中国科学: 数学 2018 年 第 48 卷 第 6 期: 757 ～ 770
SCIENTIA SINICA Mathematica
《中国科学》杂志社 SCIENCE CHINA PRESS
综 述

Riemann 流形中超曲面的逆曲率流及其几何应用

献给胡和生教授 90 华诞

李海中[1*], 韦勇[2], 周泰龙[1]

1. 清华大学数学科学系, 北京 100084;
2. Mathematical Sciences Institute, Australian National University, Canberra ACT 2601, Australia
E-mail: hli@math.tsinghua.edu.cn, yong.wei@anu.edu.au, zhou-tl14@mails.tsinghua.edu.cn

收稿日期: 2017-09-22; 接受日期: 2017-12-15; 网络出版日期: 2018-03-30; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 11671224) 和 Laureate Fellowship of the Australian Research Council (Grant No. FL150100126) 资助项目

摘要 本文是关于 Riemann 流形中超曲面逆曲率流的综述文章. 首先介绍 Euclid 空间超曲面的逆曲率流的收敛性, 以及其在证明 Alexandrov-Fenchel 不等式中的应用. 其次, 介绍在双曲空间以及球面中类似的结论. 接着讨论 Kottler 空间的逆平均曲率流. Kottler 空间是一类扭曲乘积空间, 它满足物理中的稳态方程且在无穷远处渐近于局部双曲空间. 本文将介绍此类空间中的逆平均曲率流的收敛性并用来对星形平均凸超曲面证明 Minkowski 型不等式. 逆曲率流是近几年比较热门的一个研究领域, 然而, 由于篇幅有限, 本文不能一一全部介绍. 因此, 本文最后列举一些相关的文献供感兴趣的读者参考.

关键词 逆曲率流 几何不等式 空间形式 Kottler 空间

MSC (2010) 主题分类 53C44, 53C42

1 引言

设 $n \geqslant 2$, (M^{n+1}, g_M) 为具有 Riemann 度量 g_M 的 $n+1$ 维完备 Riemann 流形, Σ_0 为 M 中一个光滑闭的 (即紧致无边) 超曲面, 且由光滑浸入 $X_0 : \Sigma^n \to X_0(\Sigma^n) \subset M$ 给出. 记 $\mathcal{W} = (h_i^j)$ 为超曲面 Σ_0 的 Weingarten 矩阵, 其特征值 $\kappa = (\kappa_1, \ldots, \kappa_n)$ 称为超曲面的主曲率. 假设 $F(\mathcal{W})$ 是关于 Weingarten 矩阵 $\mathcal{W} = (h_i^j)$ 的光滑对称函数, 等价地, $F = f(\kappa)$ 是关于超曲面主曲率的光滑对称函数. 如果在超曲面 Σ_0 上处处满足 $F(\mathcal{W}) > 0$, 则可考虑 Riemann 流形 M 中以 Σ_0 为初始值的逆曲率流, 即满足

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} X(x,t) = \dfrac{\nu(x,t)}{F(\mathcal{W}(x,t))^{\alpha}}, \\ X(\cdot, 0) = X_0(\cdot) \end{cases} \tag{1.1}$$

英文引用格式: Li H Z, Wei Y, Zhou T L. Inverse curvature flow for hypersurfaces in Riemannian manifold and its application (in Chinese). Sci Sin Math, 2018, 48: 757–770, doi: 10.1360/N012017-00204

的一族光滑浸入 $X:\Sigma^n\times[0,T)\to M$, 其中 $\alpha>0$, ν 为超曲面 $\Sigma_t=X(\Sigma^n,t)$ 的单位外法向量场. 本文始终假定函数 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}_+$ 单调增加 (即 $\dot{f}^i=\partial f/\partial\kappa_i>0$)、一次齐次 (即 $f(k\kappa)=kf(\kappa), \forall\, k\in\mathbb{R}$) 且满足规范化 $f(1,\ldots,1)=n$.

首先有如下关于逆曲率流 (1.1) 的解的短时间存在性和唯一性:

定理 1.1 [1,2] 如果初始超曲面满足 $F>0$ 且 $\dot{f}^i>0$, 则存在 $T>0$ 使得逆曲率流 (1.1) 在时间区间 $[0,T)$ 上具有唯一的光滑解.

注 1.2 比较重要的曲率函数 $F(\mathcal{W})$ 包括平均曲率 $H=\kappa_1+\cdots+\kappa_n$、Gauss 曲率的 $1/n$ 次方 $n(K)^{1/n}=n(\kappa_1\cdots\kappa_n)^{1/n}$、$nE_k^{1/k}$ 和 nE_k/E_{k-1}, 其中 E_k 为 (规范化) k- 阶平均曲率,

$$E_k=\binom{n}{k}^{-1}\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n}\kappa_{i_1}\cdots\kappa_{i_k}.$$

显然, $E_1=H/n$ 和 $E_n=K$ 分别为 (规范化) 平均曲率和 Gauss 曲率. 当 $F=H$ 且 $\alpha=1$ 时, 称 (1.1) 为逆平均曲率.

1973 年, Geroch [3] 最先引入了逆平均曲率流, 并证明了, 如果 3 维 Riemann 流形 (M^3,g_M) 的数量曲率 $R\geqslant 0$ 且逆平均曲率流的解超曲面 Σ_t 是连通的, 则 Hawking 质量沿着逆平均曲率流单调递增. 2001 年, Huisken 和 Ilmanen [4] 引入了逆平均曲率流的弱解, 并验证了在弱解意义下 Hawking 质量的单调性, 从而证明了 3 维渐近平坦流形中的 Riemann Penrose 不等式. 关于 Euclid 空间中逆曲率流光滑解的研究, 则是由 Gerhardt [5] 和 Urbas [6,7] 于 1990 年左右分别独立完成. Guan 和 Li [8] 发现了 Euclid 空间中星形 k- 凸超曲面的 Quermass 积分比在对应的逆曲率流下单调递减, 从而利用 Gerhardt 和 Urbas 关于逆曲率流的光滑收敛性证明了经典的 Alexandrov-Fenchel 不等式对于 Euclid 空间中 k-凸星形超曲面也成立. 从文献 [4,8] 可以看出, 逆曲率流的弱解和光滑解在证明 Riemann 流形中超曲面上的几何不等式中将会有重要应用. 因此, 最近几年关于逆曲率流收敛性及其应用的研究是一个很热门的课题. 本文将探讨该领域的一些重要成果和进展, 希望有助于该领域的进一步发展.

本文将按照 Euclid 空间、双曲空间、球面和 Kottler 空间的顺序, 分别讨论相应空间中的逆曲率流的收敛性及其应用. 由于篇幅有限, 我们着重于讨论光滑的闭超曲面上的逆曲率流, 对于本文中未涉及的逆曲率流的其他研究课题, 我们将在本文最后列出相关文献供读者参考.

2 Euclid 空间中的逆曲率流

2.1 凸超曲面的逆曲率流

Urbas [7] 于 1991 年研究了 Euclid 空间 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中凸超曲面的逆曲率流. 一个光滑超曲面 Σ 称为凸的, 如果其主曲率 $\kappa=(\kappa_1,\ldots,\kappa_n)$ 处处满足 $\kappa_i>0, \forall\, i=1,\ldots,n$.

定理 2.1 [7,9,10] 假设 Σ_0 是 Euclid 空间中的光滑闭的凸超曲面, 则对任意 $\alpha\in(0,1]$ 和满足任意下述条件的函数 f:

(i) f 是凹函数且 f 在正锥 $\Gamma_+:=\{\kappa\in\mathbb{R}^n:\kappa_i>0, i=1,\ldots,n\}$ 边界取值为零;

(ii) f 是凹函数且如下定义的 f_* 也是凹函数,

$$f_*(x_1,\ldots,x_n)=f(x_1^{-1},\ldots,x_n^{-1})^{-1}; \tag{2.1}$$

(iii) f_* 是凹函数且 f_* 在正锥 Γ_+ 边界取值为零;

(iv) f 无需任何二阶导数的条件, 但维数 $n=2$,
逆曲率流 (1.1) 具有长时间存在的解 Σ_t, $t\in[0,\infty)$. 随着时间的增加, 超曲面 Σ_t 扩张至无穷远, 并且在经过适当的伸缩变换后以指数速率光滑收敛至单位圆球.

