



额外维存在性的理论探讨

李田军¹, 刘玉孝², 吕宏³, 卢建新^{4*}

1. 中国科学院理论物理研究所, 北京 100190;

2. 兰州大学理论物理研究所, 兰州 730000;

3. 天津大学物理系, 天津 300350;

4. 中国科学技术大学交叉学科理论研究中心, 合肥 230026

* 联系人, E-mail: jxlu@ustc.edu.cn

2017-12-27收稿, 2018-03-05修回, 2018-03-06接受, 2018-08-13网络版发表

国家自然科学基金(11235010, 11475238, 11375075, 11522541, 11475024, 11175269, 11235003, 11647601, 11775212)资助

摘要 是否存在超出我们生活的4维时空的额外维度是一个有趣而重要的问题. 本文从理论角度探讨这一问题, 先讨论了早期引力与电磁相互作用统一的5维卡鲁扎-克莱茵(Kaluza-Klein, KK)-理论, 然后介绍了超对称和超引力与额外维的关联, 最后介绍了弦理论和M-理论, 并解释为何超弦理论本身的完善要求存在一个时空维度最大可以是11维的M-理论. 至少从经典层面上, 额外维对超对称和超引力来说仅仅是一种选择, 不是必须的. 目前, 除4维 $N=8$ 超引力理论有可能是一个自洽的量子引力理论, 其他4维和高维的超引力理论紫外都有问题, 需要考虑新的物理自由度, 对应的紫外完善理论很可能就是弦/M-理论. 弦理论对额外维的要求有所不同, 其微扰量子自洽性要求额外维必须存在. 例如, 对超弦理论, 时空必须是10维的. 如果弦/M-理论的确是描述物质和相互作用的基本理论, 那额外维就一定存在, 同时需要对额外的空间维度作紧致化, 且其尺度必须小于目前的实验限制. 本文也讨论了一些相关唯象大额外维理论.

关键词 额外维, Kaluza-Klein (KK)-理论, 超对称及超引力, 弦/M-理论, 大额外维理论

1 额外维早期理论

探索描述自然规律的统一理论是物理学家不变的追求. 早在1914年, 芬兰物理学家诺德斯特姆(Gunnar Nordstrom)^[1]尝试统一自然界中的引力和电磁相互作用(当时已知的两种基本相互作用力)时首次提出额外维度的思想. 在他的额外维理论中, 存在一个时间维度和4个空间维度(通常认为我们的时空有一个时间维度和3个空间维度), 4维时空中的电磁力和引力可以用一个5维的矢量场同时描述. 然而, 因为诺德斯特姆提出的标量引力理论是不成功的, 所以额外维的思想在当时并没有引起关注.

1919年, 波兰数学家和物理学家卡鲁扎(Theodor

Kaluza)^[2]在爱因斯坦广义相对论中看到了统一电磁力与引力的可能, 提出存在第5维(第4个空间维度)的假设. 卡鲁扎的额外维理论是爱因斯坦引力理论的5维推广, 可以统一描述4维引力和电磁力. 为了解释第5维在实验中没有被观测到的事实, 卡鲁扎假设场不依赖于第5维. 但是对额外维仍有疑问: 额外维在哪里? 直到1926年, 瑞典理论物理学家克莱茵(Oskar Klein)^[3]假设第5维卷曲成一个半径只有 10^{-33} cm(普朗克尺度)的圆环, 解答了卡鲁扎理论中第5维不可观测的问题. 形象地说, 宇宙是一个5维的柱面. 该理论与卡鲁扎理论的区别是, 第5维卷曲为一个普朗克尺度的圆环而不是无限拓展的, 然而这导致该理论得不到4维手征费米子. 卡鲁扎和克莱茵发展的额外维度理论被称为卡鲁

引用格式: 李田军, 刘玉孝, 吕宏, 等. 额外维存在性的理论探讨. 科学通报, 2018, 63: 2499–2508

Li T J, Liu Y X, Lü H, et al. Exploring the existence of extra dimension(s) (in Chinese). Chin Sci Bull, 2018, 63: 2499–2508, doi: 10.1360/N972017-01370

扎-克莱茵(KK)-理论. KK-理论的缺陷导致其不是一个统一电磁力和引力的可行理论.

后来, 弱相互作用和强相互作用被相继发现, 这吸引了许多物理学家去构建弱和强相互作用的理论, 因此KK-理论在这之后发展较为缓慢. 20世纪60年代, 在继续寻找统一4种基本相互作用的过程中, KK-理论重新出现在物理学家的视野中. 20世纪60年代以后, 在构建统一理论的过程中, 更高维度的时空假设被提出. 例如, 玻色弦理论中时空有26个时空维度, 超弦理论有10个时空维度, M-理论有11个时空维度. 额外的时空维度较少的有畴壁理论、膜世界理论等. 显然, KK-理论是一个重要的先驱理论.

2 超引力理论与额外维空间

前面介绍的KK-理论与额外维的关联是基于经典意义下引力与电磁相互作用的统一或更一般情况下引力与一些特定规范相互作用的统一. 换句话说, 低维下的电磁或一些特定的规范理论从高维来看是高维经典引力的一部分. 一般来说, 这种统一在量子意义下并不存在. 原因很多, 除上述提到的一般得不到低维手征费米子, 其中主要原因是引力本身在场论意义下并不存在一个好的量子理论.

