中国科学: 数学　2014 年　第 44 卷　第 4 期: 409～422
link.springer.com　math.scichina.com
《中国科学》杂志社 SCIENCE CHINA PRESS

渐近于 Hermite 多项式的双正交系统

许艳

东北财经大学数学与数量经济学院, 大连 116025
E-mail: yan_xu@dufe.edu.cn

收稿日期: 2013-07-9; 接受日期: 2013-09-25
国家自然科学基金 (批准号: 11301060, 11226326, 70901016, 71171035, 71271045 和 71273044)、中国博士后科学基金 (批准号: 2013M541234)、辽宁省教育厅科学研究一般项目 (批准号: L2012409)、辽宁省高等学校优秀人才支持计划 (批准号: LJQ2012099)和辽宁省高校创新团队支持计划 (批准号: WT2011004) 资助项目

摘要　本文利用渐近于 Gauss 函数的函数类 ϕ, 给出渐近于 Hermite 正交多项式的一类 Appell 多项式的构造方法, 使得该序列与 ϕ 的 n 阶导数之间构成了一组双正交系统. 利用此结果, 本文得到多种正交多项式和组合多项式的渐近性质. 特别地, 由 N 阶 B 样条所生成的 Appell 多项式序列恰为 N 阶 Bernoulli 多项式. 从而, Bernoulli 多项式与 B 样条的导函数之间构成了一组双正交系统, 且标准化之后的 Bernoulli 多项式的渐近形式为 Hermite 多项式. 由二项分布所生成的 Appell 序列为 Euler 多项式, 从而, Euler 多项式与二项分布的导函数之间构成一组双正交系统, 且标准化之后的 Euler 多项式渐近于 Hermite 多项式. 本文给出 Appell 序列的生成函数满足的尺度方程的充要条件, 给出渐近于 Hermite 多项式的函数列的判定定理. 应用该定理, 验证广义 Buchholz 多项式、广义 Laguerre 多项式和广义 Ultraspherical (Gegenbauer) 多项式渐近于 Hermite 多项式的性质, 从而验证超几何多项式的 Askey 格式的成立.

关键词　Appell 序列　Askey 格式　Hermite 多项式　B 样条　Bernoulli 多项式

MSC (2010) 主题分类　05A16, 41A15

1　引言

Gauss 函数 $G(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-x^2/2}$ 在数学和工程中有着极其重要的地位. 在数学中, 作为正态分布的频率函数与研究极限形式的中心极限定理密切相关. 中心极限定理作为概率论的开卷定理是讨论随机变量序列部分和的分布渐近于正态分布的一类定理. 长期以来, 对于极限定理的研究所形成的概率分析方法, 影响着概率论以及其他数学学科的发展. 在渐近分析中, 利用中心极限定理可以得到以 Gauss 函数为极限函数的一类组合多项式的渐近结果. 但是对于一些具体渐近问题, 中心极限定理仍然不甚完美. 例如, 许艳和王仁宏[1] 利用样条方法给出了优于 Carlitz 等人[2] 利用中心极限定理得到的 Euler 数渐近性质的逼近阶. 因此, 随着极限理论问题的不断出现, 也亟待研究方法的新发展.

Gauss 函数满足如下的尺度方程:

$$G(x)=\int_{\mathbb{R}}\alpha G(\alpha x-y)dg(y),\quad x\in\mathbb{R},\tag{1.1}$$

英文引用格式: Xu Y. Approximation of Hermite polynomials by biorthognal systerms (in Chinese). Sci Sin Math, 2014, 44: 409–422, doi: 10.1360/N012013-00103

其中尺度 $\alpha > 1$, 测度

$$dg(y) := \frac{1}{\sqrt{2\pi(\alpha^2-1)}}\mathrm{e}^{-y^2/2(\alpha^2-1)}dy.$$

因而, 作为经典多尺度表示函数, 常作为预平滑核被广泛地应用于尺度空间表示中[3–5]. Chen 等人[6] 利用尺度函数的滤波器, 考察了收敛于 Gauss 函数的尺度函数类.

函数 $\phi_n(x)$ 为 α 尺度函数, 当且仅当,

$$\phi_n(x) = \int_{\mathbb{R}} \alpha\phi_n(\alpha x - y)dm_n(y), \quad x \in \mathbb{R}, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{1.2}$$

其中 $\alpha > 1$ 且 $\{m_n\}$ 具有一阶和二阶矩的测度函数. 等价地, (1.2) 有如下的 Fourier 变换表示:

$$\widehat{\phi}_n(\mu) = \widehat{m}_n\left(\frac{\mu}{\alpha}\right)\widehat{\phi}_n\left(\frac{\mu}{\alpha}\right), \quad \mu \in \mathbb{R}, \tag{1.3}$$

其中 $\{m_n\}$ 称为面具.

若 $\{m_n\}$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的概率密度序列且具有有限的均值 $\mu(m_n) = \mu_n$ 和标准差 $\sigma(m_n) = \sigma_n$, 则 m_n 的标准化形式 $\tilde{m}_n$ 定义为

$$\tilde{m}_n(S) := m_n(\sigma_n S + \mu_n),$$

其中 S 为 $\mathbb{R}$ 的可测子集. 等价地, 有

$$\widehat{\tilde{m}}_n(u) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}u\mu_n/\sigma_n}\widehat{m}_n(u/\sigma_n), \quad u \in \mathbb{R}.$$

若对于任意 $x \in \mathbb{R}$, 有

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{x} d\tilde{m}_n(t) = \int_{-\infty}^{x} G(t)dt,$$

则称序列 $\{m_n\}$ 渐近于正态分布.

Chen 等人[6] 考察了收敛于 Gauss 函数的尺度函数类, 给出了如下定理:

定理 1.1 令 $\{m_n\}$ 为 $\mathbb{R}$ 上定义的具有有限一阶和二阶矩的概率测度序列并且 $\{\frac{d}{du}\widehat{m}_n\}$ 在原点附近的邻域内一致有界, 则 $\{m_n\}$ 渐近到正态分布, 当且仅当, 相应的 m_n- 尺度函数 $\{\phi_n\}$ 渐近到正态分布.

B 样条满足如下的尺度方程:

$$B_n(x) = 2\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{2^n}\binom{n}{j}B_n(2x-j), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{1.4}$$

其中二项分布 $\{\frac{1}{2^n}\binom{n}{j} := 0, \ldots, n\}$ 称作 B 样条的面具并且渐近于正态分布

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{n=0}^{[x_n]}\frac{1}{2^n}\binom{n}{k} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}dt, \quad x_n = \frac{\sqrt{n}x}{2} + \frac{n}{2}. \tag{1.5}$$

根据定理 1.1, 标准化后的 B 样条对于充分大的阶数 n 渐近于 Gauss 函数, 因而, B 样条函数常用于替代 Gauss 函数在尺度空间中作为窗函数. Wang 和 Lee [7] 介绍了这一思想, 并且利用 B 样条函数, 发展了线性尺度空间. 在二进制和有理尺度下, 以 B 样条函数尺度空间替代 Gauss 函数尺度空间, 为计算提供了快速的平行算法. 更进一步, 许艳和王仁宏[1] 给出了 B 样条及其导数在 L^P 空间的渐近定理.