上述定理 2.1(ii) 和 2.1(iii) 由 Urbas [7] 证明; 定理 2.1(iv) 由 Li 等 [9] 证明. 定理 2.1 的证明中最关键的一步为曲率拼挤 (pinching) 估计, 即估计流超曲面 Σ_t 的最大与最小主曲率比值. 由于 f 为对称函数, 不妨在 Σ_t 任意点都假定主曲率满足 $\kappa_1\leqslant\kappa_2\leqslant\cdots\leqslant\kappa_n$, 则在定理 2.1 条件下, 存在只依赖于初始超曲面 Σ_0、n 和 α 的常数 $C>0$ 使得流超曲面 Σ_t 的主曲率 $\kappa=(\kappa_1,\dots,\kappa_n)$ 处处满足 $\kappa_n\leqslant C\kappa_1$, $t\in[0,T)$.

定理 2.1 需要假定条件 $\alpha\in(0,1]$. 在 $\alpha>1$ 时, Gerhardt [11] 在 2014 年研究了凸超曲面的逆曲率流并证明了定理 2.1(i) 逆曲率流的收敛性.

定理 2.2 [11] 假设 Σ_0 是 Euclid 空间中的光滑闭的凸超曲面, 则对任意 $\alpha>1$ 和任意凹的且在正锥 Γ_+ 边界取值为零的函数 f, 逆曲率流 (1.1) 具有有限时间存在的解 Σ_t, $t\in[0,T)$, 其中 $T<\infty$. 随着时间 $t\to T$, 超曲面 Σ_t 扩张至无穷远, 并且在经过适当的伸缩变换后以指数速率光滑收敛至单位圆球.

在 Gerhardt [11] 之前, Schnürer [12] 和 Li [13] 考虑了逆曲率流 (1.1) 在维数 $n=2$、$F=nK^{1/2}$ 且 $\alpha\in(1,2]$ 的收敛性. 最近, Kröner 和 Scheuer [14] 考虑了 $\alpha>1$ 时 f 为 Γ_+ 上的凹函数的情形, 但需要加上初始超曲面 Σ_0 为充分拼挤的 (pinched), 即 $|\mathring{A}|^2\leqslant c_0H^2$. 一般情形下, 尚不清楚在 $\alpha>1$ 时定理 2.1(i)–2.1(iv) 逆曲率流的性质. 特别地, 在 $\alpha>1$ 且函数 $F=nE_k^{1/k}$ $(k=1,\dots,n-1)$ 时, 尚不清楚逆曲率流是否会收敛至球面.

2.2 星形超曲面的逆曲率流

逆曲率流比收缩曲率流更好的性质在于, 它对非凸超曲面也有很好的性质. Gerhardt[5] 和 Urbas[6] 分别于 1990 年独立研究了 Euclid 空间中星形超曲面上的逆曲率流. Euclid 空间中的超曲面 Σ 若满足其支撑函数 $\chi=\langle X,\nu\rangle>0$, 则称 Σ 为星形超曲面. 这等价于 Σ 可以表示成单位球面上光滑函数的图像, 即 $\Sigma=\{(\theta,u(\theta)),\theta\in\mathbb{S}^n\}$, $u\in C^\infty(\mathbb{S}^n)$. 假设 $\Gamma\subset\mathbb{R}^n$ 是一个包含正锥 Γ_+ 的开的对称凸锥, 函数 $f\in C^\infty(\Gamma)$. 如果超曲面 Σ 每一点的主曲率 $\kappa\in\Gamma$, 则称 Σ 为 f- 相容. 星形超曲面上的逆曲率流有如下性质.

定理 2.3 [5,6,11] 设 $\Gamma\subset\mathbb{R}^n$ 是一个包含正锥 Γ_+ 的开的对称凸锥, 函数 $f\in C^\infty(\Gamma)$ 是一个凹函数, 且满足在 Γ 内 $f>0$, 在边界 $\partial\Gamma$ 上 f 取值为零. 如果 Σ_0 是 Euclid 空间中的光滑、闭的、星形且 f- 相容的超曲面, 则对任意 $\alpha\in(0,1]$, 曲率流 (1.1) 具有长时间存在的解 Σ_t, $t\in[0,\infty)$. 随着时间的增加, 超曲面 Σ_t 扩张至无穷远, 并且在经过适当的伸缩变换后以指数速率光滑收敛至单位圆球.

定理 2.3 中 $\alpha=1$ 的情形由 Gerhardt[5] 和 Urbas[6] 分别独立完成; $\alpha\in(0,1)$ 的情形由 Gerhardt[11] 完成. 上述定理中一类特殊情形为 $\Gamma=\Gamma_k=\{\kappa\in\mathbb{R}^n: E_j(\kappa)>0, j=1,\dots,k\}$, $k=1,\dots,n$. 如果超曲面 Σ 的主曲率处处满足 $\kappa\in\Gamma_k$, 则 Σ 称为 k- 凸超曲面. 容易看出, 超曲面 Σ 是凸超曲面等价于 $\kappa\in\Gamma_n$; 超曲面 Σ 为平均凸超曲面等价于主曲率 $\kappa\in\Gamma_1$. 因此, 由定理 2.3 可知, Euclid 空间中星形 k- 凸超曲面在满足 $f=nE_k^{1/k}$ 且 $\alpha\in(0,1]$ 时的逆曲率流下具有长时间解. 随着时间 $t\to\infty$, 超曲面 Σ_t 扩张至无穷远, 并且在经过适当的伸缩变换后以指数速率光滑收敛至单位圆球. 这个性质在后来被 Guan 和 Li [8] 应用在证明 Euclid 空间中星形 k- 凸超曲面的 Alexandrov-Fenchel 不等式.

2.3 Euclid 空间中的逆曲率流的应用

本小节讨论逆曲率流的应用. 这是逆曲率流研究最主要的目的. 设超曲面 $\Sigma = \partial\Omega$ 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中光滑有界区域 Ω 的边界. 其 Quermass 积分 $V_{n+1-k}(\Omega)$ 可表示为如下的边界 $\Sigma = \partial\Omega$ 上的曲率积分:

$$V_{n+1-k}(\Omega) = \int_\Sigma E_{k-1}(\kappa)d\mu, \quad k = 1, \ldots, n,$$

并且 $V_{n+1}(\Omega) = (n+1)\mathrm{Vol}(\Omega)$, $V_0(\Omega) = (n+1)\mathrm{Vol}(\mathbb{B}) = \omega_n$, 其中 $\mathbb{B}$ 记为 Euclid 空间中的单位球. 若 Ω 是一个凸区域, 经典的 Alexandrov-Fenchel 不等式具有如下形式:

$$\left(\frac{V_{n+1-k}(\Omega)}{V_{n+1-k}(\mathbb{B})}\right)^{\frac{1}{n+1-k}} \leqslant \left(\frac{V_{n-k}(\Omega)}{V_{n-k}(\mathbb{B})}\right)^{\frac{1}{n-k}}, \quad 0 \leqslant k \leqslant n, \tag{2.2}$$

且等号取到当且仅当 Ω 是 Euclid 球. 当 $k = 0$ 时, 上式即为 Euclid 空间中经典的等周不等式, 可对任意有界区域成立 (即不需要区域边界为凸这一条件).

