中国科学: 数学　2020 年　第 50 卷　第 8 期: 1023～1044
SCIENTIA SINICA Mathematica
创刊 70 周年特邀综述

《中国科学》杂志社
SCIENCE CHINA PRESS

非线性 Schrödinger 方程的正规化解

李厚旺, 杨佐, 邹文明*

清华大学数学科学系, 北京 100084
E-mail: li-hw17@mails.tsinghua.edu.cn, yz16@mails.tsinghua.edu.cn, zou-wm@mail.tsinghua.edu.cn

收稿日期: 2020-04-17; 接受日期: 2020-05-29; 网络出版日期: 2020-07-15; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 11771234 和 11926323) 资助项目

摘要　由于非线性 Schrödinger 方程在众多物理问题中有着十分重要的应用, 其正规化解问题在近年来逐渐引起大批学者的关注:

$$\begin{cases} -\Delta u + \lambda u = g(u), & x \in \mathbb{R}^N, \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N), & \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 = c, \end{cases}$$

其中正规化条件 $c \in \mathbb{R}^+$ 是给定的, 而 Lagrange 乘子 λ 是未知的. 本文首先介绍单个方程在不同条件下正规化解的存在性、多解性及其他一些性质, 然后介绍非线性 Schrödinger 方程组正规化解的相关新结果, 并介绍一些与正规化解有关的待解决问题.

关键词　Schrödinger 方程　正规化解　基态解

MSC (2010) 主题分类　35J20, 35J60, 35Q55

1　引言

Schrödinger 方程是量子力学中最重要的方程. 自该方程提出以来, 对其解的存在性和各种性质的研究, 一直是数学和物理工作者关注的焦点之一. 由于在 Bose-Einstein 凝聚等问题中有着重要的应用 (参见文献 [1]), 在过去的几十年里, 许多数学家对下面这个非线性 Schrödinger 方程做过大量的研究:

$$\mathrm{i}\Psi_t - \Delta_x \Psi = f(|\Psi|)\Psi, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad N \geqslant 1, \tag{1.1}$$

其中 $\Psi = \Psi(x,t)$ 代表波函数, 而 $|\Psi(x,t)|^2$ 代表单个粒子在时间 t 出现在空间位置 x 的概率密度, 因此很自然地会有正规化条件 (normalization)

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\Psi(x,t)|^2 dx = 1.$$

英文引用格式: Li H W, Yang Z, Zou W M. Normalized solutions for nonlinear Schrödinger equations (in Chinese). Sci Sin Math, 2020, 50: 1023–1044, doi: 10.1360/SSM-2020-0120

© 2020《中国科学》杂志社　

这是对于单个粒子的. 对于多体系统, 波函数变成 $\psi(x,t)=\sqrt{n}\Psi(x,t)$, 于是相应的正规化条件由整个系统的粒子个数 n 决定, 即

$$\int_{\mathbb{R}^N}|\psi(x,t)|^2dx=n.$$

然而在数学上, 假设正规化条件为任意正实数 $c\in\mathbb{R}^+$. 更多的细节可参见文献 [1] 及相应的引用文献. 需要指出的是, 有的文献中称正规化条件为预先给定的质量 (mass), 或预先给定的 L^2- 模, 本文统称为正规化条件.

在方程 (1.1) 的研究中, 形如 $\Psi(t,x)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda t}u(x)$ 的解称为驻波解. 将驻波解的表达式代入方程 (1.1), 可以得到

$$-\Delta u+\lambda u=g(u), \tag{1.2}$$

其中 $g(u)=f(|u|)u$. 一个典型的例子就是

$$g(s)=\sum_{i=1}^{k}|s|^{p_i-2}s,\quad 2<p_1<\cdots<p_k<2^*, \tag{1.3}$$

其中 2^* 是 Sobolev 临界指数, 当 $N\geqslant 3$ 时; $2^*=\frac{2N}{N-2}$, 而当 $N=1,2$ 时, $2^*=\infty$.

关于方程 (1.2) 的研究已经有很多, 主要一类得到解的方法是在适当函数空间内研究如下泛函的临界点:

$$J(u)=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2+\lambda|u|^2-\int_{\mathbb{R}^N}G(u),$$

其中 $G(s)=\int_0^s g(\tau)d\tau$. 这时 λ 视作任意给定的量. 但是, 在带有正规化条件后, 为了求解

$$\begin{cases}-\Delta u+\lambda u=g(u),\\ \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N}|u|^2=c,\end{cases} \tag{1.4}$$

则需要将泛函

$$I(u)=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2-\int_{\mathbb{R}^N}G(u)$$

限制在 L^2 球

$$S(c)=\left\{u\in H^1(\mathbb{R}^N):\int_{\mathbb{R}^N}|u|^2=c\right\}$$

上, 然后研究泛函 I 在限制流形 $S(c)$ 上的临界点. 那么这时 $\lambda=\lambda_c$ 就是未知的, 将其视作 Lagrange 乘子, 得到的解 (λ_c,u_c) 也就称为方程 (1.4) 的一组正规化解. 从物理的角度来说, 研究正规化解更有意义.

此外, 在所有正规化解中, 本文更关心基态解的存在性及性质. 所谓基态解, 是指所有具有相同 L^2 范数的解中使得泛函能量最小的那个解, 即称 $\tilde{u}$ 为方程 (1.4) 的基态解, 如果

$$dI\,|_{S(c)}(\tilde{u})=0\quad 且\quad I(\tilde{u})=\inf\{I(u):dI\,|_{S(c)}(u)=0,u\in S(c)\}.$$

1.1 单个方程的情形

先看最简单的情形, 即方程 (1.4) 中 $g(s)=|s|^{p-2}s$, $2<p<2^*$. 此时 g 是齐次的, 可以直接通过放缩的方法 (scaling method) 得到正规化解. 事实上, 由文献 [2] 可知, 在 $2<p<2^*$ 时, 方程

$$-\Delta u+u=u^{p-1},\quad u>0,\quad x\in\mathbb{R}^N \tag{1.5}$$

有唯一正解 $\omega_{N,p}$. 设 $u(x)=k\omega_{N,p}(lx)$, $k,l\in\mathbb{R}^+$, 代入 (1.4) 得到

$$\begin{cases}-l^2k\Delta\omega_{N,p}(lx)+\lambda k\omega_{N,p}(lx)=k^{p-1}\omega_{N,p}^{p-1}(lx),\\ \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N}k^2\omega_{N,p}^2(lx)dx=c.\end{cases}$$

要使上式成立, 只需 k 和 l 满足

$$\begin{cases}l^2k=\lambda k=k^{p-1},\\ \dfrac{k^2}{l^N}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N}\omega_{N,p}^2(x)dx=c.\end{cases}$$

这时出现了一个特殊的指数

$$\bar{p}:=2+\frac{4}{N},$$

称其为 L^2- 临界指数. 当 $p\neq\bar{p}$ 时, 取定适当的 k、l 和 λ, 就可由 $\omega_{N,p}$ 通过放缩得到 (1.4) 的唯一正规化解. 而当 $p=\bar{p}$ 时, 当且仅当正规化条件中 $c=c_0:=\int_{\mathbb{R}^N}\omega_{N,p}^2$, 方程 (1.4) 才有解, 且是无穷多解.

当 g 非齐次时, 上述放缩方法就失效了. 下面分 3 种情形讨论.

1.1.1 L^2- 次临界增长

第一种情形是 g 满足 L^2- 次临界增长, 例如, (1.3) 中 $p_i\in(2,\bar{p})$. 此时 $I|_{S(c)}$ 是下有界的 (参见引理 2.1),

$$m(c):=\inf_{u\in S(c)}I(u)>-\infty.$$

关于此问题, 最早的结果是 Stuart [3–5] 用分歧的方法得到了解的存在性. 后来, Cazenave 和 Lions [6] 和 Shibata [7] 分别用极小化方法 (minimizing method) 也得到了解的存在性. 不过 Cazenave 和 Lions 考虑的是简单情形

$$g(s)=|s|^{p-2}s,\quad 2<p<\bar{p},$$

而 Shibata 考虑了更一般的非线性项, 即 g 满足如下条件:

(g1) $g(s)\in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $g(0)=0$;

(g2) $\lim_{s\to0}\frac{g(s)}{|s|}=0$;

(g3) $\lim_{|s|\to\infty}\frac{g(s)}{|s|^{1+\frac{4}{N}}}=0$;

(g4) 存在 $s_0>0$ 使得 $G(s_0)>0$.

Shibata 证明了在上述条件下, 存在 $c_0\geqslant0$, 当 $c>c_0$ 时, $m(c)$ 可达, 即方程 (1.4) 有解. 因为 $m(c)$ 是全局极小, 所以, 该解自然是基态解. 此外, 若 g 还满足

(g5) $g(-s)=-g(s)$, $s\in\mathbb{R}$,

Hirata 和 Tanaka [8] 利用对称山路引理证明了, 对任意 $k\in\mathbb{N}$, 均存在 $c_k\geqslant0$, 使得当 $c>c_k$ 时, 方程 (1.4) 至少有 k 组解.

1.1.2 L^2- 超临界增长

第二种情形是 g 满足 L^2- 超临界增长, 例如, (1.3) 中 $p_i \in (\bar{p}, 2^*)$. 此时 $I|_{S(c)}$ 不再是下有界 (参见引理 2.3), 故无法再直接使用极小化方法, 而是期望通过极小极大的方法 (mini-max method) 来解决. 但这时又会遇到新的困难. 一是因为此时 λ 是未知的, 所以无法构建相应的 Nehari 流形. 二是无法轻松得到 PS 序列的有界性, 需要将 Lagrange 乘子 λ 做范围估计. 再者就是验证 PS (Palais-Smale) 序列的紧性有困难, 因为嵌入 $H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^N)$ 不是紧的. 这些困难也正是正规化条件会给问题求解带来的第二个不同. 第一个不同是前文所述的, 会出现一个新的临界指数 $\bar{p}$.

