

# 一种改进的分层剪切湍流亚格子尺度模型及其应用\*

刘难生 仲峰泉 陆夕云 庄礼贤<sup>\*\*</sup>

(中国科学技术大学力学和机械工程系, 合肥 230026)

**摘要** 提出了一种新型的分层剪切湍流应力和湍流热通量的动力学亚格子尺度(SGS)模型, 并就热分层槽道湍流问题, 计算验证了该模型的正确性。采用大涡模拟方法和该动力学亚格子尺度模型, 数值研究了在浮力和剪切双重作用下的稳定分层和不稳定分层槽道热剪切湍流, 探讨了某些湍流特性随 Richardson 数的变化规律, 并分析了相关的流动物理机制。

**关键词** 大涡模拟(LES) 动力学亚格子尺度(SGS)模型 热分层剪切湍流 槽道湍流

分层剪切湍流是一种在浮力和剪切双重作用下的复杂流动现象, 它广泛存在于自然界和许多工程问题, 例如, 大气和海洋动力学、化学工程、能源工程和空间技术等领域中, 具有重大的应用背景。同时, 关于分层剪切湍流的物理机理的研究也有重要的学术价值。湍流研究历经百年, 近 10 多年来, 大涡模拟(LES)方法逐渐成为研究复杂湍流问题的一种重要方法, 它是将湍流的大尺度脉动和小尺度脉动分开, 对大尺度结构进行直接数值模拟, 而用建立亚格子尺度(SGS)模型来模拟小尺度脉动的作用。这样, 建立合理的 SGS 模型就成为 LES 方法的关键问题, 受到人们的密切关注。气象学家 Smagorinsky<sup>[1]</sup>首先提出了一种涡黏性 SGS 模型, 由于其形式简单, 曾得到了广泛的应用。但该模型有其固有的缺陷, 比如, 引起过度耗散, 不能描述局部的能量反向传递(back-scatter)和间歇现象, 以及, 对固壁湍流必须采用壁面模型等等。后来的工作有 Bardina 等<sup>[2]</sup>提出的尺度相似 SCS 模型, Yoshizawa<sup>[3]</sup>采用直接相互作用理论和统计方法建立的一种适用于浮力和剪切双重驱动的湍流 SGS 模型。到了 90 年代, Germano 等<sup>[4]</sup>提出了一种所谓的动力学亚格子尺度模型(或称“动态 SGS 模型”), 该模型基于合理的物理分析, 设法避免了引入人为的经验参数, 从而能较好地反映湍流的局部动力学特性。吸收 Germano 等人<sup>[4]</sup>的动力学模型思想, Zang 等<sup>[5]</sup>以 Bardina 的尺度相似模型<sup>[2]</sup>为基础, 又提出了一种混合动力学 SGS 模型。刘宇宇等<sup>[6]</sup>也在 Yoshizawa 模型的基础上发展了一种适用于热分层湍流的半动力学 SGS 模型, 并取得了较好的模拟结果。但是, 该模型仅能以动力学方法定出两个模型系数, 还有另外两个模型系数仍需经验地给出, 所以称之为“半动力学模型”。

2001-07-26 收稿

\* 国家自然科学基金(批准号: 59776011, 19889210)、国家基础研究发展规划、中国科学院“百人计划”和教育部“跨世纪优秀人才培养计划”资助项目

\*\* E-mail: lxzhuang@ustc.edu.cn

关于剪切和浮力双重作用下的分层湍流大涡模拟研究工作起步较晚。Gerz 和 Schumann<sup>[7]</sup>采用直接模拟(DNS)方法研究了稳定分层均匀湍流。90 年代,Cabot 和 Moin<sup>[8]</sup>采用 LES 方法研究了具有热传导的槽道湍流问题,但他们的研究将温度场处理成被动输运的标量,故没有考虑浮力对湍流的作用。Ciofalo<sup>[9]</sup>用 LES 方法研究了平板湍流和粗糙壁面湍流及其热传导现象。Wang 和 Pletcher<sup>[10]</sup>从可压缩 Navier-Stokes 方程出发,采用动力学 SGS 模型,用 LES 方法研究了热传导槽道湍流问题。但是,其中 SGS 湍流热通量模型采用了 Reynolds 比拟近似。近年来国内在湍流高级数值模拟方面也开展了不少工作,如许春晓和张兆顺等<sup>[11,12]</sup>结合实验在 DNS 和 LES 方面开展了有价值的研究,苏铭德用 LES 方法计算了直槽和弯槽湍流问题<sup>[13]</sup>,李家春等<sup>[14]</sup>采用 LES 研究了环境流动问题,以及陆夕云等<sup>[15,16]</sup>采用 LES 方法研究了定态圆柱及振荡圆柱绕流的湍流尾迹。

本文采用 LES 方法进一步研究了具有浮力和剪切双重驱动的槽道湍流问题。首先,作为上述半动力学亚格子模型的一种改进,本文借助 Lilly<sup>[17]</sup>构造动力学 SGS 模型的思想,发展了一种适用于热分层剪切湍流大涡模拟的新的完全动力学 SGS 模型。这种模型既考虑了剪切应变和温度梯度对 SGS 湍流应力和湍流热通量的耦合影响,同时,所有的模型系数又可通过计算当时当地的湍流局部特性来确定,从而不需要人为地给定模型常数。我们通过大量的实例计算验证了该模型的可靠性,并运用它对槽道热稳定和热不稳定分层湍流进行了计算,研究了分层剪切湍流主要变量的一阶和二阶关联量在不同 Richardson 数下的变化规律,得到了若干有意义的新结果。

## 1 数学模型

本文从 Boussinesq 近似下的不可压缩 Navier-Stokes 方程出发,对于槽道热分层湍流采用槽道的半高度  $\delta$ 、槽道中心的最大平均速度  $u_m$  和槽道上壁减下壁的温度差  $\Delta T$  作为特征量对方程进行无量纲化,并对该方程进行滤波处理,从而得出无量纲形式的大涡模拟方程为

