中国科学: 数学　2012 年　第 42 卷　第 7 期: 735 ~ 756
www.springerlink.com　math.scichina.com
《中国科学》杂志社 SCIENCE CHINA PRESS

无限区间上多分数阶微分方程初值问题解的存在与唯一性

刘玉记

广东商学院数学与计算科学学院, 广州 510320
E-mail: liuyuji888@sohu.com

收稿日期: 2011-12-24; 接受日期: 2012-04-26
广东省自然科学基金 (批准号: S2011010001900) 和广东省高校高层次人才资助项目

摘要　本文研究一类无限区间上具有 Riemann-Liouville 导数的多分数阶非线性微分方程初值问题, 在一类加权函数空间上使用 Schauder 不动点定理建立了该问题解的存在性和唯一性结果, 举例说明了定理的应用.

关键词　初值问题　多分数阶微分方程　Riemann-Liouville 导数　存在性与唯一性　Schauder 不动点定理
MSC (2010) 主题分类　92D25, 34A37, 34K15

1　引言

近年来, 分数阶微分方程的理论和应用已经在国内外引起极大的研究兴趣. 分数阶微分方程的应用领域逐渐扩大, 涉及粘弹性力学模型、广义 Newton 定律、眼球瞬间运动的神经控制过程、生物系统的电传导、熔炉再加热模型、分数回归模型、扩散过程、扩散波动方程、电磁波传导、电化学模型、分数阶回路、鼓风炉墙体热流剧变的计算、控制器和开环与闭环分数控制系统. 理论方面, 分数阶微分方程研究涉及迭代法、级数方法、Fourier 或者 Laplace 变换技巧、特殊函数法以及算子理论, 可见专著 [1–3] 和参考文献 [4, 5]. 分数阶微分方程的几何和物理解释可见 [6–8].

Agarwal 等人 [9] 研究分数阶微分方程边值问题 (简记为 BVP)

$$\begin{cases} {}^cD_{0+}^{\alpha}u(t)=f(t,u(t)), \quad t\in[0,T], \\ u(0)=u_0, \quad u'(0)=u_0^*, \quad u''(T)=u_T, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 $\alpha\in(2,3)$, ${}^cD_{0+}^{\alpha}$ 是 Caputo 型分数阶导数, $u_0,u_0^*,u_T\in\mathbb{R}$, $f:[0,T]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是连续函数. 使用 Schauder 不动点定理证明了 BVP (1.1) 在一定的条件下至少有一个解.

熟知无限区间上的边值问题和有限区间上的边值问题有很大的区别. Arara 等人 [10] 研究如下无限区间上分数阶微分方程边值问题

$$\begin{cases} {}^cD_{0+}^{\alpha}u(t)=f(t,u(t)), \quad t\in[0,\infty), \\ u(0)=u_0, \quad u \text{ 在 } [0,\infty) \text{ 上有界}, \end{cases} \tag{1.2}$$

英文引用格式: Liu Y J. Existence and uniqueness of solutions for initial value problems of multi-order fractional differential equations on the half lines (in Chinese). Sci Sin Math, 2012, 42(7): 735–756, doi: 10.1360/012011-1032

其中 $\alpha \in (1,2)$, ${}^cD_{0^+}^{\alpha}$ 是 Caputo 型分数阶导数, $u_0 \in \mathbb{R}$, $f:[0,\infty)\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是连续函数. 使用 Schauder 不动点定理证明了 BVP (1.2) 在一定的条件下至少有一个解.

文献 [11] 研究了如下分数阶微分方程边值问题

$$\begin{cases} {}^cD_{0^+}^{\alpha}[p(t)u'(t)] + q(t)f(t,u(t)) = 0, \quad t>0 \\ p(0)u'(0)=0, \quad \lim\limits_{t\to\infty} u(t) = \int_0^{\infty} g(s)u(s)ds, \end{cases} \tag{1.3}$$

其中 ${}^cD_{0^+}^{\alpha}$ 是 Caputo 型分数阶导数, f,g,p,q 为给定的满足一定条件的函数, 当 $t\geqslant 0$ 时 $p(t)>0$ 且 $\int_0^{\infty}\frac{1}{p(s)}ds<\infty$, $k(s)=\int_s^{\infty}\frac{(r-s)^{\alpha-1}}{p(r)}dr$ 在 $[0,\infty)$ 上连续, $g\in L^1[0,\infty)$ 满足 $\int_0^{\infty} g(s)ds<1$. 文献 [11] 使用不动点理论和上、下解方法建立了 BVP (1.3) 至少存在三个非负解的充分条件.

文献 [12], 作者研究了如下分数阶微分方程边值问题

$$\begin{cases} D_{0^+}^{\alpha}u(t) + f(t,u(t)) = 0, \quad 0<t<\infty, \quad 1<\alpha<2, \\ u(0)=0, \quad \lim\limits_{t\to\infty} D_{0^+}^{\alpha-1}u(t)=0, \end{cases} \tag{1.4}$$

其中 $D_{0^+}^{\alpha}$ 是 Riemann-Liouville 型分数阶导数, f 是给定的函数, 满足 $f:[0,\infty)\times\mathbb{R}\to[0,\infty)$ 连续, 存在单调非减函数 $\omega\in C([0,\infty),[0,\infty))$ 和 $\phi\in L^1[0,\infty)$, 使得在 $[0,\infty)\times[0,\infty)$ 上成立 $|f(t,(1+t^{\alpha-1})u)|\leqslant \phi(t)\omega(u)$. 文献 [12] 给出了 BVP (1.4) 至少有一个正解的比例充分条件:

文献 [13] 研究了非线性项依赖于低阶导数的分数阶微分方程边值问题

$$\begin{cases} D_{0^+}^{\alpha}u(t) = f(t,u(t),D_{0^+}^{\alpha-1}u(t)), \quad 0<t<\infty, \quad 1<\alpha<2, \\ u(0)=0, \quad \lim\limits_{t\to\infty} D_{0^+}^{\alpha-1}u(t)=u_{\infty}\in\mathbb{R}, \end{cases} \tag{1.5}$$

其中 $D_{0^+}^{\alpha}$ 是 Riemann-Liouville 型分数阶导数. 运用 Schauder 不动点定理, 文献 [13] 获得了 BVP (1.5) 有解的充分条件.

文献 [14], 作者研究了如下分数阶微分方程边值问题

$$\begin{cases} D_{0^+}^{\alpha}u(t) = f(t,u(t)), \quad 0<t<\infty, \quad 1<\alpha<2, \\ u(0)=0, \quad u \text{ 在 } [0,\infty) \text{ 上有界}, \end{cases} \tag{1.6}$$

其中 $D_{0^+}^{\alpha}$ 是 Riemann-Liouville 型分数阶导数, $f:[0,\infty)\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是给定的函数. 文献 [14] 使用的方法是 Leray-Schuder 型非线性替代原理和对角线方法.

常微分方程非局部边值问题的研究始于 [15], 并已经取得丰富的研究成果 [16]. 具有积分型边值条件的常微分方程边值问题的研究可见文献 [17, 18]. 但具有具有积分型初、边值条件的分数阶微分方程的初、边值问题的研究成果很少.

本文中, 我们讨论如下多分数阶微分方程初值问题的解的存在性与唯一性 (简记为 IVP)

$$\begin{cases} D_{0^+}^{\alpha}D_{0^+}^{\beta}D_{0^+}^{\gamma}x(t) + f(t,x(t),D_{0^+}^{p}x(t)) = 0, \quad t\in(0,\infty), \\ \lim\limits_{t\to 0} t^{1-\gamma}x(t) = \int_0^{+\infty} g_0(t,x(t),D_{0^+}^{p}x(t))dt, \\ \lim\limits_{t\to 0} t^{1-\beta}D_{0^+}^{\gamma}x(t) = \int_0^{+\infty} g_1(t,x(t),D_{0^+}^{p}x(t))dt, \\ \lim\limits_{t\to 0} t^{1-\alpha}D_{0^+}^{\beta}D_{0^+}^{\gamma}x(t) = \int_0^{+\infty} g_2(t,x(t),D_{0^+}^{p}x(t))dt, \end{cases} \tag{1.7}$$

其中 $x_0, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $\alpha, \beta, \gamma, p \in (0,1)$, D_{0+} 是 Riemann-Liouville 型分数阶导数, $f:(0,\infty)\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ 是 Caratheodory 函数, $g_0, g_1, g_2:(0,+\infty)\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 是强 Caratheodory 函数且 f, g_0, g_1, g_2 可以在 $t=0$ 具有奇性.

我们采用 Schauder 不动点定理建立 IVP (1.7) 的解的存在性和唯一性准则. 值得注意的是本文涉及的初值问题是无限区间上的初值问题, 初值条件为积分型初值条件, 而且非线性项 f 和 g_0, g_1, g_2 可以在 $t=0$ 具有奇性.

本文第 2 节介绍并证明预备结果; 第 3 节证明本文的主要结果; 第 4 节举例说明定理的应用.

2 预备结果

为方便读者, 我们先列出分数阶微积分中的相关定义以及一个不动点定理, 这些定义和定理可在 [1–3] 中找到. Gamma 函数和 Beta 函数分别记为

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty}s^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-s}ds,\quad \mathbf{B}(\alpha,\beta)=\int_0^1(1-x)^{\alpha-1}x^{\beta-1}dx.$$

定义 2.1 [1] 函数 $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ 的 $\alpha\ (>0)$ 阶分数阶积分是指

$$I_{0+}^{\alpha}f(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}f(s)ds,$$

其中右边是在 $(0,\infty)$ 上逐点有定义.

定义 2.2 [1] 函数 $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ 的 $\alpha\ (>0)$ 阶分数阶导数是指

$$D_{0+}^{\alpha}f(t)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dt^n}\int_0^t\frac{f(s)}{(t-s)^{\alpha-n+1}}ds,$$

其中 $n=[\alpha]+1$, $[\alpha]$ 是小于或等于 α 的最大整数, 右边是在 $(0,\infty)$ 上逐点有定义. 特别地, 当 $0<\alpha<1$ 时,

$$D_{0+}^{\alpha}f(t)=D_{0+}^{1}I_{0+}^{1-\alpha}f(t)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dt}\int_0^t\frac{f(s)}{(t-s)^{\alpha}}ds.$$

定义 2.3 如果 $f:(t,+\infty)\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 满足

(i) 对任意的 $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $t\to f(t,\ \frac{1+t^{\sigma+3}}{t^{1-\gamma}}x,\ \frac{1+t^{\sigma+3}}{t^{1+p-\gamma}}y)$ 在 $(0,+\infty)$ 连续;

(ii) 对任意 $t\in(0,+\infty)$, $(x,y)\to f(t,\ \frac{1+t^{\sigma+3}}{t^{1-\gamma}}x,\ \frac{1+t^{\sigma+3}}{t^{1+p-\gamma}}y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上连续;

(iii) 对任意 $r>0$, 存在依赖于 r 的常数 $\mu>-1$ 和 $M>0$ 使得 $|x|,|y|\leqslant r$ 推出

$$\left|f\left(t,\ \frac{1+t^{\sigma+3}}{t^{1-\gamma}}x,\ \frac{1+t^{\sigma+3}}{t^{1+p-\gamma}}y\right)\right|\leqslant Mt^{\mu},\quad t\in(0,\infty),$$

则称 f 为 Caratheodory 函数.

定义 2.4 如果 $g:(t,+\infty)\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 满足:

(i) 对任意 $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $t\to f(t,\ \frac{1+t^{\sigma+3}}{t^{1-\gamma}}x,\ \frac{1+t^{\sigma+3}}{t^{1+p-\gamma}}y)$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续;

(ii) 对任意 $t\in(0,+\infty)$, $(x,y)\to f(t,\ \frac{1+t^{\sigma+3}}{t^{1-\gamma}}x,\ \frac{1+t^{\sigma+3}}{t^{1+p-\gamma}}y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上连续;

(iii) 对任意 $r>0$, 存在依赖于 r 的常数 $\mu>-1,\theta>0$ 和 $M>0$, 使得 $|x|,|y|\leqslant r$ 推出

$$\left|f\left(t,\ \frac{1+t^{\sigma+3}}{t^{1-\gamma}}x,\ \frac{1+t^{\sigma+3}}{t^{1+p-\gamma}}y\right)\right|\leqslant Mt^{\mu}\mathrm{e}^{-\theta t},$$

则称 f 是强 Caratheodory 函数.

给定 $\lambda \geqslant 0$, $\mu > -1$, 熟知

$$I_{0^+}^{\lambda} t^{\mu} = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\lambda+1)} t^{\mu+\lambda}, \quad D_{0^+}^{\lambda} t^{\mu} = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu-\lambda+1)} t^{\mu-\lambda}.$$

取 $\sigma > \alpha+\beta-2$. 记

$$X = \left\{ x \in C(0,\infty) : \begin{array}{l} D_{0^+}^{p} x \in C(0,\infty), \\ \dfrac{t^{1-\gamma}}{1+t^{\sigma+3}} x(t) \text{ 在}(0,\infty)\text{上有界}, \\ \dfrac{t^{1+p-\gamma}}{1+t^{\sigma+3}} D_{0^+}^{p} x(t) \text{ 在}(0,\infty)\text{上有界} \end{array} \right\}.$$

对任意 $x \in X$, 定义其泛数为

$$\|x\| = \max\left\{ \sup_{t\in(0,\infty)} \frac{t^{1-\gamma}}{1+t^{\sigma+3}} |x(t)|, \sup_{t\in(0,\infty)} \frac{t^{1+p-\gamma}}{1+t^{\sigma+3}} |D_{0^+}^{p} x(t)| \right\}.$$

容易证明 X 是实 Banach 空间.