定理 1.2 令 $k \in \mathbb{N}$, 则对于 $d > k+2$, B 样条的 $k \geqslant 0$ 阶导数构成的序列 $B_d^{(k)}$ 收敛于 Gauss 函数的 k 阶导数, 即

$$\lim_{d\to\infty}\left\{\left(\frac{d}{12}\right)^{\frac{k+1}{2}}B_d^{(k)}\left(\sqrt{\frac{d}{12}}x+\frac{d}{2}\right)\right\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}D^k\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)=\frac{(-1)^k}{\sqrt{2\pi}}H_k(x)\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right), \tag{1.6}$$

其中极限是点态收敛或者在 $L^p(\mathbb{R})$, $p \in [2,\infty)$.

m 次 Hermite 多项式 $H_m(x)$ 定义为

$$(-1)^m G^{(m)}(x) = H_m(x)G(x), \quad G(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-x^2/2}, \quad m=0,1,\dots, \tag{1.7}$$

且有如下生成函数:

$$\frac{\mathrm{e}^{xz}}{\mathrm{e}^{\frac{z^2}{2}}}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{H_m(x)}{m!}z^m.$$

从而, Hermite 多项式的直交性质

$$\frac{1}{m!}\int_{-\infty}^{\infty}H_m(x)H_n(x)G(x)dx=\delta_{m,n}$$

可以看作 Gauss 函数的导函数与 Hermite 多项式 $\{\frac{H_m}{m!}: m=0,1,\dots\}$ 之间的一种双正交关系.

Hermite 多项式是一种经典的正交多项式族, 在数学的各个领域里有着诸多应用. 概率论里的 Edgeworth 级数以 Hermite 多项式为其表达形式. 在组合数学中, Hermite 多项式作为 Appell 方程的解构成了一组 Appell 序列. 作为多种正交多项式的渐近形式, Hermite 多项式在渐近分析中也有着十分重要的地位. 文献 [8–11] 研究了 Gegenbauer, Laguerre, Tricomi-Carlitz 和 Jacobi 多项式的渐近形式. 文献 [12] 给出了广义 Bernoulli, Euler, Bessel 和 Buchholz 多项式的渐近表示. 超几何正交多项式的 Askey 格式揭示了 Hermite 多项式与其他正交多项式的渐近关系[13–15]. 利用本文给出的渐近于 Hermite 多项式的函数列的判定定理 (定理 2.1), 上述结果不仅可以作为该定理的简单推论，而且应用该定理还可以构造新的渐近于 Hermite 多项式的函数列.

本文的主要结构如下: 第 2 节利用收敛到 Gauss 函数的函数列 ϕ_n, 对于任意给定的 n, 构造一类 Appell 函数列 $\{P_{n,m}: m=0,1,\dots\}$, 使得二者具有类似于 Hermite 多项式和 Gauss 函数的双正交性质, 即函数列 $\{P_{n,m}: m=0,1,\dots\}$ 与 $\{(-1)^m\phi_n^{(m)}: m=0,1,\dots\}$ 具有双正交关系, 且当 $n\to\infty$ 时, $P_{n,m}(x)$ 局部一致收敛到 $H_m(x)$ 定理 (定理 2.1), 给出满足尺度方程的 Appell 序列的特征 (定理 2.2). 利用这一结果, 得到多种正交多项式和组合多项式的渐近性质以及组合恒等式 (推论 3.3). 作为定理 2.1 的应用, 在第 3 节中, 由 N 阶 B 样条所生成的 Appell 多项式序列恰为 N 阶 Bernoulli 多项式. 从而, Bernoulli 多项式与 B 样条的导函数之间构成了一组双正交系统, 且标准化的 Bernoulli 多项式随着 $N\to\infty$ 渐近到 Hermite 多项式. 由二项分布所生成 Appell 序列为 Euler 多项式, 从而, Euler 多项式与二项分布的导函数之间构成了一组双正交系统. 且标准化的 Euler 多项式随着 $N\to\infty$, 渐近到 Hermite 多项式. 第 4 节主要给出渐近于 Hermite 多项式的函数列的判定定理 (定理 2.3), 利用该定理验证了部分 Askey 格式成立.

2 渐近于 Hermite 多项式的 Appell 多项式序列

令 $C^\infty(\mathbb{R})$ 表示无限可微函数空间. 如果 $\phi: C^\infty(\mathbb{R})\to\mathbb{R}$ 是一个线性泛函, 我们记作 $\langle\phi,\nu\rangle=\phi(\nu)$,

$\nu \in C^{\infty}(\mathbb{R})$. 线性泛函 ϕ 是连续的, 当且仅当, 存在 $\mathbb{R}$ 的紧子集 K, 常数 $C > 0$ 和整数 $k \geqslant 0$ 使得

$$|\langle \phi, \nu \rangle| \leqslant C \max_{j \leqslant k} \sup_{x \in K} |\nu^{(j)}(x)|.$$

具有紧支集的广义函数空间记作 $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$, 因而, 紧支集的可积函数和可测函数属于 $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$. 如果 f 是一个紧支集的可积函数, 则与其关联的特殊函数我们仍然记作 f, 定义为

$$\langle f, \nu \rangle := \int_{\mathbb{R}} \nu(x) f(x) dx, \quad \nu \in C^{\infty}(\mathbb{R}).$$

如果 m 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的紧支集测度, 则与之相关的的广义函数, 我们仍然记作 m, 定义为

$$\langle m, \nu \rangle := \int_{\mathbb{R}} \nu(x) dm(x), \quad \nu \in C^{\infty}(\mathbb{R}).$$

对于任意的 $\phi \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$, 存在任意 n 阶导数 $\phi^{(n)}$, 定义为

$$\langle \phi^{(n)}, \nu \rangle = (-1)^n \langle \phi, \nu^{(n)} \rangle, \quad n = 0, 1, \ldots$$

若紧支集的特殊函数 $\phi \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$, 则对于任意整数 $n \geqslant 0$,

$$\langle \phi^{(n)}, \mathrm{e}^{(\cdot)z} \rangle = (-1)^n \langle \phi, z^n \mathrm{e}^{(\cdot)z} \rangle = (-1)^n z^n \widehat{\phi}(\mathrm{i}z).$$

当 $\widehat{\phi}(0) \neq 0$ 时, 在 0 的邻域内有

$$\left\langle (-1)^n \phi^{(n)}, \frac{\mathrm{e}^{(\cdot)z}}{\widehat{\phi}(\mathrm{i}z)} \right\rangle = z^n. \tag{2.1}$$