Jeanjean [9] 考虑了 g 满足 L^2- 超临界增长的情形, 假设 g 满足条件 (g1) 以及

(g6) 存在常数 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, 且 $2 + \frac{4}{N} < \alpha < \beta < 2^*$, 使得当 $s \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ 时,

$$0 < \alpha G(s) \leqslant g(s)s \leqslant \beta G(s).$$

在 (g1) 和 (g6) 的条件下1), Jeanjean 证明了泛函 I 在 $S(c)$ 上具有山路结构. 接着, 引入一个辅助泛函:

$$(s \star u)(x) := \mathrm{e}^{\frac{Ns}{2}} u(\mathrm{e}^s x),$$
$$\tilde{I}(u, s) := I(s \star u) = \frac{\mathrm{e}^{2s}}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^2 dx - \frac{1}{\mathrm{e}^{sN}} \int_{\mathbb{R}^N} G(\mathrm{e}^{\frac{sN}{2}} u(x)) dx.$$

可以看出 $\tilde{I}(u, s)$ 和 $I(u)$ 有着相同的山路结构, 且

$$P(u) := \partial_s \tilde{I}(u, s)|_{s=0} = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 - N \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{2} g(u)u - G(u) \tag{1.6}$$

恰好对应着方程 (1.4) 的 Pohozaev 等式. Jeanjean 利用 Ekeland 变分原理构造了序列 $\{(u_j, s_j)\}_{j=1}^{\infty}$ 满足

$$s_j \to 0, \quad \partial_s \tilde{I}(u_j, s_j) \to 0, \quad \partial_u \tilde{I}(u_j, s_j) \to 0, \quad \tilde{I}(u_j, s_j) \to \gamma(c),$$

然后由序列 $\{(u_j, s_j)\}_{j=1}^{\infty}$ 得到了满足额外条件的 PS 序列. 正是这个额外的条件, 保证了 PS 序列的有界性, 从而克服了前文所述的困难. 因为是处理正规化解问题在泛函下无界情形下的第一个方法, Jeanjean 的方法也就成了处理这类问题常用的方法, 被后来的研究者们模仿并发展. 例如, 虽然泛函 I 在 $S(c)$ 上是下无界的, 但 Bartsch 和 Soave [10] 将泛函 I 限定在子流形 $V(c)$ 上考虑,

$$V(c) = \{u \in S(c) : P(u) = 0\}. \tag{1.7}$$

他们证明了泛函 I 在 $V(c)$ 上是下有界的, 且是一个正下界,

$$\widetilde{m}(c) := \inf_{u \in V(c)} I(u) > c_0.$$

在此基础上, 再结合如下条件:

(g7) 函数 $\widetilde{G}(s) := \frac{1}{2} g(s)s - G(s)$ 是 C^1 的, 并且满足

$$\widetilde{G}'(s)s > \left(2 + \frac{4}{N}\right) \widetilde{G}(s), \quad s \in \mathbb{R}\backslash\{0\},$$

1) 虽然文献 [9] 中没有假设 $g(0) = 0$ 这一条件, 但在实际证明过程中用到了.

Bartsch 和 Soave 还证明了在 $V(c)$ 上, 泛函 I 是满足 PS 条件的, 而且泛函在 $V(c)$ 上的临界点就是泛函在 $S(c)$ 上的临界点, 即 $V(c)$ 是一个自然限定, 因此, 方程 (1.4) 有解, 且是无穷多解. 另外, 既然已经证明了泛函 I 在 $V(c)$ 上是下有界的, 那么就可以在 $V(c)$ 上通过极小化的方法得到泛函 I 的临界点. 这一想法的关键在于证明极小化序列的极限仍然属于 $V(c)$, 参见文献 [11]. 除此之外, Ikoma 和 Tanaka[12] 证明了一个带约束的形变引理, 然后通过验证泛函满足所谓的 $(\mathrm{PSP})_b$ ($(\text{Palais-Smale-Pohozaev})_b$) 条件, 也证明了泛函临界点可达. 这些结果都将在第 2 节中做进一步的阐述. 需要注意的是, Jeanjean 类型的方法有一个局限性, 就是要求泛函有某种放缩性质.

g 满足 L^2- 超临界增长时, 还有一个结果值得注意. Bieganowski 和 Mederski[13] 考虑了 g 满足如下条件时方程 (1.4) 的正规化解:

(g8) $g(s)$ 和 $h(s) := \widetilde{G}'(s)$ 是连续的, 并且存在 $C > 0$ 使得

$$|h(s)| \leqslant C(|s| + |s|^{2^*-1}), \quad s \in \mathbb{R};$$

(g9) $\eta := \limsup_{|s|\to 0} G(s)/|s|^{2+\frac{4}{N}} < \infty$;

(g10) $\lim_{|s|\to\infty} \frac{G(s)}{|s|^{\bar{p}}} = \infty$;

(g11) $\lim_{|s|\to\infty} \frac{G(s)}{|s|^{2^*}} = 0$;

(g12) $(2 + \frac{4}{N})\widetilde{G}(s) \preceq h(s)s$, $s \in \mathbb{R}$;

(g13) $\frac{4}{N}G(s) \preceq \widetilde{G}(s) \leqslant (2^* - 2)G(s)$, $s \in \mathbb{R}$.

这里称函数 $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 满足 $f_1(s) \preceq f_2(s)$ 是指, 对所有的 $s \in \mathbb{R}$ 均有 $f_1(s) \leqslant f_2(s)$, 且对任意的 $\gamma > 0$, 存在 $|s| < \gamma$ 使得 $f_1(s) < f_2(s)$. 事实上, (g8)–(g13) 与 (g1)–(g4) 对应, 分别为 L^2- 超临界和 L^2- 次临界情形下 Berestycki-Lions 类型的条件, 而且从某种意义上来说, 这是几乎最优的条件[14].

以上均为关于正规化解存在性的结果. 当 g 满足 L^2- 超临界增长时, 方程 (1.4) 也有多解性的结果. Bartsch 和 de Valeriola[15] 运用喷泉定理证明了在 (g1)、(g5) 和 (g6) 的条件下, 方程 (1.4) 有无穷多组径向对称的正规化解. 文献 [12] 也给出了多解性的证明.

1.1.3 混合情形

第三种情形, 混合情形, 即 g 既有 L^2- 次临界增长的项, 又有 L^2- 超临界增长的项. Soave[16,17] 考虑了这一问题,

$$\begin{cases} -\Delta u + \lambda u = \mu |u|^{q-2}u + |u|^{p-2}u, & x \in \mathbb{R}^N, \\ \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 = c, \end{cases}$$

其中 $\mu \in \mathbb{R}$, $2 < q \leqslant 2 + \frac{4}{N} \leqslant p \leqslant 2^*$, $q \neq p$. 这一情形与前面两种相比, 最大区别在于泛函 I 的结构变得更加复杂了. Soave 通过精细分析限定流形 $V(c)$ 的结构, 分多种情形讨论了上述问题, 得到了一系列解的存在性和非存在性结果. 而多解性的结果, 目前还是未知的.

1.2 方程组的情形

讨论完单个方程的情形, 现在将目光转到方程组的研究上来. 考虑如下非线性 Schrödinger 方程

组的正规化解问题:

$$\begin{cases} -\Delta u+\lambda_1 u=\mu_1|u|^{p-2}u+\beta r_1|u|^{r_1-2}|v|^{r_2}u, & x\in\mathbb{R}^N, \\ -\Delta v+\lambda_2 v=\mu_2|v|^{q-2}v+\beta r_2|u|^{r_1}|v|^{r_2-2}v, & x\in\mathbb{R}^N, \\ \int_{\mathbb{R}^N}|u|^2=c_1 \quad \text{且} \quad \int_{\mathbb{R}^N}|v|^2=c_2, \end{cases} \tag{1.8}$$

其中 $c_i>0$, $\lambda_i,\mu_i,\beta\in\mathbb{R}$, 而 $p,q,r_1+r_2\in(2,2^*)$, $r_1,r_2>1$. 与单个方程的情形一样, 根据 Lagrange 乘子定理, 为求解 (1.8) 的正规化解, 需考虑泛函

$$I(u,v)=\int_{\mathbb{R}^N}\frac{1}{2}(|\nabla u|^2+|\nabla v^2|)-\frac{1}{p}\mu_1|u|^p-\frac{1}{q}\mu_2|v|^p-\beta|u|^{r_1}|v|^{r_2} \tag{1.9}$$

限制在 $S(c_1)\times S(c_2)$ 上的临界点.

1.2.1 Gross-Pitaevskii 方程组

先看特殊情形. 当 $N\leqslant 3$, $p=q=4$, $r_1=r_2=2$ 时, 方程组 (1.8) 被称为 Gross-Pitaevskii 方程组. 关于它的正规化解问题, Bartsch、Jeanjean、Soave、Zhong 和 Zou 等得到了一系列有意义的结果.

一方面, 当 $\mu_1,\mu_2>0$ 和 $\beta>0$ 时, 这被称为种内和种间均吸引 (self-focusing and attractive interaction) 的情形, Bartsch 等 [18] 通过极小极大的方法得到了在 β 较大或者较小时正规化解的存在性. 随后, Bartsch 等 [19] 用分歧的方法重新考虑问题 (1.8), 并做出本质性的突破—β 的取值范围可以不依赖于 c_1 和 c_2. 此外, 文献 [19] 还得到了部分不存在性的结果.

另一方面, 当 $\mu_1,\mu_2>0$ 和 $\beta<0$ 时, 这被称为种内吸引和种间排斥 (self-focusing and repulsive interaction) 的情形, Bartsch 和 Soave [10] 通过极小极大的方法得到了正规化解的存在性, 同时, 还获得了正规化解的相位分离现象. 此后, 他们还在文献 [20] 中利用对称亏格理论得到了方程 (1.8) 的无穷多解.

1.2.2 一般情形

除了经典的 Gross-Pitaevskii 方程组, 当考虑其他超冷量子气体的模型时, 方程 (1.8) 需使用不同的指数. 鉴于 L^2- 临界指数 $\bar{p}$ 的存在性, 下面依旧分类讨论指数 $p,q,r=r_1+r_2$ 在不同范围内的结果.

首先, $p,q,r=r_1+r_2$ 均小于 $\bar{p}$, 即 L^2- 次临界时, 泛函 $I(u,v)$ 限制在流形 $S(c_1)\times S(c_2)$ 上是下有界的, 从而转化为处理如下的极小化问题:

$$m(c_1,c_2)=\inf_{S(c_1)\times S(c_2)}I(u,v). \tag{1.10}$$

Gou 和 Jeanjean [21] 运用集中紧性的讨论得到了正规化解的存在性. 当 $p,q,r=r_1+r_2$ 均大于 $\bar{p}$, 即 L^2- 超临界时, 泛函 $I(u,v)$ 限制在流形 $S(c_1)\times S(c_2)$ 上不再是下有界的. 所以, 极小化的方法不再适用, 但是可以采用 Bartsch 等的方法框架, 用极小极大的方法来得到正规化解的存在性2), 详见文献 [22].

其次, 当 $p,q<\bar{p}<r$ 或者 $r<\bar{p}<p,q$ 时, 显然这是一种混合情形, 正如单个方程混合情形, 问题变得更加复杂, 需要更加精细的分析. Gou 和 Jeanjean [23] 运用更精细的集中紧性的讨论, 并且结合极小极大的方法, 得到了一个多解性的结果.

2) Li H W, Zou W M. Normalized ground states for semilinear elliptic system with critical and subcritical nonlinearities. In preparation

最后, 当 $p < \bar{p} < q, r$ 时, 这种混合情形与第二种情形的处理方法不同, 原因在于 p 和 q 是非耦合项的指数, r 是耦合项的指数. 在第二种情形下, 耦合项和非耦合项是分开处理的, 但在第三种情形时耦合项和非耦合项不能分开处理, 导致问题的复杂性上升, 但是结合 Bartsch 等的框架, 通过更精细的分析仍然可以得到部分存在性结果2), 参见文献 [22]. 这些结果在后文也会做进一步的详细阐述.

1.3　其他结果

关于正规化解问题, 还有一些结果值得注意. 限于篇幅, 只在这里简单介绍, 后文将不再详细阐述.