引理 2.1 假设 $x_0, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x \in X$, f 为 Caratheodory 函数. 则 $y \in X$ 是初值问题

$$\begin{cases} D_{0^+}^{\alpha} D_{0^+}^{\beta} D_{0^+}^{\gamma} y(t) = f(t, x(t), D_{0^+}^{p} x(t)), \quad t \in J = (0,\infty), \\ \lim\limits_{t\to 0} t^{1-\gamma} y(t) = x_0, \\ \lim\limits_{t\to 0} t^{1-\beta} D_{0^+}^{\gamma} y(t) = x_1, \\ \lim\limits_{t\to 0} t^{1-\alpha} D_{0^+}^{\beta} D_{0^+}^{\gamma} y(t) = x_2 \end{cases} \tag{2.1}$$

的解的充分必要条件是 $y \in X$ 且满足

$$\begin{aligned} y(t) = & \frac{\mathbf{B}(\beta,\alpha)\mathbf{B}(\gamma,\alpha+\beta) \int_0^t (t-s)^{\alpha+\beta+\gamma-1} f(s, x(s), D_{0^+}^{p} x(s)) ds}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)} \\ & + \frac{x_2 \mathbf{B}(\beta,\alpha)\mathbf{B}(\gamma,\alpha+\beta)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)} t^{\alpha+\beta+\gamma-1} + \frac{x_1 \mathbf{B}(\beta,\gamma)}{\Gamma(\gamma)} t^{\beta+\gamma-1} + x_0 t^{\gamma-1}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

证明 设 $y \in X$ 是 (2.1) 的解. 则 y 满足 (2.1), 从而存在常数 c_1, c_2 和 c_3 使得

$$D_{0^+}^{\beta} D_{0^+}^{\gamma} y(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x(s), D_{0^+}^{p} x(s)) ds + c_1 t^{\alpha-1}, \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned} D_{0^+}^{\gamma} y(t) &= \frac{\int_0^t (t-s)^{\beta-1} \int_0^s (s-u)^{\alpha-1} f(u, x(u), D_{0^+}^{p} x(u)) du ds}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} + \frac{c_1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} s^{\alpha-1} ds + c_2 t^{\beta-1} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} \int_0^s (s-u)^{\alpha-1} f(u, x(u), D_{0^+}^{p} x(u)) du ds \\ &\quad + \frac{c_1 \mathbf{B}(\alpha,\beta)}{\Gamma(\beta)} t^{\alpha+\beta-1} + c_2 t^{\beta-1} \end{aligned} \tag{2.4}$$

以及

$$y(t) = \frac{\int_0^t (t-s)^{\gamma-1} \int_0^s (s-u)^{\beta-1} \int_0^u (u-v)^{\alpha-1} f(v, x(v), D_{0^+}^{p} x(v)) dv du ds}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)}$$

$$+\frac{c_1\mathbf{B}(\beta,\alpha)\mathbf{B}(\gamma,\alpha+\beta)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)}t^{\alpha+\beta+\gamma-1}+\frac{c_2\mathbf{B}(\beta,\gamma)}{\Gamma(\gamma)}t^{\beta+\gamma-1}+c_3t^{\gamma-1}. \tag{2.5}$$

从初值条件 $\lim_{t\to 0}t^{1-\gamma}y(t)=x_0$ 结合 (2.5) 得 $c_3=x_0$.

从初值条件 $\lim_{t\to 0}t^{1-\beta}D_{0^+}^{\gamma}y(t)=x_1$ 结合 (2.4) 得 $c_2=x_1$.

从初值条件 $\lim_{t\to 0}t^{1-\alpha}D_{0^+}^{\beta}D_{0^+}^{\gamma}y(t)=x_2$ 结合 (2.3) 得 $c_1=x_2$.

通过交换积分秩序容易得到

$$\begin{aligned}&\int_0^t(t-s)^{\gamma-1}\int_0^s(s-u)^{\beta-1}\int_0^u(u-v)^{\alpha-1}f(v,x(v),D_{0^+}^px(v))dvduds\\&=\mathbf{B}(\beta,\alpha)\mathbf{B}(\gamma,\alpha+\beta)\int_0^t(t-s)^{\alpha+\beta+\gamma-1}f(s,x(s),D_{0^+}^px(s))ds.\end{aligned}$$

将 c_1,c_2 和 c_3 的值代入 (2.5) 得

$$\begin{aligned}y(t)=&\frac{\mathbf{B}(\beta,\alpha)\mathbf{B}(\gamma,\alpha+\beta)\int_0^t(t-s)^{\alpha+\beta+\gamma-1}f(s,x(s),D_{0^+}^px(s))ds}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)}\\&+\frac{x_2\mathbf{B}(\beta,\alpha)\mathbf{B}(\gamma,\alpha+\beta)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)}t^{\alpha+\beta+\gamma-1}+\frac{x_1\mathbf{B}(\beta,\gamma)}{\Gamma(\gamma)}t^{\beta+\gamma-1}+x_0t^{\gamma-1}.\end{aligned}\tag{2.6}$$

则知 IVP (2.1) 有唯一解 y 满足 (2.2).

现在证明 $y\in X$. 注意当 $t\in(0,+\infty)$, $0<\theta<3+\sigma$ 时有

$$0\leqslant\frac{t^{\theta}}{1+t^{3+\sigma}}\leqslant\sup_{t\in(0,\infty)}\frac{t^{\theta}}{1+t^{3+\sigma}}=\frac{3+\sigma-\theta}{3+\sigma}\left(\frac{\theta}{3+\sigma-\theta}\right)^{\frac{\theta}{3+\sigma}}=:\overline{\sigma}_{\theta}.$$

从 (2.6) 得到

$$\begin{aligned}D_{0^+}^py(t)=&\frac{\mathbf{B}(\beta,\alpha)\mathbf{B}(\gamma,\alpha+\beta)\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)\int_0^t(t-s)^{\alpha+\beta+\gamma-p-1}f(s,x(s),D_{0^+}^px(s))ds}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+\beta+\gamma-p)}\\&+\frac{x_2\mathbf{B}(\beta,\alpha)\mathbf{B}(\gamma,\alpha+\beta)\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+\beta+\gamma-p)}t^{\alpha+\beta+\gamma-p-1}\\&+\frac{x_1\mathbf{B}(\beta,\gamma)\Gamma(\beta+\gamma)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta+\gamma-p)}t^{\beta+\gamma-p-1}+\frac{x_0\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-p)}t^{\gamma-p-1}.\end{aligned}\tag{2.7}$$

因为 $x\in X$, f 是 Caratheodory 函数, 所以

$$r=\max\left\{\sup_{t\in(0,\infty)}\frac{t^{1-\gamma}}{1+t^{\sigma+3}}|x(t)|,\ \sup_{t\in(0,\infty)}\frac{t^{1+p-\gamma}}{1+t^{\sigma+3}}|D_{0^+}^px(t)|\right\}<+\infty$$

而且存在常数 $\mu>-1$ 和 $M>0$ 使得

$$|f(t,x(t),D_{0^+}^px(t))|=\left|f\left(t,\frac{1+t^{\sigma+3}}{t^{1-\gamma}}\frac{t^{1-\gamma}}{1+t^{\sigma+3}}x(t),\frac{1+t^{\sigma+3}}{t^{1+p-\gamma}}\frac{t^{1+p-\gamma}}{1+t^{\sigma+3}}D_{0^+}^px(t)\right)\right|\leqslant Mt^{\mu}.$$

由 (2.2) 式, 可得

$$\begin{aligned}\frac{t^{1-\gamma}}{1+t^{\sigma+3}}|y(t)|=&\left|\frac{\mathbf{B}(\beta,\alpha)\mathbf{B}(\gamma,\alpha+\beta)t^{1-\gamma}\int_0^t(t-s)^{\alpha+\beta+\gamma-1}f(s,x(s),D_{0^+}^px(s))ds}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)(1+t^{3+\sigma})}\right.\\&\left.+\frac{x_2\mathbf{B}(\beta,\alpha)\mathbf{B}(\gamma,\alpha+\beta)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)}\frac{t^{\alpha+\beta}}{1+t^{3+\sigma}}+\frac{x_1\mathbf{B}(\beta,\gamma)}{\Gamma(\gamma)}\frac{t^{\beta}}{1+t^{3+\sigma}}+\frac{x_0}{1+t^{3+\sigma}}\right|\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leqslant \frac{\mathbf{B}(\beta,\alpha)\mathbf{B}(\gamma,\alpha+\beta)t^{1-\gamma}\int_0^t(t-s)^{\alpha+\beta+\gamma-1}|f(s,x(s),D_{0^+}^p x(s))|ds}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)(1+t^{3+\sigma})}\\
&\quad+\frac{|x_2|\mathbf{B}(\beta,\alpha)\mathbf{B}(\gamma,\alpha+\beta)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)}\overline{\sigma}_{\alpha+\beta}+\frac{|x_1|\mathbf{B}(\beta,\gamma)}{\Gamma(\gamma)}\overline{\sigma}_\beta+|x_0|\\
&\leqslant \frac{\mathbf{B}(\beta,\alpha)\mathbf{B}(\gamma,\alpha+\beta)t^{1-\gamma}\int_0^t(t-s)^{\alpha+\beta+\gamma-1}Ms^\mu ds}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)(1+t^{3+\sigma})}\\
&\quad+\frac{|x_2|\mathbf{B}(\beta,\alpha)\mathbf{B}(\gamma,\alpha+\beta)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)}\overline{\sigma}_{\alpha+\beta}+\frac{|x_1|\mathbf{B}(\beta,\gamma)}{\Gamma(\gamma)}\overline{\sigma}_\beta+|x_0|\\
&= \frac{M\mathbf{B}(\beta,\alpha)\mathbf{B}(\gamma,\alpha+\beta)t^{\alpha+\beta+\mu+1}\mathbf{B}(\alpha+\beta+\gamma,\mu+1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)(1+t^{3+\sigma})}\\
&\quad+\frac{|x_2|\mathbf{B}(\beta,\alpha)\mathbf{B}(\gamma,\alpha+\beta)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)}\overline{\sigma}_{\alpha+\beta}+\frac{|x_1|\mathbf{B}(\beta,\gamma)}{\Gamma(\gamma)}\overline{\sigma}_\beta+|x_0|\\
&\leqslant \frac{M\mathbf{B}(\beta,\alpha)\mathbf{B}(\gamma,\alpha+\beta)\mathbf{B}(\alpha+\beta+\gamma,\mu+1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)}\\
&\quad+\frac{|x_2|\mathbf{B}(\beta,\alpha)\mathbf{B}(\gamma,\alpha+\beta)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)}\overline{\sigma}_{\alpha+\beta}+\frac{|x_1|\mathbf{B}(\beta,\gamma)}{\Gamma(\gamma)}\overline{\sigma}_\beta+|x_0|\\
&< +\infty.
\end{aligned}$$

从 (2.7) 式得到

$$\begin{aligned}
&\frac{t^{1+p-\gamma}}{1+t^{\sigma+3}}|D_{0^+}^p x(t)|\\
&\quad= \Bigg|\frac{t^{1+p-\gamma}}{1+t^{\sigma+3}}\frac{\mathbf{B}(\beta,\alpha)\mathbf{B}(\gamma,\alpha+\beta)\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)\int_0^t(t-s)^{\alpha+\beta+\gamma-p-1}f(s,x(s),D_{0^+}^p x(s))ds}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+\beta+\gamma-p)}\\
&\qquad+\frac{x_2\mathbf{B}(\beta,\alpha)\mathbf{B}(\gamma,\alpha+\beta)\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+\beta+\gamma-p)}\frac{t^{\alpha+\beta}}{1+t^{\sigma+3}}\\
&\qquad+\frac{x_1\mathbf{B}(\beta,\gamma)\Gamma(\beta+\gamma)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta+\gamma-p)}\frac{t^\beta}{1+t^{\sigma+3}}+\frac{x_0\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-p)}\frac{1}{1+t^{\sigma+3}}\Bigg|\\
&\quad\leqslant \frac{t^{1+p-\gamma}}{1+t^{\sigma+3}}\frac{\mathbf{B}(\beta,\alpha)\mathbf{B}(\gamma,\alpha+\beta)\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)\int_0^t(t-s)^{\alpha+\beta+\gamma-p-1}|f(s,x(s),D_{0^+}^p x(s))|ds}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+\beta+\gamma-p)}\\
&\qquad+\frac{|x_2|\mathbf{B}(\beta,\alpha)\mathbf{B}(\gamma,\alpha+\beta)\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+\beta+\gamma-p)}\overline{\sigma}_{\alpha+\beta}+\frac{|x_1|\mathbf{B}(\beta,\gamma)\Gamma(\beta+\gamma)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta+\gamma-p)}\overline{\sigma}_\beta+\frac{|x_0|\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-p)}\\
&\quad\leqslant \frac{t^{1+p-\gamma}}{1+t^{\sigma+3}}\frac{\mathbf{B}(\beta,\alpha)\mathbf{B}(\gamma,\alpha+\beta)\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)\int_0^t(t-s)^{\alpha+\beta+\gamma-p-1}Ms^\mu ds}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+\beta+\gamma-p)}\\
&\qquad+\frac{|x_2|\mathbf{B}(\beta,\alpha)\mathbf{B}(\gamma,\alpha+\beta)\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+\beta+\gamma-p)}\overline{\sigma}_{\alpha+\beta}+\frac{|x_1|\mathbf{B}(\beta,\gamma)\Gamma(\beta+\gamma)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta+\gamma-p)}\overline{\sigma}_\beta+\frac{|x_0|\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-p)}\\
&\quad= \frac{Mt^{\alpha+\beta+\mu+1}}{1+t^{\sigma+3}}\frac{\mathbf{B}(\beta,\alpha)\mathbf{B}(\gamma,\alpha+\beta)\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)\mathbf{B}(\alpha+\beta+\gamma-p,\mu+1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+\beta+\gamma-p)}\\
&\qquad+\frac{|x_2|\mathbf{B}(\beta,\alpha)\mathbf{B}(\gamma,\alpha+\beta)\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+\beta+\gamma-p)}\overline{\sigma}_{\alpha+\beta}+\frac{|x_1|\mathbf{B}(\beta,\gamma)\Gamma(\beta+\gamma)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta+\gamma-p)}\overline{\sigma}_\beta+\frac{|x_0|\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-p)}\\
&\quad\leqslant M\frac{\mathbf{B}(\beta,\alpha)\mathbf{B}(\gamma,\alpha+\beta)\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)\mathbf{B}(\alpha+\beta+\gamma-p,\mu+1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+\beta+\gamma-p)}\\
&\qquad+\frac{|x_2|\mathbf{B}(\beta,\alpha)\mathbf{B}(\gamma,\alpha+\beta)\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+\beta+\gamma-p)}\overline{\sigma}_{\alpha+\beta}+\frac{|x_1|\mathbf{B}(\beta,\gamma)\Gamma(\beta+\gamma)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta+\gamma-p)}\overline{\sigma}_\beta+\frac{|x_0|\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-p)}\\
&\quad< +\infty.
\end{aligned}$$

另外, 由 (2.2) 和 (2.7), 我们有 $y, D_{0+}^p y \in C^0(0,+\infty)$. 因此 $y \in X$.