由 ϕ 的紧支集性质可知, $\widehat{\phi}$ 是解析函数. 因此有如下的生成函数所定义的多项式序列 P_m:

$$\frac{\mathrm{e}^{xz}}{\widehat{\phi}(\mathrm{i}z)} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{P_m(x)}{m!} z^m. \tag{2.2}$$

根据 (2.1) 和 (2.2), 对于任意的整数 $n \geqslant 0$ 有

$$z^n = \sum_{m=0}^{\infty} \left\langle (-1)^n \phi^{(n)}, \frac{P_m(x)}{m!} \right\rangle z^m, \tag{2.3}$$

并且由此定义了如下双正交关系:

$$\left\langle (-1)^n \phi^{(n)}, \frac{P_m(x)}{m!} \right\rangle = \delta_{m,n}. \tag{2.4}$$

令 $\tilde{\phi}_N$ 为 ϕ_N 的标准化形式, 即

$$\tilde{\phi}_N(x) = \sigma_N \phi_N(\sigma_N x + \mu_N),$$

其中 μ_N 和 σ_N^2 分别为 ϕ_N 的均值和方差. 从而, 我们可以定义双正交多项式 $P_{N,m}$ 的标准化形式 $\tilde{P}_{N,m}$, $m = 0, 1, \ldots$ 如下:

$$\tilde{P}_{N,m} = \sigma_N^{-m} P_{N,m}(\sigma_N x + \mu_N),$$

并且由此得到了标准化的双正交关系

$$\left\langle (-1)^n \tilde{\phi}_N^{(n)}, \frac{\tilde{P}_{N,m}(x)}{m!} \right\rangle = \delta_{m,n}, \quad \forall\, m, n \geqslant 0. \tag{2.5}$$

定义 2.1 多项式序列 $P_m(x), m\in N$ 是 Appell 序列, 如果对于 m 次多项式 $P_m(x)$ 有

$$P_m'(x)=mP_{m-1}.$$

对 (2.2) 两边关于 x 求导数并且对比 z^m 的系数, 则有

$$P_m'(x)=mP_{m-1}(x),\quad m=1,2,\ldots \tag{2.6}$$

从而得知, $P_m(x)$ 是 Appell 多项式序列. 利用上述事实, 有如下定理:

定理 2.1 令 $\phi_N(x)$ 满足如下关系:

(1) 存在常数 $r>0$ 使得对于任意的 ε, 存在充分大的 N_0, 对于任意的 $N>N_0$, 有

$$|\widehat{\tilde{\phi}}_N(\mathrm{i}z)-\mathrm{e}^{\frac{z^2}{2}}|\leqslant\varepsilon,\quad |z|<r. \tag{2.7}$$

(2) 令 $\{\tilde{P}_{N,m}(x)\mid m=0,1,\ldots\}$ 为由 (2.2) 中 $\tilde{\phi}_N$ 所生成的双正交多项式, 则对于 $m=0,1,\ldots$, 当 $N\to\infty$ 时, $\tilde{P}_{N,m}(x)$ 局部一致收敛到 Hermite 多项式 $H_m(x)$.

证明 由于 $\widehat{\phi}_N(0)=1$, 则我们可以取原点附近的邻域 U 使得对于所有的 $z\in U$, 有 $|\widehat{\tilde{\phi}}(\mathrm{i}z)|\geqslant\frac{1}{2}$ 且 $|\mathrm{e}^{\frac{z^2}{2}}|\geqslant\frac{1}{2}$. 取 U 中的一个以原点为圆心 r 为半径的圆 C, 使得 (2.9) 成立.

注意到

$$\frac{\mathrm{e}^{xz}}{\widehat{\tilde{\phi}}_N(\mathrm{i}z)}-\frac{\mathrm{e}^{xz}}{\mathrm{e}^{\frac{z^2}{2}}}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\tilde{P}_{N,m}(x)-H_m(x)}{m!}z^m. \tag{2.8}$$

对 (2.8) 中的 Taylor 级数应用 Cauchy's 积分公式可知,

$$\tilde{P}_{N,m}(x)-H_m(x)=\frac{m!}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{\mathrm{e}^{xz}(\mathrm{e}^{\frac{z^2}{2}}-\widehat{\tilde{\phi}}(\mathrm{i}z))}{z^{m+1}\widehat{\tilde{\phi}}(\mathrm{i}z)\mathrm{e}^{\frac{z^2}{2}}}dz.$$

由于 $\phi_N(x)$ 满足条件 (1), 则存在常数 $r>0$ 和 $A>0$, 使得对于充分大的 N, 有

$$|\widehat{\tilde{\phi}}_N(\mathrm{i}z)-\mathrm{e}^{\frac{z^2}{2}}|\leqslant\frac{A}{\sigma_N},\quad |z|<r. \tag{2.9}$$

因此,

$$|\tilde{P}_{N,m}(x)-H_m(x)|\leqslant\frac{m!}{2\pi}\oint_C\frac{|\mathrm{e}^{xz}||\mathrm{e}^{\frac{z^2}{2}}-\widehat{\tilde{\phi}}_N(\mathrm{i}z)|}{r^{m+1}|\widehat{\tilde{\phi}}_N(\mathrm{i}z)||\mathrm{e}^{\frac{z^2}{2}}|}|dz|\leqslant\frac{m!}{2\pi}\oint_C\frac{\mathrm{e}^{x\mathrm{Re}(z)}\frac{A}{\sigma_N}}{r^{m+1}|\widehat{\tilde{\phi}}_N(\mathrm{i}z)||\mathrm{e}^{\frac{z^2}{2}}|}|dz|\leqslant\frac{4(m!)\mathrm{e}^{rx}A}{\sigma_N r^m}.$$

当 $N\to\infty$ 时, 有 $\sigma_N\to\infty$, 则对于 m, 在紧支集上一致有 $\tilde{P}_{N,m(x)}\to H_m(x)$. □

下述定理给出生成函数满足尺度方程的 Appell 序列的特征.