另一种与额外维关联的是超对称的实现, 特别是局域超对称下超引力的存在与额外维的关联. 超对称是一种联系玻色自由度和费米自由度之间的对称性. 如果超对称是现实世界的对称性的话, 这意味着自然界中的玻色子与费米子之间有一种交换对称性, 其最重要的结论之一就是每一个物理玻色自由度必然有一个费米自由度与其对应, 另外还意味着在该对称性破缺之前, 这两种自由度具有相同的质量. 超对称也是欧洲大型强子对撞机(large hadron collider, LHC)除已发现的Higgs粒子外的另一重要科学目标(额外维也是其中之一).

具有这种对称性的理论称为超对称理论. 当超对称变换参数不依赖时空位置时, 这种超对称称为整体超对称. 这样的理论不涉及引力. 研究表明, 这样的理论存在的最大时空维度是6维时空(假定一维时间). 因此仅仅从超对称的要求可以容许额外维的存在. 这不仅在经典意义下, 在量子意义下也是如此. 例如, 6维(2,

0)共形理论或6维的小弦理论(little string theories)就是完全自洽不含引力的量子理论.

本节关注的重点是局域超对称下的经典理论即超引力理论^[4]. 我们知道超对称变换是一种费米特性的变换, 把玻色自由度变为费米自由度, 反之亦然. 这样两次超对称变换就把一个自由度变回其同样特性的自由度, 也就是说两次超对称变换给出的是一个玻色特性的变换, 实际上给出一个时空平移变换. 当把超对称局域化后, 那么连续两次的局域超对称变换就给出了一个与时空点有关的平移变换. 如果局域超对称是所考虑理论的对称性的话, 这必然意味着局域的时空平移也是对应理论的对称性. 而局域的时空平移就是通常广义相对论的广义坐标变换. 因此局域超对称本身必然意味着广义相对论. 这就是通常提到的, 如果爱因斯坦不发现广义相对论, 局域超对称的研究也会导致广义相对论的发现. 换句话说, 局域超对称必然包括引力的出现. 但这里的引力理论与通常的广义相对论还是有区别的, 不仅包括通常的玻色性的引力自由度, 还必须包括对应的费米自由度. 与引力自由度直接对应的称为引力微子. 这种具有一定超对称性的引力理论称为超引力理论.

如果仅考虑具有一维时间的时空, 发现具有引力传播自由度的超引力理论可以存在的最小时空维度是4维时空, 最大可以是11维. 这些可以通过如下方式得以理解: 熟知的引力相互作用是长程的, 因此对应传播引力相互作用的量子(称为引力子)是无质量的. 这也可以从爱因斯坦广义相对论对平坦时空线性化得到. 该引力子物理自由度可以被一个小群 $SO(D-2)$ 的无迹对称张量表示(这里 D 代表时空维度). 由此可见, 有物理传播自由度的引力子存在的最小时空维度为 $D=4$. 4维时空的无质量引力子的自旋为2(对应 $SO(2)$ 的无迹对称表示), 其具有两个物理自由度, 分别对应螺旋度为+2和-2的态. 对4维时空, 任何自旋大于2的有限个场的相互作用引力理论都不自洽(要求包括无穷多的高自旋场). 对于 $D=4$ 最大自旋为2的超引力理论, 最大容许的超对称个数 $N=8$, 对应8个独立超对称变换生成元. 对此可以这样来理解: 无质量引力子有两个态, 可用它的螺旋度+2和-2来刻画. 每一个超对称变换生成元是一个对应时空下的满足反对易关系的最小旋量场算符, 它作用在一个螺旋度为 h 的态上会把

其螺旋度减少1/2(实际上一个超对称生成元可以分解为一个提升算子和一个下降算子,提升算子作用在一个螺旋度为 h 的态上会把 h 提升1/2,而下降算子的作用会把 h 减少1/2).要把螺旋度为+2的态通过超对称的作用得到螺旋度为-2的态需要8个独立的超对称生成元,给出 $N = 8$.对4维时空,最小旋量可以是Weyl旋量(对无质量粒子)也可以是Majorana旋量,每一个具有 $2 \times 2^{D/2}/2 = 4$ 个实分量.4维下8个超对称总共给出 $8 \times 4 = 32$ 个实分量.4维时空下的最大超引力理论可以通过最高时空维度下超引力理论采用空间维度的约化得到.如果时空维度是最大的话,超对称生成元的个数只能是 $N = 1$.也就是说,在该时空维度下最小旋量的实分量数为32.不难确定, $D = 11$ 时的最小旋量是Majorana旋量,其实分量个数是32,因此超对称容许的超引力理论的最大时空维度为11维.如同引力和电磁相互作用的统一一样,超对称性容许额外维的存在以及对应高维相关理论的存在.对非引力理论,有些高维理论甚至在量子意义下也是自洽的.除4维 $N = 8$ (最大)超引力理论,其他高维超引力理论尽管在经典意义下没有问题,但它们在量子意义都有紫外发散,且不能采用通常的重整化把这些发散吸收到有限个理论参数中去使其有限,反映了紫外有新自由度的出现,必须考虑.现在已知这些高维超引力理论紫外完整量子自洽的理论是弦/M-理论.

3 弦/M-理论与额外维空间

3.1 玻色弦

在经典场论的框架下,无论是从相互作用的统一还是超对称性的要求,额外维仅仅是一种选项,不是必须的.但如果它们对应的自洽的量子理论存在的话,除非有其他理由,从理论角度额外维的存在就有了一定的合理性.本小节就讨论这种情形的一个例子,玻色弦理论.