反之, 如果 $y \in X$ 满足 (2.2), 容易证明 $y \in X$ 且满足 (2.1) 中所有等式. 因此 $y \in X$ 是 (2.1) 的解. 证毕. □

定义 X 上的算子 T 如下:

$$\begin{aligned}(Tx)(t) =& \frac{\mathbf{B}(\beta,\alpha)\mathbf{B}(\gamma,\alpha+\beta)\int_0^t (t-s)^{\alpha+\beta+\gamma-1} f(s,x(s),D_{0+}^p x(s))ds}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)} \\ &+ \frac{\mathbf{B}(\beta,\alpha)\mathbf{B}(\gamma,\alpha+\beta)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)} t^{\alpha+\beta+\gamma-1}\int_0^{+\infty} g_2(s,x(s),D_{0+}^p x(s))dt \\ &+ \frac{\mathbf{B}(\beta,\gamma)}{\Gamma(\gamma)} t^{\beta+\gamma-1}\int_0^{+\infty} g_1(s,x(s),D_{0+}^p x(s))dt + t^{\gamma-1}\int_0^{+\infty} g_0(s,x(s),D_{0+}^p x(s))dt. \end{aligned} \tag{2.8}$$

引理 2.2 设备 f 是 Caratheodory 函数且 g_i $(i=0,1,2)$ 是强 Caratheodory 函数. 则有

(i) T 将 X 映到 X;

(ii) $x \in X$ 是 T 的不动点当且仅当 $x \in X$ 是初值问题 (7) 的解;

(iii) $T: X \to X$ 是全连续算子.

证明 (i) 由 $x \in X$ 得

$$r = \max\left\{\sup_{t\in(0,\infty)} \frac{t^{1-\gamma}}{1+t^{\sigma+3}}|x(t)|, \sup_{t\in(0,\infty)} \frac{t^{1+p-\gamma}}{1+t^{\sigma+3}}|D_{0+}^p x(t)|\right\} < +\infty.$$

因为 f 是 Caratheodory 函数, g_i $(i=0,1,2)$ 是强 Caratheodory 函数, 所以存在正数 M, M_i $(i=0,1,2)$ 和 $\mu, \mu_i > -1, \theta_i > 0$ $(i=0,1,2)$ 满足

$$\begin{aligned} &|f(t,x(t),D_{0+}^p x(t))| = \left| f\left(t, \frac{1+t^{\sigma+3}}{t^{1-\gamma}}\frac{t^{1-\gamma}}{1+t^{\sigma+3}}x(t), \frac{1+t^{\sigma+3}}{t^{1+p-\gamma}}\frac{t^{1+p-\gamma}}{1+t^{\sigma+3}}D_{0+}^p x(t)\right)\right| \leqslant Mt^{\mu}, \\ &|g_i(t,x(t),D_{0+}^p x(t))| \leqslant M_i t^{\mu_i} \mathrm{e}^{-\theta_i t}, \quad i=0,1,2. \end{aligned}$$

容易看出 $Tx \in C^0(0,+\infty)$ 以及 $D_{0+}^p Tx \in C^0(0,+\infty)$. 因此

$$\begin{aligned} \frac{t^{1-\gamma}}{1+t^{\sigma+3}}|(Tx)(t)| \leqslant& \frac{t^{1-\gamma}}{1+t^{\sigma+3}} \frac{\mathbf{B}(\beta,\alpha)\mathbf{B}(\gamma,\alpha+\beta)\int_0^t (t-s)^{\alpha+\beta+\gamma-1}|f(s,x(s),D_{0+}^p x(s))|ds}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)} \\ &+ \frac{\mathbf{B}(\beta,\alpha)\mathbf{B}(\gamma,\alpha+\beta)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)}\frac{t^{\alpha+\beta}}{1+t^{\sigma+3}}\int_0^{+\infty}|g_2(s,x(s),D_{0+}^p x(s))|dt \\ &+ \frac{\mathbf{B}(\beta,\gamma)}{\Gamma(\gamma)}\frac{t^{\beta}}{1+t^{\sigma+3}}\int_0^{+\infty}|g_1(s,x(s),D_{0+}^p x(s))|dt \\ &+ \frac{1}{1+t^{\sigma+3}}\int_0^{+\infty}|g_0(s,x(s),D_{0+}^p x(s))|dt \\ \leqslant& \frac{t^{1-\gamma}}{1+t^{\sigma+3}}\frac{\mathbf{B}(\beta,\alpha)\mathbf{B}(\gamma,\alpha+\beta)\int_0^t (t-s)^{\alpha+\beta+\gamma-1}Ms^{\mu}ds}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)} \\ &+ \frac{\mathbf{B}(\beta,\alpha)\mathbf{B}(\gamma,\alpha+\beta)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)}\overline{\sigma}_{\alpha+\beta}\int_0^{+\infty} M_2 s^{\mu_2}\mathrm{e}^{-\theta_2 s}ds \\ &+ \frac{\mathbf{B}(\beta,\gamma)}{\Gamma(\gamma)}\overline{\sigma}_{\beta}\int_0^{+\infty} M_1 s^{\mu_1}\mathrm{e}^{-\theta_1 s}ds + \int_0^{+\infty} M_0 s^{\mu_0}\mathrm{e}^{-\theta_0 s}ds \\ =& \frac{t^{\alpha+\beta+\mu+1}}{1+t^{\sigma+3}} M \frac{\mathbf{B}(\beta,\alpha)\mathbf{B}(\gamma,\alpha+\beta)\mathbf{B}(\alpha+\beta+\gamma,\mu+1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{\mathbf{B}(\beta,\alpha)\mathbf{B}(\gamma,\alpha+\beta)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)}\overline{\sigma}_{\alpha+\beta}\frac{M_2\Gamma(\mu_2+1)}{\theta_2^{\mu_2+1}}\\
&+\frac{\mathbf{B}(\beta,\gamma)}{\Gamma(\gamma)}\overline{\sigma}_{\beta}\frac{M_1\Gamma(\mu_1+1)}{\theta_1^{\mu_1+1}}+\frac{M_0\Gamma(\mu_0+1)}{\theta_0^{\mu_0+1}}\\
\leqslant{}& M\frac{\mathbf{B}(\beta,\alpha)\mathbf{B}(\gamma,\alpha+\beta)\mathbf{B}(\alpha+\beta+\gamma,\mu+1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)}\\
&+\frac{\mathbf{B}(\beta,\alpha)\mathbf{B}(\gamma,\alpha+\beta)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)}\overline{\sigma}_{\alpha+\beta}\frac{M_2\Gamma(\mu_2+1)}{\theta_2^{\mu_2+1}}\\
&+\frac{\mathbf{B}(\beta,\gamma)}{\Gamma(\gamma)}\overline{\sigma}_{\beta}\frac{M_1\Gamma(\mu_1+1)}{\theta_1^{\mu_1+1}}+\frac{M_0\Gamma(\mu_0+1)}{\theta_0^{\mu_0+1}}<+\infty.
\end{aligned}
$$

进一步, 有

$$
\begin{aligned}
&\frac{t^{1+p-\gamma}}{1+t^{\sigma+3}}|D_{0^+}^p(Tx)(t)|\\
={}&\bigg|\frac{t^{1+p-\gamma}}{1+t^{\sigma+3}}\frac{\mathbf{B}(\beta,\alpha)\mathbf{B}(\gamma,\alpha+\beta)\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)\int_0^t(t-s)^{\alpha+\beta+\gamma-p-1}f(s,x(s),D_{0^+}^px(s))ds}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+\beta+\gamma-p)}\\
&+\frac{\mathbf{B}(\beta,\alpha)\mathbf{B}(\gamma,\alpha+\beta)\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+\beta+\gamma-p)}\frac{t^{\alpha+\beta}}{1+t^{\sigma+3}}\int_0^{+\infty}g_2(s,x(s),D_{0^+}^px(s))ds\\
&+\frac{\mathbf{B}(\beta,\gamma)\Gamma(\beta+\gamma)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta+\gamma-p)}\frac{t^{\beta}}{1+t^{\sigma+3}}\int_0^{+\infty}g_1(s,x(s),D_{0^+}^px(s))ds\\
&+\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-p)}\frac{1}{1+t^{\sigma+3}}\int_0^{+\infty}g_0(s,x(s),D_{0^+}^px(s))ds\bigg|\\
\leqslant{}&\frac{t^{1+p-\gamma}}{1+t^{\sigma+3}}\frac{\mathbf{B}(\beta,\alpha)\mathbf{B}(\gamma,\alpha+\beta)\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)\int_0^t(t-s)^{\alpha+\beta+\gamma-p-1}|f(s,x(s),D_{0^+}^px(s))|ds}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+\beta+\gamma-p)}\\
&+\frac{\mathbf{B}(\beta,\alpha)\mathbf{B}(\gamma,\alpha+\beta)\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+\beta+\gamma-p)}\frac{t^{\alpha+\beta}}{1+t^{\sigma+3}}\int_0^{+\infty}|g_2(s,x(s),D_{0^+}^px(s))|ds\\
&+\frac{\mathbf{B}(\beta,\gamma)\Gamma(\beta+\gamma)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta+\gamma-p)}\frac{t^{\beta}}{1+t^{\sigma+3}}\int_0^{+\infty}|g_1(s,x(s),D_{0^+}^px(s))|ds\\
&+\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-p)}\frac{1}{1+t^{\sigma+3}}\int_0^{+\infty}|g_0(s,x(s),D_{0^+}^px(s))|ds\\
\leqslant{}&\frac{t^{1+p-\gamma}}{1+t^{\sigma+3}}\frac{\mathbf{B}(\beta,\alpha)\mathbf{B}(\gamma,\alpha+\beta)\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)\int_0^t(t-s)^{\alpha+\beta+\gamma-p-1}Ms^{\mu}ds}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+\beta+\gamma-p)}\\
&+\frac{\mathbf{B}(\beta,\alpha)\mathbf{B}(\gamma,\alpha+\beta)\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+\beta+\gamma-p)}\overline{\sigma}_{\alpha+\beta}\int_0^{+\infty}M_2s^{\mu_2}\mathrm{e}^{-\theta_2s}ds\\
&+\frac{\mathbf{B}(\beta,\gamma)\Gamma(\beta+\gamma)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta+\gamma-p)}\overline{\sigma}_{\beta}\int_0^{+\infty}M_1s^{\mu_1}\mathrm{e}^{-\theta_1s}ds+\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-p)}\int_0^{+\infty}M_0s^{\mu_0}\mathrm{e}^{-\theta_0s}ds\\
={}&\frac{t^{\alpha+\beta+\mu+1}}{1+t^{\sigma+3}}M\frac{\mathbf{B}(\beta,\alpha)\mathbf{B}(\gamma,\alpha+\beta)\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)\mathbf{B}(\alpha+\beta+\gamma-p,\mu+1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+\beta+\gamma-p)}\\
&+\frac{\mathbf{B}(\beta,\alpha)\mathbf{B}(\gamma,\alpha+\beta)\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+\beta+\gamma-p)}\overline{\sigma}_{\alpha+\beta}\frac{M_2\Gamma(\mu_2+1)}{\theta_2^{\mu_2+1}}\\
&+\frac{\mathbf{B}(\beta,\gamma)\Gamma(\beta+\gamma)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta+\gamma-p)}\overline{\sigma}_{\beta}\frac{M_1\Gamma(\mu_1+1)}{\theta_1^{\mu_1+1}}+\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-p)}\frac{M_0\Gamma(\mu_0+1)}{\theta_0^{\mu_0+1}}\\
\leqslant{}& M\frac{\mathbf{B}(\beta,\alpha)\mathbf{B}(\gamma,\alpha+\beta)\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)\mathbf{B}(\alpha+\beta+\gamma-p,\mu+1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+\beta+\gamma-p)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{\mathbf{B}(\beta,\alpha)\mathbf{B}(\gamma,\alpha+\beta)\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+\beta+\gamma-p)}\overline{\sigma}_{\alpha+\beta}\frac{M_2\Gamma(\mu_2+1)}{\theta_2^{\mu_2+1}}\\
&+\frac{\mathbf{B}(\beta,\gamma)\Gamma(\beta+\gamma)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta+\gamma-p)}\overline{\sigma}_{\beta}\frac{M_1\Gamma(\mu_1+1)}{\theta_1^{\mu_1+1}}+\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-p)}\frac{M_0\Gamma(\mu_0+1)}{\theta_0^{\mu_0+1}}\\
<{}&+\infty.
\end{aligned}
$$

因此 $Tx\in X$. 则 T 将 X 中的元素映为 X 的元素.

(ii) 由引理 2.1 立得 $x\in X$ 是 T 的不动点当且仅当 $x\in X$ 是初值问题 (1.7) 的解.

为证明 T 是全连续算子, 只需证明:

T 将有界集合映为有界集合;

T 是连续算子;

T 把 X 的有界集合映为相对紧集合.

为此将证明分五步:

第一步 证明 T 将有界集合映为有界集合.

设 $\Omega\subseteq X$ 是有界集合, 与 (i) 中证明方法一样, 容易证明 $T\Omega$ 是有界集合. 过程略.

第二步 证明 T 是连续算子.