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_i \bar{u}_j) = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{1}{Re_m} \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + Ri \bar{T} \delta_{i3}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{T} \bar{u}_j)}{\partial x_j} = \frac{1}{Re_m Pr} \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial q_j}{\partial x_j} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \tau_{ij} &= (\overline{u_i u_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j) - \frac{1}{3} (\overline{u_i u_i} - \bar{u}_i \bar{u}_i) \delta_{ij}, \\ q_j &= \overline{T u_j} - \bar{T} \bar{u}_j, \end{aligned} \quad (4)$$

这里 Reynolds 数定义为  $Re_m = u_m \delta / \nu$ , Prandtl 数为  $Pr = \nu / \kappa$ , Richardson 数为  $Ri = \alpha g \Delta T \delta / u_m^2$ , 其中  $\alpha$  为热膨胀系数,  $\nu$  为运动黏性系数,  $\kappa$  为热扩散系数,  $g$  是重力加速度,  $\bar{T} = \bar{T} - \langle \bar{T} \rangle$ ,  $\langle \rangle$  表示在与固壁平行平面内的平均,  $x_3$  表示垂直方向的坐标, 上标“—”代表滤波后的变量,  $\bar{p}$  表示滤波后的压力,  $\bar{u}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) 分别表示滤波后的速度分量。 $\tau_{ij}$  和  $q_j$  分别表示亚格子尺度湍流应力和湍流热通量, 需要用 SGS 模型进行模拟。

## 2 分层剪切湍流的新型动力学 SGS 模型

### 2.1 模型的数学形式

在构造模型的数学表达式时,假设湍流应力  $\tau_{ij}$  和湍流热通量  $q_i$  仅由当时当地的  $\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}, \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_i}$ ,  $g_i$ , 以及一些标量来决定。在这一假设下,可以形式上写出

$$\begin{cases} \tau_{ij} = F_{ij}\left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}, \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_i}, g_i, S\right), \\ q_i = Q_i\left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}, \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_i}, g_i, S\right). \end{cases} \quad (5)$$

这里  $S$  代表标量群,将出现在模型的系数中。根据张量运算法则,  $\tau_{ij}$  和  $q_i$  的 Taylor 展开式应写为

$$\begin{aligned} \tau_{ij} &= a_1\left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i}\right) + b_1 g_k \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_k} \delta_{ij} + c_1 g_i \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} + d_1 g_j \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_i} \\ &\quad + e_1 g_k \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_k} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i}\right) + f_1 \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k} + \dots, \end{aligned} \quad (6)$$

$$q_i = a_2 g_i + b_2 g_j \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i}\right) + c_2 \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_i} + d_2 \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \dots \quad (7)$$

由于  $\tau_{ij}=0$  及  $g_i=g\delta_{i3}$ , 方程(6)中右端的第 2、第 3 及第 4 项可以简写成

$$b_1 \left( \delta_{i3} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} + \delta_{j3} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{k3} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_k} \delta_{ij} \right), \quad (8)$$

因此,线性 SGS 模型的数学形式为

$$\tau_{ij} = -a_1^* \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - b_1^* \left( g\delta_{i3} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} + g\delta_{j3} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_i} - \frac{2}{3} g\delta_{k3} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_k} \delta_{ij} \right), \quad (9)$$

$$q_i = -a_2^* g\delta_{i3} + c_2^* \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_i} + b_2^* g\delta_{j3} \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right), \quad (10)$$

其中二阶以上的梯度项已被略去。

### 2.2 模型系数的确定

根据量纲分析,(9)和(10)式中系数  $a_1^*, b_1^*, a_2^*, b_2^*$  和  $c_2^*$  可以表示成

$$\begin{cases} a_1^* = C_1 \bar{\Delta}^2 |\bar{S}|, & b_1^* = C_2 \bar{\Delta}^2, & a_2^* = C_3 \bar{\Delta}^2 \frac{|\bar{S}_T|}{|\bar{S}|}, \\ a_2^* = C_4 \bar{\Delta}^2 |\bar{S}|, & b_2^* = C_5 \bar{\Delta}^2 \frac{|\bar{S}_T|}{|\bar{S}|^2}, \end{cases} \quad (11)$$

这里  $\bar{S}_{ij} = \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i}$ ;  $|\bar{S}| = (\bar{S}_{ij}\bar{S}_{ij})^{1/2}$ ;  $|\bar{S}_T| = \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_i}$ ;  $\bar{\Delta}$  表示网格滤波(grid-filter)宽度,  $C_1, C_2, C_3, C_4$  和  $C_5$  是随时间和空间变化的无量纲系数,它们将由当时当地的大涡脉动信息确定。基于(11),(9)和(10)式的无量纲形式可写为

$$\tau_{ij} = -C_1 \bar{\Delta}^2 |\bar{S}| \bar{S}_{ij} - C_2 \bar{\Delta}^2 R_i \left( \delta_{i3} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} + \delta_{j3} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{k3} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_k} \delta_{ij} \right), \quad (12)$$

$$q_i = -C_3 \bar{\Delta}^2 \frac{|\bar{S}_T|}{|\bar{S}|} Ri \delta_{i3} + C_4 \bar{\Delta}^2 |\bar{S}| \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_i} + C_5 \bar{\Delta}^2 \frac{|\bar{S}_T|}{|\bar{S}|^2} Ri \delta_{k3} \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_i} \right). \quad (13)$$

模型的系数  $C_i$  ( $i = 1, \dots, 5$ ) 采用二次滤波和最小二乘法来确定。为书写方便, 将(12)和(13)式写成如下形式:

$$\tau_{ij} = -C_1 \bar{\Delta}^2 K_{ij}^{G1} - C_2 \bar{\Delta}^2 K_{ij}^{G2}, \quad (14)$$

$$q_i = -C_3 \bar{\Delta}^2 K_i^{G3} + C_4 \bar{\Delta}^2 K_i^{G4} + C_5 \bar{\Delta}^2 K_i^{G5}, \quad (15)$$