称区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 为 k- 凸的, 如果其边界 $\Sigma = \partial\Omega$ 的主曲率 $\kappa(x) \in \Gamma_k$, $\forall x \in \partial\Omega$; Ω 称为是弱 k- 凸, 如果 $\kappa(x) \in \bar{\Gamma}_k$, $\forall x \in \partial\Omega$. Guan 和 Li [8] 在 2009 年应用如下的逆曲率流:

$$\frac{\partial}{\partial t}X = \frac{E_{k-1}}{nE_k}\nu \tag{2.3}$$

证明了不等式 (2.2) 对任意光滑的星形且弱 k- 凸区域 Ω 成立.

定理 2.4 [8] 不等式 (2.2) 对任意光滑的星形弱 k- 凸区域 Ω 成立且等号取到当且仅当 Ω 是 Euclid 球, 其中 $k = 1, \ldots, n$.

证明 (证明概要) 首先, 假设 Ω 是星形 k- 凸区域, 由定理 2.3 以 $\partial\Omega$ 为初值的逆曲率流 (2.3) 具有长时间光滑解 $\Sigma_t = \partial\Omega_t$, $t \in [0, \infty)$, 且 Σ_t 也是星形 k- 凸超曲面. 定义

$$Q(\Omega_t) = \frac{V_{n+1-k}^{\frac{1}{n+1-k}}(\Omega_t)}{V_{n-k}^{\frac{1}{n-k}}(\Omega_t)}$$

沿着 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中任意的曲率流

$$\frac{\partial}{\partial t}X = -F\nu, \tag{2.4}$$

直接计算可得流超曲面 Σ_t 的 m- 阶平均曲率 E_m 和体积元 $d\mu_t$ 满足发展方程

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}E_m = \nabla^j\left(\frac{\partial E_m}{\partial h_j^i}\nabla_i F\right) + F(nE_1E_m - (n-m)E_{m+1}),\\
&\frac{\partial}{\partial t}d\mu_t = -nE_1Fd\mu_t.
\end{aligned}$$

代入 $F = -E_{k-1}/(nE_k)$ 可得 $V_{n+1-k}(\Omega_t)$ 和 $V_{n-k}(\Omega_t)$ 满足的发展方程

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}V_{n+1-k}(\Omega_t) = \frac{n+1-k}{n}V_{n+1-k}(\Omega_t),\\
&\frac{d}{dt}V_{n-k}(\Omega_t) = \frac{n-k}{n}\int_{\Sigma_t}\frac{E_{k-1}E_{k+1}}{E_k}d\mu_t \leqslant \frac{n-k}{n}V_{n-k}(\Omega_t),
\end{aligned}$$

这里最后一个不等式用到了 Newton-Maclaurin 不等式 $E_{k-1}E_{k+1} \leqslant E_k^2, \forall \kappa \in \Gamma_k$. 因此, $Q(\Omega_t)$ 随着时间增加而单调递增. 由于 Ω_t 长时间存在, 且适当的变换后 $\tilde{\Omega}_t = r(t)^{-1}\Omega_t$ 光滑收敛至单位球, 而 $Q(\Omega_t)$ 在伸缩变换下保持不变, 因此, $Q(\tilde{\Omega}_t)$ 也是关于时间递增的. 比较 $Q(\tilde{\Omega}_t)$ 的初始值与极限值可得

$$Q(\Omega_0) \leqslant Q(\Omega_t) = Q(\tilde{\Omega}_t) \leqslant \lim_{t\to\infty} Q(\tilde{\Omega}_t) = Q(\mathbb{B}). \tag{2.5}$$

这等价于不等式 (2.2). 由于 Newton-Maclaurin 不等式 $E_{k-1}E_{k+1} \leqslant E_k^2$ 取得等号当且仅当 $\kappa = k(1, \dots, 1)$, $k \in \mathbb{R}$, 因此, (2.5) 取得等号当且仅当 Ω_t ($\forall\, t \in [0,\infty)$) 是全脐超曲面从而是 Euclid 球.

如果 Ω 是星形弱 k- 凸区域, 则可选取一族星形 k- 凸区域 Ω_ϵ 来逼近 Ω. 由连续性可知不等式 (2.2) 对此 Ω 成立. 为研究等号情形, 可证明任意取到 (2.2) 等号的星形弱 k- 凸区域 Ω 一定是星形 k- 凸, 从而由前一段证明可知 Ω 是 Euclid 球. 具体细节可参见文献 [8], 以及本文定理 5.4 的证明. □

从上述证明过程中可见, 应用逆曲率流证明几何不等式关键之处在于发现沿着逆曲率流的单调量 $Q(t)$, 比较 $Q(t)$ 的初始值与极限值进而得到不等式. 可参见文献 [15,16] 关于 Euclid 空间中逆曲率流最新的应用.

3 双曲空间中的逆曲率流

3.1 双曲空间中逆曲率流的收敛性

双曲空间是完备的具有常截面曲率 $K_M = -1$ 的 Riemann 流形. 熟知双曲空间具有三种常见的表示模型: 圆盘模型、上半平面模型和扭曲 (warped) 乘积模型. 这里将采用双曲空间 $\mathbb{H}^{n+1}$ 的扭曲乘积模型, 即 $\mathbb{H}^{n+1} = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{S}^n$ 配备 Riemann 度量 $\bar{g} = dr^2 + \sinh^2 r g_{\mathbb{S}^n}$. 双曲空间中的超曲面 Σ 称为星形的, 如果其支撑函数 $\chi = \bar{g}(\sinh r\partial_r, \nu) > 0$ 处处成立, 这也同样等价于 Σ 可表示成单位球 $\mathbb{S}^n$ 上光滑函数 $r(\cdot)$ 的图像, 即 $\Sigma = \{(\theta, r(\theta)):\ \theta \in \mathbb{S}^n\}$. 与定理 2.3 类似, 双曲空间中星形超曲面上的逆曲率流有如下的收敛性定理:

定理 3.1 [17,18] 设 $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ 是一个包含正锥 Γ_+ 的开的对称凸锥, 函数 $f \in C^\infty(\Gamma)$ 是一个凹函数, 且满足在 Γ 内 $f > 0$, 在边界 $\partial\Gamma$ 上 f 取值为零. 如果 $\Sigma_0 \subset \mathbb{H}^{n+1}$ 是双曲空间中的光滑闭的星形且 f- 相容的超曲面, 则对任意 $\alpha \in (0,1]$, 曲率流 (1.1) 具有长时间存在的解 Σ_t, $t \in [0,\infty)$; Σ_t 可表示成球面 $\mathbb{S}^n$ 上函数的图像, 即 $\Sigma_t = \mathrm{graph} r(t,\cdot)$; 随着时间的增加, 超曲面 Σ_t 扩张至无穷远; Σ_t 的第二基本形式满足

$$|h_i^j - \delta_i^j| \leqslant C\mathrm{e}^{-\frac{2}{n^\alpha}t}, \quad \forall\, t \in [0,\infty). \tag{3.1}$$

当时间 $t \to \infty$ 时, 函数 $\tilde{r}(t,\theta) = r(t,\theta) - n^{-\alpha}t$ 光滑收敛至球面 $\mathbb{S}^n$ 上的一个光滑函数 $f(\theta)$.

对于双曲空间中的凸超曲面, Li 等 [9] 证明了一个与定理 2.1(iv) 类似的结论; 如果函数 f 是 Γ_+ 上的凹函数且 $f\,|_{\partial\Gamma_+} = 0$, 初始超曲面为严格凸超曲面, Scheuer [19] 证明了存在一个常数 $\alpha_0 > 0$ 使得, 如果 $\alpha \in (1, \alpha_0]$, 则逆曲率流 (1.1) 有与定理 3.1 类似的收敛性定理. 在双曲空间中, 我们还有另一类重要的凸性, 即 h- 凸: 称一个超曲面 $\Sigma \subset \mathbb{H}^{n+1}$ 为 h- 凸超曲面, 如果在 Σ 上任意点处的主曲率均满足 $\kappa_i \geqslant 1$. 最近, Kröner 和 Scheuer [14] 也研究了函数 f 为 Γ_+ 上的凹函数, 且初始超曲面满足条件

$$\|A - I\|^2 - \frac{1}{n}(H-n)^2 \leqslant c_0(H-n)^2$$

的逆曲率流.