设 $u_n\in X$ 满足当 $n\to\infty$ 时 $u_n\to u_0$. 我们证明当 $n\to\infty$ 时 $Tv_n\to Tv_0$. 容易看出存在常数 $r>0$ 满足

$$
\|x_n\|=\max\left\{\sup_{t\in(0,\infty)}\frac{t^{1-\gamma}}{1+t^{\sigma+3}}|x_n(t)|,\sup_{t\in(0,\infty)}\frac{t^{1+p-\gamma}}{1+t^{\sigma+3}}|D_{0^+}^p x_n(t)|\right\}\leqslant r<\infty.
$$

注意到

$$
\begin{aligned}
(Tx_n)(t)={}&\frac{\mathbf{B}(\beta,\alpha)\mathbf{B}(\gamma,\alpha+\beta)\int_0^t(t-s)^{\alpha+\beta+\gamma-1}f(s,x_n(s),D_{0^+}^p x_n(s))ds}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)}\\
&+\frac{\mathbf{B}(\beta,\alpha)\mathbf{B}(\gamma,\alpha+\beta)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)}t^{\alpha+\beta+\gamma-1}\int_0^{+\infty}g_2(s,x_n(s),D_{0^+}^p x_n(s))ds\\
&+\frac{\mathbf{B}(\beta,\gamma)}{\Gamma(\gamma)}t^{\beta+\gamma-1}\int_0^{+\infty}g_1(s,x_n(s),D_{0^+}^p x_n(s))ds\\
&+t^{\gamma-1}\int_0^{+\infty}g_0(s,x_0(s),D_{0^+}^p x_0(s))ds
\end{aligned}\tag{2.9}
$$

以及

$$
\begin{aligned}
D_{0^+}^p(Tx_n)(t)={}&\frac{\mathbf{B}(\beta,\alpha)\mathbf{B}(\gamma,\alpha+\beta)\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)\int_0^t(t-s)^{\alpha+\beta+\gamma-p-1}f(s,x_n(s),D_{0^+}^p x_n(s))ds}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+\beta+\gamma-p)}\\
&+\frac{\mathbf{B}(\beta,\alpha)\mathbf{B}(\gamma,\alpha+\beta)\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+\beta+\gamma-p)}t^{\alpha+\beta+\gamma-p-1}\int_0^{+\infty}g_2(s,x_n(s),D_{0^+}^p x_n(s))ds\\
&+\frac{\mathbf{B}(\beta,\gamma)\Gamma(\beta+\gamma)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta+\gamma-p)}t^{\beta+\gamma-p-1}\int_0^{+\infty}g_1(s,x_n(s),D_{0^+}^p x_n(s))ds\\
&+\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-p)}t^{\gamma-p-1}\int_0^{+\infty}g_0(s,x_n(s),D_{0^+}^p x_n(s))ds.
\end{aligned}\tag{2.10}
$$

运用无限区间上 Lebesgue 控制收敛定理得到

$$
\lim_{n\to\infty}\frac{t^{1-\gamma}}{1+t^{\sigma+3}}|(Tx_n)(t)-(Tx_0)(t)|=0
$$

和

$$\lim_{n\to\infty}\frac{t^{1+p-\gamma}}{1+t^{\sigma+3}}|D_{0^+}^p(Tx_n)(t)-D_{0^+}^p(Tx_0)(t)|=0.$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}Tx_n=Tx_0.$$

于是 T 是连续算子.

现在证明 T 把 X 的有界集合映为相对紧集合. 设 W 是 X 的有界集合, 熟知 $TW\subset X$ 如果满足以下条件, 则 TW 是相对紧集合:

(a) TW 是有界集合 (该结论第一步已证明);

(b) 在 $(0,\infty)$ 的任意子区间 $[a,b]$ 上 $\frac{t^{1-\gamma}}{1+t^{\sigma+3}}TW$ 和 $\frac{t^{1+p-\gamma}}{1+t^{\sigma+3}}TW$ 都是等度连续的;

(c) 当 $t\to 0$ 时, $\frac{t^{1-\gamma}}{1+t^{\sigma+3}}TW$ 和 $\frac{t^{1+p-\gamma}}{1+t^{\sigma+3}}TW$ 都是等度收敛的;

(d) 当 $t\to\infty$ 时, $\frac{t^{1-\gamma}}{1+t^{\sigma+3}}TW$ 和 $\frac{t^{1+p-\gamma}}{1+t^{\sigma+3}}TW$ 都是等度收敛的.

第三步 证明在 $(0,\infty)$ 的任意子区间 $[a,b]$ 上 $\frac{t^{1-\gamma}}{1+t^{\sigma+3}}TW$ 和 $\frac{t^{1+p-\gamma}}{1+t^{\sigma+3}}TW$ 都是等度连续的.

由于 $W\subset X$ 是有界集合, 所以存在 $r>0$ 满足

$$\|x\|=\max\left\{\sup_{t\in(0,\infty)}\frac{t^{1-\gamma}}{1+t^{\sigma+3}}|x(t)|,\sup_{t\in(0,\infty)}\frac{t^{1+p-\gamma}}{1+t^{\sigma+3}}|D_{0^+}^p x(t)|\right\}\leqslant r<\infty,\quad x\in W.$$

因为 f 是 Caratheodory 函数, g_i $(i=0,1,2)$ 是强 Caratheodory 函数, 所以存在正数 M,M_i $(i=0,1,2)$ 和 $\mu,\mu_i>-1,\theta_i>0$ $(i=0,1,2)$ 满足

$$\begin{aligned}&|f(t,x(t),D_{0^+}^p x(t))|=\left|f\left(t,\frac{1+t^{\sigma+3}}{t^{1-\gamma}}\frac{t^{1-\gamma}}{1+t^{\sigma+3}}x(t),\frac{1+t^{\sigma+3}}{t^{1+p-\gamma}}\frac{t^{1+p-\gamma}}{1+t^{\sigma+3}}D_{0^+}^p x(t)\right)\right|\leqslant Mt^{\mu},\\&|g_i(t,x(t),D_{0^+}^p x(t))|\leqslant M_i t^{\mu_i}\mathrm{e}^{-\theta_i t},\quad i=0,1,2.\end{aligned}$$

对 $[a,b]\subset(0,\infty)$ 中的任意点 $t_1,t_2\in[a,b]$ $(t_1<t_2)$ 以及 $x\in W$, 有

$$\begin{aligned}&\left|\frac{t_1^{1-\gamma}}{1+t_1^{\sigma+3}}|(Tx)(t_1)-\frac{t_2^{1-\gamma}}{1+t_2^{\sigma+3}}(Tx)(t_2)\right|\\
&\quad=\left|\frac{t_1^{1-\gamma}}{1+t_1^{\sigma+3}}\frac{\mathbf{B}(\beta,\alpha)\mathbf{B}(\gamma,\alpha+\beta)\int_0^{t_1}(t_1-s)^{\alpha+\beta+\gamma-1}f(s,x(s),D_{0^+}^p x(s))ds}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)}\right.\\
&\qquad+\frac{\mathbf{B}(\beta,\alpha)\mathbf{B}(\gamma,\alpha+\beta)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)}\frac{t_1^{\alpha+\beta}}{1+t_1^{\sigma+3}}\int_0^{+\infty}g_2(s,x(s),D_{0^+}^p x(s))ds\\
&\qquad+\frac{\mathbf{B}(\beta,\gamma)}{\Gamma(\gamma)}\frac{t_1^{\beta}}{1+t_1^{\sigma+3}}\int_0^{+\infty}g_1(s,x(s),D_{0^+}^p x(s))ds+\frac{1}{t_1^{3+\sigma}}\int_0^{+\infty}g_0(s,x(s),D_{0^+}^p x(s))ds\\
&\qquad-\left(\frac{t_2^{1-\gamma}}{1+t_2^{\sigma+3}}\frac{\mathbf{B}(\beta,\alpha)\mathbf{B}(\gamma,\alpha+\beta)\int_0^{t_2}(t_2-s)^{\alpha+\beta+\gamma-1}f(s,x(s),D_{0^+}^p x(s))ds}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)}\right.\\
&\qquad+\frac{\mathbf{B}(\beta,\alpha)\mathbf{B}(\gamma,\alpha+\beta)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)}\frac{t_2^{\alpha+\beta}}{1+t_2^{\sigma+3}}\int_0^{+\infty}g_2(s,x(s),D_{0^+}^p x(s))ds\\
&\qquad\left.\left.+\frac{\mathbf{B}(\beta,\gamma)}{\Gamma(\gamma)}\frac{t_2^{\beta}}{1+t_2^{\sigma+3}}\int_0^{+\infty}g_1(s,x(s),D_{0^+}^p x(s))ds+\frac{1}{t_2^{3+\sigma}}\int_0^{+\infty}g_0(s,x(s),D_{0^+}^p x(s))ds\right)\right|\\
&\quad\leqslant\left|\frac{t_1^{1-\gamma}}{1+t_1^{\sigma+3}}\frac{\mathbf{B}(\beta,\alpha)\mathbf{B}(\gamma,\alpha+\beta)\int_0^{t_1}(t_1-s)^{\alpha+\beta+\gamma-1}f(s,x(s),D_{0^+}^p x(s))ds}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)}\right.\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\quad -\frac{t_2^{1-\gamma}}{1+t_2^{\sigma+3}}\frac{\mathbf{B}(\beta,\alpha)\mathbf{B}(\gamma,\alpha+\beta)\int_0^{t_2}(t_2-s)^{\alpha+\beta+\gamma-1}f(s,x(s),D_{0^+}^px(s))ds}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)}\Bigg|\\
&\quad +\frac{\mathbf{B}(\beta,\alpha)\mathbf{B}(\gamma,\alpha+\beta)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)}\int_0^{+\infty}g_2(s,x(s),D_{0^+}^px(s))ds\left|\frac{t_1^{\alpha+\beta}}{1+t_1^{\sigma+3}}-\frac{t_2^{\alpha+\beta}}{1+t_2^{\sigma+3}}\right|\\
&\quad +\frac{\mathbf{B}(\beta,\gamma)}{\Gamma(\gamma)}\int_0^{+\infty}g_1(s,x(s),D_{0^+}^px(s))ds\left|\frac{t_1^{\beta}}{1+t_1^{\sigma+3}}-\frac{t_2^{\beta}}{1+t_2^{\sigma+3}}\right|\\
&\quad +\int_0^{+\infty}g_0(s,x(s),D_{0^+}^px(s))ds\left|\frac{1}{t_1^{3+\sigma}}-\frac{1}{t_2^{3+\sigma}}\right|\\
&\leqslant\Bigg|\frac{t_1^{1-\gamma}}{1+t_1^{\sigma+3}}\frac{\mathbf{B}(\beta,\alpha)\mathbf{B}(\gamma,\alpha+\beta)\int_0^{t_1}(t_1-s)^{\alpha+\beta+\gamma-1}f(s,x_n(s),D_{0^+}^px_n(s))ds}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)}\\
&\quad -\frac{t_2^{1-\gamma}}{1+t_2^{\sigma+3}}\frac{\mathbf{B}(\beta,\alpha)\mathbf{B}(\gamma,\alpha+\beta)\int_0^{t_2}(t_2-s)^{\alpha+\beta+\gamma-1}f(s,x(s),D_{0^+}^px(s))ds}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)}\Bigg|\\
&\quad +\frac{\mathbf{B}(\beta,\alpha)\mathbf{B}(\gamma,\alpha+\beta)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)}\int_0^{+\infty}M_2s^{\mu_2}\mathrm{e}^{-\theta_2s}ds\left|\frac{t_1^{\alpha+\beta}}{1+t_1^{\sigma+3}}-\frac{t_2^{\alpha+\beta}}{1+t_2^{\sigma+3}}\right|\\
&\quad +\frac{\mathbf{B}(\beta,\gamma)}{\Gamma(\gamma)}\int_0^{+\infty}M_1s^{\mu_1}\mathrm{e}^{-\theta_1s}ds\left|\frac{t_1^{\beta}}{1+t_1^{\sigma+3}}-\frac{t_2^{\beta}}{1+t_2^{\sigma+3}}\right|\\
&\quad +\int_0^{+\infty}M_0s^{\mu_0}\mathrm{e}^{-\theta_0s}ds\left|\frac{1}{t_1^{3+\sigma}}-\frac{1}{t_2^{3+\sigma}}\right|\\
&=\Bigg|\frac{t_1^{1-\gamma}}{1+t_1^{\sigma+3}}\frac{\mathbf{B}(\beta,\alpha)\mathbf{B}(\gamma,\alpha+\beta)\int_0^{t_1}(t_1-s)^{\alpha+\beta+\gamma-1}f(s,x(s),D_{0^+}^px(s))ds}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)}\\
&\quad -\frac{t_2^{1-\gamma}}{1+t_2^{\sigma+3}}\frac{\mathbf{B}(\beta,\alpha)\mathbf{B}(\gamma,\alpha+\beta)\int_0^{t_2}(t_2-s)^{\alpha+\beta+\gamma-1}f(s,x(s),D_{0^+}^px(s))ds}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)}\Bigg|\\
&\quad +\frac{\mathbf{B}(\beta,\alpha)\mathbf{B}(\gamma,\alpha+\beta)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)}\frac{M_2\Gamma(\mu_2+1)}{\theta_2^{\mu_2+1}}\left|\frac{t_1^{\alpha+\beta}}{1+t_1^{\sigma+3}}-\frac{t_2^{\alpha+\beta}}{1+t_2^{\sigma+3}}\right|\\
&\quad +\frac{\mathbf{B}(\beta,\gamma)}{\Gamma(\gamma)}\frac{M_1\Gamma(\mu_1+1)}{\theta_1^{\mu_1+1}}\left|\frac{t_1^{\beta}}{1+t_1^{\sigma+3}}-\frac{t_2^{\beta}}{1+t_21^{\sigma+3}}\right|\\
&\quad +\frac{M_0\Gamma(\mu_0+1)}{\theta_0^{\mu_0+1}}\left|\frac{1}{t_1^{3+\sigma}}-\frac{1}{t_2^{3+\sigma}}\right|.
\end{aligned}
$$