这里

$$K_{ij}^{G1} = |\bar{S}| + \bar{S}_{ij}; \quad K_{ij}^{G2} = Ri \left( \delta_{i3} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} + \delta_{j3} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{k3} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_k} \delta_{ij} \right);$$

$$K_i^{G3} = \frac{|\bar{S}_T|}{|\bar{S}|} Ri \delta_{i3}; \quad K_i^{G4} = |\bar{S}| + \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_i}; \quad K_i^{G5} = \frac{|\bar{S}_T|}{|\bar{S}|^2} Ri \delta_{k3} \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_i} \right).$$

然后采用类似于 Germano 等<sup>[4]</sup>和 Lilly<sup>[17]</sup>构造纯剪切湍流动力学 SGS 模型的思想, 对方程(2)再作一次检验滤波(test-filter)后, 二次滤波亚格子尺度湍流应力的表达式为

$$T_{ij} = \hat{\bar{u}_i \bar{u}_j} - \hat{\bar{u}_i} \hat{\bar{u}_j}, \quad (16)$$

式中上标“ $\hat{\cdot}$ ”代表检验滤波后的变量。按理, 若两项滤波尺度都在惯性子域范围内, 则  $T_{ij}$  也应适用(12)式的 SGS 模型, 并可简单地写成

$$T_{ij} = -C_1 \hat{\bar{\Delta}}^2 \hat{K}_{ij}^{T1} - C_2 \hat{\bar{\Delta}}^2 \hat{K}_{ij}^{T2}, \quad (17)$$

这里

$$K_{ij}^{T1} = |\hat{\bar{S}}| + \hat{\bar{S}}_{ij}, \quad K_{ij}^{T2} = Ri \left( \delta_{i3} \frac{\hat{\partial} \bar{T}}{\partial x_j} + \delta_{j3} \frac{\hat{\partial} \bar{T}}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{k3} \frac{\hat{\partial} \bar{T}}{\partial x_k} \delta_{ij} \right),$$

$$\hat{\bar{S}}_{ij} = \left( \frac{\partial \hat{\bar{u}}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \hat{\bar{u}}_j}{\partial x_i} \right), \quad |\hat{\bar{S}}| = (\hat{\bar{S}}_{ij} \hat{\bar{S}}_{ij})^{1/2}.$$

进一步定义

$$L_{ij} = T_{ij} - \hat{\bar{u}}_{ij}, \quad (18)$$

将(4)和(16)式代入上式后, 有如下关系:

$$L_{ij} = \hat{\bar{u}}_{ij} - \hat{\bar{u}}_i \hat{\bar{u}}_j, \quad (19)$$

该式右侧可以直接从 LES 结果计算出来。另一方面, 若采用 SGS 模型, 又应有

$$L_{ij} = -C_1 \hat{\bar{\Delta}}^2 K_{ij}^{T1} - C_2 \hat{\bar{\Delta}}^2 K_{ij}^{T2} + C_1 \bar{\Delta}^2 \hat{K}_{ij}^{G1} + C_2 \bar{\Delta}^2 \hat{K}_{ij}^{G2}, \quad (20)$$

如果 SGS 模型精确成立, 则(19)和(20)式给出的  $L_{ij}$  应相等。但此处的线化 SGS 模型只是一阶近似值, 故两种  $L_{ij}$  值不可能精确相等。引入残差

$$\epsilon_{ij} = C_1 (\bar{\Delta}^2 \hat{K}_{ij}^{G1} - \hat{\bar{\Delta}}^2 K_{ij}^{T1}) + C_2 (\bar{\Delta}^2 \hat{K}_{ij}^{G2} - \hat{\bar{\Delta}}^2 K_{ij}^{T2}) - L_{ij}, \quad (21)$$

这里右边的  $L_{ij}$  由(19)式算出。若选择  $C_i$  使得残差  $\epsilon_{ij}$  取极小值, 则该系数必将给出  $C_i$  的最佳选择。于是, 我们采用最小二乘法使  $\epsilon_{ij}$  取极小, 以确定系数  $C_1$  和  $C_2$ ; 而为了使  $\epsilon_{ij}$  达到最小值, 应满足

$$\frac{\partial \varepsilon_{ij}^2}{\partial C_1} = 0, \quad \frac{\partial \varepsilon_{ij}^2}{\partial C_2} = 0. \quad (22)$$

据此,可得出

$$\begin{cases} C_1 M + C_2 N - R_1 = 0, \\ C_1 N + C_2 L - R_2 = 0, \end{cases} \quad (23)$$

其中

$$\begin{aligned} M &= (\bar{\Delta}^2 \hat{K}_{ij}^{G1} - \hat{\Delta}^2 K_{ij}^{T1})^2, & N &= (\bar{\Delta}^2 \hat{K}_{ij}^{G1} - \hat{\Delta}^2 K_{ij}^{T1})(\bar{\Delta}^2 \hat{K}_{ij}^{G2} - \hat{\Delta}^2 K_{ij}^{T2}), \\ L &= (\bar{\Delta}^2 \hat{K}_{ij}^{G2} - \hat{\Delta}^2 K_{ij}^{T2})^2, & R_1 &= L_{ij}(\bar{\Delta}^2 \hat{K}_{ij}^{G1} - \hat{\Delta}^2 K_{ij}^{T1}), \\ R_2 &= L_{ij}(\bar{\Delta}^2 \hat{K}_{ij}^{G2} - \hat{\Delta}^2 K_{ij}^{T2}). \end{aligned} \quad (24)$$

这样,SGS湍流应力模型(12)中的系数 $C_1$ 和 $C_2$ 可以求得为

$$C_1 = \frac{\langle R_2 N - R_1 L \rangle}{\langle N^2 - LM \rangle}; \quad C_2 = \frac{\langle R_1 N - R_2 M \rangle}{\langle N^2 - LM \rangle}, \quad (25)$$

