紧框架中的 Korovkin 型定理

施咸亮*, 陈洁

湖南师范大学数学与计算机科学学院高性能计算与随机信息处理省部共建教育部重点实验室 (HPCSIP), 长沙 410081

E-mail: xianliangshi@yahoo.com, chenjie227@126.com

收稿日期: 2012-10-31; 接受日期: 2013-04-09; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11071065 和 11171306) 和湖南省重点学科建设项目资助项目

摘要 关于线性正算子的 Korovkin 定理在函数逼近理论中是著名的定理, 本文将建立几个关于紧框架的 Korovkin 型定理.

关键词 紧框架 Korovkin 型定理 Bessel 序列 卷积

MSC (2010) 主题分类 42C40

1 引言

下述的 Korovkin 定理是众所周知的.

定理 A ^[1] 设 $\mathcal{P}_n : C[a, b] \rightarrow C[a, b]$, $n = 1, 2, \dots$ 是线性正算子序列. 假如对于 $f_i(x) = x^i$ ($i = 0, 1, 2$), 有

$$\|\mathcal{P}_n(f_i, x) - f_i(x)\|_{C[a, b]} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

那么, 对于任意的 $f(x) \in C[a, b]$,

$$\|\mathcal{P}_n(f, x) - f(x)\|_{C[a, b]} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

本文将建立几个关于紧框架的 Korovkin 型定理. 设 M 是 $n \times n$ 膨胀实矩阵, 即其特征值 λ 满足 $|\lambda| > 1$. 对给定的函数集合 $\Psi = (\psi_1, \dots, \psi_L) \subset L^2(\mathbb{R}^n)$, 定义

$$\psi_{l,j,k}(x) := |\det M|^{j/2} \psi_l(M^j x - Dk), \quad l = 1, 2, \dots, L, \quad (j, k) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^n,$$

其中 D 是 $n \times n$ 非奇异实矩阵. 定义

$$\mathcal{T}(f)(x) := \sum_{l=1}^L \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \langle f, \psi_{l,j,k} \rangle \psi_{l,j,k}(x), \quad f \in L^2(\mathbb{R}^n), \quad (1.1)$$

其中 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 中的内积.

如果存在两个正数 A 和 B , $A \leq B$, 使得对所有 $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, 成立

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{l=1}^L \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |\langle f, \psi_{l,j,k} \rangle|^2 \leq B\|f\|^2, \quad (1.2)$$

其中 $\|\cdot\|$ 表示 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 中的范数, 那么, 仿射族 $\Phi := \{\psi_{l,j,k}(x), l = 1, 2, \dots, L, (j, k) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^n\}$ 称为 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 中的框架. 常数 A 和 B 分别称为框架下界和框架上界. 若 $A = B$, 则仿射族 Φ 称为 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 中的紧框架. 这种情况下, 我们有

$$\langle \mathcal{T}(f), f \rangle = B\|f\|^2, \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}^n). \quad (1.3)$$

并且 (1.3) 等价于

$$f(x) = \frac{1}{B} \mathcal{T}(f)(x), \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}^n). \quad (1.4)$$

为了陈述结果, 我们再引入一些记号.

对 $n \times n$ 实矩阵 G , 以 G^* 表示其转置矩阵. 设 M 和 D 是两个给定的 $n \times n$ 实矩阵. 称向量 $\alpha \in \mathbb{R}^n$ 为相应于 D 的 M 进向量, 倘若 α 可表示为

$$\alpha = M^{*j} D^{*-1} k,$$

其中 $j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}^n$. 定义 $\Lambda(M, D)$ 为所有相应于 D 的 M 进向量的集合, 即

$$\Lambda(M, D) = \{\alpha \in \mathbb{R}^n : \alpha = M^{*j} D^{*-1} k, j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}^n\}.$$

对于任意的 $\alpha \in \Lambda(M, D)$, 定义

$$I_{M,D}(\alpha) = \{(j, k) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^n : \alpha = M^{*j} D^{*-1} k\}.$$

对于任意的 $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$, 定义

$$\Delta_\alpha(\psi, \omega) = \frac{1}{2|\det D|} \sum_{(j,k) \in I_{M,D}(\alpha)} \overline{\hat{\psi}(M^{*-j}\omega)} \hat{\psi}(M^{*-j}\omega + 2\pi D^{*-1}k).$$

以 $\hat{f}$ 表示 f 的 Fourier 变换. 若 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, 那么, $\hat{f}$ 定义为

$$\hat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}^n} f(t) e^{-i\omega \cdot t} dt.$$

对 $\mathbb{R}^n$ 的任意两个子集 Γ_1 和 Γ_2 , 定义

$$\Gamma_1 \pm \Gamma_2 := \{x : x = x_1 \pm x_2, x_1 \in \Gamma_1, x_2 \in \Gamma_2\}.$$

本文将证明以下三个 Korovkin 型定理.

定理 1.1 设 $\mathcal{T}(f)(x)$ 是如 (1.1) 所定义的算子, 那么, 以下三个条件是等价的:

- (1) 对于一切 $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, (1.3) 成立;
- (2) 对于一切由下式确定的函数 g :

$$\hat{g}(\omega) = \chi_{[a_1, a_1+b] \times [a_2, a_2+b] \times \dots \times [a_n, a_n+b]}(\omega),$$

(1.4) 成立, 其中 $a_i \in \mathbb{R}$ ($i = 1, 2, \dots, n$), 并且 b 是正常数;

- (3) 对于一切由下式确定的函数 g :

$$\hat{g}(\omega) = \chi_{[a_1, a_1+b] \times [a_2, a_2+b] \times \dots \times [a_n, a_n+b]}(\omega) + \mu \chi_{[a'_1, a'_1+b] \times [a'_2, a'_2+b] \times \dots \times [a'_n, a'_n+b]}(\omega),$$

(1.3) 成立, 其中 $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $a' = (a'_1, a'_2, \dots, a'_n) \in \mathbb{R}^n$, $a \neq a'$, μ 是复数.

定理 1.2 设 $\{\psi_{l,j,k}\}_{1 \leq l \leq L, j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}^n}$ 是 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 中的 Bessel 序列, 且 $\mathcal{T}(f)(x)$ 是如 (1.1) 所定义的算子. 如果对于任意函数

$$g(x) = \chi_{[a_1, a_1+1] \times \dots \times [a_n, a_n+1]}(x), \quad (1.5)$$

其中 $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$, (1.4) 成立, 那么, 对于任意的 $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, (1.4) 成立.