人们对弦理论重要性的认识始于1968年^[5].在1968~1973年,研究发现强相互作用粒子(称为强子)的散射振幅的高能行为可用一个一维弦的动力学来描述.在弦理论中,通常说的“粒子”对应于弦(如同二胡弦但其长度极短)的不同振动模式.弦可以有两种:开弦和闭弦.开弦具有两个端点,在时空中随时间自由

演化给出一个两维的世界叶面.闭弦是一个没有端点的闭合圈,在时空中自由演化给出一个在拓扑上等价于柱面的两维面.

一般来说,无论是开弦还是闭弦其演化给出的是一个弯曲的两维面.该世界面可用两维坐标 $\sigma^\alpha = (\tau, \sigma)$ 来刻画,其中 σ 刻画的是沿着弦的空间坐标,而 τ 刻画的是弦演化的时间参数.刻画世界面的是度规

$$ds^2 = \gamma_{\alpha\beta} d\sigma^\alpha d\sigma^\beta. \quad (1)$$

玻色弦可用嵌入时空且依赖 (τ, σ) 的时空坐标 $X^\mu(\tau, \sigma)$ 来刻画.一般情况下时空也可以是弯曲的,用时空度规 $g_{\mu\nu}(X)$ 来刻画.玻色弦的动力学演化可用比较适合量子化的Polyakov作用量来描述.该作用量在经典意义下有3个局域对称性,2个来自(1+1)-维广义坐标变换,另一个来自(1+1)-维度规的局域标度变换.利用这3个局域变换可以将(1+1)-维度规 $\gamma_{\alpha\beta}$ 在一个给定坐标系(coordinate patch)下变为平坦的闵氏度规.如果时空也取为平坦的闵氏时空,描述玻色弦在时空中自由演化的(1+1)-维Polyakov作用量就退化为(1+1)-维 D 个自由标量场论.这里 D 是时空维度, D 个标量场就是描述弦的时空坐标 X^μ ,其中 $\mu = 0, 1, \dots, D-1$.除时空整体庞加莱对称性外,该作用量一般还具备经典下的(1+1)-维共形对称性.该共形对称性是我们利用2维广义坐标变换和局域标度变换把(1+1)-维变为平坦后残留下来的对称性.该残留共形对称性的存在是玻色弦可以成为一个好的理论的前提.从(1+1)-维角度, D 个标量场 X^μ 中的 X^0 的动能项是负的,因此该 X^0 是一个鬼场.如果不能用对称性把该鬼场去掉,对应理论的么正性就有问题.而无穷维的(1+1)-维共形对称性起到的作用就是把该鬼场去掉,使得该理论物理态空间是正定的.这意味着不仅在经典下,还要求在量子层面上该对称性也成立.其实量子意义下(1+1)-维的共形对称性的存在意味着在量子意义下可以把(1+1)-维两维面设为平坦.这两者是密切关联的.经典下的对称性在量子下没有,我们说该对称性有反常.还有一个事实:如果一个对称性有量子反常,当在经典下利用该对称性选定了规范,这种量子反常一定会表现为残留下对称性的反常.通过研究(1+1)-维共形场论可知,只有当 $D = 26$ 时,对应的共形场论在量子意义下才是自洽的(通过引进所谓的 bc -鬼共形场论,使得物质

场 X^μ 加 bc -鬼这样的共形场论没有共形反常). 因此, 没有其他特别考虑(如加背景荷等), 玻色弦的量子自洽性要求时空维度为26, 即额外维必须出现.

3.2 超弦理论

玻色闭弦具有一个让理论物理学家激动的性质, 即该理论中含有一个零质量无迹对称张量的量子态(4维下对应自旋为2的态), 这与爱因斯坦的引力子吻合. 对该态的自相互作用的研究表明, 玻色弦的低能有效理论描述的是26维的爱因斯坦引力与一个零质量的标量和零质量的2阶反对称张量耦合. 因此爱因斯坦理论可以通过“基本物质形态是弦”这个假定推导出来. 这个结果无疑是非常有启发性的. 然而玻色弦不是一个成功的理论, 其有两大缺陷: 该理论的真空态是不稳定的标量快子态; 该理论不存在时空的费米子, 因而不可能是一个包含时空动力学的基础理论. 这两大缺陷可以通过把玻色弦超对称化而同时获得解决^[6]. 这里提及一下, 西方对超对称性的发现也是基于对(1+1)-维的玻色弦和费米弦的研究.

将玻色弦超对称化主要有两大方法. 第一类方法是引进世界面费米子 ψ^μ (与时空坐标场 X^μ 一一对应), 从而构造二维超对称共形场论. 和玻色弦一样, 经典的超共形对称性也存在量子反常. 然而在有10对(X^μ, ψ^ν)的情况下, 量子反常神奇消失, 从而给出10维时空. 通过对该理论的质谱分析, 发现该理论的快子态可以通过一个所谓的GSO-投影自洽地去除, 从而给出一个自洽的量子体系. 零质量谱中包含引力子、超引力微子、一个标量场、一个两指标的反对称张量以及一些称为R-R矢量或反对称的张量场等描写时空性质的量子态. 非常神奇的是, 这些量子态构成时空超引力多重态. 尤其特殊的是, 这些质量为零的量子态, 与10维超引力的场一一对应起来. 事实上, 进一步研究表明, 10维超弦理论的低能有效理论, 刚好对应于10维的某个超引力. 虽然有这种关系, 超弦理论的低能有效理论是在微扰(耦合常数很小)和低能下的结果, 而超引力理论是完全基于超对称性下的结果, 与弦耦合常数无关, 因而是非微扰的. 由此可见, 两者之间还是有重要差别的.