定理 2.2 如果两个 Appell 多项式序列 $P_m(x)$ 和 $Q_m(x)$ 分别满足

$$\frac{\mathrm{e}^{xz}}{\widehat{\psi}(\mathrm{i}z)}=\sum_{m=0}^{\infty}P_m(x)\frac{z^m}{m!}, \tag{2.10}$$

$$\frac{\mathrm{e}^{xz}}{\widehat{\phi}(\mathrm{i}z)}=\sum_{m=0}^{\infty}Q_m(x)\frac{z^m}{m!}, \tag{2.11}$$

则紧支集函数 $\phi(x)$ 是以 $\psi(x)$ 为面具的 α 尺度函数, 当且仅当

$$\alpha^{-m}\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}P_k(\alpha x)Q_{m-k}(\alpha x)=Q_m(2x). \tag{2.12}$$

证明 由 $P_m(x)$ 和 $Q_m(x)$ 的生成函数

$$\frac{\mathrm{e}^{\frac{xz}{\alpha}}}{\widehat{\psi}(\frac{\mathrm{i}z}{\alpha})}=\sum_{j=0}^{\infty}\alpha^{-j}P_j(x)\frac{z^j}{j!},\quad \frac{\mathrm{e}^{\frac{xz}{\alpha}}}{\widehat{\phi}(\frac{\mathrm{i}z}{\alpha})}=\sum_{j=0}^{\infty}\alpha^{-j}Q_j(x)\frac{z^j}{j!}$$

知,

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{e}^{\frac{2xz}{\alpha}}}{\widehat{\psi}(\frac{\mathrm{i}z}{\alpha})\widehat{\phi}(\frac{\mathrm{i}z}{\alpha})}&=\left(\sum_{j=0}^{\infty}\alpha^{-j}P_j(x)\frac{z^j}{j!}\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty}\alpha^{-j}Q_j(x)\frac{z^j}{j!}\right)\\&=\sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{m}\alpha^{-m}\binom{m}{k}P_k(x)Q_{m-k}(x)\right)\frac{z^m}{m!}.\end{aligned}\tag{2.13}$$

假设 Appell 多项式序列 $P_m(x)$ 和 $Q_m(x)$ 满足 (2.12),

$$\sum_{k=0}^{m}\alpha^{-m}\binom{m}{k}P_k(\alpha x)Q_{m-k}(\alpha x)=Q_m(2x),$$

则

$$\sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{m}\alpha^{-m}\binom{m}{k}P_k\left(\frac{\alpha x}{2}\right)Q_{m-k}\left(\frac{\alpha x}{2}\right)\right)\frac{z^m}{m!}=\sum_{m=0}^{\infty}Q_m(x)\frac{z^m}{m!}.\tag{2.14}$$

因此,

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{e}^{xz}}{\widehat{\psi}(\frac{\mathrm{i}z}{\alpha})\widehat{\phi}(\frac{\mathrm{i}z}{\alpha})}&=\sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{m}\alpha^{-m}\binom{m}{k}P_k\left(\frac{\alpha x}{2}\right)Q_{m-k}\left(\frac{\alpha x}{2}\right)\right)\frac{z^m}{m!}\\&=\sum_{m=0}^{\infty}Q_m(x)\frac{z^m}{m!}=\frac{\mathrm{e}^{xz}}{\widehat{\phi}(\mathrm{i}z)}.\end{aligned}\tag{2.15}$$

注意到

$$\widehat{\psi}\left(\frac{\mathrm{i}z}{\alpha}\right)\widehat{\phi}\left(\frac{\mathrm{i}z}{\alpha}\right)=\widehat{\phi}(\mathrm{i}z),$$

意味着 $\phi(x)$ 是以 $\psi(x)$ 为面具的 α 尺度函数.

假定紧支集函数 $\phi(x)$ 是一个以 $\psi(x)$ 为面具的 α- 尺度函数, 满足尺度方程 (1.2), 等价地, 有 (1.3) 所定义的 Fourier 变换, 即

$$\widehat{\psi}\left(\frac{\mathrm{i}z}{\alpha}\right)\widehat{\phi}\left(\frac{\mathrm{i}z}{\alpha}\right)=\widehat{\phi}(\mathrm{i}z).\tag{2.16}$$

从而有

$$\begin{aligned}\sum_{m=0}^{\infty}Q_m(2x)\frac{z^m}{m!}=\frac{\mathrm{e}^{2xz}}{\widehat{\phi}(\mathrm{i}z)}=\frac{\mathrm{e}^{2xz}}{\widehat{\psi}(\frac{\mathrm{i}z}{\alpha})\widehat{\phi}(\frac{\mathrm{i}z}{\alpha})}&=\left(\sum_{m=0}^{\infty}\alpha^{-m}P_m(\alpha x)\frac{z^m}{m!}\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty}\alpha^{-m}Q_m(\alpha x)\frac{z^m}{m!}\right)\\&=\sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{m}\alpha^{-m}\binom{m}{k}P_k(\alpha x)Q_{m-k}(\alpha x)\right)\frac{z^m}{m!}.\end{aligned}$$

因此,

$$\sum_{k=0}^{m}\alpha^{-m}\binom{m}{k}P_k(\alpha x)Q_{m-k}(\alpha x)=Q_m(2x).$$

定理证毕. □

将定理 2.1 推广到任意生成函数, 得到如下定理:

定理 2.3 令 $\{\tilde{P}_{N,m}(x):m=0,1,\dots\}$ 是由如下规则定义的多项式序列:

$$\frac{\tilde{f}_N(x,z)}{\hat{\tilde{\phi}}_N(\mathrm{i}z)}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\tilde{P}_{N,m}(x)z^m}{m!}.$$

若存在正常数 r, A 和 B, 使得对于 $|z|<r$ 和充分大的 N, 有

$$|\tilde{f}_N(x,z)-\mathrm{e}^{xz}|\leqslant\frac{B}{\sigma_N},\quad |\hat{\tilde{\phi}}_N(\mathrm{i}z)-\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2}}|\leqslant\frac{A}{\sigma_N},$$

则当 $N\to\infty$ 时, 对于 $m=0,1,\dots$, 有 $\tilde{P}_{N,m}(x)$ 局部一致收敛到 Hermite 多项式 $H_m(x)$.

注 2.1 当 $\tilde{f}_N(x,z)=\mathrm{e}^{xz}$, 定理 (2.3) 退化为定理 (2.1).

证明 由于 $\hat{\tilde{\phi}}_N(0)=1$, 可以选择原点附近的邻域 U, 使得对于任意 $z\in U$, 有 $|\hat{\tilde{\phi}}(\mathrm{i}z)|\geqslant\frac{1}{2}$ 和 $|\mathrm{e}^{\frac{z^2}{2}}|\geqslant\frac{1}{2}$ 成立. 在 U 中选取以原点为圆心 r 为半径的圆, 使得对于充分大的 N 和任意 $|z|<r$, 存在常数 $A>0$ 和 $B>0$, 使得 $|\tilde{f}_N(x,z)-\mathrm{e}^{xz}|\leqslant\frac{A}{\sigma_N}$, 和 $|\hat{\tilde{\phi}}_N(\mathrm{i}z)-\mathrm{e}^{\frac{z^2}{2}}|\leqslant\frac{B}{\sigma_N}$ 成立, 则有

$$\frac{\tilde{f}_N(x,z)}{\hat{\tilde{\phi}}(\mathrm{i}z)}-\frac{\mathrm{e}^{xz}}{\mathrm{e}^{\frac{z^2}{2}}}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\tilde{P}_{N,m}(x)-H_m(x)}{m!}z^m. \tag{2.17}$$