第一个结果, 是在有界区域上考虑的正规化解问题. 或者等价地, 方程系数包含势阱函数时的情形. 这类问题与在全空间上考虑的问题相比, 处理方法有着天壤之别. 在有界区域上, 虽然紧性困难不复存在, 但 Pohozaev 等式中将出现无法处理的边界项, 因此无法使用 Jeanjean 的方法解决. Noris 等[24]考虑了

$$\begin{cases} -\Delta U + \lambda U = U^{p-1}, \quad x \in B_1 \subset \mathbb{R}^N, \\ U \in H_0^1(B_1), \quad \displaystyle\int_{B_1} U^2 dx = \rho, \quad U > 0, \end{cases} \tag{1.11}$$

其中 B_1 是 $\mathbb{R}^N$ 中的单位球, $2 < p < \bar{p}$, $p = \bar{p}$ 或者 $\bar{p} < p < 2^*$. 文献 [24] 给出了解存在的充分条件和必要条件 (关于 ρ、N 和 p 的), 基本方法是将问题转化为求解

$$\max\left\{\int_\Omega |u|^{p+1}dx : u \in H_0^1(\Omega), \int_\Omega u^2 dx = 1, \int_\Omega |\nabla u|^2 dx = \alpha\right\}. \tag{1.12}$$

Noris 等用 Ambrosetti-Prodi 理论证明了问题 (1.12) 中的 max 是可达的. 再通过将 Ω 选取为 B_1, 就将问题 (1.12) 的解转化为方程 (1.11) 的解.

Noris 等[24, 25]还将单个方程的结果推广到了如下方程组的情形:

$$\begin{cases} -\Delta u + \lambda_1 u = \mu_1 |u|^{p-2}u + \beta |u|^{(p-4)/2}|v|^{p/2}u, & x \in \Omega, \\ -\Delta v + \lambda_2 v = \mu_2 |v|^{p-2}v + \beta |u|^{(p-4)/2}|v|^{p/2}v, & x \in \Omega, \\ (u, v) \in H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^2), \quad \displaystyle\int_\Omega |u|^2 = c_1 \quad \text{且} \quad \int_\Omega |v|^2 = c_2, \end{cases} \tag{1.13}$$

其中 $\mu_i, c_i > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, $2 < p \leqslant 2^*$, 而 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ 是一个有界的 Lipschitz 区域. Noris 等利用多参数的 Ambrosetti-Prodi 理论, 证明了在 p 属于各个范围时, 方程 (1.13) 存在正规化解. 可以看出, 这里相较于方程 (1.8), 只考虑了 $p = q = 2r_1 = 2r_2$ 的情形, 而更一般的情形还有待研究, 并且多解性的结果也还没有.

第二个结果, 是关于非径向正规化解的. Jeanjean 和 Lu[26]考虑了方程 (1.4) 在 (g1)–(g5) 的条件下, 即 g 满足 L^2- 次临界增长时, 非径向解的存在性. 他们得到在 $N \geqslant 4$ 时, 方程 (1.4) 存在非径向对称的正规化解, 而且当 $N = 4$ 或 $N \geqslant 6$ 时, 在某些条件下非径向解也具有多解性. 特别地, 所得的非径向解均为变号解. 而当 g 满足 L^2- 超临界增长, 或其他一些情形时, 非经向解的结果还是没有的.

第三个结果, 是将研究的方程 (1.1) 拓展为其他 Schrödinger 类型的方程及方程组. 例如, Ye[27, 28]考虑了 Kirchhoff 方程的正规化解:

$$-\left(a + b\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2\right)\Delta u + \lambda u = |u|^{p-2}u, \quad a, b > 0. \tag{1.14}$$

之后, Li 和 Ye [29] 考虑了 Kirchhoff 方程系数包含势阱函数时的情形3), 而考虑了更一般的 Kirchhoff 方程及方程组的情形. 又例如, Luo [30] 考虑了 Hartree 方程的正规化解:

$$-\Delta u + a|x|^2 u + \lambda u - (|x|^{-\alpha} * |u|^2)u = 0, \quad x \in \mathbb{R}^N, \tag{1.15}$$

其中 $N \geqslant 3$, $\alpha \in (0, N)$, $a \geqslant 0$; Li 和 Luo [31] 考虑了分数阶 Choquard 方程的正规化解:

$$(-\Delta)^s u - \lambda u = (\kappa_\alpha * |u|^p)|u|^{p-2}u, \tag{1.16}$$

其中 $N \geqslant 3$, $s \in (0,1)$, $\alpha \in (0, N)$, $p \in (\max\{1 + \frac{\alpha+2s}{N}, 2\}, \frac{N+\alpha}{N-2s})$, $\kappa_\alpha(x) = |x|^{\alpha - N}$.

相较于方程 (1.4), 研究这些拓展的 Schrödinger 类型的方程及方程组时, 主要会出现两点不同. 一是泛函中多出来一些项, 这会使得技术处理变得稍微复杂一些. 二是 L^2- 临界指数不再是 $2 + \frac{4}{N}$. 实际上, 由引理 2.1 和 2.3 的证明可以看出, 这个指数其实就是决定泛函在 $S(c)$ 上是否下有界的指数.

余下的内容将详细介绍非线性 Schrödinger 方程和方程组正规化解的存在性和多解性. 为方便读者, 对本文中所列出的参考文献中的结果, 仅给出证明梗概或思路, 详细的证明可参见原文.

2 单个方程

在具体介绍之前, 先说明一些记号. 为方便起见, 在本文中将使用

- $|u|_p := (\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p)^{\frac{1}{p}}$ 表示 u 的 L^p- 模;
- $\|u\| := (\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + |u|^2)^{\frac{1}{2}}$ 表示 u 的 H^1- 模;
- $H_r^1(\mathbb{R}^N)$ 表示 $H^1(\mathbb{R}^N)$ 的径向对称函数子空间.

接着回顾在正规化解问题中经常被用到的 Gagliardo-Nirenberg 不等式: 对 $p \in (2, 2^*)$, 定义

$$\gamma_p := \frac{N(p-2)}{2p},$$

于是存在常数 $C_{N,p}$, 使得对任意 $u \in H^1(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ 均有

$$|u|_p \leqslant C_{N,p} |\nabla u|_2^{\gamma_p} |u|_2^{1-\gamma_p}. \tag{2.1}$$

2.1 L^2- 次临界情形

在 $\mathbb{R}^N$ 中考虑如下问题:

$$\begin{cases} -\Delta u + \lambda u = |u|^{p-2}u, \\ |u|_2^2 = c, \end{cases} \tag{2.2}$$

其中 $2 < p < \bar{p}$. 此时方程对应的泛函为

$$I(u) = \frac{1}{2}|\nabla u|_2^2 - \frac{1}{p}|u|_p^p.$$

如引言所述, 该问题事实上可以由放缩的方法解决. 但这里以此为例, 说明如何用极小化的方法得到正规化解.

3) Yang Z, Zou W M. Existence of normalized solutions for Kirchhoff type equations and systems. In preparation

引理 2.1 $I(u)$ 在 $S(c)$ 上是强制的, 且 $-\infty < m(c) := \inf_{u\in S(c)} I(u) < 0$.

证明 由 Gagliardo-Nirenberg 不等式,

$$I(u) \geqslant \frac{1}{2}|\nabla u|_2^2 - C|\nabla u|_2^{p\gamma_p}.$$

因为 $p < \bar{p}$, 所以 $p\gamma_p < 2$. 因此, $I(u)$ 是强制的, 且 $\inf_{u\in S(c)} I(u) > -\infty$, 即 I 在 $S(c)$ 上下有界. 又由于

$$I(s\star u) = \frac{\mathrm{e}^{2s}}{2}|\nabla u|_2^2 - \frac{\mathrm{e}^{p\gamma_p s}}{p}|u|_p^p,$$

于是, 当 $s\to -\infty$ 时, $I(s\star u)\to 0^-$. 而对任意 $u\in S(c)$ 均有 $s\star u\in S(c)$, 因此, $\inf_{u\in S(c)} I(u) < 0$. □

定理 2.1 设 $N \geqslant 1$, $2 < p < \bar{p}$. 对任意 $c\in\mathbb{R}^+$, 方程 (2.2) 均存在一组正的且径向对称的正规化基态解 (λ_c, u_c), 并且 $\lambda_c > 0$.

证明 取极小化序列 $\{u_n\}\subset S(c), I(u)\to m(c)$. 由引理 2.1 可知 $\{u_n\}$ 在 $H^1(\mathbb{R}^N)$ 中有界, 故存在子列 (仍记为 $\{u_n\}$) 弱收敛于 u. 由集中紧引理 [32,33] 可知, $\{u_n\}$ 在取子列意义下必满足消逝性、两分性或胎紧性三者之一.

若消逝性成立, 则由文献 [32, 引理 I.1] 可知, 在 $L^p(\mathbb{R}^N)$ $(2<p<2^*)$ 中, $u_n\to 0$. 于是,

$$\liminf_{n\to\infty} I(u_n) = \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{2}|\nabla u_n|_2^2 - \frac{1}{p}|u_n|_p^p \geqslant 0,$$

与 $m(c)<0$ 矛盾.

若两分性成立, 则存在 $\{u_n^1\}$ 和 $\{u_n^2\}$ 使得

$$m(c) = \lim_{n\to\infty} I(u_n) \geqslant \limsup_{n\to\infty}(I(u_n^1) + I(u_n^2)) \geqslant m(c_1) + m(c_2),$$

这又与次可加性 $m(c_1+c_2) < m(c_1) + m(c_2)$ 矛盾.

因此, 极小化序列 $\{u_n\}$ 只能满足胎紧性. 这时记 $\tilde{u}_n(x) := u_n(x+y_n)$. 根据 Brezis-Lieb 引理可知, 在 $L^2(\mathbb{R}^N)$ 中, $\tilde{u}_n\to\tilde{u}$. 再由 Hölder 不等式和 Sobolev 不等式可知, 对 $r\in(2,2^*)$ 均有

$$|\tilde{u}_n-\tilde{u}|_r^r \leqslant |\tilde{u}_n-\tilde{u}|_2^{2(1-\alpha)}|\tilde{u}_n-\tilde{u}|_2^{2^*\alpha} \leqslant C|\tilde{u}_n-\tilde{u}|_2^{2\alpha}\to 0,$$

其中 $\alpha\in(0,1)$. 故

$$m(c) \leqslant I(\tilde{u}) \leqslant \liminf_{n\to\infty} I(\tilde{u}_n) = \liminf_{n\to\infty} I(u_n) = m(c),$$

即上式中不等号全取等号, 从而, $\|\tilde{u}_n\|\to\|\tilde{u}\|$. 再利用一次 Brezis-Lieb 引理, 便得到 $\|\tilde{u}_n-\tilde{u}\|\to 0$, 从而证明了 $m(c)$ 可达, 即方程 (2.2) 有解 $\tilde{u}$.

接着, 令 $|\tilde{u}|^*$ 表示 $\tilde{u}$ 的 Schwarz 对称重排, 则 $I(|\tilde{u}|^*)\leqslant I(\tilde{u})$, 且 $|\tilde{u}|^*\in S(c)$. 再根据强极值原理可知, 方程 (2.2) 存在正的且径向对称的正规化解. 而且由于该解是全局极小点, 因此显然是基态解.