$L^2(\mathbb{R}^n)$ 中的闭子空间序列 $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ 称为一个多尺度分析, 如果满足

- (1) $\dots \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset \dots$;
- (2) $\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R}^n)$;
- (3) $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$;
- (4) $f(\cdot) \in V_0$ 当且仅当 $f(M^j \cdot) \in V_j (j \in \mathbb{Z})$, 其中 M 是膨胀矩阵;
- (5) 存在函数 $\phi \in V_0$ 使得序列 $\{\phi(\cdot - k)\}_{k \in \mathbb{Z}^n}$ 构成 V_0 的规范正交基,

这时 ϕ 称为尺度函数 (或生成元).

如果仿射族 $\{\psi_{l,j,k}\}_{1 \leq l \leq L, j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}^n}$ 由多尺度分析 $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ 生成, 并且对于任意的 $j \in \mathbb{Z}$, 函数 $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ 在 V_j 上的投影是一个卷积型的函数, 那么, 有以下的定理.

定理 1.3 设 $\{\psi_{l,j,k}\}_{1 \leq l \leq L, j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}^n}$ 是 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 中的 Bessel 序列, 且 $\mathcal{T}(f)(x)$ 是如 (1.1) 所定义的算子. 假设对于所有的 $J \in \mathbb{Z}$, 部分和

$$\mathcal{T}_J(f)(x) = \sum_{j=-\infty}^J \sum_{l=1}^L \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \langle f, \psi_{l,j,k} \rangle \psi_{l,j,k}(x)$$

是卷积型的. 如果对特征函数

$$g(x) = \chi_{[0,1]^n}(x),$$

(1.4) 成立, 那么, 对任意的 $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, (1.4) 成立.

满足 $\mathcal{T}_J(f)(x)$ 是卷积型的例子是存在的, 如 Shannon 小波. Shannon 小波产生的多尺度分析为

$$V_j := \{f \in L^2(\mathbb{R}) : \text{supp } \hat{f} \subseteq [-2^j \pi, 2^j \pi]\}, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

对应于 Shannon 小波的尺度函数为

$$\phi(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi x}.$$

对任意的 $f \in L^2(\mathbb{R})$, f 在 V_J 上的投影是

$$\mathcal{T}_J(f)(x) := \phi_{2^J} * f(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin 2^J \pi(x-t)}{\pi(x-t)} f(t) dt,$$

所以,

$$\mathcal{T}_J(f)(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \phi_{J,k} \rangle \phi_{J,k}(x)$$

是一个卷积型的.

2 定理的证明

我们仅对 $L = 1$ 的情况证明所有的定理, 并且将 $\psi_1(x)$ 记为 $\psi(x)$. 对于 $L > 1$ 的情况, 证明是类似的.

首先需要几个引理. 以下的引理是显然的.

引理 2.1 设 f 是 $\mathbb{R}^n$ 上的局部可积函数, 则有

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{|\Omega_\epsilon|} \int_{\omega_0 + \Omega_\epsilon} f(x) dx = f(\omega_0), \quad \text{a.e. } \omega_0 \in \mathbb{R}^n,$$

其中 $\Omega_\epsilon = [-\epsilon, \epsilon]^n$, $\epsilon > 0$.

如果 M 是膨胀矩阵, 那么, M^* 显然也是膨胀矩阵, 且有以下的引理.

引理 2.2 若 M 是膨胀矩阵, 那么, 存在常数 $C > 0$ 和 $\mu > 1$, 使得当 $j \in \mathbb{Z}^+$ 和 $\xi \in \mathbb{R}^n$ 时, 有

$$|M^j \xi| \geq C \mu^j |\xi|.$$

记 $\Omega = [-\pi, \pi]^n$. 对于有限集合 Γ , $\sharp \Gamma$ 定义为集合 Γ 的元素个数. 以下引理成立.

引理 2.3 若 M 是膨胀矩阵, 且 D 是非奇异矩阵, 那么,

$$\begin{aligned} \sharp \left\{ k \in \mathbb{Z}^n : k \in \frac{1}{2\pi} (D^* M^{*-j} \Omega_\epsilon - \Omega) \right\} &\leq C_n |\det M|^{-j} |\Omega_\epsilon|, \\ \sharp \left\{ k \in \mathbb{Z}^n : k \in \frac{1}{2\pi} (D^* M^{*-j} (2\pi \alpha_0 + \Omega_\epsilon) - \Omega) \right\} &\leq C_n |\det M|^{-j} |\Omega_\epsilon|, \end{aligned}$$

其中 $\Omega_\epsilon = [-\epsilon, \epsilon]^n$, $\epsilon > 0$, α_0 是 $\mathbb{R}^n$ 中的固定元素, C_n 是仅依赖于空间维数 n 的正常数.

引理 2.2 和 2.3 的证明很简单, 所以, 省略它们的证明.

引理 2.4 [3, 引理 4] 设 $0 < A \leq B < \infty$ 是两个实数, $H(x)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上实值可测函数, 又设 $F_1(x)$, $F_2(x), \dots, F_K(x)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的复值可测函数. 假如对于任意的实数 $w_1, w_2, \dots, w_K$, 成立

$$A \leq H(x) + \operatorname{Re} \sum_{j=1}^K e^{i w_j} F_j(x) \leq B, \quad \text{a.e. } x \in \mathbb{R}^n,$$

那么, 有

$$\begin{aligned} A &\leq H(x) + \sum_{j=1}^K |F_j(x)| \leq B, \quad \text{a.e. } x \in \mathbb{R}^n, \\ A &\leq H(x) - \sum_{j=1}^K |F_j(x)| \leq B, \quad \text{a.e. } x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

引理 2.5 [4, 推论 1] 设 $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$, 对所有的 $\alpha \in \Lambda(M, D)$,

$$\frac{1}{|\det D|} \sum_{(j,k) \in I_{M,D}(\alpha)} \overline{\hat{\psi}(M^{*-j}\omega)} \hat{\psi}(M^{*-j}\omega + 2\pi D^{*-1}k) = \delta_{\alpha,0}, \quad \text{a.e. } \omega \in \mathbb{R}^n$$

的充要条件是 $\{\psi_{j,k}\}_{j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}^n}$ 是 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 中框架界为 1 的紧框架.

设 $k = (k_1, k_2, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n$, 定义

$$\Omega_k := [k_1, k_1 + 1] \times [k_2, k_2 + 1] \times \cdots \times [k_n, k_n + 1],$$

并且

$$\sigma_{k,j}(x) := \chi_{\Omega_k}(M^j x),$$

其中 $j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}^n$.

引理 2.6 设 E 是 $\sigma_{k,j}(x)$ 的所有有限线性组合所构成的集合, 则 E 在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 中稠密.

证明 设 $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, 存在简单函数 $q(x) = \sum_{i=1}^K p_i \chi_{\Theta_i}(x)$, 使得对任意的 $\varepsilon > 0$, 有下式成立,

$$\|f - q\| < \varepsilon, \quad (2.1)$$

其中 p_i ($i = 1, 2, \dots, K$) 是常数, Θ_i ($i = 1, 2, \dots, K$) 是 n 维边长平行于坐标轴的方体.