从不等式 $|a^\nu-b^\nu|\leqslant|a-b|^\nu$, $a,b\geqslant 0$, $\nu\in(0,1)$, 结合条件 (H), 我们得到

$$
\begin{aligned}
&\Bigg|\frac{t_1^{1-\gamma}}{1+t_1^{\sigma+3}}\int_0^{t_1}(t_1-s)^{\alpha+\beta+\gamma-1}f(s,x(s),D_{0^+}^px(s)))ds\\
&\qquad -\frac{t_2^{1-\gamma}}{1+t_2^{\sigma+3}}\int_0^{t_2}(t_2-s)^{\alpha+\beta+\gamma-1}f(s,x(s),D_{0^+}^px(s)))ds\Bigg|\\
&\qquad\leqslant\left|\frac{t_1^{1-\gamma}}{1+t_1^{\sigma+3}}-\frac{t_2^{1-\gamma}}{1+t_2^{\sigma+3}}\right|\int_0^{t_1}(t_1-s)^{\alpha+\beta+\gamma-1}|f(s,x(s),D_{0^+}^px(s)))|ds\\
&\qquad\quad +\frac{t_2^{1-\gamma}}{1+t_2^{\sigma+3}}\int_{t_1}^{t_2}(t_1-s)^{\alpha+\beta+\gamma-1}|f(s,x(s),D_{0^+}^px(s)))|ds\\
&\qquad\quad +\frac{t_2^{1-\gamma}}{1+t_2^{\sigma+3}}\int_0^{t_2}|(t_1-s)^{\alpha+\beta+\gamma-1}-(t_2-s)^{\alpha+\beta+\gamma-1}||f(s,x(s),D_{0^+}^px(s)))|ds
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant \left|\frac{t_1^{1-\gamma}}{1+t_1^{\sigma+3}}-\frac{t_2^{1-\gamma}}{1+t_2^{\sigma+3}}\right|\int_0^{t_1}(t_1-s)^{\alpha+\beta+\gamma-1}Ms^{\mu}ds+\frac{t_2^{1-\gamma}}{1+t_2^{\sigma+3}}\int_{t_1}^{t_2}(t_1-s)^{\alpha+\beta+\gamma-1}Ms^{\mu}ds\\
&\quad+\frac{t_2^{1-\gamma}}{1+t_2^{\sigma+3}}\int_0^{t_2}|(t_1-s)^{\alpha+\beta+\gamma-1}-(t_2-s)^{\alpha+\beta+\gamma-1}|Ms^{\mu}ds\\
&\leqslant \left|\frac{t_1^{1-\gamma}}{1+t_1^{\sigma+3}}-\frac{t_2^{1-\gamma}}{1+t_2^{\sigma+3}}\right|t_1^{\alpha+\beta+\gamma+\mu}\mathbf{B}(\alpha+\beta+\gamma,\mu+1)M\\
&\quad+M\frac{t_2^{1-\gamma}t_1^{\alpha+\beta+\gamma+\mu}}{1+t_2^{\sigma+3}}\int_1^{t_2/t_1}(1-w)^{\alpha+\beta+\gamma-1}w^{\mu}dw\\
&\quad+\frac{t_2^{1-\gamma}}{1+t_2^{\sigma+3}}|t_2-t_1|^{\alpha+\beta+\gamma-1}\int_0^{t_2}Ms^{\mu}ds\\
&\leqslant \left|\frac{t_1^{1-\gamma}}{1+t_1^{\sigma+3}}-\frac{t_2^{1-\gamma}}{1+t_2^{\sigma+3}}\right|t_1^{\alpha+\beta+\gamma+\mu}\mathbf{B}(\alpha+\beta+\gamma,\mu+1)M\\
&\quad+M\frac{t_2^{1-\gamma}t_1^{\alpha+\beta+\gamma+\mu}}{1+t_2^{\sigma+3}}\int_1^{t_2/t_1}(1-w)^{\alpha+\beta+\gamma-1}w^{\mu}dw+\frac{t_2^{1-\gamma}}{1+t_2^{\sigma+3}}|t_2-t_1|^{\alpha+\beta+\gamma-1}\int_0^{b}Ms^{\mu}ds.
\end{aligned}
$$

又易知上式当 $t_2\to t_1$ 时在 W 上一致趋于 0, 因此

$$
\left|\frac{t_1^{1-\gamma}}{1+t_1^{\sigma+3}}|(Tx)(t_1)-\frac{t_2^{1-\gamma}}{1+t_2^{\sigma+3}}(Tx)(t_2)\right|\to 0\ \ (\text{在 } W \text{ 上一致地}),\quad t_2\to t_1. \tag{2.11}
$$

另一方面, 我们有

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{t_1^{1+p-\gamma}}{1+t_1^{\sigma+3}}D_{0^+}^{p}(Tx)(t_1)-\frac{t_2^{1+p-\gamma}}{1+t_2^{\sigma+3}}D_{0^+}^{p}(Tx)(t_2)\right|\\
&\quad=\left|\frac{t_1^{1+p-\gamma}}{1+t_1^{\sigma+3}}\frac{\mathbf{B}(\beta,\alpha)\mathbf{B}(\gamma,\alpha+\beta)\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)\int_0^{t_1}(t_1-s)^{\alpha+\beta+\gamma-p-1}f(s,x(s),D_{0^+}^{p}x(s))ds}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+\beta+\gamma-p)}\right.\\
&\qquad+\frac{\mathbf{B}(\beta,\alpha)\mathbf{B}(\gamma,\alpha+\beta)\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+\beta+\gamma-p)}\frac{t_1^{\alpha+\beta}}{1+t_1^{\sigma+3}}\int_0^{+\infty}g_2(s,x(s),D_{0^+}^{p}x(s))ds\\
&\qquad+\frac{\mathbf{B}(\beta,\gamma)\Gamma(\beta+\gamma)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta+\gamma-p)}\frac{t_1^{\beta}}{1+t_1^{\sigma+3}}\int_0^{+\infty}g_1(s,x(s),D_{0^+}^{p}x(s))ds\\
&\qquad+\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-p)}\frac{1}{1+t_1^{\sigma+3}}\int_0^{+\infty}g_0(s,x(s),D_{0^+}^{p}x(s))ds\\
&\qquad-\left(\frac{t_2^{1+p-\gamma}}{1+t_2^{\sigma+3}}\frac{\mathbf{B}(\beta,\alpha)\mathbf{B}(\gamma,\alpha+\beta)\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)\int_0^{t_2}(t_2-s)^{\alpha+\beta+\gamma-p-1}f(s,x(s),D_{0^+}^{p}x(s))ds}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+\beta+\gamma-p)}\right.\\
&\qquad+\frac{\mathbf{B}(\beta,\alpha)\mathbf{B}(\gamma,\alpha+\beta)\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+\beta+\gamma-p)}\frac{t_2^{\alpha+\beta}}{1+t_2^{\sigma+3}}\int_0^{+\infty}g_2(s,x(s),D_{0^+}^{p}x(s))ds\\
&\qquad+\frac{\mathbf{B}(\beta,\gamma)\Gamma(\beta+\gamma)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta+\gamma-p)}\frac{t_2^{\beta}}{1+t_2^{\sigma+3}}\int_0^{+\infty}g_1(s,x(s),D_{0^+}^{p}x(s))ds\\
&\qquad\left.\left.+\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-p)}\frac{1}{1+t_2^{\sigma+3}}\int_0^{+\infty}g_0(s,x(s),D_{0^+}^{p}x(s))ds\right)\right|\\
&\quad\leqslant\frac{\mathbf{B}(\beta,\alpha)\mathbf{B}(\gamma,\alpha+\beta)\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+\beta+\gamma-p)}\left|\frac{t_1^{1+p-\gamma}}{1+t_1^{\sigma+3}}\int_0^{t_1}(t_1-s)^{\alpha+\beta+\gamma-p-1}f(s,x(s),D_{0^+}^{p}x(s))ds\right.\\
&\qquad\left.-\frac{t_2^{1+p-\gamma}}{1+t_2^{\sigma+3}}\int_0^{t_2}(t_2-s)^{\alpha+\beta+\gamma-p-1}f(s,x(s),D_{0^+}^{p}x(s))ds\right|
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{\mathbf{B}(\beta,\alpha)\mathbf{B}(\gamma,\alpha+\beta)\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+\beta+\gamma-p)}\int_0^{+\infty} g_2(s,x(s),D_{0^+}^p x(s))ds\left|\frac{t_1^{\alpha+\beta}}{1+t_1^{\sigma+3}}-\frac{t_2^{\alpha+\beta}}{1+t_2^{\sigma+3}}\right|\\
&+\frac{\mathbf{B}(\beta,\gamma)\Gamma(\beta+\gamma)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta+\gamma-p)}\int_0^{+\infty} g_1(s,x(s),D_{0^+}^p x(s))ds\left|\frac{t_1^{\beta}}{1+t_1^{\sigma+3}}-\frac{t_2^{\beta}}{1+t_2^{\sigma+3}}\right|\\
&+\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-p)}\int_0^{+\infty} g_0(s,x(s),D_{0^+}^p x(s))ds\left|\frac{1}{1+t_1^{\sigma+3}}-\frac{1}{1+t_2^{\sigma+3}}\right|\\
\leqslant&\ \frac{\mathbf{B}(\beta,\alpha)\mathbf{B}(\gamma,\alpha+\beta)\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+\beta+\gamma-p)}\left|\frac{t_1^{1+p-\gamma}}{1+t_1^{\sigma+3}}\int_0^{t_1}(t_1-s)^{\alpha+\beta+\gamma-p-1}f(s,x(s),D_{0^+}^p x(s))ds\right.\\
&\left.-\frac{t_2^{1+p-\gamma}}{1+t_2^{\sigma+3}}\int_0^{t_2}(t_2-s)^{\alpha+\beta+\gamma-p-1}f(s,x(s),D_{0^+}^p x(s))ds\right|\\
&+\frac{\mathbf{B}(\beta,\alpha)\mathbf{B}(\gamma,\alpha+\beta)\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+\beta+\gamma-p)}\frac{M_2\Gamma(\mu_2+1)}{\theta_2^{\mu_2+1}}\left|\frac{t_1^{\alpha+\beta}}{1+t_1^{\sigma+3}}-\frac{t_2^{\alpha+\beta}}{1+t_2^{\sigma+3}}\right|\\
&+\frac{\mathbf{B}(\beta,\gamma)\Gamma(\beta+\gamma)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta+\gamma-p)}\frac{M_1\Gamma(\mu_1+1)}{\theta_1^{\mu_1+1}}\left|\frac{t_1^{\beta}}{1+t_1^{\sigma+3}}-\frac{t_2^{\beta}}{1+t_2^{\sigma+3}}\right|\\
&+\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-p)}\frac{M_0\Gamma(\mu_0+1)}{\theta_0^{\mu_0+1}}\left|\frac{1}{1+t_1^{\sigma+3}}-\frac{1}{1+t_2^{\sigma+3}}\right|,
\end{aligned}
$$

因为

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{t_1^{1+p-\gamma}}{1+t_1^{\sigma+3}}\int_0^{t_1}(t_1-s)^{\alpha+\beta+\gamma-p-1}f(s,x(s),D_{0^+}^p x(s))ds\right.\\
&\qquad\left.-\frac{t_2^{1+p-\gamma}}{1+t_2^{\sigma+3}}\int_0^{t_2}(t_2-s)^{\alpha+\beta+\gamma-p-1}f(s,x(s),D_{0^+}^p x(s))ds\right|\\
&\qquad\leqslant\left|\frac{t_1^{1+p-\gamma}}{1+t_1^{\sigma+3}}-\frac{t_2^{1+p-\gamma}}{1+t_2^{\sigma+3}}\right|\int_0^{t_1}(t_1-s)^{\alpha+\beta+\gamma-p-1}|f(s,x(s),D_{0^+}^p x(s))|ds\\
&\qquad\quad+\frac{t_2^{1+p-\gamma}}{1+t_2^{\sigma+3}}\int_{t_1}^{t_2}(t_1-s)^{\alpha+\beta+\gamma-p-1}|f(s,x(s),D_{0^+}^p x(s))|ds\\
&\qquad\quad+\frac{t_2^{1+p-\gamma}}{1+t_2^{\sigma+3}}\int_0^{t_2}|(t_2-s)^{\alpha+\beta+\gamma-p-1}-(t_1-s)^{\alpha+\beta+\gamma-p-1}||f(s,x(s),D_{0^+}^p x(s))|ds\\
&\qquad\leqslant\left|\frac{t_1^{1+p-\gamma}}{1+t_1^{\sigma+3}}-\frac{t_2^{1+p-\gamma}}{1+t_2^{\sigma+3}}\right|\int_0^{t_1}(t_1-s)^{\alpha+\beta+\gamma-p-1}Ms^{\mu}ds\\
&\qquad\quad+\frac{t_2^{1+p-\gamma}}{1+t_2^{\sigma+3}}\int_{t_1}^{t_2}(t_1-s)^{\alpha+\beta+\gamma-p-1}Ms^{\mu}ds\\
&\qquad\quad+\frac{t_2^{1+p-\gamma}}{1+t_2^{\sigma+3}}\int_0^{t_2}|(t_2-s)^{\alpha+\beta+\gamma-p-1}-(t_1-s)^{\alpha+\beta+\gamma-p-1}Ms^{\mu}ds\\
&\qquad\to 0\ \ (\text{在 } W \text{ 上一致地}),\quad t_2\to t_1,
\end{aligned}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{t_1^{1+p-\gamma}}{1+t_1^{\sigma+3}}\int_0^{t_1}(t_1-s)^{\alpha+\beta+\gamma-p-1}f(s,x(s),D_{0^+}^p x(s))ds\right.\\
&\left.\quad-\frac{t_2^{1+p-\gamma}}{1+t_2^{\sigma+3}}\int_0^{t_2}(t_2-s)^{\alpha+\beta+\gamma-p-1}f(s,x(s),D_{0^+}^p x(s))ds\right|\to 0\ \ (\text{在 } W \text{ 上一致地}),\quad t_2\to t_1.
\end{aligned}\tag{2.12}
$$

结合 (2.11) 和 (2.12), 立得在 $(0,\infty)$ 的任意子区间 $[a,b]$ 上 $\frac{t^{1-\gamma}}{1+t^{\sigma+3}}TW$ 和 $\frac{t^{1+p-\gamma}}{1+t^{\sigma+3}}TW$ 都是等度连续的.

第四步 证明当 $t\to 0$ 时, $\frac{t^{1-\gamma}}{1+t^{\sigma+3}}TW$ 和 $\frac{t^{1+p-\gamma}}{1+t^{\sigma+3}}TW$ 都是等度收敛的.