定理 3.1 中的极限函数 $f(\theta)$ 一般来说不一定是常数. 关于双曲空间中逆曲率流的收敛性, 我们有下面的结论.

定理 3.2 [9, 20] 令 $\alpha \in (0,1]$, $F = H$, 则存在一个星形平均凸超曲面 $\Sigma_0 \subset \mathbb{H}^3$, 使得以 Σ_0 为初值的逆曲率流在时间 $t \to \infty$ 时, 度量 $\mathrm{e}^{-2^{(1-\alpha)}t} g_t$ 收敛至球面 $\mathbb{S}^2$ 上一个 $\tilde{g}_\infty$, 但 $\tilde{g}_\infty$ 不是球面上的标准度量, 这里的 g_t 为流超曲面 Σ_t 上的诱导度量.

这说明在双曲空间中, 我们不能得到 Euclid 空间中那样的、在做适当的伸缩变换后 Σ_t 收敛至圆球的结论.

3.2 双曲空间中的 Alexandrov-Fenchel 型不等式

与 Euclid 空间类似, 双曲空间中的逆曲率流同样有丰富的几何应用. Brendle 等 [21] 及 de Lima 和 Girão [22] 最先独立应用逆平均曲率流证得如下的带权平均曲率积分的不等式.

定理 3.3 [21, 22] 设 $\Sigma = \partial\Omega \subset \mathbb{H}^{n+1}$ $(n \geqslant 2)$ 为双曲空间中光滑闭的星形平均凸超曲面, 记 $V = \cosh r\,|_\Sigma$ 为 $\cosh r$ 限制在超曲面上的函数, 则

(i) (参见文献 [21])

$$\int_\Sigma V E_1 d\mu \geqslant n \int_\Omega f + \omega_n^{\frac{1}{n}} |\Sigma|^{\frac{n-1}{n}}; \tag{3.2}$$

(ii) (参见文献 [22])

$$\int_\Sigma V E_1 d\mu \geqslant \omega_n \left(\left(\frac{|\Sigma|}{\omega_n} \right)^{\frac{n-1}{n}} + \left(\frac{|\Sigma|}{\omega_n} \right)^{\frac{n+1}{n}} \right) \tag{3.3}$$

且等号取到当且仅当 Σ 为测地球.

注意 de Lima 和 Girão [22] 证明了不等式 (3.3) 过程依赖于不等式 (3.2). 但是两个不等式并不能互相比较. 一般来讲, 我们不能判断积分 $n\int_\Omega f$ 与 $\omega_n^{-1/n}|\Sigma|^{(n+1)/n}$ 之间的大小. 利用 Minkowski 积分公式和归纳法, Ge 等 [23] 将不等式 (3.3) 推广到了双曲空间中光滑闭的 h- 凸超曲面上带权的奇数阶平均曲率积分的不等式.

受文献 [8] 的启发, 李海中、韦勇和熊昌伟合作证明了如下不带权曲率积分的 Alexandrov-Fenchel 不等式:

定理 3.4 [24] 假设 $\Sigma \subset \mathbb{H}^{n+1} (n \geqslant 2)$ 为双曲空间中光滑闭的星形且严格 2- 凸超曲面, 则

$$\int_\Sigma E_2 d\mu \geqslant (\omega_n^{\frac{2}{n}} |\Sigma|^{\frac{n-2}{n}} + |\Sigma|), \tag{3.4}$$

其中 $|\Sigma|$ 为超曲面 Σ 的面积. 该不等式取得等号当且仅当 Σ 为测地球.

证明不等式 (3.4) 的关键在于, 我们发现

$$Q(\Sigma) = |\Sigma|^{-\frac{n-2}{n}} \left(\int_\Sigma E_2 d\mu_t - |\Sigma| \right)$$

沿着逆曲率流

$$\frac{\partial}{\partial t} X = \frac{E_1}{nE_2} \nu \tag{3.5}$$

随着时间增加而单调递减. 下一步需要估计 $Q(\Sigma_t)$ 在时间 $t \to \infty$ 时的极限. 由于在双曲空间中没有合适的伸缩变换, 且逆曲率流没有像 Euclid 空间中那样好的收敛性, 我们不能像定理 2.4 中那样容易

地得到 $\lim_{t\to\infty} Q(\Sigma_t)$. 我们的方法受 Brendle 等 [21] 启发 (见第 5.3 小节), 利用第二基本形式的渐近性 (3.1) 将 $Q(\Sigma_t)$ 的各项积分作渐近展开, 然后利用 Beckner [25] 的球面上的 Sobolev 不等式. 最终可估计 $\lim_{t\to\infty} Q(\Sigma_t) \geqslant \omega_n^{\frac{2}{n}}$ 从而证得不等式 (3.4). 采用与定理 3.4 类似的方法, Hu [26] 对双曲空间中光滑闭的星形平均凸超曲面 Σ 证明了如下的 Willmore 型不等式:

$$\int_\Sigma E_1^2 d\mu \geqslant (\omega_n^{\frac{2}{n}} |\Sigma|^{\frac{n-2}{n}} + |\Sigma|), \tag{3.6}$$

且等号取到当且仅当 Σ 为测地球.

我们没有对其他 E_k 积分证得相应的 Alexandrov-Fenchel 型不等式, 是因为在 k- 凸条件下暂时无法证明对应的几何量在逆曲率流下是单调的. 为此, Ge 等 [27] 将超曲面 k- 凸的条件加强至超曲面 h- 凸, 并发现在逆曲率流 (2.3) 下, 超曲面为 h- 凸是保持的, 进而可证明所需几何量的单调性.

定理 3.5 [27] 假设 $\Sigma \subset \mathbb{H}^{n+1}$ 为双曲空间中光滑闭的 h- 凸超曲面, 则

(i) 对满足 $2k \leqslant n$ 的正整数 k, 超曲面 Σ 的 Gauss-Bonnet 曲率 $L_k = C_n^{2k}(2k)! \sum_{i=0}^k (-1)^i C_k^i E_{2k-2i}$ 满足

$$\int_\Sigma L_k d\mu \geqslant C_n^{2k}(2k)! \omega_n^{2k/n} |\Sigma|^{\frac{n-2k}{n}};$$

(ii) 对满足 $k \leqslant n$ 的正偶数 k, 超曲面 Σ 的 k- 阶平均曲率 E_k 的积分满足不等式

$$\int_\Sigma E_k d\mu \geqslant \omega_n \left(\left(\frac{|\Sigma|}{\omega_n} \right)^{\frac{2}{k}} + \left(\frac{|\Sigma|}{\omega_n} \right)^{\frac{2(n-k)}{nk}} \right)^{\frac{k}{2}}; \tag{3.7}$$

(iii) 对满足 $2k+1 \leqslant n$ 的正整数 k, 记 Ω 为 Σ 包围的凸区域, 则 Ω 的 Quermass 积分 $W_{2k+1}(\Omega)$ 满足

$$W_{2k+1}(\Omega) \geqslant \frac{\omega_n}{n+1} \sum_{i=0}^k \frac{n-2k}{n-2k+2i} C_k^i \left(\frac{n+1}{\omega_n} W_1(\Omega) \right)^{\frac{n-2k+2i}{n}},$$

并且, 上述三个不等式中等号取得当且仅当 Σ 是测地球.

不等式 (3.7) 只对偶数的 k 成立. 之后, Wang 和 Xia [28] 应用保 Quermass 积分的曲率流证明了不等式 (3.7) 对双曲空间中任意光滑 h- 凸超曲面上所有的 k- 阶平均曲率积分都成立. 目前遗留下来的一个问题是, 不等式 (3.7) 是否对双曲空间中星形 k- 凸超曲面成立, 其中 $k = 1, 3, \ldots, n$.