最后, 当方程 (2.2) 有解 $\tilde{u}$ 时,

$$\lambda_c c^2 = |\tilde{u}|_p^p - N\left(\frac{1}{2}|\tilde{u}|_p^p - \frac{1}{p}|\tilde{u}|_p^p\right) > 0,$$

因此, $\lambda_c > 0$. □

现在来看稍微复杂一点的情形. Shibata [7] 证明了在 g(1)–g(4) 的条件下, 极小能量 $m(c)$ 会呈现出与定理 2.1 中截然不同的性质.

定理 2.2 设 $N \geqslant 1$, 并且在方程 (1.4) 中, g 满足 g(1)–g(4), 则存在 $c_0 \geqslant 0$ 使得

$$m(c) \begin{cases} = 0, & 若\ 0 \leqslant c \leqslant c_0, \\ < 0, & 若\ c > c_0. \end{cases} \tag{2.3}$$

当 $c > c_0$ 时, $m(c)$ 可达, 即方程 (1.4) 有解, 且是基态解; 而当 $0 < c < c_0$ 时, $m(c)$ 不可达.

证明 首先来看 c_0 是如何得到的. Shibata 首先证明了在 g(1)–g(4) 的条件下, 泛函 I 在 $S(c)$ 上也是下有界且强制的. 接着证明了极小能量 $m(c)$ 具有如下性质:

(1) 当 $c > 0$ 时, $m(c) \leqslant 0$, 且当 c 足够大时, $m(c) < 0$;

(2) $c \mapsto m(c)$ 是连续且非增的.

这时, 定义

$$c_0 := \inf\{c > 0 : m(c) < 0\},$$

则显然 c_0 是良定义的, 且能保证 (2.3) 成立.

接着证明当 $c > c_0$ 时, $m(c)$ 是可达的. 过程与定理 2.1 的证明过程相似, 也是利用集中紧原理. 不过有一个技术上的不同, 就是在 g(1)–g(4) 的条件下, $m(c)$ 的次可加性不太容易验证. Shibata[34] 通过证明一个新的重排不等式得到了这一性质.

最后证明当 $0 < c < c_0$ 时, $m(c)$ 不可达. 为此, Shibata 证明了这样一个性质: 若对某个 $a > 0$, $m(c)$ 是可达的, 则对任意 $b > a$ 均有 $m(b) < m(a)$. 利用这个性质, 结合反证法, 当 $0 < c < c_0$ 时, $m(c)$ 可达, 则

$$m(c_0) < m(c) < 0,$$

与 c_0 的定义矛盾. □

问题 2.1 $m(c_0)$ 是否可达? 定理 2.2 中的解是否是正的或径向对称的?

得到解的存在性后, 一个自然的问题是, 什么时候 $c_0 > 0$ 成立? Shibata[7] 继续证明了如下引理:

引理 2.2 在 g(1)–g(4) 的条件下,

(1) 若 $\liminf_{s \to 0} \frac{g(s)}{s^{1+\frac{4}{N}}} = \infty$, 则 $c_0 = 0$;

(2) 若 $\liminf_{s \to 0} \frac{g(s)}{s^{1+\frac{4}{N}}} < \infty$, 则 $c_0 > 0$.

接下来介绍 g 满足 L^2- 次临界增长时, 方程 (1.4) 的多解性结果. Hirata 和 Tanaka[8] 证明了如下定理:

定理 2.3 设 $N \geqslant 2$, 并且在方程 (1.4) 中, g 满足 g(1)–(g5).

(1) 对任意 $k \in \mathbb{N}$, 均存在 $c_k \geqslant 0$, 使得当 $c > c_k$ 时, 方程 (1.4) 有至少 k 组解;

(2) 若 g 还满足 $\liminf_{s \to 0} \frac{g(s)}{s^{1+\frac{4}{N}}} = \infty$, 则对任意 $c > 0$, 方程 (1.4) 有可数多组解.

注 2.1 这里假设 $N \geqslant 2$, 是因为证明中将用到紧嵌入 $H_r^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N)$, $2 < p < 2^*$, 而该紧嵌入只对 $N \geqslant 2$ 成立.

定理 2.3 的证明 (1) 主要来看 m_k 是如何得到的. 为了技术上的方便, 记 $\lambda = \mathrm{e}^t$. 然后研究泛函

$$\hat{I}(t, u) = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \frac{\mathrm{e}^t}{2}u^2 - G(u)$$

的对称山路值 $a_k(t)$, Hirata 和 Tanaka 证明了

$$m_k = 2 \inf_{t \in (-\infty, t_0)} \frac{a_k(t)}{\mathrm{e}^t},$$

其中

$$t_0 = \begin{cases} \log\left(2\sup\limits_{s\neq 0}\dfrac{G(s)}{s^2}\right), & 若\ \sup\limits_{s\neq 0}\dfrac{G(s)}{s^2} < \infty, \\ \infty, & 若\ \sup\limits_{s\neq 0}\dfrac{G(s)}{s^2} = \infty. \end{cases}$$

(2) 实际上就是解决何时 $m_k > 0$. Hirata 和 Tanaka 得到了与引理 2.2 同样的结论, 即

$$若\ \liminf_{s\to 0}\frac{g(s)}{s^{1+\frac{4}{N}}} = \infty, \quad 则\ m_k = 0, \quad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

这就表明对任意 $c > 0$, 方程 (1.4) 均有可数多个解. □

2.2 L^2- 超临界情形

引理 2.3 设在方程 (1.4) 中 g 满足条件 (g1) 和 (g6), 则泛函 I 在 $S(c)$ 上是下无界的.

证明 任取 $u \in S(c)$, 由 (g6) 可得,

$$I(s\star u) \leqslant \frac{e^{2s}}{2}|\nabla u|_2^2 - e^{sN(\frac{\alpha-2}{2})}\int_{\mathbb{R}^N} G(u).$$

而 $N(\frac{\alpha-2}{2}) > 2$, 于是当 $s \to +\infty$ 时, $I(s\star u) \to -\infty$, 故 I 在 $S(c)$ 上下无界. □

因为是下无界的, 极小化方法不再适用. 首先介绍 Jeanjean 的结果.

定理 2.4 设 $N \geqslant 2$, 且在方程 (1.4) 中, g 满足 (g1) 和 (g6), 则对任意 $c \in \mathbb{R}^+$, 方程 (1.4) 均存在一组径向对称的正规化解 (λ_c, u_c), 并且 $\lambda_c > 0$. 若 g 还满足条件 (g7), 则该解还是基态解.

证明 该定理的证明过程较为烦琐, 最关键的就是构造有界 PS 序列. 为此, 首先证明在 (g1) 和 (g6) 的条件下, $I(u)$ 具有山路结构. 而 $\tilde{I}(u,s)$ 与 $I(u)$ 的结构相似, 因此, $\tilde{I}(u,s)$ 也具有山路结构, 即存在 $u_1, u_2 \in S(c)$ 使得

$$\widetilde{\gamma}(c) \equiv \inf_{\widetilde{h}\in\widetilde{\Gamma}(c)}\max_{t\in[0,1]}\widetilde{I}(\widetilde{h}(t)) > \max\{\widetilde{I}(u_1,0), \widetilde{I}(u_2,0)\},$$

其中

$$\widetilde{\Gamma}(c) = \{\widetilde{h} \in C([0,1], S(c)\times\mathbb{R}) : \widetilde{h}(0) = (u_1,0), \widetilde{h}(1) = (u_2,0)\},$$

且可以证明

$$\widetilde{\gamma}(c) > 0. \tag{2.4}$$

然后, Jeanjean 利用 Ekeland 变分原理证明了如下引理, 这里记 $E := H^1(\mathbb{R}^N)\times\mathbb{R}$ 和 $\|\cdot\|_E^2 := \|\cdot\|^2 + |\cdot|_{\mathbb{R}}^2$, 并且记 E^* 为 E 的对偶空间.

引理 2.4 (参见文献 [9, 引理 2.3]) 设方程 (1.4) 中 g 满足 (g1) 和 (g6). 对任意 $\epsilon > 0$, 取 $\widetilde{h_0} \in \widetilde{\Gamma}(c)$ 使得

$$\max_{t\in[0,1]}\widetilde{I}(\widetilde{h_0}(t)) \leqslant \widetilde{\gamma}(c) + \epsilon,$$

则存在 $(u,s) \in S(c)\times\mathbb{R}$ 使得

(1) $\widetilde{I}(u,s) \in [\widetilde{\gamma}(c) - \epsilon, \widetilde{\gamma}(c) + \epsilon]$;

(2) $\min_{t\in[0,1]}\|(u,s)-\widetilde{h_0}(t)\|_E\leqslant\sqrt{\epsilon}$;

(3) $\|\widetilde{I}'_{|_{S(c)\times\mathbb{R}}}(u,s)\|_{E^*}\leqslant 2\sqrt{\epsilon}$, 即

$$|\langle \widetilde{I}'(u,s),z\rangle_{E^*\times E}|\leqslant 2\sqrt{\epsilon}\|z\|_E,$$

其中 z 为 $\widetilde{T}(u,s):=\{(z_1,z_2)\in E,\langle u,z_1\rangle_{L^2}=0\}$ 中任一元素.

在上述引理中, 取 $\epsilon=\frac{1}{n}$, 得到序列 $\{(\omega_n,s_n)\}\subset S(c)\times\mathbb{R}$. 再令 $u_n:=s_n\star\omega_n$, 则 $\{u_n\}$ 满足

$$I(u_n)\to\gamma(c)=\widetilde{\gamma}(c),\tag{2.5}$$

$$\|I'|_{S(c)}(u_n)\|_{(H^1(\mathbb{R}^N))^*}\to 0,\tag{2.6}$$

$$P(u_n)\to 0.\tag{2.7}$$

可见这时得到的 $\{u_n\}$ 是满足额外性质的 PS 序列, 其中 $P(u)$ 的定义见 (1.6). 也正是这条额外的性质 (2.7), 使得该 PS 序列在 $H^1(\mathbb{R}^N)$ 中是有界的. 事实上, 计算 (2.5) $-\frac{1}{2}$(2.7) 可得

$$-\left(1+\frac{N}{2}\right)\int_{\mathbb{R}^N}G(u_n)+\frac{N}{4}\int_{\mathbb{R}^N}g(u_n)u_n=\gamma(c)+o(1).$$

再由 (g6), 可得

$$\left(\frac{N}{4}\alpha-\left(1+\frac{N}{2}\right)\right)\int_{\mathbb{R}^N}G(u_n)\leqslant c+o(1)\leqslant\left(\frac{N}{4}\beta-\left(1+\frac{N}{2}\right)\right)\int_{\mathbb{R}^N}G(u_n),$$

于是, $\int_{\mathbb{R}^N}G(u_n)$ 是有界的, 从而相应的 $|\nabla u|_2^2$ 也就是有界的.

有了有界性之后, 证明序列紧性, 从而得到解, 这便是一个标准化的过程. 解 u_c 的径向对称性, 以及 $\lambda_c>0$, 在证明过程中有所体现.