这里 $\langle \rangle$ 表示某种空间平均。取空间平均是为了避免LES计算中产生局部振荡<sup>[16]</sup>。在本文的槽道湍流计算中,是在与壁面平行的平面内做空间平均。对于SGS湍流热通量模型(13)中系数 $C_3$ , $C_4$ 和 $C_5$ 的确定,也可采用类似的做法。由此可得下面的线性方程组:

$$\begin{cases} C_3 M_{33} - C_4 M_{34} - C_5 M_{35} = R_3, \\ C_3 M_{34} - C_4 M_{44} - C_5 M_{45} = R_4, \\ C_3 M_{35} - C_4 M_{45} - C_5 M_{55} = R_5, \end{cases} \quad (26)$$

其中

$$\begin{aligned} M_{33} &= (\bar{\Delta}^2 \hat{K}_i^{G3} - \hat{\Delta}^2 K_i^{T3})^2, & M_{34} &= (\bar{\Delta}^2 \hat{K}_i^{G3} - \hat{\Delta}^2 K_i^{T3})(\bar{\Delta}^2 \hat{K}_i^{G4} - \hat{\Delta}^2 K_i^{T4}), \\ M_{44} &= (\bar{\Delta}^2 \hat{K}_i^{G4} - \hat{\Delta}^2 K_i^{T4})^2, & M_{45} &= (\bar{\Delta}^2 \hat{K}_i^{G4} - \hat{\Delta}^2 K_i^{T4})(\bar{\Delta}^2 \hat{K}_i^{G5} - \hat{\Delta}^2 K_i^{T5}), \\ M_{55} &= (\bar{\Delta}^2 \hat{K}_i^{G5} - \hat{\Delta}^2 K_i^{T5})^2, & M_{35} &= (\bar{\Delta}^2 \hat{K}_i^{G3} - \hat{\Delta}^2 K_i^{T3})(\bar{\Delta}^2 \hat{K}_i^{G5} - \hat{\Delta}^2 K_i^{T5}), \\ R_3 &= H_i(\bar{\Delta}^2 \hat{K}_i^{G3} - \hat{\Delta}^2 K_i^{T3}), & R_4 &= H_i(\bar{\Delta}^2 \hat{K}_i^{G4} - \hat{\Delta}^2 K_i^{T4}), \\ R_5 &= H_i(\bar{\Delta}^2 \hat{K}_i^{G5} - \hat{\Delta}^2 K_i^{T5}), & K_i^{T3} &= \frac{|\hat{\bar{S}}_T|}{|\hat{\bar{S}}|} R_i \delta_{i3}, \\ K_i^{T4} &= |\hat{\bar{S}}| \frac{\partial \hat{\bar{T}}}{\partial x_i}, & K_i^{T5} &= \frac{|\hat{\bar{S}}_T|}{|\hat{\bar{S}}|^2} R_i \delta_{i3} \left( \frac{\partial \hat{\bar{u}}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \hat{\bar{u}}_k}{\partial x_i} \right), \end{aligned} \quad (27)$$

$$H_i = -C_3 \bar{\Delta}^2 K_i^{T3} + C_4 \bar{\Delta}^2 K_i^{T4} + C_5 \bar{\Delta}^2 K_i^{T5} + C_3 \bar{\Delta}^2 \hat{K}_i^{G3} - C_4 \bar{\Delta}^2 \hat{K}_i^{G4} - C_5 \bar{\Delta}^2 \hat{K}_i^{G5}.$$

由(26),(27)式可以确定系数 $C_3$ , $C_4$ 和 $C_5$ 。不难验证,当Richardson数等于零时,该模型将退化为Germano的纯剪切湍流动力学SGS模型<sup>[4]</sup>。

### 3 数值方法

利用本文所发展的新SGS模型,我们对充分发展的槽道热分层湍流进行了大涡模拟计

算。首先,通过数值试验验证上述新模型的正确性;然后,研究了槽道稳定分层湍流和不稳定分层湍流的流动特性和物理机理。计算中沿槽道流向和展向取周期性边界条件,槽道的上下壁取无滑移、无穿透条件(无需采用“壁面律模型”是本方法的另一优点)。流动由给定流向的常压力梯度驱动,速度初场采用二维 Poiseuille 速度分布,并叠加上由 Orr-Sommerfeld 方程所解得的最不稳定模态。在纯剪切湍流充分发展后,再在上下壁施加一定的温差,同时在槽道壁面法向取温度的线性分布作为此时的温度场,继续进行 LES 计算,直到进入分层湍流的稳定状态。

求解控制方程(1)~(3)时,采用 Kim 和 Moin<sup>[18]</sup>提出的分裂步法进行数值求解。控制方程(1)~(3)沿槽道流向和展向的空间导数采用谱方法离散;而沿槽道法向采用二阶中心差分离散。在时间推进求解中,对流项用二阶 Adams-Basforth 格式;黏性项及压力梯度项采用二阶 Crank-Nicolson 格式。为了增加槽道上下壁附近的网格分辨率,沿槽道法向进行了坐标伸缩变换<sup>[6]</sup>。

## 4 计算结果及讨论

在本文计算中,计算域沿流向和展向的长度分别取为  $2\pi\delta$  和  $4\pi\delta/3$ ,沿壁面法向、流向和展向的网格数分别为  $65 \times 65 \times 97$ ,通过数值试验,证明了在这一计算网格数下计算结果已不再随网格数的增加而变化。

### 4.1 新 SGS 模型的验证

为了肯定程序和新 SGS 模型的可靠性,我们作了大量的算例验证。其中一个典型的算例是  $Re_m = 13800$ 、 $Ri = 0$  时充分发展的槽道湍流,这也是 Moin 和 Kim<sup>[19]</sup>详细研究过的流动问题。图 1 和 2 给出了壁面法向湍流脉动强度  $\langle v_{rms} \rangle$  和湍流剪应力  $\langle u'v' \rangle$  沿法向坐标  $y^+$  的分布。为了比较,图中还给出了 Moin 和 Kim<sup>[19]</sup>,以及刘宁宇等<sup>[6]</sup>的 LES 计算结果。从图 1 可以看出,本文结果与 Moin 和 Kim<sup>[19]</sup>的 LES 计算结果相符很好,与刘宁宇等<sup>[6]</sup>的结果略有偏差。图 2 表明,湍流剪应力的分布除了在  $20 < y^+ < 50$  处几种模型的计算结果稍有不同外,所有的计算结果均符合较好。