4 球面中的逆曲率流及其应用

2013 年, Makowski 和 Scheuer [29] 研究了球面中的逆曲率流, 证明了如下定理:

定理 4.1 [29] 设 $\Sigma_0 = X_0(\mathbb{S}^n) \subset \mathbb{S}^{n+1}$ 为球面中的凸超曲面, 且曲率函数 $F = f(\kappa)$ 满足

(i) 对 $\alpha = 1$, f 和 f_* 均为凹函数, 或 f 为凹函数且 f 在正锥 Γ_+ 边界取值为零;

(ii) 对 $\alpha \neq 1$, f 为凹函数且 f 在正锥 Γ_+ 边界取值为零,

则曲率流 (1.1) 的最大存在时间 $T < \infty$, 且存在 $0 < t_0 < T$ 使得 Σ_t $(t_0 \leqslant t < T)$ 都可以表示成某个赤道 $\mathcal{S}(x_0)$ $(x_0 \in \mathbb{S}^{n+1})$ 上函数 $u(t,\cdot)$ 的图像. 当 $t \to T$ 时, 函数 $u(t,\cdot)$ 以 $C^{1,\beta}$ $(0 < \beta < 1)$ 速率收敛至 $\pi/2$, 并且有估计 $\int_{\Sigma_t} H^q \to 0$, $t \to T$.

对 $\alpha = 1$ 的情形, Gerhardt [30] 用对偶流的办法证明了如下的光滑收敛性:

定理 4.2 [30] 设 $\Sigma_0 = X_0(\mathbb{S}^n) \subset \mathbb{S}^{n+1}$ 为球面中的凸超曲面, $\alpha = 1$ 且曲率函数 f 和 f_* 均为凹函数, 则曲率流 (1.1) 的最大存在时间 $T < \infty$, 且存在 $0 < t_0 < T$ 使得 Σ_t $(t_0 \leqslant t < T)$ 都可以表示成某个赤道 $\mathcal{S}(x_0)$ $(x_0 \in \mathbb{S}^{n+1})$ 上函数 $u(t, \cdot)$ 的图像. 当 $t \to T$ 时, 函数 $u(t, \cdot)$ 光滑收敛至 $\pi/2$, 且 $u(t, \cdot)$ 在适当的伸缩变换后光滑收敛至 1.

与前两节类似, 球面中的逆曲率流同样可以用来证明 Alexandrov-Fenchel 型不等式. Makowski 和 Scheuer [29] 首先用逆平均曲率流证明了如下不等式:

定理 4.3 [29] 设 $\Sigma \subset \mathbb{S}^{n+1}$ 为球面中的凸超曲面, 则

(i) 当 $n \geqslant 2$ 时,

$$\left(\frac{1}{\omega_n}\int_\Sigma E_1 d\mu\right)^2 \geqslant \left(\frac{|\Sigma|}{\omega_n}\right)^{\frac{2(n-1)}{n}} - \left(\frac{|\Sigma|}{\omega_n}\right)^2;$$

(ii) 当 $n \geqslant 3$ 时, $\int_\Sigma E_2 d\mu \geqslant \omega_n^{\frac{2}{n}} |\Sigma|^{\frac{n-2}{n}} - |\Sigma|$;

(iii) 设 k 为正整数且满足 $2k+1 \leqslant n$, 记 Ω 为 Σ 包围的凸区域, 则 Ω 的 Quermass 积分 $W_{2k+1}(\Omega)$ 满足

$$W_{2k+1}(\Omega) \geqslant \frac{\omega_n}{n+1}\sum_{i=0}^{k}(-1)^i \frac{n-2k}{n-2k+2i} C_k^i \left(\frac{n+1}{\omega_n} W_1(\Omega)\right)^{\frac{n-2k+2i}{n}},$$

并且, 上述三个不等式中等号取得当且仅当 Σ 是测地球.

本文第二作者与熊昌伟利用逆平均曲率流对球面中凸超曲面也证明了如下的不等式:

定理 4.4 [31] 设 $\Sigma \subset \mathbb{S}^{n+1}$ 为球面中凸超曲面, 则对满足 $2k \leqslant n$ 的正整数 k, 超曲面 Σ 的 Gauss-Bonnet 曲率 $L_k = C_n^{2k}(2k)! \sum_{i=0}^{k} C_k^i E_{2k-2i}$ 满足不等式 $\int_\Sigma L_k d\mu \geqslant C_n^{2k}(2k)!\omega_n^{2k/n}|\Sigma|^{\frac{n-2k}{n}}$, 且等号成立当且仅当 Σ 为测地球面.

关于球面中带权的曲率积分的不等式, 目前尚没有最优的结论, 可参见文献 [32] 中的定理.

5 Kottler 空间中的逆平均曲率流和 Alexandrov-Fenchel 型不等式

前面三节讨论了空间形式中的逆曲率流的收敛性及其应用. 在空间形式中已经有大量研究之后, 人们会关心更广的外围空间中是否也能得到类似的结论. 扭曲乘积空间则为下一个比较自然的可研究的空间. 许多重要的扭曲乘积空间来自于广义相对论中, 具有相应的物理背景. 例如, 渐近平坦性的 Schwarzschild 空间、渐近双曲的 Anti-de Sitter-Schwarzschild 空间和更一般的渐近局部双曲的 Kottler 空间. 这些空间已经成为近几年几何分析领域里的热门研究对象.

5.1 Kottler 空间

先介绍 Kottler 空间的定义和性质, 并说明 Schwarzschild 空间和 Anti-de Sitter-Schwarzschild 空间为 Kottler 空间在某种情形下的极限情形. 记 $\kappa = 0, \pm 1$ 为常数, $(N^n, \hat{g})$ 为闭的具有常截面曲率 κ 的空间形式. 设 $m \in \mathbb{R}$ 满足 $m > 0$, 如果 $\kappa = 0, 1$; $m \geqslant -(n-1)^{\frac{n-1}{2}}(n+1)^{-\frac{n+1}{2}}$, 如果 $\kappa = -1$, 则如下定义的函数:

$$V_{\kappa,m}^2(\rho) := \rho^2 + \kappa - \frac{2m}{\rho^{n-1}} \tag{5.1}$$

有正根. 记 $\rho_{\kappa,m}$ 为 $V_{\kappa,m}$ 最大的正根, 则 Kottler 空间 $(M, g_{\kappa,m})$ 定义为乘积流形 $(\rho_{\kappa,m}, \infty) \times N$ 上度量

$$g_{\kappa,m} = \frac{d\rho^2}{V_{\kappa,m}^2(\rho)} + \rho^2 \hat{g} \tag{5.2}$$

的完备化. Kottler 空间一个重要的性质是满足稳态方程

$$\bar{\Delta}V_{\kappa,m}g_{\kappa,m}-\bar{\nabla}^2V_{\kappa,m}+V_{\kappa,m}\overline{\mathrm{Ric}}=0 \tag{5.3}$$

且数量曲率 $\bar{R}=-n(n+1)$, 其中 $\bar{\nabla}$ 和 $\bar{\Delta}$ 记为度量 $g_{\kappa,m}$ 的 Levi-Civita 联络, $\overline{\mathrm{Ric}}$ 为度量 $g_{\kappa,m}$ 的 Ricci 曲率. 边界 $\partial M=\{\rho_{\kappa,m}\}\times N$ 称为是地平线且为外极小, 即任意的包围地平线的超曲面的面积都不小于地平线的面积. Kottler 空间是一类重要的渐近局部双曲空间. 当 $\kappa=1$ 时, $(M,g_{1,m})$ 即为 Anti-de Sitter-Schwarzschild 空间; 当 $\kappa=1$ 且 $m\to 0$ 时, $(M,g_{1,0})$ 即为双曲空间 $\mathbb{H}^{n+1}$.