(2.17) 中 Taylor 展开的系数可以由 Cauchy 积分公式表示为

$$\tilde{P}_{N,m}(x)-H_m(x)=\frac{m!}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{1}{z^{m+1}}\left(\frac{\tilde{f}_N(x,z)}{\hat{\tilde{\phi}}_N(\mathrm{i}z)}-\frac{\mathrm{e}^{xz}}{\mathrm{e}^{\frac{z^2}{2}}}\right)dz=\frac{m!}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{(\mathrm{e}^{\frac{z^2}{2}}\tilde{f}_N(x,z)-\mathrm{e}^{xz}\hat{\tilde{\phi}}(\mathrm{i}z))}{z^{m+1}\hat{\tilde{\phi}}(\mathrm{i}z)\mathrm{e}^{\frac{z^2}{2}}}dz.$$

因此,

$$\begin{aligned}|\tilde{P}_{N,m}(x)-H_m(x)|&\leqslant\frac{m!}{2\pi}\oint_C\frac{|\mathrm{e}^{\frac{z^2}{2}}\tilde{f}_N(x,z)-\mathrm{e}^{xz}\hat{\tilde{\phi}}(\mathrm{i}z)|}{|z^{m+1}||\hat{\tilde{\phi}}(\mathrm{i}z)||\mathrm{e}^{\frac{z^2}{2}}|}|dz|\\
&\leqslant\frac{m!}{2\pi}\oint_C\frac{|\mathrm{e}^{\frac{z^2}{2}}\tilde{f}_N(x,z)-\mathrm{e}^{xz}\mathrm{e}^{\frac{z^2}{2}}|+|\mathrm{e}^{xz}\mathrm{e}^{\frac{z^2}{2}}-\mathrm{e}^{xz}\hat{\tilde{\phi}}(\mathrm{i}z)|}{r^{m+1}|\hat{\tilde{\phi}}(\mathrm{i}z)||\mathrm{e}^{\frac{z^2}{2}}|}|dz|\\
&\leqslant\frac{m!}{2\pi}\oint_C\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{Re}\frac{z^2}{2}}|\tilde{f}_N(x,z)-\mathrm{e}^{xz}|+\mathrm{e}^{x\mathrm{Re}z}|\mathrm{e}^{\frac{z^2}{2}}-\hat{\tilde{\phi}}(\mathrm{i}z)|}{r^{m+1}|\hat{\tilde{\phi}}(\mathrm{i}z)||\mathrm{e}^{\frac{z^2}{2}}|}|dz|\\
&\leqslant\frac{4(m!)(|B\mathrm{e}^{\frac{r^2}{2}}|+|A\mathrm{e}^{xr}|)}{\sigma_N r^m}.\end{aligned}$$

当 $N\to\infty$ 时, 有 $\sigma_N\to\infty$, 从而对于每一个 m, 在紧集上, 一致有 $\tilde{P}_{N,m}(x)\to H_m(x)$. □

3 广义 Bernoulli 多项式和 Euler 多项式

广义 m 次 N 阶 Bernoulli 和 Euler 多项式分别记作 $B_m^N(z)$ 和 $E_m^N(z)$, 定义为

$$\frac{\omega^N\mathrm{e}^{\omega z}}{(\mathrm{e}^{\omega}-1)^N}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{B_m^N(z)}{m!}\omega^m,\quad |\omega|<2\pi, \tag{3.1}$$

$$\frac{2^N\mathrm{e}^{\omega z}}{(\mathrm{e}^{\omega}+1)^N}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{E_m^N(z)}{m!}\omega^m,\quad |\omega|<\pi, \tag{3.2}$$

其中 z 为复数.

根据上述 Bernoulli 多项式的生成函数, 由标准化的 N 阶均匀 B 样条所生成的 Appell 多项式序列恰好是广义 N 阶 Bernoulli 多项式. 从而, 根据定理 2.1, 当 $N \to \infty$ 时, 广义 N 阶 Bernoulli 多项式收敛到 Hermite 多项式.

推论 3.1

$$\lim_{N\to\infty}\left(\frac{12}{N}\right)^{\frac{m}{2}} B_m^N\left(\sqrt{\frac{N}{12}}z+\frac{N}{2}\right)=H_m(z).$$

证明 N 阶均匀 B 样条 B_N, 满足如下尺度方程:

$$B_N(x)=2\sum_{j=0}^{N}\frac{1}{2^N}\binom{N}{j}B_N(2x-j), \tag{3.3}$$

其中面具 $\psi_N(k) := \frac{1}{2^N}\binom{N}{k}$. B_N 的 Fourier 变换为

$$\widehat{B}_N(\omega)=\left(\frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}}{\mathrm{i}\omega}\right)^N,\quad \omega\in\mathbb{R}.$$

等价地, (3.3) 可以有如下 Fourier 变换:

$$\widehat{B}_N(\omega)=\widehat{\psi}_N\left(\frac{\omega}{2}\right)\widehat{B}_N\left(\frac{\omega}{2}\right),$$

其中面具的 Fourier 变换为 $\widehat{\psi}_N(\omega)=(\frac{1+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}}{2})^N$. 从 B 样条 B_N 的 Fourier 变换我们可知,

$$\widehat{B}_N(\mathrm{i}\omega)=\left(\frac{\mathrm{e}^{\omega}-1}{\omega}\right)^N. \tag{3.4}$$

根据 (2.2)、(2.4) 和 $B_m^N(z)$ 的生成函数可知, Bernoulli 多项式 $B_m^N(z)$, $m=0,1,\dots$ 与 B 样条的导函数 $B_N^{(n)}$ 之间有如下的双正交关系:

$$\left\langle(-1)^n B_N^{(n)}(z),\frac{B_m^N(z)}{m!}\right\rangle=\delta_{m,n}. \tag{3.5}$$

由于标准化的 B 样条,

$$\tilde{B}_N(x)=\sqrt{\frac{N}{12}}B_N\left(\sqrt{\frac{N}{12}}x+\frac{N}{12}\right)$$

在 L^p 空间中, 点态收敛到 Gauss 函数 (定理 1.2). 根据定理 2.1, 有

$$\lim_{N\to\infty}\left(\frac{12}{N}\right)^{\frac{m}{2}} B_m^N\left(\sqrt{\frac{N}{12}}z+\frac{N}{2}\right)=H_m(z).$$

推论证毕. □

众所周知, 二项分布有如下渐近性质:

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{k=0}^{[x_N]}\frac{1}{2^N}\binom{N}{k}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\mathrm{e}^{-t^2/2}dt, \tag{3.6}$$

其中 $x_N=\sqrt{N}x/2+N/2$. 令 $\sigma_N=\sqrt{N}x/2$ 且 $\mu_N=N/2$, 则标准的二项分布

$$\tilde{\psi}_N(x):=\sigma_N\psi_N(\sigma_N x+\mu_N)$$

一致收敛到 Gauss 函数

$$G(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-x^2/2}.$$

由标准化的二项分布所生成的 Appell 多项式序列恰好是广义 N 阶 Euler 多项式. 从而根据定理 2.1, 当 $N\to\infty$ 时, 广义 N 阶 Euler 多项式收敛到 Hermite 多项式且与二项分布构成一组双正交系统.