以上超弦理论的构造, 是通过先把二维共形场论超对称化, 但时空超对称是不明显的. 弦理论的世界面超对称加上上述GSO-投影可以给出时空超

对称性(GSO-投影是超弦单圈配分函数具有模不变性的结果), 这是一个相当神奇的物理自洽性的要求. 另一种构造超弦理论的方法则相反: 在10个玻色坐标 X^μ 的基础上, 直接引进2个10维Majorana-Weyl旋量 Θ^a ($a = 1, 2$), 其中每一个具有16个实分量. 以此将玻色弦的Polyakov作用量推广到有显含时空超对称性的Green-Schwarz作用量. 这个理论的优点是时空超对称是明显的, 且在所谓的光锥规范下与上述世界叶超对称下的超弦理论(加上GSO-投影)物理上等价, 从而证明了后者也具有时空超对称. 这里32个离壳费米自由度给出16个在壳自由度, 超出8个在壳物理玻色自由 X^i ($i = 1, 2, \dots, 8$)的一倍. 为解决这一矛盾, Green-Schwarz超弦表述需要一种新的费米局域对称性, 称为 κ -对称性, 其作用就是把上述8个非物理的在壳自由度去掉.

如上所说, 以上超弦的两种构造, 其结果是等价的, 最后获得的是10维时空的超弦理论, 而相应的低能有效理论是10维超引力. 这样的在微扰意义上量子自洽的超弦理论不是唯一的, 事实上存在5个超弦理论. 根据他们的性质, 分别被命名为(1) I; (2) IIA; (3) IIB; (4) HO; (5) HE. 其性质如表1所示.

虽然存在5个微扰意义上自洽的超弦理论令人困惑, 但最急迫的还是研究这些超弦理论能否给出现实世界的物理. 这就需要研究超弦理论的时空紧致化. 因4维时空下电磁、弱、强3种相互作用的统一需要 $N=1$ 超对称. 因此要从弦理论得到4维时空下粒子物理标准模型, 需要保持一个4维时空下的超对称. 研究表明, 能保证这一点的紧致化选择是考虑6维Calabi-Yau作为内部空间. 这项研究取得了一定的成功, 几乎得到了粒子物理标准模型, 但同时还有一些超出粒子物理标准模型的轻自由度存在, 后者无法在微扰超弦理论的框架下得以解释. 这一问题以及微扰弦理论的不唯一促使人们开始了对弦理论非微扰特性的探讨.

在20世纪80年代末90年代初, 部分超弦学者对超弦本身的性质, 特别是其非微扰特性更感兴趣. 现有的微扰弦表述本身在这方面没有太多的用处, 但其低能有效理论即超引力理论在这方面有一定的用武之地. 前面提及超引力理论本身其实是非微扰的, 其存在与弦耦合常数没有关联. 这为研究弦理论的非微扰特性提供了一个窗口. 一般来说, 研究一个物理理论的非微

表 1 5种微扰超弦理论

Table 1 Five perturbative superstring theories

类型	超对称	手征费米子	开/闭弦	规范场
I	$\mathcal{N} = (1, 0)$	有	开/闭	$SO(32)$
IIA	$\mathcal{N} = (1, 1)$	无	闭	$U(1)$
IIB	$\mathcal{N} = (2, 0)$	有	闭	无
HO	$\mathcal{N} = (1, 0)$	有	闭	$SO(32)$
HE	$\mathcal{N} = (1, 0)$	有	闭	$E_8 \times E_8$

扰特性都特别困难, 没有系统的方法, 最简单的就是研究非微扰谱. 对弦理论也是如此. 通过对超引力的研究发现, 超弦除了弦这种延展体的存在, 还存在非微扰的点粒子和很多高维延展体^[7]. 这些延展体, 目前称为膜, 都保持一半时空超对称, 因此与基本弦一样也是稳定的. 需要特别指出的是, 尽管这些膜是从超引力发现的, 它们的1/2 BPS(Bogomol'ny-Prasad-Sommereld)特性保证了它们是非微扰弦理论的态. 另外, 这些1/2 BPS膜的发现完全改变了人们过去持有的观点: 弦理论与其他膜无关的偏见. 事实上这些膜的动力学至少与基本弦一样重要, 特别在弦耦合常数比较大时, 它们动力学比基本弦还重要. 这些膜分为两类: NSNS(Neveu-Schwarz Neveu-Schwarz)-膜与D-膜或Dp-膜(这里p代表膜的空间维度). NSNS-膜包括基本弦和所谓的NSNS-5膜, 后者的动力学具有固有非微扰的特性, 很难研究. 而Dp-膜, 尽管也是非微扰的, 但具有一个重要特性, 其动力学可以用一个满足一定边界条件的开弦表述^[8]. 特别当弦耦合常数较小时, 就可以用这种开弦的微扰理论来研究Dp-膜的动力学. 这可能是迄今唯一知道的非微扰物理系统, 其动力学可以用一个微扰理论来刻画. 也正是如此, Dp-膜对后期弦理论发展具有重要的影响. Dp-膜是10维时空中的一个(p+1)-维的超平面. 物质与它们相互作用的规范场被局限在这个平面中. 由于引力子传播在时空主体上, 在Dp-膜上的物质间没有直接的引力相互作用. 这个由超弦理论预言的时空图象, 对超弦的后期发展有深刻的影响.