Anti-de Sitter-Schwarzschild 空间是渐近双曲空间, 而 Schwarzschild 空间则为渐近平坦的空间, 其定义为具有扭曲乘积度量

$$\bar{g}=\frac{1}{1-2m\rho^{1-n}}d\rho^2+\rho^2g_{\mathbb{S}^n} \tag{5.4}$$

的 n $(n\geqslant 2)$ 维流形 $M=[\rho_0,\infty)\times\mathbb{S}^n$, 其中常数 $m>0$, ρ_0 是方程 $1-2m\rho_0^{1-n}=0$ 的根, $g_{\mathbb{S}^n}$ 是球面 $\mathbb{S}^n$ 上的标准度量. 虽然 Anti-de Sitter-Schwarzschild 空间与 Schwarzschild 空间在无穷远处具有不同的渐近性, 后者仍可视为前者的极限情形: 考虑形变后的度量 $m^{-\frac{2}{n-1}}g_{1,m}$, 并作参数变化 $\tilde{s}=m^{-\frac{1}{n-1}}\rho$, 则 $m^{-\frac{2}{n-1}}g_{1,m}=\frac{1}{1+m^{\frac{2}{n-2}}\tilde{s}^2-2\tilde{s}^{1-n}}d\tilde{s}^2+\tilde{s}^2g_{\mathbb{S}^n}$. 令 $m\to 0$ 可得极限度量 $\tilde{g}=\frac{1}{1-2\tilde{s}^{1-n}}d\tilde{s}^2+\tilde{s}^2g_{\mathbb{S}^n}$. 再对上述度量作形变 $m^{\frac{2}{n-1}}\tilde{g}$, 并作参数变化 $s=m^{-\frac{1}{n-1}}\tilde{s}$, 即可得到标准的 Schwarzschild 度量 (5.4).

5.2　Kottler 空间中的逆平均曲率流

Brendle 等 [21] $(\kappa=1)$ 和 Ge 等 [33] $(\kappa=0,-1)$ 分别研究了 Kottler 空间中逆平均曲率流的收敛性:

定理 5.1 [21,33]　假设 Σ_0 为 Kottler 空间 $(M^{n+1},g_{\kappa,m})$ 中一个光滑闭的星形平均凸超曲面, 则以 Σ_0 为初始值的逆平均曲率流具有光滑的长时间解 Σ_t, $t\in[0,\infty)$. 每个 Σ_t 都是星形平均凸超曲面, 且存在只依赖于 Σ_0 和 n 的正常数 C 使得第二基本形式满足

$$|h_i^j-\delta_i^j|\leqslant Ct^2\mathrm{e}^{-\frac{2}{n}t}. \tag{5.5}$$

渐近估计 (5.5) 并非最优的, 但已经足以用来证明 Kottler 空间中的 Minkowski 型不等式 (见下一小节的叙述). 最近, Chen 和 Mao[34] 及 Lu[35] 分别独立地将上述结论推广到 Anti-de Sitter-Schwarzschild 流形中包含 (2.3) 的一类一次齐次逆曲率流, 且将渐近估计 (5.5) 改进为 $|h_i^j-\delta_i^j|\leqslant C\mathrm{e}^{-\frac{2}{n}t}$. 在定理 5.1 中, 初始超曲面需假定为平均凸. 下述定理说明在 $m\geqslant 0$ 情形下, 该条件可减弱为弱平均凸.

定理 5.2 [36]　设 $m\geqslant 0$, $\Sigma_0\subset(M,g_{\kappa,m})$ 为闭的星形 C^1 超曲面且具有有界可测的非负弱平均曲率, 则以 Σ_0 为初始值的逆平均曲率具有光滑的长时间解 $X:\Sigma\times(0,+\infty)\to(M,g_{\kappa,m})$, 且当 $t\to 0$ 时, $\Sigma_t=X(\Sigma,t)$ 连续地一致收敛至初始超曲面 Σ_0.

在 Euclid 空间中, 类似的定理由 Huisken 和 Ilmanen [37] 在 2008 年给出, 并被用来证明 Euclid 空间中逆平均曲率流的弱解在经过足够时间后将变成光滑解. 我们证明定理 5.2 的方法也受其启发. 其关键一步是对平均曲率得到一个只依赖于初始超曲面形状但不依赖于初始的平均曲率的估计. 在 Euclid 空间中, 该估计的证明需要用到 Michael-Simon 的关于 Euclid 空间中子流形的 Sobolev 不等式, 再利用 Stampacchia 迭代技巧. 然而在此, 由 Kottler 空间的渐近局部双曲性质, 我们可以不必依赖此技巧, 从而证明过程较为简化. 最近, Zhou [38] 将定理 5.2 推广到了一类更广的扭曲乘积流形中的逆平均曲率流.

5.3 Kottler 空间中的 Minkowski 型不等式

作为定理 5.1 的应用, Brendle 等[21] ($\kappa=1$) 和 Ge 等[33] ($\kappa=0,-1$) 证明了如下的 Minkowski 型不等式:

定理 5.3[21,33] 设 $\Sigma\subset(M,g_{\kappa,m})$ 是闭的光滑星形平均凸超曲面. 记 Ω 为由 Σ 和地平线 ∂M 包围的有界区域, 则

$$\int_\Sigma V_{\kappa,m}E_1-(n+1)\int_\Omega V_{\kappa,m}\geqslant\kappa\vartheta_n^{\frac{1}{n}}(|\Sigma|^{\frac{n-1}{n}}-|\partial M|^{\frac{n-1}{n}}),\tag{5.6}$$

等号取到当且仅当 $\Sigma=\{\rho\}\times N$, 其中 $\rho\in[\rho_{\kappa,m},\infty)$, $\vartheta_n=|N|_{\hat{g}}$.

证明方法仍然与 Guan 和 Li[8] 证明 Euclid 空间中的 Alexandrov-Fenchel 不等式的方法类似. 由于 $\Sigma\subset(M,g_{\kappa,m})$ 是星形平均凸超曲面, 以 Σ 为初始超曲面求解逆平均曲率流, 可证明定义的几何量

$$Q(\Sigma_t)=|\Sigma_t|^{-\frac{n-1}{n}}\left(\int_\Sigma V_{\kappa,m}E_1-(n+1)\int_\Omega V_{\kappa,m}+\kappa\rho_{\kappa,m}^{n-1}\vartheta_n\right)\tag{5.7}$$

在逆平均曲率下随着时间的增加而递减并且 $\frac{d}{dt}Q(\Sigma_t)=0$ 当且仅当 $\Sigma_t=\{\rho_t\}\times N$. 通过估计极限 $\lim_{t\to\infty}Q(\Sigma_t)$ 的下界, 然后与初始值 $Q(\Sigma)$ 比较即可得到不等式. 虽然 Kottler 空间中没有 Euclid 空间里类似的伸缩不变性, 但仍可利用渐近估计 (5.5) 将 $Q(t)$ 表示成一个关于球面上正函数及其梯度积分的表达式加上一些低阶项的组合, 再利用文献 [25] 中的球面上的 Sobolev 不等式即可估计下界.

由于双曲空间 $\mathbb{H}^{n+1}$ 是 Anti-de Sitter-Schwarzschild 空间在 $m\to0$ 时的极限情形, 因此, 在不等式 (5.6) 中令 $\kappa=1$ 且 $m\to0$ 即可得到双曲空间中的不等式 (3.2). 另一方面, Schwarzschild 空间也可以看作 Anti-de Sitter-Schwarzschild 空间的极限情形, 因此, 不等式 (5.6) 也蕴含着 Schwarzschild 空间中的 Minkowski 型不等式

$$\int_\Sigma fHd\mu\geqslant n\omega_n^{\frac{1}{n}}|\Sigma|^{\frac{n-1}{n}}-2nm\omega_n,\tag{5.8}$$

其中 $f=\sqrt{1-2m\rho^{1-n}}$ 在超曲面上逐点取值. Li 和 Wei[36] 研究了 Schwarzschild 空间中逆平均曲率流的收敛性, 并重新证明了不等式 (5.8), 此证明将不再依赖于 Beckner 的球面上的 Sobolev 不等式. 最近, Lu 和 Miao[39] 研究了 Schwarzschild 空间中逆曲率流 (2.3) 的收敛性并以此研究了具有非负数量曲率的紧致带边流形的边界行为.