现在来证明如果 g 还满足 (g7), 则该解是基态解. 首先容易验证方程 (1.4) 的所有解均包含在 $V(c)$ 中. 接着, Jeanjean 证明了在 (g7) 的条件下, 对任意给定的 $u\in S(c)$, 函数 $f_u:\mathbb{R}\to\mathbb{R}; u\mapsto\tilde{I}(u,s)$ 有唯一最大值点 $s(u)$, 并且 $s(u)\star u\in V(c)$. 据此便可以证明

$$\gamma(c)=\inf_{u\in V(c)}I(u).\tag{2.8}$$

从而, 解 u_c 是基态解. □

注 2.2 并不能保证得到的解是正的, 因为 $I(u)=I(|u|)$ 不一定成立.

下面介绍后来的研究者们对 Jeanjean 方法的发展. 首先介绍 Bartsch 等的想法. 虽然 I 在 $S(c)$ 上是下无界的, 但在 $V(c)$ 上是下有界的. Bartsch 和 Soave [10] 首先证明了 $V(c)$ 是一个自然约束, 即下面的引理:

引理 2.5 设在方程 (1.4) 中 g 满足 (g1)、(g6) 和 (g7), 则 $I|_{V(c)}$ 的临界点也是 $I|_{S(c)}$ 的临界点.

证明 文献 [10] 中的证明较复杂. 这里给一个更简单一点的证明.

设 $u\in V(c)$ 是 $I|_{V(c)}$ 的一个临界点, 由 Lagrange 乘子定理可知, 存在 $\lambda,\nu\in\mathbb{R}$ 使得对任意 $\varphi\in H^1(\mathbb{R}^N)$, 有 $dI(u)[\varphi]-\lambda\int_{\mathbb{R}^N}u\varphi-\nu dP(u)[\varphi]=0$, 也即

$$(1-2\nu)(-\Delta u)=\lambda u+(1+\nu N)g(u)-\nu N\left(\frac{1}{2}g'(u)u+\frac{1}{2}g(u)\right).$$

为了完成引理的证明, 只需证明 $\nu=0$. 为此, 根据 Pohozaev 恒等式, 以及 $V(c)$ 的定义 (1.7), 有

$$\nu\int_{\mathbb{R}^N}\bigg(-\frac{N^2}{2}\bigg(\frac{1}{2}g'(u)u^2-\frac{1}{2}g(u)u\bigg)+(2N+N^2)\bigg(\frac{1}{2}g(u)u-G(u)\bigg)\bigg)=0. \tag{2.9}$$

再根据 (g6), 可得

$$\frac{1}{2}g'(s)s^2-\frac{1}{2}g(s)s>\frac{2N+4}{N}\bigg(\frac{1}{2}g(s)s-G(s)\bigg).$$

因此, 在 (2.9) 中,

$$-\frac{N^2}{2}\bigg(\frac{1}{2}g'(u)u^2-\frac{1}{2}g(u)u\bigg)+(2N+N^2)\bigg(\frac{1}{2}g(u)u-G(u)\bigg)<0,$$

这表明只能是 $\nu=0$. □

有了上述引理之后, Bartsch 和 Soave [10] 接着证明了 I 在 $V(c)$ 上满足 PS 条件. 因为是限制在 $V(c)$ 上, 实际上就是要求 PS 序列 $\{u_n\}$ 满足额外的条件 $P(u_n)\to 0$, 因此证明过程与文献 [9,12] 中相同. 之后, 则根据 Lusternik-Schnirelman 理论, 方程 (1.4) 便有无穷多组径向对称的正规化解.

但是, 既然已经验证了 I 在 $V(c)$ 上是下有界的, 那么事实上还可以直接在 $V(c)$ 上使用极小化方法证明方程 (1.4) 存在解. 文献 [11] 证明了这个想法是可行的, 其关键在于验证极小化序列的极限还在 $V(c)$ 中.

现在介绍 Tanaka 等的想法. 为此, 先给出一些定义. 设 $(U,\|\cdot\|_U)$ 是一个 Banach 空间, $\Phi_\theta:\mathbb{R}\to L(U)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的一个连续的群作用. 再设 S 是 U 的一个 C^2 嵌入子流形, 且在 Φ_θ 的作用下不变, 即对任意 $\theta\in\mathbb{R}$, $\Phi_\theta(S)\subset S$. 最后设泛函 $I\in C^1(S,\mathbb{R})$. 事实上, 取 $U=H_r^1(\mathbb{R}^N)$, $\Phi_\theta(u)=\theta\star u$, $S=S(c)$, $I=I(u)$, 则此时 (Φ_θ,S,I) 假设便是成立的.

定义 2.1　对 $b\in\mathbb{R}$, 称泛函 I 在 S 上满足 $(\mathrm{PSP})_b$ 条件, 如果 S 中任意满足

$$I(u_n)\to b,\quad \|dI(u_n)\|_{T^*_{u_n}S}\to 0,\quad P(u_n)\to 0$$

的序列 $\{u_n\}$ 均有强收敛的子列.

对 $b\in\mathbb{R}$, 记

$$[I\leqslant c]_S=\{u\in S;I(u)\leqslant c\},$$
$$\widehat{K}_c=\{u\in S;I(u)=c,dI(u)=0,P(u)=0\}.$$

引理 2.6　设 I 满足 $(\mathrm{PSP})_b$ 条件, 则对 $\widehat{K}_b$ 的任一邻域 O (若 $\widehat{K}_b=\emptyset$, 则 $O=\emptyset$), 以及任意 $\bar{\epsilon}>0$, 存在 $\epsilon\in(0,\bar{\epsilon})$ 和 $\eta\in C([0,1]\times S,S)$ 使得

(1) $\eta(0,u)=u$, $u\in S$;

(2) 若 $u\in[I\leqslant b-\bar{\varepsilon}]_S$, 则 $\eta(t,u)=u$, $t\in[0,1]$;

(3) 当 $u\in S$ 时, $t\mapsto I(\eta(t,u))$ 是非增的;

(4) $\eta(1,[I\leqslant b+\varepsilon]_S\backslash O)\subset[I\leqslant b-\varepsilon]_S$, $\eta(1,[I\leqslant b+\varepsilon]_S)\subset[I\leqslant b-\varepsilon]_S\cup O$.

另外, 若 S 是关于原点对称且泛函 I 是偶的, 则还有

(5) $\eta(t,-u)=-\eta(t,u)$, $(t,u)\in[0,1]\times S$.

该引理的证明与经典的形变引理类似. 建立了这样一个形变引理之后, 为证明定理 2.4, 只需再验证 I 满足 $(\mathrm{PSP})_{\gamma(c)}$ 条件, 而这与文献 [9] 中的过程是一样的.

建立该形变引理的一个优点是可以直接将一些已知的理论应用到正规化解问题上来. 从前面的论述可知, 带有正规化条件时, 验证泛函满足经典的 PS 条件不太容易, 现在有了这样的形变引理之后,

转而验证 $(\mathrm{PSP})_b$ 条件就容易多了. 再利用对称山路引理, Ikoma 和 Tanaka [12] 就得到了一个多解性结果. 事实上, L^2- 次临界情形的多解性结果, 即定理 2.3, 也是通过建立这样的形变引理证明的 (参见文献 [8]).

定理 2.5 设 $N \geqslant 2$, 在方程 (1.4) 中 g 满足 (g1)、(g6) 和 (g5), 则对任意 $c > 0$, 方程 (1.4) 存在无穷多组正规化解.

注 2.3 Bartsch 和 de Valeriola [15] 利用喷泉定理, 首先给出了上述定理的证明.

最后介绍 Bieganowski 等的最新成果. 因为 g 满足的条件 (g6) 是一个很强的条件, 所以, 文献 [13] 将 g 的条件放宽为 (g8)–(g13). 这与 Shibata 的结果相对应, 均为 Berestycki-Lions 类型的条件, 而且某种意义上来说, 这些是几乎最优的.

定理 2.6 设在方程 (1.4) 中 g 满足 (g8)–(g13), 且

$$2^*\eta C_{N,\bar{p}}^{\bar{p}} c^{\frac{2}{N}} < 1, \tag{2.10}$$

则存在 u_0 使得

$$I(u_0) = \inf_{V(c)} I = \inf_{V(c)\cap D(c)} I > 0,$$

其中 $D(c) := \{u \in H^1(\mathbb{R}^N) : |u|_2^2 \leqslant c\}$. 另外, 如果 g 还是奇的, 则 u_0 是正的且径向对称的.

该定理也是用极小化的方法证明的. 当然, 还可以考虑 (2.10) 是否可以去掉, 以及如下问题:

问题 2.2 在 (g8)–(g13) 的条件下, 方程 (1.4) 是否存在无穷多组解?

2.3 混合情形

从 Tao 等 [35] 开始, 具有混合幂次非线性项的 Schrödinger 方程引起了越来越多的关注:

$$\begin{cases} -\Delta u + \lambda u = \mu |u|^{q-2}u + |u|^{p-2}u, \quad x \in \mathbb{R}^N, \\ \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 = c, \end{cases} \tag{2.11}$$

其中 $\mu \in \mathbb{R}$, $2 < q \leqslant 2 + \frac{4}{N} \leqslant p \leqslant 2^*$, $q \neq p$. 因为此时多了一个变量 μ, 所以前文涉及的量均需与 μ 有关, 例如, 泛函变为

$$I_\mu(u) = \frac{1}{2}|\nabla u|_2^2 - \frac{\mu}{q}|u|_q^q - \frac{1}{p}|u|_p^p.$$

这些不同幂次非线性项的组合, 决定着泛函 I_μ 的结构, 从而影响着泛函临界点的存在性及其他一些性质. 也因 μ、p 和 q 各种情形的组合较多, 本文只选取其中几个具有代表性的情形进行说明.

注 2.4 如果不是考虑正规化解, 而是事先给定 λ, 则对任意 $2 < q < p < 2^*$, 基态解的存在性和其他性质均不变.

定理 2.7 设 $N \geqslant 2$, $2 < q < \bar{p} = p$, $0 < c < c_0 := \int_{\mathbb{R}^N} \omega_{N,p}^2$, 其中 $\omega_{N,p}$ 的定义见第 1 节, 则

(1) 当 $\mu > 0$ 时, 存在 $u_0 \in S(c)$ 使得 $I_\mu(u_0) = \inf_{S(c)} I_\mu(u) < 0$, 并且 u_0 是正的且径向对称的基态解;

(2) 当 $\mu < 0$ 时, $\inf_{S(c)} I_\mu(u) = 0$ 且方程 (2.11) 无解.

证明 (1) 的证明与前文定理 2.1 相似, 故不再赘述.

(2) 反证法. 假设方程 (2.11) 存在解 v, 则由 Pohozaev 等式, 有

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 = \frac{2}{\bar{p}} \int_{\mathbb{R}^N} |v|^{\bar{p}} + \mu\gamma_q \int_{\mathbb{R}^N} |v|^q.$$

但是, 当 $0 < c < c_0$ 时, $\inf_{S(c)} I_0(u) \geqslant 0$, 于是,

$$0 > \mu\gamma_q \int_{\mathbb{R}^N} |v|^q = 2I_0(v) \geqslant 2\inf_{S_c} I_0(u) \geqslant 0.$$

矛盾. □

定理 2.8 设 $N \geqslant 2$, $2 < q < \bar{p} < p < 2^*$, $\mu > 0$, 则存在 $C_0 > 0$, 使得当 $0 < c < C_0$ 时, 泛函 $I_\mu|_{S(c)}$ 有两点临界点. 一个是局部极小点 $\tilde{u}$, 另一个是山路解 $\hat{u}$, 并且对应的能量 $I_\mu(\hat{u}) > I_\mu(\tilde{u})$.