从 Ω_k 的定义, 我们可以得到集合 $\{\Omega_k, k \in \mathbb{Z}^n\}$ 构成 $\mathbb{R}^n$ 的一个剖分. 我们定义集合

$$T_{j,k} = M^{-j}\Omega_k = \{x : M^j x \in \Omega_k\},$$

所以, $\{T_{j,k}, k \in \mathbb{Z}^n\}$ 也构成 $\mathbb{R}^n$ 的一个剖分. 显然, 集合 $\{T_{j,k}^o, k \in \mathbb{Z}^n\}$ 之间是互不相交的, 并且满足 $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}^n} T_{j,k} = \mathbb{R}^n$.

对于任意的 n 维方体 $\Theta = [b_1, c_1] \times [b_2, c_2] \times \cdots \times [b_n, c_n]$, 其中 $b_i, c_i \in \mathbb{R}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) 且满足 $b_i < c_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$), 我们定义 $I_1 = \{k : T_{j,k} \subset \Theta, k \in \mathbb{Z}^n\}$, $I_2 = \{k : T_{j,k} \cap \partial\Theta \neq \emptyset, k \in \mathbb{Z}^n\}$, $I = I_1 \cup I_2$. 对于任意给定的 $\eta > 0$, 当 j 充分大时, 有

$$\left| \bigcup_{k \in I_2} T_{j,k} \setminus \Theta \right| < \eta.$$

那么, 有

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left| \chi_{\Theta}(x) - \sum_{k \in I} \chi_{\Omega_k}(M^j x) \right|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} \left| \chi_{\Theta}(x) - \chi_{\bigcup_{k \in I} T_{j,k}}(x) \right|^2 dx \leq \int_{\bigcup_{k \in I_2} T_{j,k} \setminus \Theta} 1 dx < \eta.$$

因此, 对于上面给出的函数 q , 存在函数 $h \in E$, 使得

$$\|h - q\| < \varepsilon.$$

从而, 结合 (2.1), 可以得到

$$\|h - f\| < 2\varepsilon.$$

引理 2.6 证明完毕. $\square$

定理 1.1 的证明 不失一般性, 假设紧框架的界 $B = 1$. 如果条件 (1) 成立, 显然, 条件 (2) 和 (3) 成立. 如果 (1.4) 成立, 对于所有如下定义的函数

$$\hat{g}(\omega) = \chi_{[a_1, a_1+b] \times [a_2, a_2+b] \times \cdots \times [a_n, a_n+b]}(\omega),$$

其中 $a_i \in \mathbb{R}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) 并且 b 正常数, 那么, (1.3) 对于这些函数的有限线性组合成立. 这意味着如果条件 (2) 成立可以得到条件 (3) 成立. 所以, 只需证明条件 (3) 成立可以得到条件 (1) 成立.

设 $\omega_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \Lambda(M, D)$, $\alpha_0 \in \Lambda(M, D) \setminus \{0\}$. 记 $H_\epsilon(\beta) := \omega_0 + \Omega_\epsilon + \beta$, 其中 $\epsilon > 0$. 设 $g_\epsilon(x)$ 是由下式确定的函数

$$\hat{g}_\epsilon(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2|\Omega_\epsilon|}} \chi_{H_\epsilon(0)}(\omega) + \frac{e^{i\lambda}}{\sqrt{2|\Omega_\epsilon|}} \chi_{H_\epsilon(2\pi\alpha_0)}(\omega),$$

其中 $|\Gamma|$ 表示集合 Γ 的 Lebesgue 测度. 对于任意的 $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, 定义

$$\mathcal{H}_j(f) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |\langle f, \psi_{j,k} \rangle|^2 = \frac{1}{(2\pi)^{2n}} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |\langle \hat{f}, \hat{\psi}_{j,k} \rangle|^2, \quad \mathcal{H}(f) := \sum_{j \in \mathbb{Z}} \mathcal{H}_j(f).$$

设 J 是充分大的正整数, 将 $\mathcal{H}(g_\epsilon(\omega))$ 分为两个部分:

$$\mathcal{H}(g_\epsilon(\omega)) = \sum_{-\infty < j \leq -J} \mathcal{H}_j(g_\epsilon(\omega)) + \sum_{-J+1 \leq j < \infty} \mathcal{H}_j(g_\epsilon(\omega)) := Q_1 + Q_2. \quad (2.2)$$

我们首先估计 Q_1 . 由周期性, Parseval 等式和 Cauchy 不等式, 有

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{1}{(2\pi)^{2n}} \sum_{j=-\infty}^{-J} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |\langle \hat{g}_\epsilon, \hat{\psi}_{j,k} \rangle|^2 \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{2n}} \sum_{j=-\infty}^{-J} \frac{|\det M|^j}{|\det D|^2} \int_{[0, 2\pi]^n} \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \hat{g}_\epsilon(M^{*j} D^{*-1}(\omega + 2\pi k)) \overline{\hat{\psi}(D^{*-1}(\omega + 2\pi k))} \right|^2 d\omega \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{2n}} \sum_{j=-\infty}^{-J} \frac{|\det M|^j}{|\det D|^2} \int_{D^* M^{*-j} \omega_0 + \Omega} \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \left(\frac{1}{\sqrt{2|\Omega_\epsilon|}} \chi_{H_\epsilon(0)}(M^{*j} D^{*-1}(\omega + 2\pi k)) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{e^{i\lambda}}{\sqrt{2|\Omega_\epsilon|}} \chi_{H_\epsilon(2\pi\alpha_0)}(M^{*j} D^{*-1}(\omega + 2\pi k)) \right) \overline{\hat{\psi}(D^{*-1}(\omega + 2\pi k))} \right|^2 d\omega \\ &\leq \frac{1}{(2\pi)^{2n}} \sum_{j=-\infty}^{-J} \frac{|\det M|^j}{|\det D|^2} \frac{1}{2|\Omega_\epsilon|} \int_{D^* M^{*-j} \omega_0 + \Omega} \left\{ \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} (\chi_{H_\epsilon(0)}(M^{*j} D^{*-1}(\omega + 2\pi k)) \right. \\ &\quad \left. + \chi_{H_\epsilon(2\pi\alpha_0)}(M^{*j} D^{*-1}(\omega + 2\pi k))) |\hat{\psi}(D^{*-1}(\omega + 2\pi k))|^2 \right\} \\ &\quad \times \left\{ \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} (\chi_{H_\epsilon(0)}(M^{*j} D^{*-1}(\omega + 2\pi k)) + \chi_{H_\epsilon(2\pi\alpha_0)}(M^{*j} D^{*-1}(\omega + 2\pi k))) \right\} d\omega. \end{aligned}$$