我们还用本方法计算了 Iida 等<sup>[20]</sup>用直接模拟(DNS)研究过的一些算例,这里仅以其中一

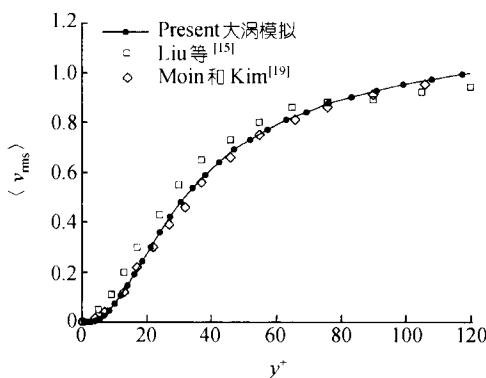


图 1 法向湍流脉动强度  $\langle v_{rms} \rangle$  沿壁面法向坐标  $y^+$  的分布 ( $Ri = 0$ )

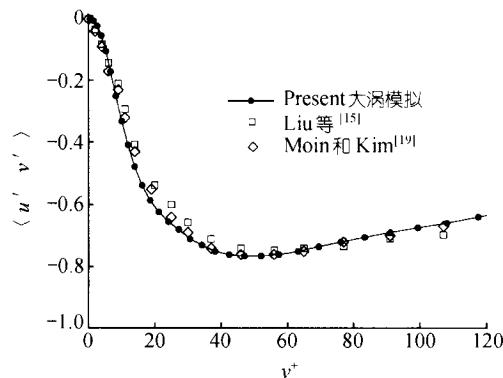


图 2 湍流剪应力  $\langle u'v' \rangle$  沿壁面法向坐标  $y^+$  的分布 ( $Ri = 0$ )

一个 DNS 算例, 即  $Re_m = 3600$ ,  $Ri = -0.045$ , 进一步验证本文所提出的动力学 SGS 模型的正确性。图 3 给出了湍流脉动分量  $u_{rms}$ ,  $v_{rms}$  和  $w_{rms}$  沿壁面法向坐标  $y^+$  的分布, 它们与 DNS 结果相当吻合。顺便指出, 随着  $y^+$  增大,  $(u, v, w)_{rms}$  强度趋于一致, 这反映当远离壁面时, 湍流有向各向同性接近的趋势。图 4 给出了沿壁面法向分布的法向热通量, 图 5 和 6 分别给出了流向平均速度  $\langle \bar{u} \rangle$  以及湍流剪应力  $\langle u'v' \rangle$  沿壁面法向的分布, 它们表明, 本文的 LES 计算结果与 DNS 结果吻合良好。

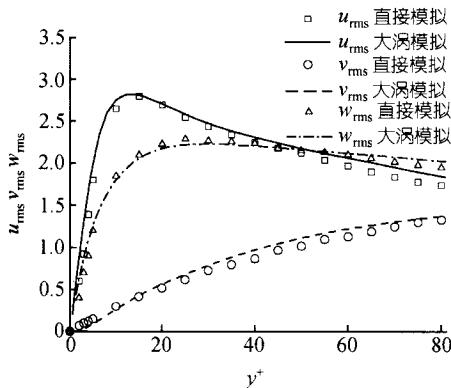


图 3 湍流脉动分量  $u_{rms}$ 、 $v_{rms}$  和  $w_{rms}$  沿壁面法向坐标  $y^+$  的分布 ( $Ri = -0.04$ )

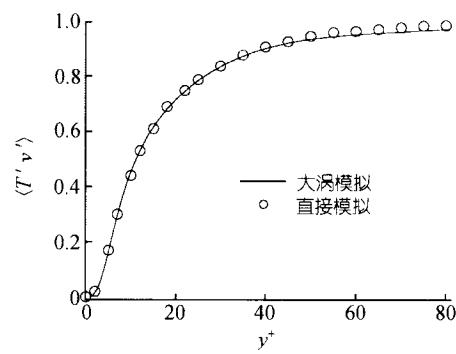


图 4 法向热通量沿壁面法向坐标  $y^+$  的分布 ( $Ri = -0.04$ )

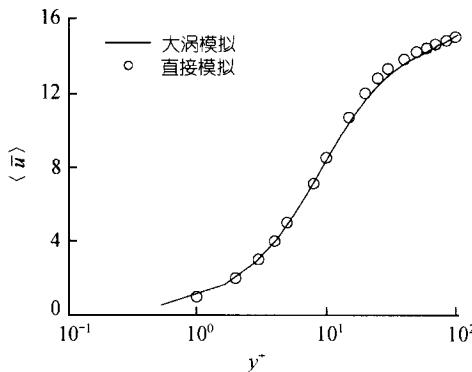


图 5 流向平均速度沿壁面向坐标  $y^+$  的分布 ( $Ri = -0.04$ )

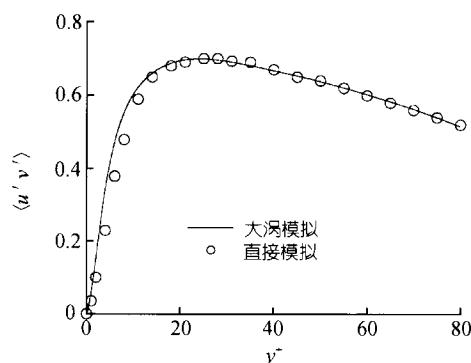


图 6 湍流剪应力沿壁面法向坐标  $y^+$  的分布 ( $Ri = -0.04$ )

因此, 可以认定本文提出的新动力学 SGS 模型是可靠的, 能够作为热分层剪切湍流大涡模拟研究的一种更合理的 SGS 模型。下面  $Ri \neq 0$  的各种 LES 计算结果还将继续证明本文提出的动力学 SGS 模型能有效地应用于分层剪切湍流的大涡模拟。