文献 [16] 中具体给出了 C_0 的表达式. 该定理的证明主要分两部分, 一是要验证 $S(c)$ 上的 PS 序列具有紧性; 二是要精确分析流形 $V(c)$ 的结构, 在各个连通分支上构造合适的 PS 序列. 因为方程中也含有 L^2- 超临界项, 所以, 第一步的证明与定理 2.4 的想法基本相同. 为了实现第二步, Soave[16] 将 $V(c)$ 分解为 $V(c) = V_+ \cup V_- \cup V_0$, 其中

$$\begin{aligned}
V_+ &:= \{u \in V(c) : 2|\nabla u|_2^2 > \mu q\gamma_q^2|u|_q^q + p\gamma_p^2|u|_p^p\} = \{u \in V(c) : \tilde{I}''_\mu(u,0) > 0\},\\
V_- &:= \{u \in V(c) : 2|\nabla u|_2^2 < \mu q\gamma_q^2|u|_q^q + p\gamma_p^2|u|_p^p\} = \{u \in V(c) : \tilde{I}''_\mu(u,0) < 0\},\\
V_0 &:= \{u \in V(c) : 2|\nabla u|_2^2 = \mu q\gamma_q^2|u|_q^q + p\gamma_p^2|u|_p^p\} = \{u \in V(c) : \tilde{I}''_\mu(u,0) = 0\}.
\end{aligned}$$

Soave 证明了在 $2 < q < \bar{p} < p < 2^*$ 和 $\mu > 0$ 时, $V_0 = \emptyset$, 并且对任意 $u \in S(c)$, $\tilde{I}_\mu(u,s)$ 有且仅有两个临界点 $s_u < t_u \in \mathbb{R}$, 并且 $s_u \star u \in V_+$, $t_u \star u \in V_-$. 而 $0 < c < C_0$, 保证了 $\sup_{V_+} I_\mu \leqslant 0 \leqslant \inf_{V_-} I_\mu$. 根据这些结果, 利用 $\tilde{I}_\mu(u,s)$ 与 $I_\mu(u)$ 结构的相似性, Soave 证明了两个不同类型临界点的存在性.

定理 2.9 设 $N \geqslant 3$, $2 < q < p = 2^*$, $\mu > 0$, 则存在 $\alpha = \alpha(N,p) > 0$, 使得当 $\mu c^{(1-\gamma_q)q} < \alpha$ 时, 方程 (2.11) 有基态解 $\tilde{u}$, 并且

(1) 若 $2 < q < \bar{p}$, 则 $m(a,\mu) := I_\mu(\tilde{u}) < 0$ 且 $\tilde{u}$ 是 I_μ 的局部极小点;

(2) 若 $\bar{p} < q < 2^*$, 则 $0 < m(a,\mu) < \mathcal{S}^{\frac{N}{2}}/N$ 且 $\tilde{u}$ 是 I_μ 山路形式的临界点, 其中 $\mathcal{S}$ 是 Sobolev 不等式的最佳常数.

这里假设 $N \geqslant 3$, 是因为当 $N = 1, 2$ 时, $2^* = \infty$. 与定理 2.8 类似, 该定理的证明也是主要分两部分. 但是 Sobolev 临界项给验证 PS 序列的紧性带来了新的困难, Soave[17] 通过证明如下引理解决了这一困难.

引理 2.7 设 $N \geqslant 3$, $2 < q < 2^*$, $\mu > 0$. 再设 $\{u_n\} \subset S(c)$ 满足

$$I_\mu(u_n) \to m, \quad dI_\mu(u_n) \to 0, \quad P_\mu(u_n) \to 0,$$

其中 $m < \mathcal{S}^{\frac{N}{2}}/N$ 且 $m \neq 0$, 则下列两条必有一条成立:

(1) $\{u_n\}$ 在 $H^1(\mathbb{R}^N)$ 中存在子列弱收敛到 $u \neq 0$, 并且 $I_\mu(u) \leqslant m - \mathcal{S}^{\frac{N}{2}}/N$;

(2) $\{u_n\}$ 在 $H^1(\mathbb{R}^N)$ 中存在子列强收敛到 $u \in S(c)$, 并且 $I_\mu(u) = m$, 即 u 是方程 (2.11) 的解.

注 2.5 这个结果可以视作 Brezis-Nirenberg 问题在正规化解条件下的推广. 文献 [16, 17] 还证明了 $\mu < 0$ 以及其他一些情形解的存在性或不存在性, 而且还证明了这些解的轨道稳定性等性质. 但混合情形下, 目前还没有无穷多解的结果.

问题 2.3 方程 (2.11) 是否存在无穷多解?

3 方程组

本节将就引言中提到的有关方程组正规化解的结果给出证明思路.

3.1 Gross-Pitaevskii 方程组

考虑如下 Gross-Pitaevskii 方程组:

$$\begin{cases}-\Delta u-\lambda_1 u=\mu_1 u^3+\beta u v^2, \quad x\in \mathbb{R}^3,\\ -\Delta v-\lambda_2 v=\mu_2 v^3+\beta u^2 v, \quad x\in \mathbb{R}^3,\\ \displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} u^2=c_1, \quad \int_{\mathbb{R}^3} v^2=c_2.\end{cases} \tag{3.1}$$

首先考虑 $\mu_1,\mu_2>0$ 和 $\beta>0$ 的情形, Bartsch 等 [18] 证明了如下定理:

定理 3.1 存在 $\beta_1,\beta_2>0$, 使得

(1) 当 $0<\beta<\beta_1$ 时, (3.1) 有一个正的径向对称的正规化解;

(2) 当 $\beta>\beta_2$ 时, (3.1) 有一个正的径向对称的正规化解, 且该正规化解是基态解.

注 3.1 β_1 和 β_2 由如下方式定义:

$$\max\left\{\frac{1}{c_1^2\mu_1^2},\frac{1}{c_2^2\mu_2^2}\right\}=\frac{1}{c_1^2(\mu_1+\beta_1)^2}+\frac{1}{c_2^2(\mu_2+\beta_1)^2},$$
$$\frac{(c_1^2+c_2^2)^3}{(\mu_1c_1^4+\mu_2c_2^4+2\beta_2c_1^2c_2^2)^2}=\min\left\{\frac{1}{c_1^2\mu_1^2},\frac{1}{c_2^2\mu_2^2}\right\},$$

上述两个等式是在对极小极大能量值进行估计时自然出现的. 显然, 我们可以看出 β_1 和 β_2 依赖于质量 c_1 和 c_2, 且

$$\text{当 } \frac{c_1}{c_2}\to 0 \text{ 或 } \frac{c_1}{c_2}\to\infty \text{ 时}, \quad \beta_1\to 0, \quad \beta_2\to\infty.$$

特别地, 无法取到一个值 β 使得对任意质量正规化解均存在.

定理 3.1 的证明 第一个结果采用环绕的方法来证明, 定义如下集合:

$$\mathcal{P}(c,\mu):=\left\{w\in S(c):|\nabla u|_2^2=\frac{3}{4}\mu|u|_4^2\right\}. \tag{3.2}$$

取定如下极小极大类:

$$\Gamma:=\{\gamma\in C(Q,S(c_1)\times S(c_2)):\gamma(x)=\gamma_0(x),x\in\partial Q\}, \tag{3.3}$$

其中

$$Q=[a,b]\times[c,d]\subset\mathbb{R}^2.$$

Bartsch 和 Soave 证明了 Γ 与 $\mathcal{P}(c_1,\mu_1+\beta)\times\mathcal{P}(c_2,\mu_2+\beta)$ 构成环绕 (linking), 因此满足文献 [36, 定理 3.2] 中的条件, 从而得到了一个满足额外条件的 PS 序列.

引理 3.1 若 $0<\beta<\beta_1$, 则 $I|_{S(c_1)\times S(c_2)}$ 存在 PS 序列 (u_n,v_n) 满足

$$I(u_n,v_n)\to c:=\inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{(t_1,t_2)\in Q}I(\gamma(t_1,t_2))>\max\{l_{c_1,\mu_1},l_{c_2,\mu_2}\},$$
$$\int_{\mathbb{R}^3}(|\nabla u_n|^2+|\nabla v_n|^2)-\frac{3}{4}\int_{\mathbb{R}^3}(\mu_1u_n^4+\mu_2v_n^4+2\beta u_n^2v_n^2)=o(1),$$

且在 $\mathbb{R}^3$ 中, 当 $n\to\infty$ 时,

$$u_n^-,v_n^-\xrightarrow{\text{a.e.}}0.$$

回到定理 3.1 的证明, 来看这个额外条件如何克服 PS 序列不收敛的问题. 由上述引理可以得到

$$\int_{\mathbb{R}^3}(\nabla u_n\cdot\nabla\varphi+\lambda_{1,n}u_n\varphi-\mu_1u_n^3\varphi-\beta u_nv_n^2\varphi)=o(1)\|\varphi\|_{H^1(\mathbb{R}^3)},$$
$$\int_{\mathbb{R}^3}(\nabla v_n\cdot\nabla\psi+\lambda_{2,n}v_n\mathcal{P}si-\mu_2v_n^3\psi-\beta u_n^2v_n\psi)=o(1)\|\psi\|_{H^1(\mathbb{R}^3)},$$

其中 $\varphi,\psi\in H^1(\mathbb{R}^3)$. 通过取定测试函数得到 $\lambda_{1,n}\to\lambda_1,\lambda_{2,n}\to\lambda_2$. 接着可以证明当 $\lambda_1<0$ 时, u_n 是列紧的; 当 $\lambda_2<0$ 时, v_n 是列紧的. 然后结合引理 3.1 和一个 Liouville 定理 (参见文献 [37, 定理 A.2]) 可以得到 $\lambda_1,\lambda_2<0$, 至此正规化解的存在性得到证明.