现在讨论满足条件 $\chi_{H_\epsilon(0)}(M^{*j} D^{*-1}(\omega + 2\pi k)) \neq 0$ 的整数 k , 以及满足条件

$$\chi_{H_\epsilon(2\pi\alpha_0)}(M^{*j} D^{*-1}(\omega + 2\pi k)) \neq 0$$

的整数 k . 观察可得 $\omega \in D^* M^{*-j} \omega_0 + \Omega$ 等价于 $M^{*j} D^{*-1}(\omega + 2\pi k) \in \omega_0 + M^{*j} D^{*-1}(\Omega + 2\pi k)$. 如果 $\chi_{H_\epsilon(0)}(M^{*j} D^{*-1}(\omega + 2\pi k)) \neq 0$, 集合 $\omega_0 + M^{*j} D^{*-1}(\Omega + 2\pi k)$ 和集合 $H_\epsilon(0)$ 有交集. 换句话说, 存在整数 $k \in \mathbb{Z}^n$, 使得

$$M^{*j} D^{*-1}(\eta_1 + 2\pi k) = \eta_2, \quad \eta_1 \in \Omega, \quad \eta_2 \in \Omega_\epsilon.$$

因此, 存在整数 $k \in \mathbb{Z}^n$, 使得

$$k \in \frac{1}{2\pi} (D^* M^{*-j} \Omega_\epsilon - \Omega).$$

由引理 2.3 可知,

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \chi_{H_\epsilon(0)}(M^{*j} D^{*-1}(\omega + 2\pi k)) \leq C_n |\det M|^{-j} |\Omega_\epsilon|.$$

类似地, 如果

$$\chi_{H_\epsilon(2\pi\alpha_0)}(M^{*j} D^{*-1}(\omega + 2\pi k)) \neq 0,$$

集合 $\omega_0 + M^{*j}D^{*-1}(\Omega + 2\pi k)$ 和集合 $H_\epsilon(2\pi\alpha_0)$ 有交集. 换言之, 存在整数 $k \in \mathbb{Z}^n$, 使得

$$M^{*j}D^{*-1}(\eta_1 + 2\pi k) = 2\pi\alpha_0 + \eta_2, \quad \eta_1 \in \Omega, \quad \eta_2 \in \Omega_\epsilon.$$

因此, 存在整数 $k \in \mathbb{Z}^n$, 使得

$$k \in \frac{1}{2\pi}(D^*M^{*-j}(2\pi\alpha_0 + \Omega_\epsilon) - \Omega).$$

由引理 2.3 可知,

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \chi_{H_\epsilon(2\pi\alpha_0)}(M^{*j}D^{*-1}(\omega + 2\pi k)) \leq C_n |\det M|^{-j} |\Omega_\epsilon|.$$

从而可以得到

$$\begin{aligned} Q_1 &\leq C_n \sum_{j=-\infty}^{-J} \int_{D^*M^{*-j}\omega_0+\Omega} \left\{ \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} (\chi_{H_\epsilon(0)}(M^{*j}D^{*-1}(\omega + 2\pi k))) \right. \\ &\quad \left. + \chi_{H_\epsilon(2\pi\alpha_0)}(M^{*j}D^{*-1}(\omega + 2\pi k)) \right\} |\hat{\psi}(D^{*-1}(\omega + 2\pi k))|^2 d\omega \\ &= C_n \sum_{j=-\infty}^{-J} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \int_{M^{*-j}\omega_0+D^{*-1}(\Omega+2\pi k)} \{ \chi_{\omega_0+\Omega_\epsilon}(M^{*j}\omega) + \chi_{\omega_0+2\pi\alpha_0+\Omega_\epsilon}(M^{*j}\omega) \} |\hat{\psi}(\omega)|^2 d\omega \\ &=: Q_{11} + Q_{12}, \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} Q_{11} &= C_n \sum_{j=-\infty}^{-J} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \int_{(M^{*-j}\omega_0+D^{*-1}(\Omega+2\pi k)) \cap M^{*-j}(\omega_0+\Omega_\epsilon)} |\hat{\psi}(\omega)|^2 d\omega \\ &\leq C_n \sum_{j=-\infty}^{-J} \int_{M^{*-j}(\omega_0+\Omega_\epsilon)} |\hat{\psi}(\omega)|^2 d\omega, \\ Q_{12} &\leq C_n \sum_{j=-\infty}^{-J} \int_{M^{*-j}(\omega_0+2\pi\alpha_0+\Omega_\epsilon)} |\hat{\psi}(\omega)|^2 d\omega. \end{aligned}$$

定义

$$\epsilon_0 = \max \left\{ \epsilon : \|x - y\| < \frac{|\omega_0|}{2}, \forall x, y \in \Omega_\epsilon \right\}.$$

当 $\epsilon < \epsilon_0$ 和 $\xi \in \omega_0 + \Omega_\epsilon$ 时, 有 $\xi = \omega_0 + \eta$, 其中 $\eta \in \Omega_\epsilon$. 因为元素 0 属于 Ω_ϵ , 所以, 有

$$\|\xi\| - |\omega_0| \leq |\xi - \omega_0| = |\eta| < \frac{|\omega_0|}{2}.$$

从而,

$$\frac{|\omega_0|}{2} < |\xi| < \frac{3|\omega_0|}{2}.$$

由引理 2.2 可得

$$|M^{*-j}\xi| \geq C\mu^{-j}|\xi| \geq \frac{1}{2}C\mu^{-j}|\omega_0| := C_0\mu^{-j}|\omega_0|, \quad j \leq -J.$$

设

$$N = \min \left\{ -j : |M^{*-j}\xi| \geq C_0\mu^{-j}|\xi| \geq \frac{3}{2}|\omega_0|, \xi \in \omega_0 + \Omega_\epsilon, \epsilon < \epsilon_0 \right\} + 1, \quad j < -J < 0,$$

对于任意 N 个集合

$$M^{*-j_1}(\omega_0 + \Omega_\epsilon), M^{*-j_2}(\omega_0 + \Omega_\epsilon), \dots, M^{*-j_N}(\omega_0 + \Omega_\epsilon), \quad j_N < \dots < j_2 < j_1 < 0,$$

可以得到

$$(\omega_0 + \Omega_\epsilon) \cap M^{*j_1-j_N}(\omega_0 + \Omega_\epsilon) = \emptyset.$$

因为如果 $\omega \in (\omega_0 + \Omega_\epsilon)$, 有 $|\omega| < \frac{3}{2}|\omega_0|$. 如果 $\omega \in M^{*j_1-j_N}(\omega_0 + \Omega_\epsilon)$, 有

$$|\omega| = |M^{*j_1-j_N}\xi| \geq C_0\mu^{j_1-j_N}|\xi| \geq \frac{3}{2}|\omega_0|.$$

所以, 结论成立.