虽然目前还没有一个非微扰超弦理论的完整理论框架, 但通过对这些非微扰膜及低能有效理论非微扰特性的研究, 结合相关已知的对偶性, 一个神奇的图像逐渐显露出来^[9]. 也就是这5个超弦理论不是独立或互不关联的, 而是可以通过理论间的对偶关系联系起来. 例如, IIA和IIB理论可以通过T-对偶等价起来. 如果10维时空有一维是有限的, 其尺度为R, 那

么IIA超弦理论在R空间等价于IIB超弦理论在 α'/R 空间(这里 α' 的量纲为长度的平方, 其与弦张力的关系为 $T = 1/(2\pi\alpha')$). 又如, I弦和HO弦有S-对偶, 也就是强耦合的I弦等价于弱耦合HO弦, 反之亦然. 这些理论关系让人们意识到微扰意义下的5个超弦理论也许是一个理论在不同极限下的体现. Witten^[10]在1995年把这个更加基础的未知理论命名为M-理论. Witten提出的M-理论的一个重要突破是把10维超弦理论与神秘而似乎无关的11维M-理论结合起来, 从而没有“浪费”任何超对称理论.

3.3 M-理论

M-理论的一个重要组成部分是11维的超引力. 11维超引力是法国高师物理学家在1978年构造的^[11]. 正如开始提到的, 4维最大超引力意味着一个更加简单的11维超引力的存在. 128个费米子自由度可以归结于一个11维Majorana旋量矢量(Rarita-Schwinger场)的超引力微子 Ψ_μ . 而11维度规 $g_{\mu\nu}$ 和3阶反对称张量 $A_{\mu\nu\rho}$ 刚好给出 $44 + 84 = 128$ 个玻色自由度. 11维超引力的玻色部分的拉氏量非常简单:

$$\mathcal{L}_{11} = \sqrt{-g} \left(R - \frac{1}{48} F^2 \right) + \frac{1}{6} F \wedge F \wedge A. \quad (2)$$

类似10维超引力和Green-Schwarz超弦作用量的关系, 在11维也存在一个M2超膜作用量^[12]. 这个作用量把超弦概念进一步推广, 认为物质的基础形态是二维膜. 但是由于这个膜理论是固有非微扰的, 它没有通常的微扰理论, 研究起来也极为困难. 虽然人们早就知道, 通过维数约化, 11维超引力可以成为10维IIA超引力, 也知道M2超膜作用量可以约化到Green-Schwarz超弦作用量^[13], 但是这些11维理论在超弦理论体系中的地位, 在95年前一直没有获得真正的理解.

随着人们对S-对偶的了解, 自然会问, IIA或IIB超弦在强耦合时对应的是什么理论? 自然的猜测是某个弱耦合理论. 在1995年, Witten^[10]仔细研究了弦耦合常数与11维到10维紧致维度半径的关系, 发现该耦合常数正比于该半径, 结合其他的物理考虑, 发现IIA超弦的强耦合理论应是一个11维M-理论, 而其低能有效理论就是11维超引力. 在微扰耦合常数趋于零的情况下, 第11维尺度趋于零, 从而表现出10维时空. 在强耦合情况下, 第11维尺度增大, 最后形成11维时空. 当11维

不是圆圈(S^1), 而是线段(S^1/Z_2)时, M-理论就约化成了10维的HE超弦, 两个端点各自生成 E_8 规范场来抵消端点上的引力反常, 从而给出 $E_8 \times E_8$ 规范场.

由于对超弦非微扰区域的进一步认识, 也对微扰超弦中得不到完整粒子物理标准模型的困难得到了一定的理解. 然而, 因缺乏系统地探讨非微扰特性的手段, 目前对该理论的非微扰特性认识也还有限, 其完整理论框架还有待于建立. 这种情况下, 希望直接从超弦或M-理论给出与观察的联系是极其困难的, 通常是通过构造弦/M-理论模型的方式与粒子物理标准模型联系起来(见下节的讨论). 另外, 还有一些问题, 如如何解释通常的粒子物理标准模型与量子引力能标间的巨大区别(称为规范层次问题, 后面将详细介绍). 这也是任何一个量子引力理论都无法回避的观测事实.

4 超弦模型构造

超弦理论作为目前唯一可能能够描述量子引力的理论, 如何从该理论中构造标准模型或超对称标准模型或超对称大统一模型是一个非常重要的课题. 超弦模型构造的主要要点如下: (1) 观测到的时空维度是4维, 故超弦理论中的额外6维空间维度必须非常小, 用数学语言描述, 即额外6维空间维度需要紧致化; (2) 标准模型中的费米子是手征费米子, 故紧致化后需要得到4维 $N=1$ 超对称理论. 1985年前后, 超弦模型构造主要局限于杂交弦 $E_8 \times E_8$. 原因非常简单, 具体如下: E_8 能自然破缺到大统一模型和标准模型规范对称性, 并且对称性破缺链具体如下:

$$E_8 \rightarrow E_6 \rightarrow SO(5) \rightarrow SU(5) \rightarrow SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y. \quad (3)$$

杂交弦 $E_8 \times E_8$ 的模型主要有3类: Calabi-Yau流形紧致化、Orbifold紧致化、4维费米弦模型. 1995年以后, 随着D-膜的发现, 并且由于D-膜上可具有规范对称性, 也能构造Type II超弦D-膜模型. 超弦D-膜模型主要也有3类: 相交D-膜模型、在奇点的D-膜模型、Gepner模型. 2008年以后, 开始构造F-理论模型. F-理论可以看成是具有变化的Axion-Dilaton场的强耦合的Type IIB超弦理论, 尽管形式上可以看成是12维理论. 研究较多并且比较成功的超弦模型如下: (1) 杂交弦 $E_8 \times E_8$ (包