第二个结果的证明方法类似于定理 2.4, 在此不赘述. □

从注 3.1 可以看出 β 的取值范围依赖于正规化条件 c_1 和 c_2, 而且当 $\beta\in(\beta_1,\beta_2)$ 时, 定理 3.1 没有获得正规化解的存在性. Bartsch 等 [19] 对这一问题作出了本质性的突破—β 的取值范围可以不依赖于 c_1 和 c_2, 也就是说可以找到 β 使得对任意 $c_1,c_2>0$, 正规化解均存在. 他们运用分歧的方法重新考虑问题 (3.1), 得到如下重要结果:

定理 3.2 在方程 (3.1) 中,

(1) 若 $\beta\in(0,\tau_0\min\{\mu_1,\mu_2\}]\cup(\tau_0\max\{\mu_1,\mu_2\},+\infty)$, 则对任意 $c_1,c_2>0$, 问题 (3.1) 有一个正的径向对称的正规化解;

(2) 若 $\beta\in(\tau_0\min\{\mu_1,\mu_2\},\tau_0\max\{\mu_1,\mu_2\}]$, 则存在 $\delta>0$ 使得当 $c_1,c_2>0$ 且满足

$$\begin{cases}\dfrac{c_1}{c_2}\leqslant\delta, & 若\ \mu_2<\mu_1,\\ \dfrac{c_1}{c_2}\geqslant\dfrac{1}{\delta}, & 若\ \mu_2>\mu_1\end{cases}$$

时, 问题 (3.1) 有一个正的径向对称的正规化解;

(3) 若 $\mu_2\leqslant\beta\leqslant\tau_0\mu_1$, 则存在 $\theta_1>0$ 使得当 $\frac{c_1}{c_2}>\theta_1$ 时, 问题 (3.1) 没有正的正规化解; 若 $\mu_1\leqslant\beta\leqslant\tau_0\mu_2$, 则存在 $\theta_2>0$ 使得当 $\frac{c_1}{c_2}<\theta_2$ 时, 问题 (3.1) 没有正的正规化解.

注 3.2 定理 3.2 中的 τ_0 出现在分歧性的定理中, 定义如下:

$$\tau_0:=\inf_{\phi\in D_0^{1,2}(\mathbb{R}^3)\backslash\{0\}}\frac{\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla\phi|^2}{\int_{\mathbb{R}^3}U^2\phi^2},$$

其中 U 是方程 (1.5) 在 $p=4$ 和 $N=3$ 时的解.

问题 3.1 需要指出, 定理 3.2 并未得到 $\beta>\tau_0\max\{\mu_1,\mu_2\}$ 时, 所得正规化解是基态解, 能否证明此时正规化解是基态解?

定理 3.2 的证明 证明思路是将正规化解的问题转换成一个非正规化解的问题, 也就是通常的 Schrödinger 方程组, 然后利用已知结果得到正规化解的信息.

首先证明, 若方程组 (3.1) 存在正的正规化解, 必须有 $\lambda_1,\lambda_2<0$, 这样通过一个伸缩变换的计算可得到如下结果:

引理 3.2 设 $\lambda>0$, (u_λ,v_λ) 是如下方程的解:

$$\begin{cases}-\Delta u+\lambda u=\mu_1u^3+\beta uv^2, & x\in\mathbb{R}^3,\\ -\Delta v+v=\mu_2v^3+\beta u^2v, & x\in\mathbb{R}^3.\end{cases}\tag{3.4}$$

若 (u_λ, v_λ) 满足

$$\frac{|u|_2}{c_1} = \frac{|v|_2}{c_2} =: \alpha,$$

则

$$u(x) = \alpha^2 u_\lambda(\alpha^2 x) \quad 和 \quad v(x) = \alpha^2 v(\alpha^2 x)$$

是 (3.1) 的正规化解, 其中 $\lambda_1 = -\lambda\alpha^4$, $\lambda_2 = -\alpha^4$.

定义如下的集合和函数:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{S} = \{(\lambda, \beta, u, v) : (\lambda, \beta, u, v) \text{ 是 (3.4) 的解}, u, v > 0\},\\
&\mathcal{S}^{\beta_0} = \{(\lambda, \beta_0, u, v) : (\lambda, \beta_0, u, v) \text{ 是 (3.4) 的解}, u, v > 0\},\\
&\rho : \mathcal{S} \to \mathbb{R}^+, \quad (\lambda, \beta, u, v) \mapsto \frac{|u|_2}{|v|_2}.
\end{aligned}$$

由引理 3.2 可以得到如下一个关键的性质:

性质 3.1 若 $\frac{c_1}{c_2} \in \rho(\mathcal{S}^\beta)$, 则 (3.1) 存在一个正规化解.

为了描述 $\rho(\mathcal{S}^\beta)$, 定义 (3.4) 的平凡解和半平凡解的集合

$$\begin{aligned}
&\mathcal{T}_0 = \{(\lambda, \beta, 0, 0) : \lambda, \beta > 0\},\\
&\mathcal{T}_1 = \{(\lambda, \beta, U_{\lambda,\mu_1}, 0) : \lambda, \beta > 0\},\\
&\mathcal{T}_2 = \{(\lambda, \beta, 0, U_{1,\mu_2}) : \lambda, \beta > 0\}.
\end{aligned}$$

然后获得了如下的图像:

引理 3.3 (1) $\mathcal{T}_0$ 中的点不是分歧点, 即 $\bar{\mathcal{S}} \cap \mathcal{T}_0 = \emptyset$;

(2) 若 $\beta \leqslant \tau_0 \min\{\mu_1, \mu_2\}$, 则 $\bar{\mathcal{S}}^\beta \cap \mathcal{T}_i^\beta = \emptyset$, $i = 1, 2$;

(3) 若 $\tau_0\mu_1 < \beta \leqslant \tau_0\mu_2$, 则 $\mathcal{S}^\beta$ 有一个连通分支 $\mathcal{S}_1^\beta$ 使得

$$\mathcal{S}_1^\beta \cap \mathcal{T}_1^\beta = \{(l_1(\beta), \beta, U_{\lambda,\mu_1}, 0)\},$$

且 $\mathcal{T}_2^\beta$ 中的点不是分歧点;

(4) 若 $\tau_0\mu_2 < \beta \leqslant \tau_0\mu_1$, 则 $\mathcal{S}^\beta$ 有一个连通分支 $\mathcal{S}_2^\beta$ 使得

$$\mathcal{S}_2^\beta \cap \mathcal{T}_2^\beta = \{(l_2(\beta), \beta, 0, U_{1,\mu_2})\},$$

且 $\mathcal{T}_1^\beta$ 中的点不是分歧点;

(5) 若 $\beta > \tau_0 \max\{\mu_1, \mu_2\}$, 则 $\mathcal{S}^\beta$ 有两个连通分支 $\mathcal{S}_1^\beta$ 和 $\mathcal{S}_2^\beta$ 使得 $\mathcal{S}_1^\beta \cap \mathcal{T}_1^\beta = \{(l_1(\beta), \beta, U_{\lambda,\mu_1}, 0)\}$, $\mathcal{S}_2^\beta \cap \mathcal{T}_2^\beta = \{(l_2(\beta), \beta, 0, U_{1,\mu_2})\}$, 且若 $\mathcal{S}_1^\beta \cap \mathcal{S}_2^\beta \neq \emptyset$, 则 $\mathcal{S}_1^\beta = \mathcal{S}_2^\beta$.

通过分析 $\rho(\lambda, \beta, u, v)$ 在 $\lambda \to 0$ 和 $\lambda \to \infty$ 时的渐近性质, 并结合引理 3.3 所刻画的图像, Bartsch 等 [19] 给出 $\frac{c_1}{c_2} \in \rho(\mathcal{S}^\beta)$ 所需要的条件, 也即正规化解存在的条件. □

其次当 $\mu_1, \mu_2 > 0$ 和 $\beta < 0$ 时, Bartsch 和 Soave [10] 证明了如下定理:

定理 3.3 (1) (3.1) 有一个正的径向对称的正规化解.

(2) (3.1) 的正规化解 $(u_\beta, v_\beta, \lambda_{1,\beta}, \lambda_{2,\beta})$ 具有相位分离现象, 即当 $\beta \to -\infty$ 时, 在一个子列的意义下,

(i) $(\lambda_{1,\beta}, \lambda_{2,\beta}) \to (\lambda_1, \lambda_2)$, 其中 $\lambda_1, \lambda_2 \leqslant 0$;

(ii) 在 $C^{0,\alpha}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)$ 和 $H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)$ 空间中, $(u_\beta, v_\beta) \to (u_0, v_0)$;

(iii) (u_0, v_0) 是非负的 Lipschitz 函数, 且 $u_0v_0 \equiv 0$;

(iv) $u_0 - v_0$ 是以下方程的变号解:

$$-\Delta w - \lambda_1 w^+ + \lambda_2 w^- = \mu_1 (w^+)^3 - \mu_2 (w^-)^3, \quad x \in \mathbb{R}^3.$$

证明 对第一个结论的证明沿用了之前极小极大的思想, 定义 Pohozaev 流形

$$\mathcal{P} := \left\{(u,v) \in S(c_1) \times S(c_2) : \int_{\mathbb{R}^3} \left[(|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2) - \frac{3}{4}(\mu_1 u^4 + \mu_2 v^4 + 2\beta u^2 v^2)\right] = 0\right\},$$

然后证明该流形是 $I|_{S(c_1)\times S(c_2)}$ 的一个自然限制, 即如下命题:

性质 3.2 (1) 若 $I(u,v)$ 限制在 $\mathcal{P}$ 上有一个 PS 序列, 则 $I(u,v)$ 限制在 $S(c_1) \times S(c_2)$ 上也有一个 PS 序列;

(2) 若 (u,v) 是 $I|_{\mathcal{P}}$ 的一个临界点, 则 (u,v) 也是 $I|_{S(c_1)\times S(c_2)}$ 的一个临界点, 从而是 (3.1) 的一个正规化解.

性质 3.2 的重要性如下: 为了得到 (3.1) 的一个正规化解, 只需要考虑 $I|_{\mathcal{P}}$ 的性质, 且 $I|_{\mathcal{P}}$ 是下有界的, 但是若采用极小化的方法难以证明极小化序列的收敛性, 因此仍然使用极小极大的方法, 考虑如下极小极大类及极小极大临界值:

$$\begin{aligned} *\,\Gamma &:= \{\gamma \in C([0,1], \bar{\mathcal{P}}) : \gamma(0) = (u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon), \gamma(1) = (v_1^\varepsilon, v_2^\varepsilon)\}, \\ c &:= \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} I(\gamma(t)), \end{aligned}$$

其中 $u_i^\varepsilon, v_i^\varepsilon, i = 1, 2$ 是特殊取定的函数, 通过一个极小极大的定理就可以得到 PS 序列. 需要指出, 不同于定理 3.1, 在证明 PS 序列的紧性时, 由于 $\beta < 0$, 需要用到一个不同的 Liouville 定理 (参见文献 [10, 引理 3.12]). 相位分离现象的证明和非正规化解的情形类似, 详见文献 [10]. □

随后, Bartsch 和 Soave [20] 利用他们发展的自然限制流形, 将一个非正规化解的无穷多解结果推广到正规化解.

定理 3.4 设 $c_1 = c_2 = c$, $\mu_1 = \mu_2 = \mu$, 则对任意 $k \in \mathbb{N}$, 存在 $\beta_k > -\mu$ 使得当 $\beta < \beta_k$ 时, 问题 (3.1) 至少有 k 对不同的解 $(u_{j,\beta}, v_{j,\beta}, \lambda^j_{1,\beta}, \lambda^j_{2,\beta})$ 和 $(v_{j,\beta}, u_{j,\beta}, \lambda^j_{2,\beta}, \lambda^j_{1,\beta},)$, $j = 1, \dots, k$.

注 3.3 除无穷多解的结果外, 本文还得出了这些解的相位分离现象, 其结果类似于定理 3.3.