当 $\epsilon < \epsilon_0$ 时, $\{M^{*-j}(\omega_0 + \Omega_\epsilon)\}_{j \leq -J}$ 中的任意 N 个集合的交集都是空集. 因此, 对于任意的

$$\omega \in \bigcup_{j \leq -J} M^{*-j}(\omega_0 + \Omega_\epsilon),$$

满足下面两个条件:

- (1) $|\omega| > C_0\mu^{-j}|\omega_0|$;
- (2) ω 最多属于 N 个集合.

当 J 充分大时, 可以得到

$$\begin{aligned} & \sum_{j=-\infty}^{-J} \left(\int_{M^{*-j}(\omega_0 + \Omega_\epsilon)} + \int_{M^{*-j}(\omega_0 + 2\pi\alpha_0 + \Omega_\epsilon)} \right) |\hat{\psi}(\omega)|^2 d\omega \\ & \leq C \int_{|\omega| > C_0\mu^J|\omega_0|} |\hat{\psi}(\omega)|^2 d\omega + C \int_{|\omega| > C_0\mu^J|\omega_0 + 2\pi\alpha_0|} |\hat{\psi}(\omega)|^2 d\omega \\ & < \varepsilon. \end{aligned}$$

因此,

$$\overline{\lim}_{\epsilon \rightarrow 0} |Q_1| \leq C_n \varepsilon. \quad (2.3)$$

接下来估计 Q_2 ,

$$\begin{aligned} Q_2 &= \frac{1}{(2\pi)^{2n}} \sum_{j=-J+1}^{+\infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |\langle \hat{g}_\epsilon, \hat{\psi}_{j,k} \rangle|^2 \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{2n}} \sum_{j=-J+1}^{+\infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \frac{1}{|\det M|^j} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{g}_\epsilon(\xi) \overline{\hat{\psi}(M^{*-j}\xi)} e^{i\langle M^{-j}Dk, \xi \rangle} d\xi \\ &\quad \times \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\hat{g}_\epsilon(\omega)} \hat{\psi}(M^{*-j}\omega) e^{-i\langle M^{-j}Dk, \omega \rangle} d\omega. \end{aligned}$$

由周期性可得

$$\begin{aligned} Q_2 &= \frac{(2\pi)^{-n}}{|\det D|} \sum_{j=-J+1}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \hat{g}_\epsilon(\omega) \overline{\hat{g}_\epsilon(\omega + 2\pi M^{*j}D^{-1}k)} \\ &\quad \times \overline{\hat{\psi}(M^{*-j}\omega)} \hat{\psi}(M^{*-j}\omega + 2\pi D^{*-1}k) d\omega. \end{aligned} \quad (2.4)$$

由假设可得

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}(M^{*-j}\omega)|^2 \in L^\infty(\mathbb{R}^n). \quad (2.5)$$

对于 $n = 1$ 的情况, (2.5) 由 Chui 和 Shi [2] 证明过. 对于 $n > 1$ 的情况, 证明类似.

根据 Chui 和 Shi [7] 类似的讨论, 可以由 (2.5) 得到级数 (2.4) 是绝对收敛的. 我们重排级数 Q_2 并且得到

$$\begin{aligned} Q_2 &= \frac{(2\pi)^{-n}}{|\det D|} \sum_{\alpha \in \Lambda(M, D)} \sum_{\substack{(j, k) \in I_{M, D}(\alpha) \\ -J+1 \leq j < \infty}} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{g}_\epsilon(\omega) \overline{\hat{g}_\epsilon(\omega + 2\pi\alpha)} \overline{\hat{\psi}(M^{*-j}\omega)} \hat{\psi}(M^{*-j}\omega + 2\pi D^{*-1}k) d\omega \\ &= \frac{(2\pi)^{-n}}{|\det D|} \sum_{\substack{(j, k) \in I_{M, D}(0) \\ -J+1 \leq j < \infty}} \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{g}_\epsilon(\omega)|^2 |\hat{\psi}(M^{*-j}\omega)|^2 d\omega + \frac{(2\pi)^{-n}}{|\det D|} \sum_{\substack{(j, k) \in I_{M, D}(\alpha_0) \\ -J+1 \leq j < \infty}} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{g}_\epsilon(\omega) \overline{\hat{g}_\epsilon(\omega + 2\pi\alpha_0)} \\ &\quad \times \overline{\hat{\psi}(M^{*-j}\omega)} \hat{\psi}(M^{*-j}\omega + 2\pi D^{*-1}k) d\omega + \frac{(2\pi)^{-n}}{|\det D|} \sum_{\substack{(j, k) \in I_{M, D}(-\alpha_0) \\ -J+1 \leq j < \infty}} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{g}_\epsilon(\omega) \overline{\hat{g}_\epsilon(\omega - 2\pi\alpha_0)} \\ &\quad \times \overline{\hat{\psi}(M^{*-j}\omega)} \hat{\psi}(M^{*-j}\omega + 2\pi D^{*-1}k) d\omega + \frac{(2\pi)^{-n}}{|\det D|} \sum_{\substack{\alpha \in \Lambda(M, D) \\ \setminus \{0, \pm\alpha_0\}}} \sum_{\substack{(j, k) \in I_{M, D}(\alpha) \\ -J+1 \leq j < \infty}} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{g}_\epsilon(\omega) \overline{\hat{g}_\epsilon(\omega + 2\pi\alpha)} \\ &\quad \times \overline{\hat{\psi}(M^{*-j}\omega)} \hat{\psi}(M^{*-j}\omega + 2\pi D^{*-1}k) d\omega \\ &=: Q_{2,1} + Q_{2,2} + Q_{2,3} + Q_{2,4}. \end{aligned}$$

首先估计 $Q_{2,1}$,

$$\begin{aligned} Q_{2,1} &= \frac{(2\pi)^{-n}}{|\det D|} \sum_{j=-J+1}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{g}_\epsilon(\omega)|^2 |\hat{\psi}(M^{*-j}\omega)|^2 d\omega \\ &= \frac{(2\pi)^{-n}}{|\det D|} \sum_{j=-J+1}^{+\infty} \frac{1}{2|\Omega_\epsilon|} \int_{\mathbb{R}^n} (\chi_{H_\epsilon(0)}^2(\omega) + e^{-i\lambda} \chi_{H_\epsilon(0)}(\omega) \chi_{H_\epsilon(2\pi\alpha_0)}(\omega) \\ &\quad + e^{i\lambda} \chi_{H_\epsilon(0)}(\omega) \chi_{H_\epsilon(2\pi\alpha_0)}(\omega) + \chi_{H_\epsilon(2\pi\alpha_0)}^2(\omega)) |\hat{\psi}(M^{*-j}\omega)|^2 d\omega \\ &= \frac{(2\pi)^{-n}}{|\det D|} \sum_{j=-J+1}^{+\infty} \frac{1}{2|\Omega_\epsilon|} \int_{\omega_0 + \Omega_\epsilon} |\hat{\psi}(M^{*-j}\omega)|^2 d\omega \\ &\quad + \frac{(2\pi)^{-n}}{|\det D|} \sum_{j=-J+1}^{+\infty} \frac{1}{2|\Omega_\epsilon|} \int_{\omega_0 + \Omega_\epsilon \cap \omega_0 + 2\pi\alpha_0 + \Omega_\epsilon} (e^{i\lambda} + e^{-i\lambda}) |\hat{\psi}(M^{*-j}\omega)|^2 d\omega \\ &\quad + \frac{(2\pi)^{-n}}{|\det D|} \sum_{j=-J+1}^{+\infty} \frac{1}{2|\Omega_\epsilon|} \int_{\omega_0 + 2\pi\alpha_0 + \Omega_\epsilon} |\hat{\psi}(M^{*-j}\omega)|^2 d\omega. \end{aligned}$$