#### 4.2 稳定分层槽道湍流的大涡模拟

对于稳定热分层槽道湍流, Richardson 数大于零。这里取  $Re_m = 10000$ ,  $Pr = 0.6$ , 并结合几种不同的 Richardson 数。在分层湍流的 LES 计算中, 采用充分发展的纯剪切湍流场作为初始条件, 并在  $t = 0$  时在上下两壁突然施加温度差。图 7 给出了  $Ri = 0.06$ ,  $0.1$ ,  $0.3$  和  $1.0$  时湍

流平均脉动动能  $k = \langle (\bar{u}'^2 + \bar{v}'^2 + \bar{w}'^2)/2 \rangle$  随时间的演变过程。可以看出,当  $Ri = 0$  时,湍动能将随时间单调减少,而且 Richardson 数越大,湍动能将减少得越快,这说明了稳定分层将起到抑制湍流的作用。但是,当  $Ri$  进一步增大到  $Ri = 1.0$  时,湍动能却表现为先减少,再增大,最后又减少的趋势。关于这一现象,我们将稍后给出较详细的解释。

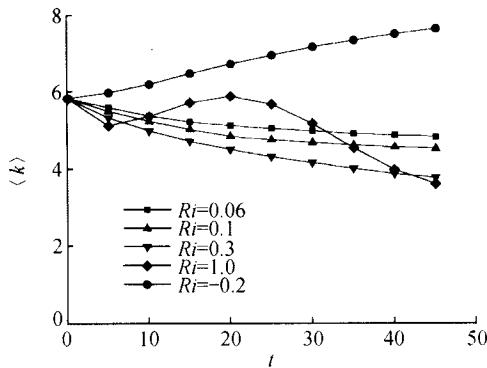


图 7 不同 Richardson 数下湍流平均脉动动能随时间  $t$  的演变

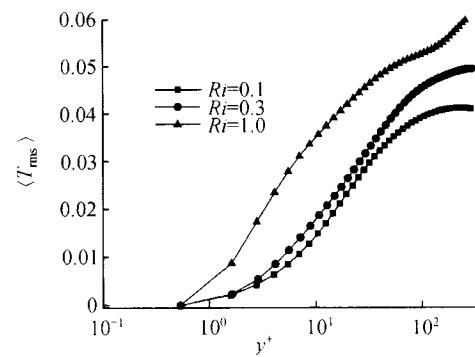


图 8 不同 Richardson 数下温度脉动强度的分布

图 8 给出了当  $t = 45$  时,充分发展分层湍流的温度脉动强度的分布。随着 Richardson 数的增大,温度脉动强度也将增大,这是因为稳定分层会将剪切形成的湍流动能转化为分层流体的势能。因此,表征湍流势能的脉动温度将随 Richardson 数增大而增大(分层湍流的势能定义为  $E_p = \left( \frac{\alpha \delta g}{\Delta T} \right) \overline{T^2}$ )。

值得提出的是,在大 Richardson 数( $Ri = 1.0$ )的稳定分层槽道湍流计算中,我们的 LES 结果捕捉到了两种重要的反常现象,即在施加两壁温差以后的过渡过程中出现了反向的热量输运和湍流剪切应力的反常分布。

图 9 给出的是  $t = 15$  时不同 Richardson 数下槽道湍流法向热通量分布(下半区)。可以看出,

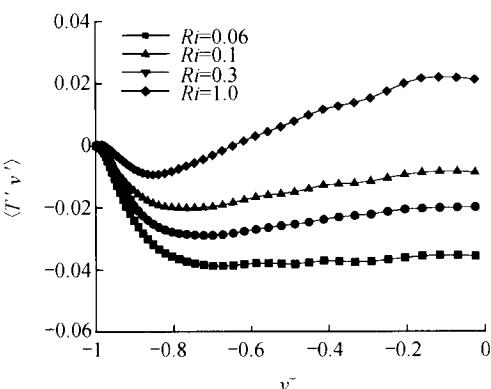


图 9 不同 Richardson 数下法向热通量的分布  
( $t = 15$ )

对于不大的 Richardson 数,湍流热通量均为负值,即热量由上热壁向下冷壁输运,称为“顺梯度热通量”<sup>[7]</sup>。由于稳定分层对湍流的抑制作用,这种正常热通量的强度随 Richardson 数增大而减小。但是当 Richardson 数大到一定程度(此处为 1.0)时,在槽道中心区会出现“反梯度热通量”,即热通量反由冷壁一方向热壁一方传递(见图 9)。Gerz 和 Schumann<sup>[7]</sup>在他们的 DNS 计算中也发现过这种现象,他们解释为,这是由于在大 Richardson 数下,分层湍流有二维化的过渡趋势,且在此过程中会产生重力波和热胞格(hot cell),从而导致了热量的反向传递。

我们也可以从另一角度来分析此种现象的物理机制。事实上，当在槽道湍流的两壁突然施加温度差以后，下壁附近的强湍流脉动将携带冷而重的流体向上运动，同时，伴有热而轻的流体向下运动，因而近壁处的热通量总是正向运输的。但是，由于大 Richardson 数下的稳定分层对湍流脉动有强抑制作用，这就会大大消弱中心区域处的法向湍流脉动和湍流掺混，从而使得由下壁而来的冷流体不能获得充分加热，致使它在重力作用下又重新向下运动，造成此处的反向热量运输。