括M-理论on S^1/Z_2)的Calabi-Yau流形和Orbifold 紧致化, 主要模型是 $SU(5)$, $SO(10)$ 和 E_6 模型. (2) 4维费米弦模型, 主要模型是类似于标准模型的模型, 其规范群是 $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y \times U(1)^n$; Pati-Salam模型, 其规范群是 $SU(4)_C \times SU(2)_L \times SU(2)_R$ 和Flipped $SU(5)$ 模型, 其规范群是 $SU(5) \times U(1)_X$. 原因是这3类模型无需引入高维Higgs粒子来将各自的规范对称性破缺到标准模型规范对称性. (3) Type II相交D-膜模型, 主要模型是Pati-Salam模型, 原因是Yukawa耦合项是 $U(4)_C \times U(2)_L \times U(2)_R$ 不变的. (4) F-理论模型, 主要模型是 $SU(5)$ 模型, Flipped $SU(5)$ 模型和 $SU(3)_C \times SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_{B-L}$ 模型等. 另外还有M-理论on G_2 流形等. 超弦模型的成功之处是能够自然实现大一规范对称性破缺, 并解决4维大统一模型中的二、三重态分裂问题、质子衰变问题和费米子质量问题等.

5 大额外维理论

除一些D-膜情况外, 为得到我们生活的4维世界, 通常弦/M-理论中的额外维需要被紧致到一个小的尺度. 对于一些唯象方面的研究, 近期也有一些大额外维的尝试. 例如, 在KK-理论研究中, 人们发现在通常紧致下该理论在量子场论框架下无法得到4维手征费米子. 与此同时, 人们开始将量子场论和额外维理论相结合, 提出新的额外维理论, 解决物理学中的一些经典难题. 例如, 1982年Akama^[14]在额外维理论中引入Higgs作用量, 1983年Rubakov和Shaposhnikov^[15]提出畴壁模型, 1998年Arkani-Hamed, Dimopoulos和Dvali (ADD)^[16]为了解决规范等级问题提出了一种大尺度紧致额外维模型, 1999年Randall和Sundrum^[17]在考虑了膜对时空的影响后提出卷曲的额外维模型.

5.1 早期无限大额外维理论

1982年, Akama^[14]通过考虑6维时空中希格斯场的作用量, 构造Nielsen-Olesen涡旋实现了物质场的局域化, 同时预言了在高能情况下, 粒子存在逃逸到额外维的可能性. 1983年, Rubakov和Shaposhnikov^[15]假定整个5维时空是平直的, 通过背景标量场的分布, 得到了实现物质场局域化的畴壁模型. 该畴壁模型由5维平直时空中具有 ϕ^4 相互作用的标量场来实现. 5维时

空中的物质场在此畴壁背景下感受到一个有效势, 低能粒子被束缚在畴壁附近, 当能量增加到一定程度, 如两个碰撞粒子的质心能超过该理论的能标时, 它们碰撞产生的粒子有可能逃离畴壁的束缚, 进入额外维空间. 在该理论中, 通过考虑费米子与背景标量场之间的Yukawa耦合, 进行KK约化后可得到有效的4维手征费米子. 由于该无限大额外维理论没有考虑引力的影响, 与牛顿反平方律不一致, 后来没有得到更多的关注.

5.2 大额外维理论

不同于KK-理论和弦理论中小到Planck尺度的额外维和畴壁模型中大到无穷的额外维, 20世纪90年代物理学家开始思考大尺度紧致额外维的可能性. 在1990年, Antoniadis^[18]发现杂化超弦理论中轨形(orbifold)紧致化参数介于低能和普朗克能量之间, 于是提出至少存在一个TeV尺度的紧致化半径. 这种额外维理论可用来解释超对称的自发破缺. 1995年, 弦理论中提出了D-膜的概念. 在弦理论中, 标准模型中的场用开弦来描述, 它们局域化在更低维度的D-膜上, 而引力用闭弦来描述, 它可以在整个时空中传播.

在粒子物理的标准模型建立后, 物理学家意识到4种基本相互作用中存在规范等级问题, 即引力远比其他3种力微弱. 在粒子物理中, 规范等级问题可以表述为Higgs玻色子的质量远小于Planck质量, 即Higgs粒子的物理质量和来自量子场论的圈图修正项相差17个量级, 从而需要精细调节. 显然, 规范等级问题在标准模型的框架下是无法解决的, 需要引入新的机制, 其中, 超对称就是一种很好的机制.

1998年, Arkani-Hamed, Dimopoulos和Dvali^[16]为了解决规范等级问题提出了一种 $(4+d)$ -维的大尺度紧致额外维模型, 称为大额外维模型或ADD模型. 在这一模型中, 标准模型中的所有粒子都束缚在一张4维膜上, 而引力子则在整体 $(4+d)$ -维时空中传播. ADD理论可以看成是拓展到 $(4+d)$ -维时空的广义相对论, 其基本能标不再是普朗克能标 M_{Pl} , 而是高维时空中的引力能标 M_* , M_{Pl} 只是4维有效能标. 在这个理论中, 每一个额外维都卷曲成圆环. 为简单起见, 假设每个额外维度都具有相同的半径, 从而两个能标之间的关系为 $M_{Pl}^2 = V_n M_*^{d+2}$, 其中 $V_n = (2\pi r_c)^d$ 是 d 维紧致空间的体积. 这样, 即使4维有效能标 M_{Pl} 的数量级很大,

仍然可以通过调节额外维的半径将基本能标 M_* 的数量级压下来. 因此, 为了解决规范等级问题, 该理论假设基本能标 M_* 和电弱能标 M_{EW} 在同一数量级, 即 $M_* \sim M_{EW} \sim \text{TeV}$.