当 $\epsilon > 0$ 充分小时, $\omega_0 + \Omega_\epsilon$ 和 $\omega_0 + 2\pi\alpha_0 + \Omega_\epsilon$ 互不相交. 因此, 有

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} Q_{2,1} = \frac{(2\pi)^{-n}}{2|\det D|} \sum_{j=-J+1}^{+\infty} (|\hat{\psi}(M^{*-j}\omega_0)|^2 + |\hat{\psi}(M^{*-j}(\omega_0 + 2\pi\alpha_0))|^2). \quad (2.6)$$

接着估计 $Q_{2,2}$,

$$\begin{aligned} Q_{2,2} &= \frac{(2\pi)^{-n}}{|\det D|} \sum_{\substack{(j,k) \in I_{M,D}(\alpha_0), \\ -J+1 \leq j < \infty}} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{g}_\epsilon(\omega) \overline{\hat{g}_\epsilon(\omega + 2\pi\alpha_0)} \overline{\hat{\psi}(M^{*-j}\omega)} \hat{\psi}(M^{*-j}\omega + 2\pi D^{*-1}k) d\omega \\ &= \frac{(2\pi)^{-n}}{2|\Omega_\epsilon||\det D|} \sum_{\substack{(j,k) \in I_{M,D}(\alpha_0), \\ -J+1 \leq j < \infty}} \int_{\mathbb{R}^n} \{ \chi_{H_\epsilon(0)}(\omega) \chi_{H_\epsilon(0)}(\omega + 2\pi\alpha_0) + e^{i\lambda} \chi_{H_\epsilon(2\pi\alpha_0)}(\omega) \\ &\quad \times \chi_{H_\epsilon(0)}(\omega + 2\pi\alpha_0) + e^{-i\lambda} \chi_{H_\epsilon(0)}(\omega) \chi_{H_\epsilon(2\pi\alpha_0)}(\omega + 2\pi\alpha_0) + \chi_{H_\epsilon(2\pi\alpha_0)}(\omega) \\ &\quad \times \chi_{H_\epsilon(2\pi\alpha_0)}(\omega + 2\pi\alpha_0) \} \cdot \overline{\hat{\psi}(M^{*-j}\omega)} \hat{\psi}(M^{*-j}\omega + 2\pi D^{*-1}k) d\omega. \end{aligned}$$

当 $\epsilon > 0$ 充分小时, 可以得到 ω 和 $\omega + 2\pi\alpha_0$ 不同时属于方体 $H_\epsilon(0)$, ω 和 $\omega + 2\pi\alpha_0$ 也不同属于方体 $H_\epsilon(2\pi\alpha_0)$, 并且满足 $\omega_0 + 2\pi\alpha_0 + \Omega_\epsilon$ 和 $\omega_0 - 2\pi\alpha_0 + \Omega_\epsilon$ 不相交, 从而, 有

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} Q_{2,2} = \frac{(2\pi)^{-n} e^{-i\lambda}}{2|\det D|} \sum_{\substack{(j,k) \in I_{M,D}(\alpha_0), \\ -J+1 \leq j < \infty}} \overline{\hat{\psi}(M^{*-j}\omega_0)} \hat{\psi}(M^{*-j}\omega_0 + 2\pi D^{*-1}k). \quad (2.7)$$

类似地, 当 $\epsilon > 0$ 充分小时, 可以得到 ω 和 $\omega - 2\pi\alpha_0$ 不同时属于方体 $H_\epsilon(0)$, ω 和 $\omega - 2\pi\alpha_0$ 也不同属于方体 $H_\epsilon(2\pi\alpha_0)$, 并且 $\omega_0 + 4\pi\alpha_0 + \Omega_\epsilon$ 和 $\omega_0 + \Omega_\epsilon$ 不相交. 因而,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} Q_{2,3} = \frac{(2\pi)^{-n} e^{i\lambda}}{2|\det D|} \sum_{\substack{(j,k) \in I_{M,D}(-\alpha_0), \\ -J+1 \leq j < \infty}} \overline{\hat{\psi}(M^{*-j}(\omega_0 + 2\pi\alpha_0))} \hat{\psi}(M^{*-j}(\omega_0 + 2\pi\alpha_0) + 2\pi D^{*-1}k). \quad (2.8)$$

接下来估计 $Q_{2,4}$,

$$\begin{aligned} Q_{2,4} &= \frac{(2\pi)^{-n}}{|\det D|} \sum_{\alpha \in \Lambda(M,D) \setminus \{0, \pm\alpha_0\}} \sum_{\substack{(j,k) \in I_{M,D}(\alpha), \\ -J+1 \leq j < \infty}} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{g}_\epsilon(\omega) \\ &\quad \times \overline{\hat{g}_\epsilon(\omega + 2\pi\alpha)} \overline{\hat{\psi}(M^{*-j}\omega)} \hat{\psi}(M^{*-j}\omega + 2\pi D^{*-1}k) d\omega. \end{aligned}$$

记 $G = H'_\epsilon(0) \cup H'_\epsilon(2\pi\alpha_0) \cup H'_\epsilon(-2\pi\alpha_0)$, 其中 $H'_\epsilon(\beta) = \omega_0 + \beta + (\Omega_\epsilon - \Omega_\epsilon)$. 当 $\epsilon > 0$ 充分小时, G 的三个部分是互不相交的. 对于 $\alpha \in \Lambda(M,D) \setminus \{0, \pm\alpha_0\}$, 当 $\omega_0 + 2\pi\alpha \notin G$ 时, 有

$$\hat{g}_\epsilon(\omega) \overline{\hat{g}_\epsilon(\omega + 2\pi\alpha)} = 0.$$