推论 3.2

$$\lim_{N\to\infty}\left(\frac{4}{N}\right)^{\frac{m}{2}}E_m^N\left(\frac{\sqrt{N}}{2}z+\frac{N}{2}\right)=H_m(z). \tag{3.7}$$

证明 从 $\psi_N(x)$ Fourier 变换, 我们有

$$\widehat{\psi}_N(\mathrm{i}\omega)=\left(\frac{\mathrm{e}^{\omega}+1}{2}\right)^N. \tag{3.8}$$

由二项分布 $\psi_n(k):=\frac{1}{2^n}\binom{n}{k}$ 所生成的 Appell 多项式恰好为 Euler 多项式 $E_m^N(z)$, $m=0,1,\ldots$, 从而与 $\psi_N(z)$ 的导函数具有双正交的关系

$$\left\langle(-1)^n\psi_N^{(n)}(z),\frac{E_m^N(z)}{m!}\right\rangle=\delta_{m,n}. \tag{3.9}$$

根据定理 (2.1), 标准化的广义 Euler 多项式随着 $N\to\infty$ 收敛到 Hermite 多项式,

$$\lim_{N\to\infty}\left(\frac{4}{N}\right)^{\frac{m}{2}}E_m^N\left(\frac{\sqrt{N}}{2}z+\frac{N}{2}\right)=H_m(z). \tag{3.10}$$

推论证毕. □

广义 Euler 和 Bernoulli 多项式为满足尺度方程的 Appell 序列, 从而有如下结论成立.

推论 3.3 广义 Euler 和 Bernoulli 多项式满足

$$B_m^N(z)=\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{2^m}\binom{m}{k}E_k^N(z)B_{m-k}^N(z). \tag{3.11}$$

证明 令 $\widehat{\psi}_N(\omega)=(\frac{1+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}}{2})^N$ 和 $\widehat{B}_N(\omega)=(\frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}}{\mathrm{i}\omega})^N$. 根据 (3.1) 和 (3.2), 显然, Euler 和 Bernoulli 多项式可以分别由 $\widehat{\psi}_N(\mathrm{i}\omega)$ 和 $\widehat{B}_N(\mathrm{i}\omega)$ 生成. N 阶均匀 B 样条是满足如下方程的尺度函数:

$$\widehat{B}_N(\omega)=\widehat{\psi}_N\left(\frac{\omega}{2}\right)\widehat{B}_N\left(\frac{\omega}{2}\right).$$

B_N 的 Fourier 变换为

$$\widehat{B}_N(\omega)=\left(\frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}}{\mathrm{i}\omega}\right)^N,\quad \omega\in\mathbb{R}.$$

因此, 根据定理 2.2, 有

$$B_m^N(z)=\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{2^m}\binom{m}{k}E_k^N(z)B_{m-k}^N(z). \tag{3.12}$$

推论证毕. □

4 渐近于 Hermite 多项式的 Askey 格式

Askey 格式揭示了超几何正交多项式之间的渐近关系[11,14,15]. 例如, 广义 Buchholz 多项式 $P_m^{\mu}(z)$、广义 Ultraspherical (Gegenbauer) 多项式 $C_m^N(z)$ 和广义 Laguerre 多项式 $L_m^{(\alpha)}$ 有如下 Hermite 多项式所表示的渐近形式[11,14–16]:

$$\lim_{N\to\infty}\left(\frac{6}{N}\right)^{\frac{m}{2}}P_m^N(-2\sqrt{3N}x)=\frac{1}{m!}H_m(x),$$
$$\lim_{N\to\infty}N^{-\frac{n}{2}}C_m^N\left(\frac{x}{\sqrt{N}}\right)=\frac{1}{m!}H_m(x),$$
$$(-1)^m N^{-m/2}L_m^N(x\sqrt{N}+N)=\frac{1}{m!}H_m(x).$$

利用渐近于 Hermite 多项式的函数列的判定定理 (定理 2.3), 上述结果皆可作为该定理的推论. 不同于以往的分析方法[17,18], 该方法不仅可以用于正交多项式序列渐近性质的判断, 而且可以用于构造渐近于 Hermite 多项式的函数列.

4.1 广义 Buchholz 多项式

m 次 N 阶广义 Buchholz 复多项式记作 $P_m^{\mu}(z)$, 可以由生成函数定义为

$$\mathrm{e}^{x(\cot z-\frac{1}{z})/2}\left(\frac{\sin z}{z}\right)^N=\sum_{n=0}^{\infty}P_n^N(x)z^n,\quad |z|<\pi. \tag{4.1}$$

根据定理 2.3, 有如下推论:

推论 4.1

$$\lim_{N\to\infty}\left(\frac{6}{N}\right)^{\frac{m}{2}}P_m^N(-2\sqrt{3N}x)=\frac{1}{m!}H_m(x). \tag{4.2}$$

上式的证明依赖于如下引理:

引理 4.1 对于任意 $|z|<\pi$,

$$\lim_{N\to\infty}\operatorname{sinc}^N\left(\frac{z}{2}\sqrt{\frac{12}{N}}\right)=\exp\left(-\frac{z^2}{2}\right).$$

证明 令

$$L_N(z):=N\ln\left[\operatorname{sinc}\left(\frac{z}{2}\sqrt{\frac{12}{N}}\right)\right]. \tag{4.3}$$

记 $z_N=\frac{z}{2}\sqrt{\frac{12}{N}}$, 有

$$L_N(z):=N\ln\left[\operatorname{sinc}\left(\frac{z}{2}\sqrt{\frac{12}{N}}\right)\right]=3z^2\frac{\ln[\operatorname{sinc}(\frac{z}{2}\sqrt{\frac{12}{N}})]}{3z^2/N}.$$

令 $Z_N=\sqrt{\frac{3}{N}}Z$, 则有

$$L_N(z)=3z^2\frac{\ln[\operatorname{sinc}(z_N)]}{z_N^2}.$$

由于 $\mathrm{sinc}(0)=1$, $\mathrm{sinc}^{(1)}(0)=0$ 和 $\mathrm{sinc}^{(2)}(0)=-\frac{1}{3}$, 且当 $N\to\infty$ 时, $z_N\to 0$. 应用两次 L'Hôpital 法则, 对于任意 $|z|<\pi$, 有