在高维时空中, 由高斯定理知, 距离质点 r 处的引力势为

$$V(r) \propto \begin{cases} \frac{1}{r^{1+d}} & r \ll r_c, \\ \frac{1}{r} & r \gg r_c. \end{cases} \quad (4)$$

目前实验结果表明, 在59 μm 时牛顿平方反比定律仍然成立, 因此额外维半径应该小于这个尺度. 假设在ADD理论中基本能标为一个TeV, 则对于两个额外维度的情况, 半径大约为毫米数量级, 仍然大于当前扭秤实验所达到的最小尺度. 只有当额外维数继续增加, ADD模型才可能有效.

尽管ADD模型中额外维存在的假设消除了电弱能标和引力的普朗克能标之间的规范等级问题, 但是当额外维数目比较小的时候高维基本能标 M_* 和额外维尺度对应能标之间仍然存在一个极大的比值. 因此ADD模型并没有真正解决规范等级问题, 而是将这一问题转移到ADD模型中基本能标TeV和额外维尺度对应能标之间的新的等级问题.

此外, ADD模型忽略了膜对时空的反作用, 即假定膜上的能量密度不影响时空曲率, 然而这只是一种近似, 事实上这种反作用是存在的. 1999年, Randall和Sundrum^[17]在考虑了膜对时空的反作用后, 提出卷曲的额外维模型(RS1模型), 解决了规范等级问题, 并且没有导致新的等级问题.

5.3 卷曲额外维理论

在RS1模型中, 额外维是具有 S^1/Z_2 对称性的半径为 r_c 的紧致圆环. 该模型描述了一个5维AdS时空的片段, 其中有两张张力相反的膜, 可见膜(又称为TeV膜、红外膜或负张力膜)和不可见膜(普朗克膜、紫外膜或正张力膜). 标准模型中的粒子被束缚在可见膜上. RS1中假定基本能标为普朗克能标 $M_{Pl} \sim k \sim 10^{19} \text{ GeV}$, 但是如何得到标准模型中的电弱能标 $M_{EW} \sim \text{TeV}$ 呢? 由于标准模型中的粒子被束缚在可见膜上, 为了得到相应的正则场, 需要对其进行重新标度. 由于沿额外维

的弯曲,导致4维可见膜上的有效物理质量或能标相较于5维的基本量按指数方式衰减.因此,电弱能标与普朗克能标之间的等级问题通过一个指数因子来解决,并且没有导致新的等级问题.

在ADD模型和RS1模型中,额外维体积都是有限的,所以在在大尺度上4维牛顿引力反平方律仍然满足.那么当额外维无限大时有没有可能使得4维引力能够仍然满足反平方定律呢?为了研究这个问题,Randall和Sundrum^[19]将负张力膜移到无穷远,即额外维无穷大,并且所有物质场都束缚在正张力膜上,这种模型通常被称RS2模型.此模型放弃了解释电弱能标和普朗克能标之间的等级问题,但是给出了如何在存在无限大额外维时恢复4维引力的一种有效机制.

在RS2模型中,KK引力子的质量谱是连续的,所以有无穷多个有质量的KK引力子,它们都会对引力势有贡献.对于膜上相距为 r 的两个质点 m_1 和 m_2 ,它们的4维引力势为^[19]

$$V(r) = \frac{G_N m_1 m_2}{r} \left(1 + \frac{1}{r^2 k^2} \right), \quad (5)$$

其中,第一项来自引力零模的贡献,是标准的牛顿势,第二项是所有有质量引力KK模式对引力势的贡献.由

于 k 取普朗克能标,所以当相距 r 远远大于普朗克长度时修正项很小,当前实验难以观测.因此,即使存在无限大的额外维,仍然可以得到有效的4维牛顿引力.

Rubakov的畴壁模型成功地将物质束缚在4维畴壁上,但没有考虑引力.而在RS模型中考虑了引力,但对应的4维膜是没有厚度的,也没有内部结构.后人基于膜有厚度和内部结构的设想,将畴壁模型和弯曲额外维模型相结合提出了厚膜模型.通常厚膜是由5维时空中的背景标量场产生的,且在厚膜模型中物质场分布在整个高维时空中.研究发现,在线性涨落下厚膜解是稳定的,且引力零模可以局域化在膜上,由此证明了无穷大额外维厚膜模型中膜上的4维牛顿引力可以得到恢复.此外,在厚膜模型中物质场分布在整个高维时空中,需要相应的机制使得其零模(用来描述标准模型中的粒子)被局域化在4维厚膜上,从而不与4维观测相矛盾.通过考虑高维时空中的物质场与引力和背景标量场耦合,发现各种物质场的零模感受到一个沿额外维方向的有效势,该有效势使得这些零模束缚在膜上,从而与4维观测相一致.除了能局域在膜上的零模外,还发现准局域化在膜上的KK态,它们是具有有限寿命的KK共振态粒子.