由 $\sigma>\alpha+\beta-2$ 可以得到

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{t^{1-\gamma}}{1+t^{\sigma+3}}|(Tx)(t)-\int_0^{+\infty}g_0(s,x(s),D_{0^+}^p x(s))ds\right|\\
&\leqslant\frac{t^{1-\gamma}}{1+t^{\sigma+3}}\frac{\mathbf{B}(\beta,\alpha)\mathbf{B}(\gamma,\alpha+\beta)\int_0^t(t-s)^{\alpha+\beta+\gamma-1}|f(s,x(s),D_{0^+}^p x(s))|ds}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)}\\
&\quad+\frac{\mathbf{B}(\beta,\alpha)\mathbf{B}(\gamma,\alpha+\beta)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)}\frac{t^{\alpha+\beta}}{1+t^{\sigma+3}}\int_0^{+\infty}|g_2(s,x(s),D_{0^+}^p x(s))|dt\\
&\quad+\frac{\mathbf{B}(\beta,\gamma)}{\Gamma(\gamma)}\frac{t^{\beta}}{1+t^{\sigma+3}}\int_0^{+\infty}|g_1(s,x(s),D_{0^+}^p x(s))|dt\\
&\quad+\frac{t^{\sigma+3}}{1+t^{\sigma+3}}\int_0^{+\infty}|g_0(s,x(s),D_{0^+}^p x(s))|dt\\
&\leqslant\frac{t^{1-\gamma}}{1+t^{\sigma+3}}\frac{\mathbf{B}(\beta,\alpha)\mathbf{B}(\gamma,\alpha+\beta)\int_0^t(t-s)^{\alpha+\beta+\gamma-1}Ms^{\mu}ds}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)}\\
&\quad+\frac{\mathbf{B}(\beta,\alpha)\mathbf{B}(\gamma,\alpha+\beta)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)}\frac{t^{\alpha+\beta}}{1+t^{\sigma+3}}\int_0^{+\infty}M_2s^{\mu_2}\mathrm{e}^{-\theta_2 s}ds\\
&\quad+\frac{\mathbf{B}(\beta,\gamma)}{\Gamma(\gamma)}\frac{t^{\beta}}{1+t^{\sigma+3}}\int_0^{+\infty}M_1s^{\mu_1}\mathrm{e}^{-\theta_1 s}ds\\
&\quad+\frac{t^{\sigma+3}}{1+t^{\sigma+3}}\int_0^{+\infty}M_0s^{\mu_0}\mathrm{e}^{-\theta_0 s}ds\\
&=\frac{t^{\alpha+\beta+\mu+1}}{1+t^{\sigma+3}}\frac{\mathbf{B}(\beta,\alpha)\mathbf{B}(\gamma,\alpha+\beta)M\mathbf{B}(\alpha+\beta+\gamma,\mu+1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)}\\
&\quad+\frac{\mathbf{B}(\beta,\alpha)\mathbf{B}(\gamma,\alpha+\beta)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)}\frac{t^{\alpha+\beta}}{1+t^{\sigma+3}}\int_0^{+\infty}M_2s^{\mu_2}\mathrm{e}^{-\theta_2 s}ds\\
&\quad+\frac{\mathbf{B}(\beta,\gamma)}{\Gamma(\gamma)}\frac{t^{\beta}}{1+t^{\sigma+3}}\int_0^{+\infty}M_1s^{\mu_1}\mathrm{e}^{-\theta_1 s}ds\\
&\quad+\frac{t^{\sigma+3}}{1+t^{\sigma+3}}\int_0^{+\infty}M_0s^{\mu_0}\mathrm{e}^{-\theta_0 s}ds\\
&\to 0\ \ (\text{在 } W \text{ 上一致地}),\quad t\to 0.
\end{aligned}$$

注意到 $\sigma>\alpha+\beta-2$, 推出

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{t^{1+p-\gamma}}{1+t^{\sigma+3}}D_{0^+}^p(Tx)(t)-\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-p)}\int_0^{+\infty}g_0(s,x(s),D_{0^+}^p x(s))ds\right|\\
&\leqslant\frac{t^{1+p-\gamma}}{1+t^{\sigma+3}}\frac{\mathbf{B}(\beta,\alpha)\mathbf{B}(\gamma,\alpha+\beta)\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)\int_0^t(t-s)^{\alpha+\beta+\gamma-p-1}Ms^{\mu}ds}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+\beta+\gamma-p)}\\
&\quad+\frac{\mathbf{B}(\beta,\alpha)\mathbf{B}(\gamma,\alpha+\beta)\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+\beta+\gamma-p)}\frac{t^{\alpha+\beta}}{1+t^{\sigma+3}}\int_0^{+\infty}M_2s^{\mu_2}\mathrm{e}^{-\theta_2 s}ds\\
&\quad+\frac{\mathbf{B}(\beta,\gamma)\Gamma(\beta+\gamma)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta+\gamma-p)}\frac{t^{\beta}}{1+t^{\sigma+3}}\int_0^{+\infty}M_1s^{\mu_1}\mathrm{e}^{-\theta_1 s}ds\\
&\quad+\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-p)}\frac{t^{3+\sigma}}{1+t^{\sigma+3}}\int_0^{+\infty}M_0s^{\mu_0}\mathrm{e}^{-\theta_0 s}ds
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{t^{\alpha+\beta+\mu+1}}{1+t^{\sigma+3}} \frac{\mathbf{B}(\beta,\alpha)\mathbf{B}(\gamma,\alpha+\beta)\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)M\mathbf{B}(\alpha+\beta+\gamma-p,\mu+1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+\beta+\gamma-p)} \\
&\quad + \frac{\mathbf{B}(\beta,\alpha)\mathbf{B}(\gamma,\alpha+\beta)\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+\beta+\gamma-p)} \frac{t^{\alpha+\beta}}{1+t^{\sigma+3}} \int_0^{+\infty} M_2 s^{\mu_2} \mathrm{e}^{-\theta_2 s} ds \\
&\quad + \frac{\mathbf{B}(\beta,\gamma)\Gamma(\beta+\gamma)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta+\gamma-p)} \frac{t^{\beta}}{1+t^{\sigma+3}} \int_0^{+\infty} M_1 s^{\mu_1} \mathrm{e}^{-\theta_1 s} ds \\
&\quad + \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-p)} \frac{t^{3+\sigma}}{1+t^{\sigma+3}} \int_0^{+\infty} M_0 s^{\mu_0} \mathrm{e}^{-\theta_0 s} ds \\
&\to 0 \ \ (\text{在 } W \text{ 上一致地}), \quad t \to 0.
\end{aligned}
$$

因此当 $t \to 0$ 时, $\frac{t^{1-\gamma}}{1+t^{\sigma+3}}TW$ 和 $\frac{t^{1+p-\gamma}}{1+t^{\sigma+3}}TW$ 都是等度收敛的.

第五步 证明 $t \to \infty$ 时, $\frac{t^{1-\gamma}}{1+t^{\sigma+3}}TW$ 和 $\frac{t^{1+p-\gamma}}{1+t^{\sigma+3}}TW$ 都是等度收敛的.

从 $\sigma > \alpha+\beta-2$ 推出

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{t^{1-\gamma}}{1+t^{\sigma+3}}|(Tx)(t)|\right| &\leqslant \frac{t^{1-\gamma}}{1+t^{\sigma+3}} \frac{\mathbf{B}(\beta,\alpha)\mathbf{B}(\gamma,\alpha+\beta)\int_0^t (t-s)^{\alpha+\beta+\gamma-1}|f(s,x(s),D_{0+}^p x(s))|ds}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)} \\
&\quad + \frac{\mathbf{B}(\beta,\alpha)\mathbf{B}(\gamma,\alpha+\beta)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)} \frac{t^{\alpha+\beta}}{1+t^{\sigma+3}} \int_0^{+\infty} |g_2(s,x(s),D_{0+}^p x(s))|dt \\
&\quad + \frac{\mathbf{B}(\beta,\gamma)}{\Gamma(\gamma)} \frac{t^{\beta}}{1+t^{\sigma+3}} \int_0^{+\infty} |g_1(s,x(s),D_{0+}^p x(s))|dt \\
&\quad + \frac{1}{1+t^{\sigma+3}} \int_0^{+\infty} |g_0(s,x(s),D_{0+}^p x(s))|dt \\
&\leqslant \frac{t^{1-\gamma}}{1+t^{\sigma+3}} \frac{\mathbf{B}(\beta,\alpha)\mathbf{B}(\gamma,\alpha+\beta)\int_0^t (t-s)^{\alpha+\beta+\gamma-1} M s^{\mu} ds}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)} \\
&\quad + \frac{\mathbf{B}(\beta,\alpha)\mathbf{B}(\gamma,\alpha+\beta)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)} \frac{t^{\alpha+\beta}}{1+t^{\sigma+3}} \int_0^{+\infty} M_2 s^{\mu_2} \mathrm{e}^{-\theta_2 s} ds \\
&\quad + \frac{\mathbf{B}(\beta,\gamma)}{\Gamma(\gamma)} \frac{t^{\beta}}{1+t^{\sigma+3}} \int_0^{+\infty} M_1 s^{\mu_1} \mathrm{e}^{-\theta_1 s} ds \\
&\quad + \frac{1}{1+t^{\sigma+3}} \int_0^{+\infty} M_0 s^{\mu_0} \mathrm{e}^{-\theta_0 s} ds \\
&\to 0 \ \ (\text{在 } W \text{ 上一致地}), \quad t \to \infty.
\end{aligned}
$$

注意到 $\sigma > \alpha+\beta-2$, 有

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{t^{1+p-\gamma}}{1+t^{\sigma+3}} D_{0+}^p (Tx)(t)\right| &\leqslant \frac{t^{1+p-\gamma}}{1+t^{\sigma+3}} \frac{\mathbf{B}(\beta,\alpha)\mathbf{B}(\gamma,\alpha+\beta)\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)\int_0^t (t-s)^{\alpha+\beta+\gamma-p-1} M s^{\mu} ds}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+\beta+\gamma-p)} \\
&\quad + \frac{\mathbf{B}(\beta,\alpha)\mathbf{B}(\gamma,\alpha+\beta)\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+\beta+\gamma-p)} \frac{t^{\alpha+\beta}}{1+t^{\sigma+3}} \int_0^{+\infty} M_2 s^{\mu_2} \mathrm{e}^{-\theta_2 s} ds \\
&\quad + \frac{\mathbf{B}(\beta,\gamma)\Gamma(\beta+\gamma)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta+\gamma-p)} \frac{t^{\beta}}{1+t^{\sigma+3}} \int_0^{+\infty} M_1 s^{\mu_1} \mathrm{e}^{-\theta_1 s} ds \\
&\quad + \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-p)} \frac{1}{1+t^{\sigma+3}} \int_0^{+\infty} M_0 s^{\mu_0} \mathrm{e}^{-\theta_0 s} ds \\
&\to 0 \ \ (\text{在 } W \text{ 上一致地}), \quad t \to \infty.
\end{aligned}
$$

因此 $t \to \infty$ 时, $\frac{t^{1-\gamma}}{1+t^{\sigma+3}}TW$ 和 $\frac{t^{1+p-\gamma}}{1+t^{\sigma+3}}TW$ 都是等度收敛的.

从以上讨论立得 T 是全连续算子. 证毕. □

3 主要结果

本节证明文中主要结果. 恒设 f 是 Caratheodory 函数, $g_i\ (i=0,1,2)$ 是强 Caratheodory 函数. 另外假设如下:

(H) f 和 $g_i\ (i=0,1,2)$ 满足如下假设: 存在常数

$$\sigma_i>-1\ (i=0,1,2),\quad A,B,C\geqslant 0,$$
$$\sigma_{ij}>-1\ (i=0,1,2,\ j=0,1,2),\quad \mu_{ij}<0,\quad i,j=0,1,2,\quad A_i,B_i,C_i\geqslant 0\ (i=0,1,2)$$

使得对任意 $t\in(0,\infty),u_1,u_2\in\mathbb{R},i,j=0,1,2$ 有

$$\left|f\left(t,\frac{1+t^{\sigma+3}}{t^{1-\gamma}}u_1,\frac{1+t^{\sigma+3}}{t^{1+p-\gamma}}u_2\right)-Ct^{\sigma_0}\right|\leqslant At^{\sigma_1}|u_1|+Bt^{\sigma_2}|u_2|,$$
$$\left|g_i\left(t,\frac{1+t^{\sigma+3}}{t^{1-\gamma}}u_1,\frac{1+t^{\sigma+3}}{t^{1+p-\gamma}}u_2\right)-C_it^{\sigma_{ij}}\mathrm{e}^{-\mu_{ij}t}\right|\leqslant A_it^{\sigma_{ij}}\mathrm{e}^{-\mu_{ij}t}|u_1|+B_it^{\sigma_{ij}}\mathrm{e}^{-\mu_{ij}t}|u_2|.$$

(G) f 和 $g_i\ (i=0,1,2)$ 满足如下条件: 存在常数

$$\sigma_i>-1\ (i=0,1,2),\quad A,B,C\geqslant 0,$$
$$\sigma_{ij}>-1\ (i=0,1,2,\ j=0,1,2),\quad \mu_{ij}<0,\quad i,j=0,1,2,\quad A_i,B_i,C_i\geqslant 0\ (i,j=0,1,2)$$

使得对任意 $t\in(0,\infty),u_1,u_2\in\mathbb{R},i,j=0,1,2$ 有

$$\left|f\left(t,\frac{1+t^{\sigma+3}}{t^{1-\gamma}}u_1,\frac{1+t^{\sigma+3}}{t^{1+p-\gamma}}u_2\right)-Ct^{\sigma_0}\right|\leqslant At^{\sigma_1}|u_1|^{\delta}+Bt^{\sigma_2}|u_2|^{\delta},$$
$$\left|g_i\left(t,\frac{1+t^{\sigma+3}}{t^{1-\gamma}}u_1,\frac{1+t^{\sigma+3}}{t^{1+p-\gamma}}u_2\right)-C_it^{\sigma_{ij}}\mathrm{e}^{-\mu_{ij}t}\right|\leqslant A_it^{\sigma_{ij}}\mathrm{e}^{-\mu_{ij}t}|u_1|^{\delta}+B_it^{\sigma_{ij}}\mathrm{e}^{-\mu_{ij}t}|u_2|^{\delta}.$$

(H1) f 和 $g_i\ (i=0,1,2)$ 满足如下条件: 存在常数

$$\sigma_i>-1\ (i=0,1,2),\quad A,B,C\geqslant 0,$$
$$\sigma_{ij}>-1\ (i=0,1,2,\ j=0,1,2),\quad \mu_{ij}<0,\quad i,j=0,1,2,\quad A_i,B_i\geqslant 0\ (i=0,1,2)$$

使得对任意 $t\in(0,\infty),u_1,u_2,v_1,v_2\in\mathbb{R},i,j=0,1,2$ 有

$$\begin{aligned}&\left|f\left(t,\frac{1+t^{\sigma+3}}{t^{1-\gamma}}u_1,\frac{1+t^{\sigma+3}}{t^{1+p-\gamma}}u_2\right)-f\left(t,\frac{1+t^{\sigma+3}}{t^{1-\gamma}}v_1,\frac{1+t^{\sigma+3}}{t^{1+p-\gamma}}v_2\right)\right|\\&\quad\leqslant At^{\sigma_1}|u_1-v_1|+Bt^{\sigma_2}|u_2-v_2|,\\&\left|g_i\left(t,\frac{1+t^{\sigma+3}}{t^{1-\gamma}}u_1,\frac{1+t^{\sigma+3}}{t^{1+p-\gamma}}u_2\right)-g_i\left(t,\frac{1+t^{\sigma+3}}{t^{1-\gamma}}v_1,\frac{1+t^{\sigma+3}}{t^{1+p-\gamma}}v_2\right)\right|\\&\quad\leqslant A_it^{\sigma_{ij}}\mathrm{e}^{-\mu_{ij}t}|u_1-v_1|+B_it^{\sigma_{ij}}\mathrm{e}^{-\mu_{ij}t}|u_2-v_2|.\end{aligned}$$