与此相对应，施加温差后的槽道湍流也会出现反常剪应力分布的过渡过程。图 10 给出了  $t = 15$  时不同  $Ri$  数下的湍流剪应力分布，其中， $Ri = 0.06, 0.1$  和  $0.3$  时，剪应力均为正常分布，即与纯剪切湍流的分布一致，惟  $Ri = 1.0$  时，湍流剪应力变成了反向分布。Steven<sup>1)</sup> 曾提出，在发生时间上湍流应力的反常分布要比热通量反向分布来得晚。我们在图 11 和图 12 上分别给出了  $Ri = 1.0$  时湍流热通量和湍流剪应力在几个不同时刻的分布。由图可见，在  $t = 10$  时，湍流剪应力仍保持正常分布，而湍流热通量早在  $t = 5$  时就已出现反常分布。这一事实为我们理解图 9 中出现的  $Ri = 1.0$  时湍流动能随时间变化的异常表现提供了帮助。原来，在过渡过程中有一段时间（本文中  $t = 5 \sim 15$ ），正常分布的湍流剪应力与反常分布的湍流法向热通量同时并存，前者将平均流能量转化为湍流脉动能量，后者则以热对流的方式增加湍流动能。这种双重效应使得强稳定分层湍流在这段时间的过渡过程中，反而出现湍流动能随时间增大的反常现象。

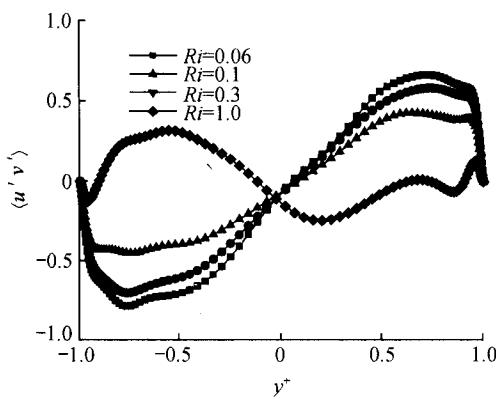


图 10 不同 Richardson 数下湍流剪应力的分布  
( $t = 15$ )

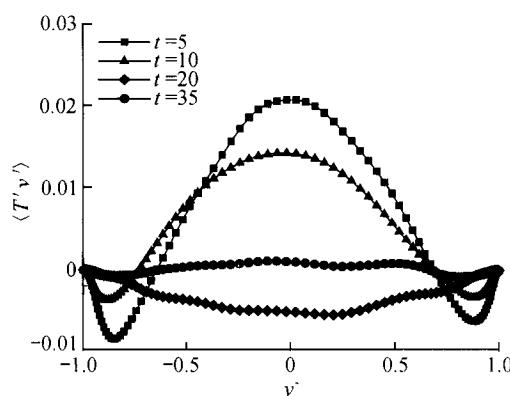


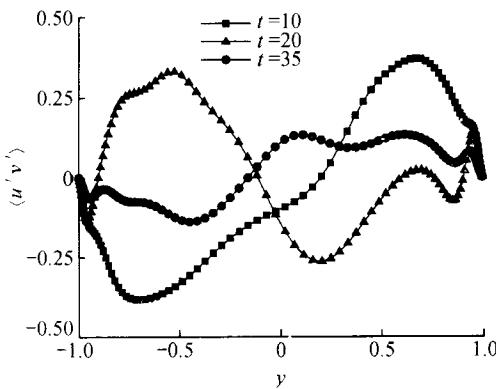
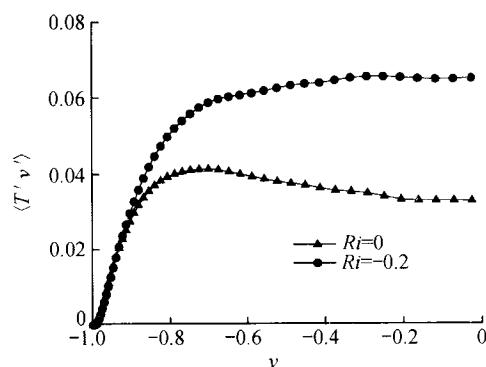
图 11 法向热通量随时间的演变过程 ( $Ri = 1.0$ )

还应指出，在湍流应力与湍流热通量出现反常分布的过渡过程中，整个槽道流的平均速度场和平均温度场以及脉动速度场与脉动温度场也在作相应的调整和时间演化，这种互动过程导致湍流最终趋于某种渐近稳定状态，而到达稳定态后，湍流剪应力与热通量又恢复为正常分布（见图 11 和 12 中的  $t = 35$  曲线）。

#### 4.3 不稳定分层湍流的大涡模拟

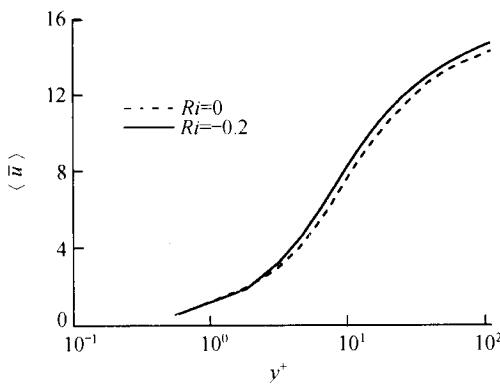
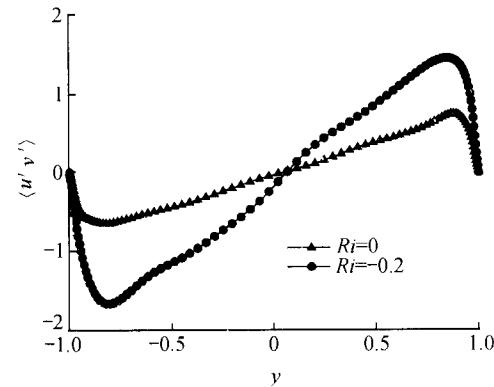
对于不稳定热分层槽道湍流，其下壁温度高于上壁温度，Richardson 数将小于零。这里我

1) Steven E H. The evolution and structure of homogeneous stably stratified sheared turbulence. Dissertation of University of Stanford, USA, 1990

图 12 湍流剪应力随时间的演变过程 ( $Ri = 1.0$ )图 13 法向热通量沿壁面法向坐标  $y$  的分布

们仅给出了  $Ri = -0.2$  时的情况. 图 13 是法向热通量在  $Ri = 0$ . 和  $-0.2$  时的分布. 两种情况下, 热量均是由热壁向冷壁传递. 但当 Richardson 数变负时,  $\langle T'v' \rangle$  将增大, 这意味着不稳定分层条件下, 浮力起到助长湍流强度从而增强热量传递的作用.