参考文献

- 1 Nordström G. On the possibility of unifying the electromagnetic and the gravitational fields. *Phys Z*, 1914, 15: 504
- 2 Kaluza T. on the problem of unity in physics. *Sitzungsber Preuss Akad Wiss Berlin (Math Phys)*, 1921, 1921: 966
- 3 Klein O. Quantentheorie und fünfdimensionale relativitätstheorie. *Zeitsch Phys A*, 1926, 37: 895
- 4 Salam A, Sezgin E. *Supergravities in Diverse Dimensions: Commentary and Reprints (2 Vol)*. North-Holland: World Scientific, 1989
- 5 Schwarz J H. The early history of string theory and supersymmetry. 2012, arXiv: 1201.0981
- 6 Schwarz J H. The early years of string theory: A personal perspective. 2007, arXiv: 0708.1917
- 7 Duff M J, Khuri R R, Lu J X. String solitons. *Phys Rept*, 1995, 259: 213–326
- 8 Polchinski J. Dirichlet branes and Ramond-Ramond charges. *Phys Rev Lett*, 1995, 75: 4724–4727
- 9 Polchinski J. String duality: A colloquium. *Rev Mod Phys*, 1996, 68: 1245–1258
- 10 Witten E. String theory dynamics in various dimensions. *Nucl Phys B*, 1995, 443: 85–126
- 11 Cremmer E, Julia B, Scherk J. Supergravity theory in eleven-dimensions. *Phys Lett B*, 1978, 76: 409
- 12 Bergshoeff E, Sezgin E, Townsend P K. Supermembranes and eleven-dimensional supergravity. *Phys Lett B*, 189: 75
- 13 Duff M J, Howe P S, Inami T, et al. Superstrings in $D=10$ from Supermembranes in $D=11$. *Phys Lett B*, 1987, 191: 70–74
- 14 Akama K. An early proposal of “Brane World”. *Lect Notes Phys*, 1982, 176: 267
- 15 Rubakov V A, Shaposhnikov M E. Do we live inside a domain wall? *Phys Lett B*, 1983, 125: 136
- 16 Arkani-Hamed N, Dimopoulos S, Dvali G. The hierarchy problem and new dimensions at a millimeter. *Phys Lett B*, 1998, 429: 263
- 17 Randall L, Sundrum R. A large mass hierarchy from a small extra dimension. *Phys Rev Lett* 1999, 83: 3370
- 18 Antoniadis I. A possible new dimension at a few TeV. *Phys Lett B*, 1990, 246: 377
- 19 Randall L, Sundrum R. An alternative to compactification. *Phys Rev Lett*, 1999, 83: 4690



卢建新

中国科学技术大学教授、博士生导师. 1992年于美国Texas A&M大学获理学博士学位, 随后在欧洲核子中心(CERN)、美国Texas A&M大学理论物理中心、密西根大学理论物理中心从事博士后、访问助理教授、**Senior Research Fellow**教学和科研工作. 研究领域为量子引力、弦/M-理论. 在超弦第二次革命中做出了领先性的工作. 2002年度中国科学院“引进国外杰出人才”、2005年度国家杰出青年科学基金获得者、2004年度教育部长江学者特聘教授.

Summary for “额外维存在性的理论探讨”

Exploring the existence of extra dimension(s)

Tianjun Li¹, Yuxiao Liu², Hong Lü³ & Jianxin Lu^{4*}¹ *Institute of Theoretical Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China;*² *Institute of Theoretical Physics, Lanzhou University, Lanzhou 730000, China;*³ *Department of Physics, Tianjin University, Tianjin 300350, China;*⁴ *The Interdisciplinary Center for Theoretical Study, University of Science and Technology of China, Hefei 230026, China*

* Corresponding author, E-mail: jxlu@ustc.edu.cn

Whether there exists extra dimensions is an interesting and fundamental question. In this article, certain aspects of this have been explored theoretically. For this purpose, we first discuss the role of an extra dimension in the early unification of the classical Einstein gravity and electromagnetic interaction, namely the Kaluza-Klein (KK-) theory, and the issues we encounter in carrying this out. We then move to discuss the relationship between supersymmetry and extra dimension(s) and point out that there exist well-defined quantum theories without gravity in six dimensions such as (2, 0) superconformal theory and little string theories, the former is a local field theory but has no Lagrangian description while the latter are non-local non-gravitational string theories. We discuss also the similar issue for supergravities in diverse dimensions and point out that the largest number of supersymmetries with propagating gravity degrees of freedom is $N=8$ in four dimensions and the largest number of spacetime dimensions for supergravity is eleven. We would like to stress that extra dimensions in classical supersymmetric theories such as supergravities in diverse dimensions appear only as an option. When gravity is included, the four-dimensional $N=8$ supergravity appears to be the only one so far which has the potential to be a good quantum gravity theory in the usual field theory sense. All the rest are sure to be UV incomplete ones whose UV completions require the existence of an unified theory which is most likely to be the string/M-theory. In this sense, a quantum consistent theory containing gravity needs extra dimensions in general. Good examples include both bosonic strings and superstrings. For the former, we need the spacetime dimensions to be twenty six while for the latter we need spacetime dimensions to be ten such that the corresponding theories are quantum consistent at least perturbatively. So for these quantum consistent theories containing gravity, extra dimensions are no longer optional but must be there. In this paper, we give also an elementary introduction to both bosonic string and superstring theories. We mention that in addition to the usual one dimensional strings, there exist also non-perturbative p -branes with $p = 0, 1, \dots, 9$ in non-perturbative superstring theories. These p -branes are the so-called 1/2 BPS extended objects, preserving one half of the spacetime supersymmetries. They play the key role in establishing various dualities such as S-duality and U-duality and help to explain how the existence of various superstring theories leads to that of an even bigger unified theory called M-theory, which unifies 5 superstrings in ten dimensions and the 11-dimensional supergravity, with its largest spacetime dimension to be eleven. To bring the string/M-theory to our four-dimensional real world, we usually need to compactify six or seven extra dimensions, which should be small enough to avoid experimental constraints. Phenomenologically, people also explore the existence of large extra dimensions, which can be used to solve gauge hierarchy problem or gravity localization, etc. We give some discussions on these topics as well.

extra dimension(s), Kaluza-Klein (KK)-theory, supersymmetry and supergravity, string/M-theory, large extra-dimension(s)

doi: 10.1360/N972017-01370