记

$$M_1=\frac{\mathbf{B}(\beta,\alpha)\mathbf{B}(\gamma,\alpha+\beta)[A\mathbf{B}(\alpha+\beta+\gamma,\sigma_1+1)+B\mathbf{B}(\alpha+\beta+\gamma,\sigma_2+1)]}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)}$$

$$
\begin{aligned}
&\quad + \frac{\mathbf{B}(\beta,\alpha)\mathbf{B}(\gamma,\alpha+\beta)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)}\overline{\sigma}_{\alpha+\beta}\left(\frac{A_2\Gamma(\sigma_{21}+1)}{\mu_{21}^{\sigma_{21}+1}}+\frac{B_2\Gamma(\sigma_{22}+1)}{\mu_{22}^{\sigma_{22}+1}}\right)\\
&\quad + \frac{\mathbf{B}(\beta,\gamma)}{\Gamma(\gamma)}\overline{\sigma}_{\beta}\left(\frac{A_1\Gamma(\sigma_{11}+1)}{\mu_{11}^{\sigma_{11}+1}}+\frac{B_1\Gamma(\sigma_{12}+1)}{\mu_{12}^{\sigma_{12}+1}}\right)\\
&\quad + \frac{A_0\Gamma(\sigma_{01}+1)}{\mu_{01}^{\sigma_{01}+1}}+\frac{B_0\Gamma(\sigma_{02}+1)}{\mu_{02}^{\sigma_{02}+1}},\\
M_2 &= \frac{\mathbf{B}(\beta,\alpha)\mathbf{B}(\gamma,\alpha+\beta)\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)[A\mathbf{B}(\alpha+\beta+\gamma,\sigma_1+1)+B\mathbf{B}(\alpha+\beta+\gamma,\sigma_2+1)]}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+\beta+\gamma-p)}\\
&\quad + \frac{\mathbf{B}(\beta,\alpha)\mathbf{B}(\gamma,\alpha+\beta)\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+\beta+\gamma-p)}\overline{\sigma}_{\alpha+\beta}\left(\frac{A_2\Gamma(\sigma_{21}+1)}{\mu_{21}^{\sigma_{21}+1}}+\frac{B_2\Gamma(\sigma_{22}+1)}{\mu_{22}^{\sigma_{22}+1}}\right)\\
&\quad + \frac{\mathbf{B}(\beta,\gamma)\Gamma(\beta+\gamma)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta+\gamma-p)}\overline{\sigma}_{\beta}\left(\frac{A_1\Gamma(\sigma_{11}+1)}{\mu_{11}^{\sigma_{11}+1}}+\frac{B_1\Gamma(\sigma_{12}+1)}{\mu_{12}^{\sigma_{12}+1}}\right)\\
&\quad + \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-p)}\left(\frac{A_0\Gamma(\sigma_{01}+1)}{\mu_{01}^{\sigma_{01}+1}}+\frac{B_0\Gamma(\sigma_{02}+1)}{\mu_{02}^{\sigma_{02}+1}}\right),\\
M_0 &= \max\{M_1,\, M_2\}.
\end{aligned}
$$

定理 3.1 假设 (H) 成立. 如果

$$M_0<1. \tag{3.1}$$

则 IVP (1.7) 至少有一个解 $x\in X$.

证明 设 X 是第二节定义的 Banach 空间, 其泛数记为 $\|\cdot\|$. 映射 $T: X\to X$ 由 (2.8) 定义. 由于 (H) 以及 f 是 Caratheodory 函数, g_i 是强 Caratheodory 函数, 由引理 2.2, T 是全连续算子, 且寻求 IVP (1.7) 的解等价于寻求算子 T 在 X 中的不动点.

记

$$
\begin{aligned}
\Psi(t) &= C\frac{\mathbf{B}(\beta,\alpha)\mathbf{B}(\gamma,\alpha+\beta)\int_0^t(t-s)^{\alpha+\beta+\gamma-1}s^{\sigma_0}ds}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)}\\
&\quad + C_{20}\frac{\mathbf{B}(\beta,\alpha)\mathbf{B}(\gamma,\alpha+\beta)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)}t^{\alpha+\beta+\gamma-1}\int_0^{+\infty}s^{\sigma_{20}}\mathrm{e}^{-\mu_{20}s}ds\\
&\quad + C_{10}\frac{\mathbf{B}(\beta,\gamma)}{\Gamma(\gamma)}t^{\beta+\gamma-1}\int_0^{+\infty}s^{\sigma_{10}}\mathrm{e}^{-\mu_{10}s}ds + C_{00}t^{\gamma-1}\int_0^{+\infty}s^{\sigma_{00}}\mathrm{e}^{-\mu_{00}s}ds.
\end{aligned}\tag{3.2}
$$

容易证明 $\Psi\in X$. 对 $r>0$, 定义集合 $M_r=\{x\in X:\|x-\Psi\|\leqslant r\}$. 对任意 $x\in M_r$, 有 $\|x-\Psi\|\leqslant r$. 则

$$
\begin{aligned}
&\|x\|\leqslant\|x-\Psi\|+\|\Psi\|\leqslant r+\|\Psi\|,\\
&\|x\|=\max\left\{\sup_{t\in(0,\infty)}\frac{t^{1-\gamma}}{1+t^{\sigma+3}}|x(t)|,\ \sup_{t\in(0,\infty)}\frac{t^{1+p-\gamma}}{1+t^{\sigma+3}}|D_{0^+}^p x(t)|\right\}\leqslant r+\|\Psi\|.
\end{aligned}
$$

利用 (H), 我们发现

$$
\begin{aligned}
&\frac{t^{1-\gamma}}{1+t^{\sigma+3}}|(Tx)(t)-\Psi(t)|\\
&\quad\leqslant\frac{\mathbf{B}(\beta,\alpha)\mathbf{B}(\gamma,\alpha+\beta)\frac{t^{1-\gamma}}{1+t^{\sigma+3}}\int_0^t(t-s)^{\alpha+\beta+\gamma-1}|f(s,x(s),D_{0^+}^p x(s))-Cs^{\sigma_0}|ds}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{\mathbf{B}(\beta,\alpha)\mathbf{B}(\gamma,\alpha+\beta)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)}\frac{t^{\alpha+\beta}}{1+t^{\sigma+3}}\int_0^{+\infty}|g_2(s,x(s),D_{0^+}^p x(s))-C_{20}s^{\sigma_{20}}\mathrm{e}^{-\mu_{20}s}|ds\\
&+\frac{\mathbf{B}(\beta,\gamma)}{\Gamma(\gamma)}\frac{t^{\beta}}{1+t^{\sigma+3}}\int_0^{+\infty}|g_1(s,x(s),D_{0^+}^p x(s))-C_{10}s^{\sigma_{10}}\mathrm{e}^{-\mu_{10}s}|ds\\
&+\frac{1}{1+t^{\sigma+3}}\int_0^{+\infty}|g_0(s,x(s),D_{0^+}^p x(s))-C_{00}s^{\sigma_{00}}\mathrm{e}^{-\mu_{00}s}|ds\\
\leqslant\ &\frac{\mathbf{B}(\beta,\alpha)\mathbf{B}(\gamma,\alpha+\beta)\frac{t^{1-\gamma}}{1+t^{\sigma+3}}\int_0^t(t-s)^{\alpha+\beta+\gamma-1}\left[As^{\sigma_1}\frac{s^{1-\gamma}}{1+s^{\sigma+3}}|x(s)|+Bs^{\sigma_2}\frac{s^{1+p-\gamma}}{1+s^{\sigma+3}}|D_{0^+}^p x(s)|\right]ds}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)}\\
&+\frac{\mathbf{B}(\beta,\alpha)\mathbf{B}(\gamma,\alpha+\beta)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)}\frac{t^{\alpha+\beta}}{1+t^{\sigma+3}}\int_0^{+\infty}\left[A_2s^{\sigma_{21}}e^{-\mu_{21}s}\frac{s^{1-\gamma}}{1+s^{\sigma+3}}|x(s)|\right.\\
&\left.+B_2s^{\sigma_{21}}\mathrm{e}^{-\mu_{22}s}\frac{s^{1+p-\gamma}}{1+s^{\sigma+3}}|D_{0^+}^p x(s)|\right]ds\\
&+\frac{\mathbf{B}(\beta,\gamma)}{\Gamma(\gamma)}\frac{t^{\beta}}{1+t^{\sigma+3}}\int_0^{+\infty}\left[A_1s^{\sigma_{11}}\mathrm{e}^{-\mu_{11}s}\frac{s^{1-\gamma}}{1+s^{\sigma+3}}|x(s)|+B_1s^{\sigma_{11}}\mathrm{e}^{-\mu_{12}s}\frac{s^{1+p-\gamma}}{1+s^{\sigma+3}}|D_{0^+}^p x(s)|\right]ds\\
&+\frac{1}{1+t^{\sigma+3}}\int_0^{+\infty}\left[A_0s^{\sigma_{01}}\mathrm{e}^{-\mu_{01}s}\frac{s^{1-\gamma}}{1+s^{\sigma+3}}|x(s)|+B_0s^{\sigma_{01}}\mathrm{e}^{-\mu_{02}s}\frac{s^{1+p-\gamma}}{1+s^{\sigma+3}}|D_{0^+}^p x(s)|\right]ds\\
\leqslant\ &\|x\|\frac{\mathbf{B}(\beta,\alpha)\mathbf{B}(\gamma,\alpha+\beta)\frac{t^{1-\gamma}}{1+t^{\sigma+3}}\int_0^t(t-s)^{\alpha+\beta+\gamma-1}[As^{\sigma_1}+Bs^{\sigma_2}]ds}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)}\\
&+\|x\|\frac{\mathbf{B}(\beta,\alpha)\mathbf{B}(\gamma,\alpha+\beta)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)}\overline{\sigma}_{\alpha+\beta}\int_0^{+\infty}[A_2s^{\sigma_{21}}\mathrm{e}^{-\mu_{21}s}+B_2s^{\sigma_{21}}\mathrm{e}^{-\mu_{22}s}]ds\\
&+\|x\|\frac{\mathbf{B}(\beta,\gamma)}{\Gamma(\gamma)}\overline{\sigma}_{\beta}\int_0^{+\infty}[A_1s^{\sigma_{11}}\mathrm{e}^{-\mu_{11}s}+B_1s^{\sigma_{11}}\mathrm{e}^{-\mu_{12}s}]ds\\
&+\|x\|\int_0^{+\infty}[A_0s^{\sigma_{01}}\mathrm{e}^{-\mu_{01}s}+B_0s^{\sigma_{02}}\mathrm{e}^{-\mu_{02}s}]ds\\
=\ &\|x\|\left[\frac{\mathbf{B}(\beta,\alpha)\mathbf{B}(\gamma,\alpha+\beta)At^{\alpha+\beta+\sigma_1+1}\mathbf{B}(\alpha+\beta+\gamma,\sigma_1+1)+Bt^{\alpha+\beta+\sigma_2+1}\mathbf{B}(\alpha+\beta+\gamma,\sigma_2+1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)(1+t^{\sigma+3})}\right.\\
&+\frac{\mathbf{B}(\beta,\alpha)\mathbf{B}(\gamma,\alpha+\beta)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)}\overline{\sigma}_{\alpha+\beta}\left(\frac{A_2\Gamma(\sigma_{21}+1)}{\mu_{21}^{\sigma_{21}+1}}+\frac{B_2\Gamma(\sigma_{22}+1)}{\mu_{22}^{\sigma_{22}+1}}\right)\\
&+\frac{\mathbf{B}(\beta,\gamma)}{\Gamma(\gamma)}\overline{\sigma}_{\beta}\left(\frac{A_1\Gamma(\sigma_{11}+1)}{\mu_{11}^{\sigma_{11}+1}}+\frac{B_1\Gamma(\sigma_{12}+1)}{\mu_{12}^{\sigma_{12}+1}}\right)\\
&\left.+\frac{A_0\Gamma(\sigma_{01}+1)}{\mu_{01}^{\sigma_{01}+1}}+\frac{B_0\Gamma(\sigma_{02}+1)}{\mu_{02}^{\sigma_{02}+1}}\right]\\
\leqslant\ &[r+\|\Psi\|]\left[\frac{\mathbf{B}(\beta,\alpha)\mathbf{B}(\gamma,\alpha+\beta)[A\mathbf{B}(\alpha+\beta+\gamma,\sigma_1+1)+B\mathbf{B}(\alpha+\beta+\gamma,\sigma_2+1)]}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)}\right.\\
&+\frac{\mathbf{B}(\beta,\alpha)\mathbf{B}(\gamma,\alpha+\beta)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)}\overline{\sigma}_{\alpha+\beta}\left(\frac{A_2\Gamma(\sigma_{21}+1)}{\mu_{21}^{\sigma_{21}+1}}+\frac{B_2\Gamma(\sigma_{22}+1)}{\mu_{22}^{\sigma_{22}+1}}\right)\\
&+\frac{\mathbf{B}(\beta,\gamma)}{\Gamma(\gamma)}\overline{\sigma}_{\beta}\left(\frac{A_1\Gamma(\sigma_{11}+1)}{\mu_{11}^{\sigma_{11}+1}}+\frac{B_1\Gamma(\sigma_{12}+1)}{\mu_{12}^{\sigma_{12}+1}}\right)\\
&\left.+\frac{A_0\Gamma(\sigma_{01}+1)}{\mu_{01}^{\sigma_{01}+1}}+\frac{B_0\Gamma(\sigma_{02}+1)}{\mu_{02}^{\sigma_{02}+1}}\right]\\
\leqslant\ &[r+\|\Psi\|]M_1.
\end{aligned}
$$

