gleiser, R. J. & Pullin, J. A., *J. Math. Phys.*, **29**(1988), 169.