本节余下部分将证明不等式 (5.6) 对 Kottler 空间中的光滑星形且弱平均凸超曲面也成立.

定理 5.4 设 $\Sigma\subset(M,g_{\kappa,m})$ 是光滑的星形且弱平均凸 (即平均曲率 $H\geqslant0$) 超曲面, 则不等式 (5.6) 成立且等号取到当且仅当 $\Sigma=\{\rho\}\times N$, $\rho\in[\rho_{\kappa,m},\infty)$.

证明 此定理已在文献 [36, 注 4.3] 中提到, 但没有给出证明. 这里将给出完整证明. 注意, $m\geqslant0$ 的情形事实上也可由定理 5.2 和 5.3 得到.

设 Σ 是 Kottler 空间中闭的光滑的星形且弱平均凸超曲面, 我们可选取一族光滑的星形平均凸超曲面 Σ_ϵ $(0<\epsilon<\epsilon_0)$ 来逼近 Σ. 这样的逼近序列可通过求解平均曲率流而得到, 参见文献 [36, 引理 3.11]). 由定理 5.3, 不等式 (5.6) 对每一个 Σ_ϵ 都成立. 令 $\epsilon\to0$ 即可得到不等式 (5.6) 对 Σ 也成立.

接下来看等号情形. 假设 $\Sigma\subset(M,g_{\kappa,m})$ 是一个星形弱平均凸超曲面且满足不等式 (5.6) 的等式情形, 即 $Q(\Sigma)=\kappa\vartheta_n^{\frac{1}{n}}$. 记 $\Sigma_+=\{x\in\Sigma,H(x)>0\}$ 为超曲面 Σ 上具有严格正平均曲率的点集. 注意到 Kottler 空间中任意闭的光滑超曲面都至少存在一个椭圆点 (即该点处主曲率均为正, 参见文献 [40]), 因而, Σ_+ 是一个非空开集. 接下来将证明 Σ_+ 也是闭集. 从而, 由 Σ 的连通性得到 $\Sigma=\Sigma_+$, 即 Σ 是平均凸的.

设 $\varphi \in C_c^2(\Sigma_+)$ 为任意的紧致支撑集在 Σ_+ 内的 C^2 函数. 通过在 $\Sigma \setminus \Sigma_+$ 上取 $\varphi = 0$ 可认为 φ 定义在整个 Σ 上. 考虑以向量场 $V = \varphi\nu$ 诱导的一族变分超曲面 Σ_s. 易知对充分小的参数 $s \in (-\epsilon, \epsilon)$, 超曲面 Σ_s 是星形且弱平均凸的. 因而, 不等式 (5.6) 成立, 即 $Q(\Sigma_s) \geqslant \kappa\vartheta_n^{\frac{1}{n}} = Q(\Sigma)$, $\forall\, s \in (-\epsilon, \epsilon)$. 从而,

$$\frac{d}{ds}Q(\Sigma_s)\,\Big|_{s=0} = 0. \tag{5.9}$$

下面计算 (5.9) 的左边. 熟知平均曲率 $H = nE_1$ 和体积元 $d\mu$ 的变分公式如下:

$$\frac{\partial}{\partial s}\,\Big|_{s=0} H = -\Delta\varphi - (|A|^2 + \overline{\mathrm{Ric}}(\nu,\nu))\varphi, \tag{5.10}$$

$$\frac{\partial}{\partial s}\,\Big|_{s=0} d\mu = H\varphi d\mu. \tag{5.11}$$

另外, 由余面积公式可得

$$\frac{\partial}{\partial s}\,\Big|_{s=0}\int_{\Omega_s} V_{\kappa,m} = \int_\Sigma V_{\kappa,m}\varphi d\mu. \tag{5.12}$$

因此,

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}Q(\Sigma_s)\,\Big|_{s=0} =& |\Sigma|^{-\frac{n-1}{n}}\int_\Sigma\bigg(\frac{1}{n}H\frac{\partial}{\partial s}\,\Big|_{s=0}V_{\kappa,m} + \frac{1}{n}V_{\kappa,m}\frac{\partial}{\partial s}\,\Big|_{s=0}H + nV_{\kappa,m}E_1^2\varphi\\ &- (n+1)V_{\kappa,m}\varphi\bigg)d\mu - (n-1)\frac{Q(\Sigma)}{|\Sigma|}\int_\Sigma E_1\varphi d\mu.\end{aligned} \tag{5.13}$$

上式中前两项可如下计算:

$$\begin{aligned}&\int_\Sigma\bigg(H\frac{\partial}{\partial s}\,\Big|_{s=0}V_{\kappa,m} + V_{\kappa,m}\frac{\partial}{\partial s}\,\Big|_{s=0}H\bigg)d\mu\\ &= \int_\Sigma(\langle\bar\nabla V_{\kappa,m},\nu\rangle H\varphi - V_{\kappa,m}\Delta\varphi - V_{\kappa,m}(|A|^2 + \overline{\mathrm{Ric}}(\nu,\nu))\varphi)d\mu\\ &= \int_\Sigma(\langle\bar\nabla V_{\kappa,m},\nu\rangle H\varphi - \varphi\Delta V_{\kappa,m} - V_{\kappa,m}(|A|^2 + \overline{\mathrm{Ric}}(\nu,\nu))\varphi)d\mu\\ &= \int_\Sigma(\langle\bar\nabla V_{\kappa,m},\nu\rangle H\varphi - V_{\kappa,m}(|A|^2 + \overline{\mathrm{Ric}}(\nu,\nu))\varphi)d\mu\\ &\quad - \int_\Sigma(\bar\Delta V_{\kappa,m} - H\langle\bar\nabla V_{\kappa,m},\nu\rangle - \bar\nabla^2 V_{\kappa,m}(\nu,\nu))\varphi d\mu\\ &= \int_\Sigma(2\langle\bar\nabla V_{\kappa,m},\nu\rangle H\varphi - V_{\kappa,m}|A|^2\varphi)d\mu\\ &\quad - \int_\Sigma(\bar\Delta V_{\kappa,m} - \bar\nabla^2 V_{\kappa,m}(\nu,\nu) + V_{\kappa,m}\overline{\mathrm{Ric}}(\nu,\nu))\varphi d\mu\\ &= \int_\Sigma(2\langle\bar\nabla V_{\kappa,m},\nu\rangle H\varphi - V_{\kappa,m}|A|^2\varphi)d\mu,\end{aligned} \tag{5.14}$$

其中第二个等式用到了分部积分, 最后一个等式用到了稳态方程 (5.3). 将 (5.14) 代入到 (5.13) 可得

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}Q(\Sigma_s)\,\Big|_{s=0} =& |\Sigma|^{-\frac{n-1}{n}}\int_\Sigma\bigg(2\langle\bar\nabla V_{\kappa,m},\nu\rangle E_1 - \frac{1}{n}V_{\kappa,m}|A|^2 + nV_{\kappa,m}E_1^2 - (n+1)V_{\kappa,m}\bigg)\varphi d\mu\\ &- (n-1)\frac{Q(\Sigma)}{|\Sigma|}\int_\Sigma E_1\varphi d\mu.\end{aligned} \tag{5.15}$$

由 (5.9), 上式右边取值为零. 由 $\varphi \in C_c^2(\Sigma_+)$ 的任意性可得

$$2\langle\bar\nabla V_{\kappa,m},\nu\rangle E_1-\frac{1}{n}V_{\kappa,m}|A|^2+nV_{\kappa,m}E_1^2-(n+1)V_{\kappa,m}-(n-1)\frac{Q(\Sigma)}{|\Sigma|^{\frac{1}{n}}}E_1=0 \tag{5.16}$$

对任意点 $x\in\Sigma_+$ 成立.