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty}L_N(z)&=3z^2\lim_{N\to\infty}\frac{\mathrm{sinc}^{(1)}(z_N)}{2z_N\mathrm{sinc}(z_N)}=3z^2\lim_{N\to\infty}\frac{\mathrm{sinc}^{(2)}(z_N)}{2\mathrm{sinc}(z_N)+2z_N\mathrm{sinc}^{(1)}(z_N)}\\&=3z^2\frac{\mathrm{sinc}^{(2)}(0)}{2}=-\frac{z^2}{2}.\end{aligned}$$

由此可知, 对于任意的 $|z|<\pi$,

$$\lim_{N\to\infty}\mathrm{sinc}^N\left(\frac{z}{2}\sqrt{\frac{12}{N}}\right)=\exp\left(-\frac{z^2}{2}\right).$$

引理证毕. □

基于上述引理, 推论 4.1 有如下证明:

证明　令 $\sigma_N=\sqrt{\frac{N}{12}}$, 则有

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sigma_N^{-\frac{m}{2}}P_m^N(-12z\sigma_N)\left(\frac{\omega}{2}\right)^m=\mathrm{e}^{-6z\sigma_N(\cot\frac{\omega}{2\sigma_N}-\frac{2\sigma_N}{\omega})}\left(\frac{\sin\frac{\omega}{2\sigma_N}}{\frac{\omega}{2\sigma_N}}\right)^N.$$

分别令

$$\tilde{f}_N(\omega,z)=\mathrm{e}^{-6z\sigma_N(\cot\frac{\omega}{2\sigma_N}-\frac{2\sigma_N}{\omega})},\quad \hat{\tilde{\phi}}_N(\mathrm{i}\omega)=\left(\frac{\sin\frac{\omega}{2\sigma_N}}{\frac{\omega}{2\sigma_N}}\right)^{-N}.$$

利用 Taylor 定理, 对于任意 $|\omega|<\pi$ 和充分大的 N, 有

$$\ln\tilde{f}_N(\omega,z)=-6z\sigma_N\left(\cot\frac{\omega}{2\sigma_N}-\frac{2\sigma_N}{\omega}\right)=-6z\sigma_N\left(-\frac{\omega}{3\sigma_N}+O(\sigma_N^{-3})\right).$$

因此, 对于 $N\to+\infty$,

$$\lim_{N\to\infty}\tilde{f}_N(\omega,z)=\mathrm{e}^{-2z\omega}.$$

利用引理 4.1, 有

$$\lim_{N\to+\infty}\hat{\tilde{\phi}}_N(\mathrm{i}\omega)=\lim_{N\to\infty}\left(\frac{\sin\frac{\omega}{2\sigma_N}}{\frac{\omega}{2\sigma_N}}\right)^{-N}=\mathrm{e}^{\frac{z^2}{2}}.$$

根据定理 2.3, 有

$$\lim_{N\to\infty}\left(\frac{6}{N}\right)^{\frac{n}{2}}p_n^N(-2\sqrt{3N}z)=\frac{1}{n!}H_n(z).\tag{4.4}$$

推论证毕. □

4.2　广义 Ultraspherical (Gegenbauer) 多项式

以 Leopold Gegenbauer 命名的 Ultraspherical (Gegenbauer) 多项式 $C_m^N(x)$ 由以下生成函数所定义:

$$(1-2xz+z^2)^{-N}=\sum_{m=0}^{\infty}C_m^N(x)z^m.\tag{4.5}$$

$C_m^N(x)$ 是以 $(1-x^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}$ 为权函数的正交多项式. 可以看成推广的 Legendre 多项式、Chebyshev 多项式和 Jacobi 多项式的特例. 利用定理 2.3, Ultraspherical (Gegenbauer) 多项式 $C_m^N(x)$ 有如下渐近公式:

推论 4.2

$$\lim_{N\to\infty} N^{-\frac{m}{2}} C_m^N\left(\frac{x}{\sqrt{N}}\right) = \frac{1}{m!}H_m(x). \tag{4.6}$$

证明 由 $C_m^N(x)$ 的生成函数 $(1-2xz+z^2)^{-N}=\sum_{m=0}^{\infty} C_m^N(x)z^m$ 有

$$\sum_{m=0}^{\infty}(2N)^{-\frac{m}{2}}C_m^N\left(\frac{x}{\sqrt{2N}}\right)z^m=\left(1-\frac{xz}{\sqrt{N}}+\frac{z^2}{2N}\right)^{-N}=\left[1-\left(\frac{2xz-z^2}{2N}\right)\right]^{-\frac{2N}{2xz-z^2}(xz-z^2/2)}$$

成立. 令 $g_N=[1-(\frac{2xz-z^2}{2N})]^{-\frac{2N}{2xz-z^2}}$, 则 $\lim_{N\to\infty} g_N=\mathrm{e}$. 因此,

$$\sum_{m=0}^{\infty}(2N)^{-\frac{m}{2}}C_m^N\left(\frac{x}{\sqrt{2N}}\right)z^m=g_N^{xz}g_N^{-z^2/2},$$
$$\lim_{N\to\infty} g_N^{xz}=\mathrm{e}^{xz},\quad \lim_{N\to\infty} g_N^{-z^2/2}=\mathrm{e}^{-z^2/2}.$$

根据定理 (2.3), 有

$$\lim_{N\to\infty} N^{-\frac{m}{2}} C_m^N\left(\frac{x}{\sqrt{N}}\right) = \frac{1}{m!}H_m(x)$$

成立. □

4.3 广义 Laguerre 多项式

以 Edmond Laguerre 名字命名的 Laguerre 多项式 L_m 满足 Laguerre 方程

$$xy''+(1-x)y'+ny=0,\quad n\geqslant 0.$$

因而常用于数值积分中的 Gauss 求积. Laguerre 多项式 L_m 是以 e^{-x} 为权函数的正交多项式, 有如下定义方式:

$$L_n(x)=\frac{\mathrm{e}^x}{n!}\frac{d^n}{dx^n}(\mathrm{e}^{-x}x^n).$$

广义 Laguerre 多项式记作 $L_m^{(\alpha)}$ 是定义在 $\mathbb{R}_+$ 上, 以 $x^\alpha\mathrm{e}^{-x}$ 为权函数的正交多项式, 其中参数 $\alpha>-1$, 定义为

$$L_n^{\alpha}(x)=\frac{x^{-\alpha}\mathrm{e}^x}{n!}\frac{d^n}{dx^n}(\mathrm{e}^{-x}x^{n+\alpha}),$$

有如下的生成函数:

$$(1-z)^{-\alpha-1}\mathrm{e}^{\frac{-zx}{1-z}}=\sum_{m=0}^{\infty}L_m^{(\alpha)}(x)z^m,\quad |z|\leqslant 1. \tag{4.7}$$

当 $\alpha=0$ 时, 退化为 Laguerre 多项式 L_m, 即 $L_m^0(x)=L_m(x)$.