进一步, 有

$$
\begin{aligned}
&\frac{t^{1+p-\gamma}}{1+t^{\sigma+3}}|D_{0^+}^p(Tx)(t)-D_{0^+}^p\Psi(t)|\\
&\leqslant \frac{t^{1+p-\gamma}}{1+t^{\sigma+3}}\frac{\mathbf{B}(\beta,\alpha)\mathbf{B}(\gamma,\alpha+\beta)\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)\int_0^t(t-s)^{\alpha+\beta+\gamma-p-1}|f(s,x(s),D_{0^+}^px(s))-Cs^{\sigma_0}|ds}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+\beta+\gamma-p)}\\
&\quad+\frac{\mathbf{B}(\beta,\alpha)\mathbf{B}(\gamma,\alpha+\beta)\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+\beta+\gamma-p)}\frac{t^{\alpha+\beta}}{1+t^{\sigma+3}}\int_0^{+\infty}|g_2(s,x(s),D_{0^+}^px(s))-C_2s^{\sigma_{20}}\mathrm{e}^{-\mu_{20}s}|ds\\
&\quad+\frac{\mathbf{B}(\beta,\gamma)\Gamma(\beta+\gamma)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta+\gamma-p)}\frac{t^{\beta}}{1+t^{\sigma+3}}\int_0^{+\infty}|g_1(s,x(s),D_{0^+}^px(s))-C_1s^{\sigma_{10}}\mathrm{e}^{-\mu_{10}s}|ds\\
&\quad+\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-p)}\frac{1}{1+t^{\sigma+3}}\int_0^{+\infty}|g_0(s,x(s),D_{0^+}^px(s))-C_0s^{\sigma_{00}}\mathrm{e}^{-\mu_{00}s}|ds\\
&\leqslant[r+\|\Psi\|]\bigg[\frac{\mathbf{B}(\beta,\alpha)\mathbf{B}(\gamma,\alpha+\beta)\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)[A\mathbf{B}(\alpha+\beta+\gamma,\sigma_1+1)+B\mathbf{B}(\alpha+\beta+\gamma,\sigma_2+1)]}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+\beta+\gamma-p)}\\
&\quad+\frac{\mathbf{B}(\beta,\alpha)\mathbf{B}(\gamma,\alpha+\beta)\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+\beta+\gamma-p)}\overline{\sigma}_{\alpha+\beta}\bigg(\frac{A_2\Gamma(\sigma_{21}+1)}{\mu_{21}^{\sigma_{21}+1}}+\frac{B_2\Gamma(\sigma_{22}+1)}{\mu_{22}^{\sigma_{22}+1}}\bigg)\\
&\quad+\frac{\mathbf{B}(\beta,\gamma)\Gamma(\beta+\gamma)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta+\gamma-p)}\overline{\sigma}_{\beta}\bigg(\frac{A_1\Gamma(\sigma_{11}+1)}{\mu_{11}^{\sigma_{11}+1}}+\frac{B_1\Gamma(\sigma_{12}+1)}{\mu_{12}^{\sigma_{12}+1}}\bigg)\\
&\quad+\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-p)}\bigg(\frac{A_0\Gamma(\sigma_{01}+1)}{\mu_{01}^{\sigma_{01}+1}}+\frac{B_0\Gamma(\sigma_{02}+1)}{\mu_{02}^{\sigma_{02}+1}}\bigg)\bigg]\\
&\leqslant[r+\|\Psi\|]M_2.
\end{aligned}
$$

从而 $\|Tx-\Psi\|\leqslant[r+\|\Psi\|]M_0$. 我们选

$$r\geqslant\frac{\|\Psi\|M_0}{1-M_0}.$$

则对任意 $x\in M_r$ 推出

$$\|Tx-\Psi\|\leqslant r.$$

由 Schauder 不动点定理推出 T 有不动点 $x\in M_r$. 则 IVP (1.7) 至少有一个解 $x\in M_r$. 证毕. □

定理 3.2 假设 (G) 成立. 如果

$$\frac{\|\Psi\|^{1-\delta}(\delta-1)^{\delta-1}}{\delta^\delta}\geqslant M_0, \tag{3.3}$$

则 IVP(1.7) 至少有一个解 $x\in X$.

证明 设 X 及其泛数 $\|\cdot\|$ 是由第 2 节定义的 Banach 空间. 算子 $T:X\to X$ 由 (2.8) 定义. 由于 (G) 以及 f 是 Caratheodory 函数, g_i 是强 Caratheodory 函数, 由引理 2.2, T 是全连续算子, 且寻求 IVP (1.7) 的解等价于寻求算子 T 在 X 中的不动点.

函数 Ψ 由 (3.2) 定义. 容易证明 $\Psi\in X$. 对于 $r>0$, M_r 的定义与定理 3.1 的证明中的定义一样.

对任意 $x\in M_r$, 利用 (G) 和定理 3.1 中的证明方法, 可以推出

$$\|Tx-\Psi\|\leqslant[r+\|\Psi,\Phi)\|]^\delta M_0.$$

注意 $\delta>1$. 取 $r=r_0=\frac{\|\Psi\|}{\delta-1}$. 由假设

$$\frac{r_0}{(r_0+\|\Psi\|)^\delta}=\frac{\|\Psi\|^{1-\delta}(\delta-1)^{\delta-1}}{\delta^\delta}\geqslant M_0.$$

从而对任意 $x \in M_{r_0}$ 推出

$$\|Tx - \Psi\| \leqslant r_0.$$

因此 $M_{r_0} \subseteq X$ 满足 $T(M_{r_0}) \subseteq M_{r_0}$. 于是 Schauder 不动点定理推出 T 至少有一个不动点 $x \in M_{r_0}$. 则 IVP (1.7) 至少有一个解 $x \in M_{r_0}$. 证毕. □

定理 3.3 假设 (H) 和 (H1) 成立. 如果 (3.1) 成立, 则 IVP (1.7) 有唯一解 $x \in X$.

证明 由 (H) 和定理 3.1, IVP (1.7) 至少有一个解. 如果 IVP (1.7) 有两个不同解 x_1 和 x_2. 则 $\|x_1 - x_2\| > 0$, $Tx_1 = x_1$ 且 $Tx_2 = x_2$. 从定理 3.1 的证明方法推出

$$\frac{t^{1-\gamma}}{1+t^{\sigma+3}}|(Tx_1)(t) - (Tx_2)(t)| \leqslant M_1\|x_1 - x_2\|$$

和

$$\frac{t^{1+p-\gamma}}{1+t^{\sigma+3}}|D_{0+}^p(Tx_1)(t) - D_{0+}^p(Tx_2)(t)| \leqslant M_2\|x_1 - x_2\|.$$

因此,

$$\|Tx_1 - Tx_2\| \leqslant M_0\|x_1 - x_2\|.$$

可得

$$0 < \|x_1 - x_2\| = \|Tx_1 - Tx_2\| \leqslant M_0\|x_1 - x_2\| < \|x_1 - x_2\|,$$

所以 $M_0 \geqslant 1$, 与 (3.1) 矛盾. 因此推出 IVP (1.7) 有唯一解 $x \in X$. 证毕. □

4 例题

本节给出一个例题说明定理的应用.

例题 4.1 考虑分数阶微分方程初值问题

$$\begin{cases} D_{0+}^{\frac{4}{5}} D_{0+}^{\frac{3}{4}} D_{0+}^{\frac{1}{2}} x(t) = Ct^{-\frac{1}{4}} + A\dfrac{t^{\frac{1}{4}}}{1+t^{\frac{23}{8}}}x(t) + B\dfrac{t^{\frac{1}{2}}}{1+t^{\frac{23}{8}}}D_{0+}^{\frac{1}{4}}y(t), \quad t \in (0,\infty), \\ \lim\limits_{t\to 0} t^{\frac{1}{2}}x(t) = x_0, \\ \lim\limits_{t\to 0} t^{\frac{1}{4}}y(t) = x_1, \\ \lim\limits_{t\to 0} D_{0+}^{\frac{1}{5}}x(t) = x_2, \end{cases} \tag{4.1}$$

其中 $A, B, C > 0$, $x_0, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ 是常数.

解 对应于 IVP (1.7), 有 $\alpha = \frac{4}{5}, \beta = \frac{3}{4}$, $\gamma = \frac{1}{2}$, $p = \frac{1}{4}$, 函数

$$f(t,x,y) = Ct^{-\frac{1}{4}} + A\frac{t^{\frac{1}{4}}}{1+t^{\frac{23}{8}}}x + B\frac{t^{\frac{1}{2}}}{1+t^{\frac{23}{8}}}y, \quad g_i(t,x,y) = x_i\mathrm{e}^{-t}, \quad i = 0,1,2.$$

容易看出 f 是 Caratheodory 函数, g_i $(i = 0,1,2)$ 是强 Caratheodory 函数.

取 $\sigma = -\frac{1}{8}$, 以及

$$\sigma_i = -\frac{1}{4} \in (-1, \sigma) \ (i = 0,1,2),$$
$$A, B, C \geqslant 0,$$

$$
\begin{aligned}
&A_i = 0, \quad B_i = 0, \quad C_i = 1,\ (i = 0,1,2),\\
&\sigma_{ij} \in (-1,\sigma)\ (i = 0,1,2,\ j = 0,1,2),\\
&\mu_{ij} < 0, \quad i,j = 0,1,2.
\end{aligned}
$$

容易推出

$$
\begin{aligned}
f\left(t, \frac{1+t^{\frac{23}{8}}}{t^{\frac{1}{2}}}x, \frac{1+t^{\frac{23}{8}}}{t^{\frac{3}{4}}}y\right) &= Ct^{-\frac{1}{4}} + Axt^{-\frac{1}{4}} + Byt^{-\frac{1}{4}},\\
g_i\left(t, \frac{1+t^{\frac{23}{8}}}{t^{\frac{1}{2}}}x, \frac{1+t^{\frac{23}{8}}}{t^{\frac{3}{4}}}y\right) &= x_i\mathrm{e}^{-t}, \quad i = 0,1,2.
\end{aligned}
$$

因此 (H) 和 (H1) 成立. 由 M_1 和 M_2 的定义通过直接计算得到

$$
\begin{aligned}
M_1 &= \frac{\mathbf{B}(3/4,4/5)\mathbf{B}(1/2,31/20)\mathbf{B}(41/20,3/4)}{\Gamma(4/5)\Gamma(3/4)\Gamma(1/2)}[A+B],\\
M_2 &= \frac{\mathbf{B}(3/4,4/5)\mathbf{B}(1/2,31/20)\Gamma(41/20)\mathbf{B}(41/20,3/4)}{\Gamma(4/5)\Gamma(3/4)\Gamma(1/2)\Gamma(9/5)}[A+B],\\
M_0 &= \max\{M_1, M_2\}.
\end{aligned}
$$

因此定理 3.3 推出如果

$$
\frac{\mathbf{B}(3/4,4/5)\mathbf{B}(1/2,31/20)\mathbf{B}(41/20,3/4)}{\Gamma(4/5)\Gamma(3/4)\Gamma(1/2)}\max\left\{1, \frac{\Gamma(41/20)}{\Gamma(9/5)}\right\}[A+B] < 1,
$$

则 IVP (4.1) 有唯一解 x 满足

$$
\frac{t^{\frac{1}{2}}}{1+t^{\frac{23}{8}}}x(t) \ \text{ 和 } \ \frac{t^{\frac{9}{8}}}{1+t^{\frac{23}{8}}}D_{0^+}^{\frac{1}{4}}x(t) \text{ 在 } (0,+\infty) \text{ 上都有界.}
$$

参考文献

1 Miller K S, Ross B. An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equation. New York: Wiley, 1993

2 Podludny I. Fractional Differential Equations. In: Mathematics in Science and Engineering. New York: Academic Press, 1999, 198

3 Kilbas A A, Marichev O I, Samko S G. Fractional Integral and Derivatives (Theory and Applications). Switzerland: Gordon and Breach, 1993

4 Furati K. Tatar N. An existence result for nonlocal fractional differential problem. J Fract Calc, 2003, 26: 43–51

5 Zhang S. Monotone iterative method for initial value problem involving Riemann-Liouville fractional derivatives. Nonlinear Anal, 2009, 71: 2087–2093

6 Podlubny I. Geometric and physical interpretation of fractional integral and fractional differentiation. Fract Calc Appl Anal, 2002, 5: 367–386

7 Heymans N, Podlubny I. Physical interpretation of initial cinditions for fractional differential equations involving Riemann-Liouville fractional derivatives on the half line. Rheologica Acta, 2006, 45: 765–771

8 West B J, Bologna N, Grigolini P. Physics of Fractal Operators. New York: Springer, 2003

9 Agarwal R P, Benchohra M, Hamani S. Bounndary value problems for fractional differential equations. Georgian Math J, 2009, 16: 401–411

10 Arara A, Benchohra M, Hamidi N, et al. Fractional order differential equations on an unbounded domain. Nonlinear Anal, 2010, 72: 580–586

11 Li X, Jia M. Multiple solutions of nonlocal boundary value problems for fractional differential equations on the half line. Electron J Qual Theory Differ Equ, 2011, 56: 1–14

12 Zhao X, Ge W. Unbounnded positive solutions for a fractional boundary value problem on the half lines. Acta Appl Math, 2010, 109: 495–505
13 Su X. Zhang S. Unbounded solutions to a boundary value problem of fractional order on the half line. Comput Math Appl, 2011, 61: 1079–1087
14 Agarwal R P, Benchohra M, Hamidi N, et al. Bundary value problems for differential equations involving Riemann-Liouville fractional derivative on the half line, Dynamics of Continuous. Discrete Impulsive Syst, 2011, 18: 235–244
15 Infante G, Webb J R L. Positive solutions of some nonlocal boundary value problems. Abst Appl Anal, 2003, 18: 1047–1060
16 葛渭高. 非线性常微分方程边值问题. 现代数学丛书 111. 北京: 科学出版社, 2007
17 Benchohra M, Nieto J J, Ouahab A. Second-order boundary value problem with integral boundary conditions, Bound Value Probl, Art ID 260309, 2011
18 Boucherif A. Second-order boundary value problems with integral boundary conditions. Nonlinear Anal, 2009, 70: 364–371

Existence and uniqueness of solutions for initial value problems of multi-order fractional differential equations on the half lines

LIU YuJi

Abstract In this article, we establish the existence and uniqueness of solutions to an initial value problem of the nonlinear fractional differential equation on the half line involving Riemann-Liouville fractional derivatives. Our analysis rely on the well-known fixed point theorem of Schauder.

Keywords initial value problem, fractional differential equation, Riemann-Liouville fractional derivative, fixed-point theorem
MSC(2010) 92D25, 34A37, 34K15
doi: 10.1360/012011-1032