当 $\omega_0 + 2\pi\alpha \in G$ 时, 下面至少一个关系式成立,

$$\alpha \in \frac{1}{2\pi}(\Omega_\epsilon - \Omega_\epsilon), \quad \alpha - \alpha_0 \in \frac{1}{2\pi}(\Omega_\epsilon - \Omega_\epsilon), \quad \alpha + \alpha_0 \in \frac{1}{2\pi}(\Omega_\epsilon - \Omega_\epsilon).$$

那么, 下面三个不等式至少一个成立,

$$|M^{*j} D^{*-1} k + \alpha_0| \leq \frac{\sqrt{n}}{\pi} \epsilon, \quad |M^{*j} D^{*-1} k - \alpha_0| \leq \frac{\sqrt{n}}{\pi} \epsilon, \quad |M^{*j} D^{*-1} k| \leq \frac{\sqrt{n}}{\pi} \epsilon.$$

记 D_j 为至少满足以上三个不等式中的一个的元素 k 的集合, 可以得到

$$|k| \leq \|D^*\| \|M^*\|^{-j} \left(|\alpha_0| + \frac{\sqrt{n}}{\pi} \epsilon \right).$$

从而, 存在正整数 J , 使得对于所有的 $j \geq J$, 满足 $|k| < \frac{1}{2}$ 和 $D_j = \emptyset$. 那么,

$$\begin{aligned} Q_{2,4} &= \frac{(2\pi)^{-n}}{|\det D|} \sum_{\alpha \in \Lambda(M,D) \setminus \{0, \pm\alpha_0\}} \sum_{\substack{(j,k) \in I_{M,D}(\alpha), \\ -J+1 \leq j < \infty, \\ k \in D_j}} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{g}_\epsilon(\omega) \\ &\quad \times \overline{\hat{g}_\epsilon(\omega + 2\pi\alpha)} \hat{\psi}(M^{*-j}\omega) \hat{\psi}(M^{*-j}\omega + 2\pi D^{*-1}k) d\omega \\ &= \frac{(2\pi)^{-n}}{|\det D|} \sum_{\alpha \in \Lambda(M,D) \setminus \{0, \pm\alpha_0\}} \sum_{\substack{(j,k) \in I_{M,D}(\alpha), \\ -J+1 \leq j < J}} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{g}_\epsilon(\omega) \\ &\quad \times \overline{\hat{g}_\epsilon(\omega + 2\pi\alpha)} \hat{\psi}(M^{*-j}\omega) \hat{\psi}(M^{*-j}\omega + 2\pi D^{*-1}k) d\omega. \end{aligned}$$

当 $\alpha \in \Lambda(M,D) \setminus \{0, \pm\alpha_0\}$ 时, 对所有的 $-J+1 \leq j \leq J$, 上面级数存在有限个非零项, 所以, 级数是绝对收敛的. 因而可以得到

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} Q_{2,4} = 0. \quad (2.9)$$

由 (2.2)–(2.9), 对于 $\mathbb{R}^n$ 中的几乎所有的 ω_0 , 有

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} &\left| \mathcal{H}(g_\epsilon(\omega)) - \frac{(2\pi)^{-n}}{2|\det D|} \sum_{j=-J+1}^{+\infty} (|\hat{\psi}(M^{*-j}\omega_0)|^2 + |\hat{\psi}(M^{*-j}(\omega_0 + 2\pi\alpha_0))|^2) \right. \\ &\quad - \frac{(2\pi)^{-n} e^{-i\lambda}}{2|\det D|} \sum_{\substack{(j,k) \in I_{M,D}(\alpha_0), \\ -J+1 \leq j < \infty}} \overline{\hat{\psi}(M^{*-j}\omega_0)} \hat{\psi}(M^{*-j}\omega_0 + 2\pi D^{*-1}k) \\ &\quad \left. - \frac{(2\pi)^{-n} e^{i\lambda}}{2|\det D|} \sum_{\substack{(j,k) \in I_{M,D}(-\alpha_0), \\ -J+1 \leq j < \infty}} \overline{\hat{\psi}(M^{*-j}(\omega_0 + 2\pi\alpha_0))} \hat{\psi}(M^{*-j}(\omega_0 + 2\pi\alpha_0) + 2\pi D^{*-1}k) \right| \\ &\leq \overline{\lim}_{\epsilon \rightarrow 0} |Q_1| + C\epsilon \\ &\leq C\epsilon. \end{aligned}$$

令 $J \rightarrow \infty$, $\epsilon \rightarrow 0$, 则有

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{H}(g_\epsilon(\omega)) &= \frac{1}{(2\pi)^n} (\Delta_0(\psi, \omega_0) + \Delta_0(\psi, \omega_0 + 2\pi\alpha_0) \\ &\quad + e^{-i\lambda} \Delta_{\alpha_0}(\psi, \omega_0) + e^{i\lambda} \Delta_{-\alpha_0}(\psi, \omega_0 + 2\pi\alpha_0)). \end{aligned}$$

由 $\Delta_{\alpha_0}(\psi, \omega_0)$ 的定义, 可以得到

$$e^{-i\lambda} \Delta_{\alpha_0}(\psi, \omega_0) = \overline{e^{i\lambda} \Delta_{-\alpha_0}(\psi, \omega_0 + 2\pi\alpha_0)}. \quad (2.10)$$

由引理 2.4, (1.3) 和 (2.10), 可以推出

$$\begin{aligned} \Delta_0(\psi, \omega_0) + \Delta_0(\psi, \omega_0 + 2\pi\alpha_0) + 2|\Delta_{\alpha_0}(\psi, \omega_0)| &= 1, \\ \Delta_0(\psi, \omega_0) + \Delta_0(\psi, \omega_0 + 2\pi\alpha_0) - 2|\Delta_{\alpha_0}(\psi, \omega_0)| &= 1. \end{aligned}$$

从上面两个等式, 可以得到

$$\frac{1}{|\det D|} \sum_{(j,k) \in I_{M,D}(\alpha)} \overline{\hat{\psi}(M^{*-j}\omega)} \hat{\psi}(M^{*-j}\omega + 2\pi D^{*-1}k) = \delta_{\alpha,0}, \quad \text{a.e. } \omega \in \mathbb{R}^n.$$

由引理 2.5 可知, $\{\psi_{j,k}\}_{j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}^n}$ 是 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 中的紧框架. □

定理 1.2 的证明 定义膨胀算子 $\mathcal{D}(f) = f(Mx)$. 对于任意的 $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, 有

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\mathcal{T}(f))(x) &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \langle f(t), \psi_{j,k}(t) \rangle \psi_{j,k}(Mx) \\ &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} |\det M|^{j+1} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(Mt) \overline{\psi(M^{j+1}t - Dk)} dt \right) \psi(M^{j+1}x - Dk) \\ &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \langle f(Mt), \psi_{j+1,k}(t) \rangle \psi_{j+1,k}(x) \\ &= \mathcal{T}(\mathcal{D}(f))(x), \end{aligned}$$

从而可得算子 $\mathcal{T}$ 与 $\mathcal{D}$ 可交换.