另外, 图 7 曾给出  $Ri = -0.2$  时湍流平均脉动动能随时间的演变过程, 可以发现湍流平均脉动动能随时间不断增大, 这一现象正好与稳定热分层槽道湍流的变化趋势相反. 图 14 给出了当  $Ri = 0$ . 和  $Ri = -0.2$  时流向平均速度沿壁面法向坐标的分布, 在  $Ri = -0.2$  时的平均速度要大于  $Ri = 0$ , 尤其表现在对数律区, 这一现象在 Iida 和 Kasagi<sup>[20]</sup> 的 DNS 研究中也得以验证, 它与不稳定分层增强湍流从而使流向平均速度剖面在壁面附近更快地趋于平钝有关. 图 15 给出了湍流应力的分布,  $Ri = -0.2$  时湍流应力的最大值大约是  $Ri = 0$  时的两倍, 这也说明了不稳定分层对湍流的增强作用.

图 14 流向平均速度沿壁面法向坐标  $y^+$  的分布图 15 湍流剪应力沿壁面法向坐标  $y$  的分布

## 5 结论

本文提出了一种适用于热分层剪切湍流大涡模拟的新的动力学亚格子尺度 (SGS) 模型.

该模型的优点在于其所有系数都由当时当地湍流动力学特性确定，无需引进任何经验参数。通过若干典型算例的计算比较，验证了该模型的正确性。文中进一步应用本文所提出的动力学 SGS 模型，大涡模拟研究了槽道稳定分层湍流和不稳定分层湍流的流动特性和机理。结果表明，对于稳定分层湍流，即  $Ri > 0$  的湍流，浮力对于湍流具有很明显的抑制作用。而对于不稳定分层湍流，即  $Ri < 0$  的湍流，热分层则增强了湍流脉动，并增强了铅直方向的湍流热交换。本文还揭示了在热分层作用后的过渡过程中，强稳定分层会出现湍流热通量和湍流剪应力的反常分布，这与前人的 DNS 研究结论一致。这些计算结果有效地阐述了分层剪切湍流的一些基本物理规律，同时也验证了本文动力学 SGS 模型的可靠性。

## 参 考 文 献

- 1 Smagorinsky J. General circulation experiments with the primitive equations. I. The basic experiment. *Mon Wea Rev*, 1963, 91: 99 ~ 165
- 2 Bardina J, Ferziger J H, Reynolds W C. Improved subgrid scale models for large eddy simulation. *AIAA paper 80-1357*, 1980
- 3 Yoshizawa A. A statistical theory of thermally driven turbulent shear flow, with the derivation of subgrid model. *J Phys Soc Japan*, 1983, 52: 1194 ~ 1205
- 4 Germano M, Piomelli U, Moin P, et al. A dynamic subgrid-scale eddy viscosity model. *Phys Fluids A*, 1991, 3: 1760 ~ 1765
- 5 Zang Y, Street R L, Koseff J R. A dynamic mixed subgrid-scale model and its application to turbulent recirculating flows. *Phys Fluids A*, 1993, 5: 3186 ~ 3196
- 6 刘宁宇, 陆夕云, 庄礼贤. 关于分层剪切湍流大涡模拟的一种动力学亚格子尺度模型. *中国科学, A辑*, 2000, 30(2): 145 ~ 153
- 7 Gerz T, Schumann U, Elgobashi S E. Direct numerical simulation of stratified homogeneous turbulent shear flows. *J Fluid Mech*, 1989, 200: 563 ~ 594
- 8 Cabot W, Moin P. Large eddy simulation of scalar transport with the dynamic subgrid-scale model. In: Galperin B, Orszag S A, eds. *Large Eddy Simulation of Complex Engineering and Geophysical Flows*. New York: Cambridge University Press, 1993, 141 ~ 158
- 9 Ciofalo M, Collins M W. Large-eddy simulation of turbulent flow and heat transfer in plane and rib-roughened channels. *Int J Num Methods in Fluids*, 1992, 15: 453 ~ 489
- 10 Wang W P, Pletcher R H. On the large eddy simulation of a turbulent channel flow with significant heat transfer. *Phys Fluids A*, 1996, 8: 3354 ~ 3366
- 11 Xu C X, Zhang Z S, Nieuwsstadt F T M, et al. Origin of high kurtosis in the viscous sublayer, direct numerical simulation and experiment. *Phys Fluids A*, 1996, 8: 1938 ~ 1945
- 12 许春晓, 张兆顺, Nieuwsstadt F T M. 黏性底层内横向速度强脉冲现象的机制探索. *中国科学, A辑*, 1996, 26(2): 162 ~ 168
- 13 苏铭德. 直方管内充分发展湍流的大涡模拟. *空气动力学学报*, 1995, 13(1): 10 ~ 20
- 14 李家春, 吴承康. 环境力学与可持续发展. *力学进展*, 1998, 28: 433 ~ 441
- 15 Lu X Y, Dalton C, Zhang J. Application of large eddy simulation to an oscillating flow past a circular cylinder. *ASME J Fluid Engng*, 1997, 119: 519 ~ 525
- 16 Lu X Y, Dalton C, Zhang J. Application of large eddy simulation to flow past a circular cylinder. *ASME J Offshore Mech Arctic Engng*, 1997, 119: 219 ~ 225
- 17 Lilly D K. A proposed modification of the Germano subgrid-scale closure model. *Phys Fluids A*, 1992, (4): 633 ~ 635
- 18 Kim J, Moin P. Application of fractional-step method to incompressible Navier-Stokes equations. *J Comput Phys*, 1985, 59: 308 ~ 323
- 19 Moin P, Kim J. Numerical investigation of turbulent channel flow. *J Fluid Mech*, 1982, 118: 341 ~ 377
- 20 Iida O, Kasagi N. Direct numerical simulation of unstably stratified turbulent channel flow. *ASME J Heat Transfer*, 1997, 119: 53 ~ 61