注 3.4 由定理 3.4 可以看出, 当 $\beta \leqslant -\mu$ 时, 方程 (3.1) 有无穷多对正规化解, 而且还满足当 $j \to \infty$ 时,

$$I_\beta(u_{j,\beta}, v_{j,\beta}) \to \infty.$$

注 3.5 对于非正规化解问题, 文献 [38] 结合 Lusternik-Schnirelmann 理论和 Nehari 流形得到了多解性的结果, 而定理 3.4 参考了这一方法, 不同之处在于将 Nehari 流形替换成 Pohozaev 流形, 并对 Lusternik-Schnirelmann 理论进行适当处理, 使其适用于正规化解问题.

问题 3.2 对于非对称方程, 是否能够将非正规化解的多解性结果推广到正规化解?

3.2 一般情形

正如引言所述, 除了 Gross-Pitaevskii 方程组外, 我们还需要考虑方程组 (1.8) 使用不同指数时的情形, 虽然形式上更为复杂, 但是仍可通过 Gross-Pitaevskii 方程组的处理方法得到一些结果, 下面将按照引言中的顺序进行简要介绍.

首先, 当 $p,q,r<\bar{p}$ 时, 泛函 $I|_{S(c_1)\times S(c_2)}$ 是下有界的, 考虑极小化问题 (1.10), Gou 和 Jeanjean[21] 利用集中紧性的讨论证明了下面的定理:

定理 3.5 当 $N\geqslant 1$ 和 $\beta>0$ 时, 极小化问题 (1.10) 的任意极小化序列经过适当平移后是预紧的.

当 $p,q,r>\bar{p}$ 时, 泛函 $I|_{S(c_1)\times S(c_2)}$ 既不下有界也不上有界, 极小化的方法不再适用, 但是 Bartsch 等[18] 采用他们的框架得到了如下定理:

定理 3.6 设 $2\leqslant N\leqslant 4$, 则存在 $\beta_1,\beta_2>0$, 使得

(1) 当 $0<\beta<\beta_1$ 时, (1.8) 有一个正的径向对称的正规化解;

(2) 当 $\beta>\beta_2$ 时, (1.8) 有一个正的径向对称的正规化解, 且该正规化解是基态解.

接着, 当 $p,q<\bar{p}<r$ 或者 $r<\bar{p}<p,q$ 时, Gou 和 Jeanjean[23] 发展了文献 [21] 中的集中紧性讨论, 并且结合极小极大的方法证明了下面的定理:

定理 3.7 $2\leqslant N\leqslant 4$ 时, 存在 $\beta_0>0$ 使得若 $0<\beta<\beta_0$, 方程 (1.8) 有两个正的正规化解.

文献 [23] 还得到了一些 $N\geqslant 5$ 时的存在性结果, 其实高维时正规化解的存在性是一个困难的问题, 原因在于当泛函 $I|_{S(c_1)\times S(c_2)}$ 不是下有界时, 需要考虑极小极大的方法, 但是维度升高至 $N\geqslant 5$ 时, 由于对应的 Liouville 定理的缺失, 通过极小极大方法所得到 PS 序列的列紧性难以验证, 因此有这样一个问题:

问题 3.3 $N\geqslant 5$ 时, 方程 (1.8) 是否存在正规化解?

最后, 当 $p<\bar{p}<q,r$ 时, 耦合项和非耦合项不能分开处理的情形, 详细结果可参见文献 [22] 和脚注 1).

综合比较 Schrödinger 方程与方程组的结果, 可以发现正规化解问题还是有很多情形没有解决的. 对于单个方程, Soave 考虑了部分指数为 2^* 的情形, 但这均远远不足以完整解决 Sobolev 临界的问题, 因此可以思考如下问题:

问题 3.4 能否发展处理 Sobolev 临界情形下正规化解问题的一般方法?

问题 3.5 可以看到, 上述结果均考虑 $\beta>0$ 的情形, 能否将处理 Gross-Pitaevskii 方程组 $\beta<0$ 的方法推广到一般方程?

参考文献

1 Bao W, Cai Y. Mathematical theory and numerical methods for Bose-Einstein condensation. Kinet Relat Models, 2013, 6: 1–135

2 Kwong M K. Uniqueness of positive solutions of $\Delta u-u+u^p=0$ in $\mathbb{R}^n$. Arch Ration Mech Anal, 1989, 105: 243–266

3 Stuart C A. Bifurcation from the continuous spectrum in the L^2-theory of elliptic equations on $\mathbb{R}^N$. In: Recent Methods in Nonlinear Analysis and Applications. Naples: Liguori Editore, 1981

4 Stuart C A. Bifurcation in $L^p(\mathbb{R})^N$ for a semilinear elliptic equation. Proc Lond Math Soc (3), 1988, 57: 511–541

5 Stuart C A. Bifurcation from the essential spectrum for some non-compact nonlinearities. Math Methods Appl Sci, 1989, 11: 525–542

6 Cazenave T, Lions P L. Orbital stability of standing waves for some nonlinear Schrödinger equations. Comm Math Phys, 1982, 85: 549–561

7 Shibata M. Stable standing waves of nonlinear Schrödinger equations with a general nonlinear term. Manuscripta Math, 2014, 143: 221–237

8 Hirata J, Tanaka K. Nonlinear scalar field equations with L^2 constraint: Mountain pass and symmetric mountain pass approaches. Adv Nonlinear Stud, 2019, 19: 263–290

9 Jeanjean L. Existence of solutions with prescribed norm for semilinear elliptic equations. Nonlinear Anal, 1997, 28: 1633–1659

10 Bartsch T, Soave N. A natural constraint approach to normalized solutions of nonlinear Schrödinger equations and systems. J Funct Anal, 2017, 272: 4998–5037

11 Yang Z. A new observation for the normalized solution of a Schrödinger equation. Arch Math (Basel), 2020, in press

12 Ikoma N, Tanaka K. A note on deformation argument for L^2 normalized solutions of nonlinear Schrödinger equations and systems. Adv Differential Equations, 2019, 24: 609–646

13 Bieganowski B, Mederski J. Normalized ground states of the nonlinear Schrödinger equation with at least mass critical growth. ArXiv:2002.08344, 2002

14 Berestycki H, Lions P L. Nonlinear scalar field equations, I existence of a ground state. Arch Ration Mech Anal, 1983, 82: 313–345

15 Bartsch T, de Valeriola S. Normalized solutions of nonlinear Schrödinger equations. Arch Math, 2013, 100: 75–83

16 Soave N. Normalized ground states for the NLS equation with combined nonlinearities. J Differential Equations, 2020, 269: 6941–6987

17 Soave N. Normalized ground states for the NLS equation with combined nonlinearities: The Sobolev critical case. J Funct Anal, 2020, 279: 108610

18 Bartsch T, Jeanjean L, Soave N. Normalized solutions for a system of coupled cubic Schrödinger equations on $\mathbb{R}^3$. J Math Pures Appl (9), 2016, 106: 583–614

19 Bartsch T, Zhong X, Zou W M. Normalized solutions for a coupled Schrödinger system. Math Ann, 2020, doi: 10.1007/s00208-020-02000-w

20 Bartsch T, Soave N. Multiple normalized solutions for a competing system of Schrödinger equations. Calc Var Partial Differential Equations, 2019, 58: 22

21 Gou T, Jeanjean L. Existence and orbital stability of standing waves for nonlinear Schrödinger systems. Nonlinear Anal, 2016, 144: 10–22

22 Bartsch T, Jeanjean L. Normalized solutions for nonlinear Schrödinger systems. Proc Roy Soc Edinburgh Sect A, 2018, 148: 225–242

23 Gou T, Jeanjean L. Multiple positive normalized solutions for nonlinear Schrödinger systems. Nonlinearity, 2018, 31: 2319–2345

24 Noris B, Tavares H, Verzini G. Normalized solutions for nonlinear Schrödinger systems on bounded domains. Nonlinearity, 2019, 32: 1044–1072

25 Noris B, Tavares H, Verzini G. Stable solitary waves with prescribed L^2-mass for the cubic Schrödinger system with trapping potentials. Discrete Contin Dyn Syst, 2015, 35: 6085–6112

26 Jeanjean L, Lu S S. Nonradial normalized solutions for nonlinear scalar field equations. Nonlinearity, 2019, 32: 4942–4966

27 Ye H Y. The sharp existence of constrained minimizers for a class of nonlinear Kirchhoff equations. Math Methods Appl Sci, 2015, 38: 2663–2679

28 Ye H Y. The existence of normalized solutions for L^2-critical constrained problems related to Kirchhoff equations. Z Angew Math Phys, 2015, 66: 1483–1497

29 Li G B, Ye H Y. On the concentration phenomenon of L^2-subcritical constrained minimizers for a class of Kirchhoff equations with potentials. J Differential Equations, 2019, 266: 7101–7123

30 Luo X. Normalized standing waves for the Hartree equations. J Differential Equations, 2019, 267: 4493–4524

31 Li G B, Luo X. Existence and multiplicity of normalized solutions for a class of fractional Choquard equations. Sci China Math, 2020, 63: 539–558

32 Lions P L. The concentration-compactness principle in the Calculus of Variations. The locally compact case, part 1. Ann Inst H Poincaré Anal Non Linéaire, 1984, 1: 109–145

33 Lions P L. The concentration-compactness principle in the Calculus of Variations. The locally compact case, part 2. Ann Inst H Poincaré Anal Non Linéaire, 1984, 1: 223–283

34 Shibata M. A new rearrangement inequality and its application for L^2-constraint minimizing problems. Math Z, 2017, 287: 341–359

35 Tao T, Visan M, Zhang X. The nonlinear Schrödinger equation with combined power-type nonlinearities. Comm Partial Differential Equations, 2007, 32: 1281–1343

36 Ghoussoub N. Duality and Perturbation Methods in Critical Point Theory. Cambridge: Cambridge University Press, 1993

37 Ikoma N. Compactness of minimizing sequences in nonlinear Schrödinger systems under multiconstraint conditions.

Adv Nonlinear Stud, 2014, 14: 115–136
38 Dancer E N, Wei J C, Weth T. A priori bounds versus multiple existence of positive solutions for a nonlinear Schrödinger system. Ann Inst H Poincaré Anal Non Linéaire, 2010, 27: 953–969

Normalized solutions for nonlinear Schrödinger equations

Houwang Li, Zuo Yang & Wenming Zou

Abstract Due to its very important applications in many physical problems, the normalized solution of nonlinear Schrödinger equations has gradually attracted the attention of a large number of researchers in recent years:

$$\begin{cases} -\Delta u + \lambda u = g(u), \quad x \in \mathbb{R}^N, \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N), \quad \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} u^2 = c, \end{cases}$$

where the normalization condition $c \in \mathbb{R}^+$ is given, but the Lagrange multiplier λ is unknown. We first introduce the existence, multiplicity, and other properties of the normalized solution of a single Schrödinger equation under different conditions. Then we introduce some new results related to the normalized solution of the nonlinear Schrödinger systems. Finally we list some open problems related to the normalized solution.

Keywords **Schrödinger equation, normalized solution, ground state**

MSC(2010) **35J20, 35J60, 35Q55**

doi: 10.1360/SSM-2020-0120