根据假设可得对于函数 $\sigma_{a,0}(x)$, (1.4) 成立. 那么, 对于函数 $\sigma_{a,j}(x)$, (1.4) 成立. 这意味着对于函数 $h(x) \in E$, (1.4) 成立, 其中 E 是 $\sigma_{a,j}(x)$ 的所有有限线性组合所构成的集合. 根据引理 2.6 可得 $\forall f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, $\exists h(x) \in E$, 使得 $\|h - f\| < \varepsilon$.

对于任意的 $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, 有

$$\begin{aligned} \frac{1}{B} \sum_{j,k} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k}(x) &= \frac{1}{B} \sum_{j,k} \langle f(t) - h(t), \psi_{j,k}(t) \rangle \psi_{j,k}(x) + \frac{1}{B} \sum_{j,k} \langle h(t), \psi_{j,k}(t) \rangle \psi_{j,k}(x) \\ &=: S_1 + S_2. \end{aligned}$$

由假设可得

$$\begin{aligned} S_2 &= \frac{1}{B} \sum_{j,k} \langle h(t), \psi_{j,k}(t) \rangle \psi_{j,k}(x) = h(x), \\ \|S_1\|^2 &= \|\mathcal{T}(f - h)(x)\|^2 \leq B^2 \|f - h\|^2 < B^2 \varepsilon^2. \end{aligned}$$

因为 ψ 生成 Bessel 序列, 那么, $\mathcal{T}$ 是有界算子, 所以, 最后的不等式成立. 因而,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{B} \sum_{j,k} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k}(x) - f(x) \right\| &= \|S_1 + S_2 - f(x)\| \leq \|S_1\| + \|S_2 - f(x)\| \\ &= \|S_1\| + \|h - f\| < \|S_1\| + \varepsilon < C\varepsilon. \end{aligned}$$

所以, 对于任意的 $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, (1.4) 成立. □

定理 1.3 的证明 定义平移算子 τ 为 $\tau_\beta(f) = f(x + \beta)$. 对于卷积型的序列 $\{\mathcal{T}_J(f)(x)\}_{J \in \mathbb{Z}}$, 有

$$\tau_\beta \mathcal{T}_J(f)(x) = \mathcal{T}_J \tau_\beta(f)(x).$$

根据假设, 给定的特征函数 $g(x) = \chi_{[0,1]^n}(x)$ 满足

$$g(x) = \frac{1}{B} \mathcal{T}(g)(x).$$

因此, 有

$$g(x) = \frac{1}{B} \lim_{J \rightarrow +\infty} \mathcal{T}_J(g)(x).$$

因为卷积算子与平移算子可交换, 那么, 对于任意的 $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \in \mathbb{R}^n$, 有

$$g(x + \beta) = \frac{1}{B} \mathcal{T}(g(t + \beta))(x),$$

其中

$$g(x + \beta) = \chi_{[-\beta_1, 1-\beta_1] \times \dots \times [-\beta_n, 1-\beta_n]}(x).$$

由于 β 的任意性, 对于 (1.5) 所定义的函数, (1.4) 成立. 由定理 1.2 可知, 对于任意的 $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, (1.4) 成立. $\square$

3 附注

注 3.1 对于定理 1.2, 我们选择 $\mathbb{R}^n$ 的其他剖分, 可以得到相似的结论.

定理 3.1 设 $\{\psi_{l,j,k}\}_{1 \leq l \leq L, j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}^n}$ 是 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 中的 Bessel 序列, 并且 $\mathcal{T}(f)(x)$ 是如 (1.1) 所定义的算子. 如果 (1.4) 对于函数

$$f(x) = \chi_{[\gamma_1+a_1h_1, \gamma_1+(a_1+1)h_1] \times [\gamma_2+a_2h_2, \gamma_2+(a_2+1)h_2] \times \dots \times [\gamma_n+a_nh_n, \gamma_n+(a_n+1)h_n]}(x)$$

成立, 其中 $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的固定的元素, $h = (h_1, \dots, h_n)$ 是 $\mathbb{Z}^n$ 中的固定的元素,

$$a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n,$$

那么, 对于任意的 $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, (1.4) 成立.

注 3.2 对于定理 1.3, 我们选择一般的特征函数, 可以得到相似的结论.

定理 3.2 设 $\{\psi_{l,j,k}\}_{1 \leq l \leq L, j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}^n}$ 是 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 中的 Bessel 序列, 并且 $\mathcal{T}(f)(x)$ 是如 (1.1) 所定义的算子. 假设对于所有的 $J \in \mathbb{Z}$, 部分和

$$\mathcal{T}_J(f)(x) = \sum_{j=-\infty}^J \sum_{l=1}^L \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \langle f, \psi_{l,j,k} \rangle \psi_{l,j,k}(x)$$

是卷积型的. 如果 (1.4) 对于函数

$$g(x) = \chi_{[a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]}(x)$$

成立, 其中 $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ ($i = 1, 2, \dots, n$), 且满足 $a_i < b_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$), 那么, 对于任意的 $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, (1.4) 成立.

致谢 对审稿人对本文初稿提出的改进意见表示真诚的感谢.

参考文献

- 1 Korovkin P P. Linear Operators and Approximation Theory. Delhi: Hindustan Publ Co, 1960
- 2 Chui C K, Shi X L. Inequalities of Littlewood-Paley type for frames and wavelets. SIAM J Math Anal, 1993, 24: 263-277

- 3 施咸亮, 陈芳. Gabor 框架的必要条件. 中国科学 A 辑, 2006, 36: 1413–1421
- 4 Chui C K, Czaja W, Maggioni M, et al. Characterization of general tight wavelets frames with matrix dilations and tightness preserving oversampling. J Fourier Anal Appl, 2002, 8: 173–200
- 5 施咸亮, 陈芳. 仿射框架的必要条件和充分条件. 中国科学 A 辑, 2005, 35: 831–840
- 6 Daubechies I. Ten Lecture on Wavelets. Boston: Academic Press, 1992
- 7 Chui C K, Shi X L. Orthonormal wavelets and tight frames with arbitrary real dilation. Appl Comput Harmon Anal, 2002, 9: 243–264
- 8 Daubechies I. The wavelet transform time-frequency localization and signal analysis. IEEE Trans Inform Theory, 1990, 36: 961–1005

Theorems of Korovkin type for tight affine frames

SHI XianLiang & CHEN Jie

Abstract Korovkin theorem on linear positive operators in approximation theory is a famous theorem. In this paper, we will establish several theorems of Korovkin type for tight affine frames.

Keywords tight frame, Korovkin type theorem, Bessel sequence, convolution

MSC(2010) 42C40

doi: 10.1360/012013-184