Laguerre 多项式是以 $x^\alpha\mathrm{e}^{-x}$ 为权函数的正交多项式, 与上文所提到的 Hermite 多项式有着密切联系. 以下渐近公式表明, 经过适当的变换, 对于充分大的阶数 N, Laguerre 渐近于 Hermite 多项式.

推论 4.3

$$\lim_{N\to\infty}(-1)^m N^{-m/2}L_m^N(x\sqrt{N}+N)=\frac{1}{m!}H_m(x).$$

文献 [19–21] 利用积分和组合学方法考察了 Laguerre 多项式的渐近性质. 我们利用上节给出的序列渐近于 Hermite 多项式判定定理 (定理 2.3) 重新证明这一结论.

证明

$$\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m N^{-m/2}L_m^N(x\sqrt{N}+N)z^m=\left(1+\frac{z}{\sqrt{N}}\right)^{-N-1}\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{N}z}{1+z/\sqrt{N}}}\mathrm{e}^{\frac{zx}{1+z/\sqrt{N}}}.$$

令 $\tilde{f}_N(x,z)=\mathrm{e}^{\frac{zx}{1+z/\sqrt{N}}}$, $\widehat{\tilde{\phi}}_N(\mathrm{i}z)=(1+\frac{z}{\sqrt{N}})^{N+1}\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{N}z}{1+z/\sqrt{N}}}$, 则当 $N\to\infty$ 时, 有

$$\lim_{N\to\infty}\tilde{f}_N(x,z)=\mathrm{e}^{zx},\quad \lim_{N\to\infty}\widehat{\tilde{\phi}}_N(\mathrm{i}z)=\mathrm{e}^{z^2}.$$

根据定理 2.3, 有

$$\lim_{N\to\infty}(-1)^m N^{-m/2}L_m^N(x\sqrt{N}+N)=\frac{1}{m!}H_m(x).$$

推论证毕. □

致谢 作者对审稿专家所提出的建议表示感谢.

参考文献

1 许艳, 王仁宏. B 样条在一些渐近组合问题中的应用. 中国科学: 数学, 2010, 40: 863–871

2 Carlitz L, Kurtz D C, Scoville R, et al. Asymptotic properties of Eulerian numbers. Z Wahrschein-lichkeitstheorie und Verw Geb, 1972, 23: 47–54

3 Babaub J, Witkin A P, Baudin M, et al. Uniqueness of Gaussian kernel for scale-space filtering. IEEE Trans Pattern Anal Mach Intell, 1986, 8: 26–33

4 Poggio T A, Torre V, Koch C. Computational vision and regularization theory. Nature, 1985, 317: 314–319

5 Young R A. The Gaussian derivative model for machine vision: Visual cortex simulation. Technical Report GMR-5323, General Motors Research Laboratories. J Opt Soc Amer A, 1987

6 Chen L H Y, Goodman T N T, Lee S L. Asymptotic normality of scaling function. SIAM J Math Anal, 2004, 36: 323–346

7 Wang Y P, Lee S L. Scale-space derived from B-spline. IEEE Trans Pattern Anal Mach Intell, 1998, 20: 1040–1055

8 Temme N M. Polynomial asymptotic estimates of Gegenbauer, Laguerre, and Jacobi polynomials. In: Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, vol. 124. New York: Marcel Dekker, 1990: 455–476

9 López J L, Temme N M. Convergent asymptotic expansions of Charlier, Laguerre and Jacobi polynomials. Proc Roy Soc Edinburgh Sect A, 2004, 134: 537–555

10 Temme N M. Asymptotic estimates for Laguerre polynomials. Z Angew Math Phys, 1990, 41: 114–126

11 López J L, Temme N M. Approximation of orthogonal polynomials in terms of Hermite polynomials. Methods Appl Anal, 1999, 6: 131–146

12 López J L, Temme N M. Hermite polynomials in asymptotic representations of generalized Bernoulli, Euler, Bessel, and Buchholz polynomials. J Math Anal Appl, 1999, 239: 457–477

13 López J L, Temme N M. The Role of Hermite Polynomials in Asymptotic Analysis. In Special Functions (Hong Kong). River Edge, NJ: World Sci Publishing, 1999

14 Ferreira C, López J L, Mainar E. Asymptotic relations in the Askey scheme for hypergeometric orthogonal polynomials. Adv Appl Math, 2003, 31: 61–85

15 López J L, Temme N M. The Askey scheme for hypergeometric orthogonal polynomials viewed from asymptotic analysis. J Comput Appl Math, 2001, 133: 623–633

16 Ferreira C, López J L, Pagola P J. Asymptotic approximations between the Hahn-type polynomials and Hermite, Laguerre and Charlier polynomials. Acta Appl Math, 2008, 103: 235–252
17 Godoy E, Ronveaux A, Zarzo A, et al. On the limit relations between classical continuous and discrete orthogonal polynomials. J Comput Appl Math, 1998, 91: 97–105
18 Ronveaux A, Zarzo A, Area I, et al. Transverse limits in the Askey tableau. J Comput Appl Math, 1998, 99: 327–335
19 Ferreira C, López J L, Sinusía E P. Asymptotic relations between the Hahn-type polynomials and Meixner-Pollaczek, Jacobi, Meixner and Krawtchouk polynomials. J Comput Appl Math, 2008, 217: 88–109
20 Frenzen R C, Wong R. Uniform asymptotic expansions of Laguerre polynomials. SIAM J Math Anal, 1988, 19: 1232–1248
21 Wong R. Asymptotic Approximations of Integrals. New York: Academic Press, 1989

Approximation of Hermite polynomials by biorthognal systerms

XU Yan

Abstract In this paper, the structure to a family of Appell sequences that approximate to Hermite polynomials is investigated by the functional ϕ which approximates to Gaussian function to construct the biothogonal systems between the sequences and the derivatives of ϕ. Therefore, the asymptotic relations between several orthogonal polynomials and combinatoric polynomials are derived from the biothogonal systems. Especially, the Appell sequences generated by the uniform B-splines of order N are Bernoulli polynomials of order N which indicate the biorthogonal relationship between Bernoulli polynomials and the derivatives of B-splines. Therefore, the standardized Bernoulli polynomials approximate to Hermite polynomials. The asymptotic properties of standardized Euler polynomials to Hermite polynomials are derived by the biothognal systems generated by the binomial distribution and Euler polynomials. The judging theorem of the approximation to Hermite polynomials by a sequence of functions and the necessary and sufficient condition of the generating functions to the Appell sequence which satisfies the scaling equations are also discussed. The asymptotic representations of generalized Buchholz, Laguerre and Ultraspherical (Gegenbauer) polynomials to Hermite polynomials are proved by the theorems which in turn verify the Askey scheme of hypergeometric orthogonal polynomials.

Keywords **Appell sequence, Askey scheme, Hermite polynomials, B-splines, Bernoulli polynomials**

MSC(2010) **05A16, 41A15**

doi: 10.1360/N012013-00103