为了说明 Σ_+ 是闭集, 我们需要验证它的闭包为它本身. 假设 $\{x_i\}$ 为 Σ_+ 中的一列点, 且关于 Σ 上诱导度量下 $x_i\to x_0$ 当 $i\to\infty$ 时. 于是, $H(x_i)>0, \forall\, x_i\in\Sigma_+$. 如果当 $i\to\infty$ 时, $H(x_i)\to 0+$, 则由 (5.16) 可得 $\liminf_{i\to\infty}V_{\kappa,m}(x_i)\leqslant 0$. 然而我们始终有 $V_{\kappa,m}\geqslant 0$, 因此, $\liminf_{i\to\infty}V_{\kappa,m}(x_i)=0$, 这说明 Σ 在 x_0 点与地平线 ∂M 相切. 注意到在 Σ 上 $H\geqslant 0$, 而地平线 ∂M 为极小超曲面, 由超曲面的极大值原理 [41] 可得超曲面 Σ 与地平线 ∂M 在 x_0 点附近重合, 这与 $H(x_i)>0$ $(\forall i)$ 相矛盾. 所以, $H(x_0)>0$, 这说明 $x_0\in\Sigma_+$, 进而说明 Σ_+ 是一个闭集.

综上, Σ_+ 是 Σ 中一个非空的既开又闭的集合, 由 Σ 的连通性可得 $\Sigma=\Sigma_+$, 即 Σ 是星形平均凸超曲面. 由定理 5.3 可知, $\Sigma=\{\rho\}\times N$, $\rho\in[\rho_{\kappa,m},\infty)$. □

6 结束语

由于篇幅有限, 本文仅选取了与作者研究对象相关的内容. 逆曲率流是几何分析领域中一个热门的分支, 目前的研究进展非常活跃. 下面列举一些与逆曲率流相关的文献, 供读者参考.

(i) 逆平均曲率流的弱解. 在 2001 年, Huisken 和 Ilmanen [4] 引入了逆平均曲率的弱解, 并证明了 3 维渐近平坦流形的 Penrose 不等式. 之后, 逆平均曲率流的弱解有多个应用, 参见文献 [42–48]. Streets [49] 随后也研究了速度 $F=f(H)$ 为平均曲率函数的逆平均曲率流的弱解及其应用.

(ii) 具有自由边界的逆平均曲率流. 2012 年, Marquardt 在其博士论文 [50] 中引入了具有自由边界的逆平均曲率流, 并证明了短时存在性, 描述了弱解的定义, 研究了边界落在 Euclid 空间中凸锥的星形平均凸超曲面的逆平均曲率流的收敛性. Lambert 和 Scheuer [51] 研究了边界落在单位球上的凸超曲面的逆平均曲率流, 并证明了以 $C^{1,\alpha}$ 速率收敛至单位圆盘. Lambert 和 Scheuer [52] 随后应用逆平均曲率流证明了单位球内的具有自由边界的凸超曲面的几何不等式. Cruz [53] 最近用具有自由边界的逆平均曲率流研究了 Capacity 不等式.

(iii) 更一般扭曲乘积流形中的逆曲率流可参见文献 [38, 54–56].

(iv) 逆曲率流的自相似解. 与其他的曲率流类似, 逆曲率流也有一类特殊的解, 即自相似解. Huisken 和 Ilmanen [57] 首先研究了逆平均曲率流的自相似解并构造了一些完备非紧致的例子. 最新的研究可参见文献 [58, 59].

致谢 感谢审稿人的仔细阅读和给予本文的建议.

参考文献

1 Gerhardt C. Curvature Problems. Series in Geometry and Topology, vol. 39. Somerville: International Press, 2006
2 Huisken G, Polden A. Geometric evolution equations for hypersurfaces. In: Calculus of Variations and Geometric Evolution Problems. Lecture Notes in Mathematics, vol. 1713. Berlin: Springer, 1999, 45–84
3 Geroch R. Energy extraction. Ann New York Acad Sci, 1973, 224: 108–117
4 Huisken G, Ilmanen T. The inverse mean curvature flow and the Riemannian Penrose inequality. J Differential Geom, 2001, 59: 353–437
5 Gerhardt C. Flow of nonconvex hypersurfaces into spheres. J Differential Geom, 1990, 32: 299–314

6 Urbas J I E. On the expansion of starshaped hypersurfaces by symmetric functions of their principal curvatures. Math Z, 1990, 205: 355–372
7 Urbas J I E. An expansion of convex hypersurfaces. J Differential Geom, 1991, 33: 91–125
8 Guan P, Li J. The quermassintegral inequalities for k-convex starshaped domains. Adv Math, 2009, 221: 1725–1732
9 Li H, Wang X, Wei Y. Surfaces expanding by non-concave curvature functions. ArXiv:1609.00570, 2016
10 Wei Y. New pinching estimate for inverse curvature flow in space form. ArXiv:1709.02546, 2017
11 Gerhardt C. Non-scale-invariant inverse curvature flows in Euclidean space. Calc Var Partial Differential Equations, 2014, 49: 471–489
12 Schnürer O C. Surfaces expanding by the inverse Gauß curvature flow. J Reine Angew Math, 2006, 2006: 117–134
13 Li Q R. Surfaces expanding by the power of the Gauss curvature flow. Proc Amer Math Soc, 2010, 138: 4089–4102
14 Kröner H, Scheuer J. Expansion of pinched hypersurfaces of the Euclidean and hyperbolic space by high powers of curvature. ArXiv:1703.07087, 2017
15 Kwong K K, Miao P. A new monotone quantity along the inverse mean curvature flow in $\mathbb{R}^n$. Pacific J Math, 2014, 267: 417–422
16 Guo F, Li G, Wu C. Isoperimetric inequalities for eigenvalues by inverse mean curvature flow. ArXiv:1602.05290, 2016
17 Gerhardt C. Inverse curvature flows in hyperbolic space. J Differential Geom, 2011, 89: 487–527
18 Scheuer J. Non-scale-invariant inverse curvature flows in hyperbolic space. Calc Var Partial Differential Equations, 2015, 53: 91–123
19 Scheuer J. Gradient estimates for inverse curvature flows in hyperbolic space. Geom Flows, 2015, 1: 11–16
20 Hung P K, Wang M T. Inverse mean curvature flows in the hyperbolic 3-space revisited. Calc Var Partial Differential Equations, 2015, 54: 119–126
21 Brendle S, Hung P K, Wang M T. A Minkowski inequality for hypersurfaces in the Anti-de Sitter-Schwarzschild manifold. Comm Pure Appl Math, 2016, 69: 124–144
22 de Lima L L, Girão F. An Alexandrov-Fenchel-type inequality in hyperbolic space with an application to a Penrose inequality. Ann Henri Poincaré, 2016, 17: 979–1002
23 Ge Y, Wang G, Wu J. The GBC mass for asymptotically hyperbolic manifolds. Math Z, 2015, 281: 257–297
24 Li H, Wei Y, Xiong C. A geometric inequality on hypersurface in hyperbolic space. Adv Math, 2014, 253: 152–162
25 Beckner W. Sharp Sobolev inequalities on the sphere and the Moser-Trudinger inequality. Ann Math, 1993, 138: 213–242
26 Hu Y. Willmore inequality on hypersurfaces in hyperbolic space. Proc Amer Math Soc, 2018, 146: 2679–2688
27 Ge Y, Wang G, Wu J. Hyperbolic Alexandrov-Fenchel quermassintegral inequalities, II. J Differential Geom, 2014, 98: 237–260
28 Wang G, Xia C. Isoperimetric type problems and Alexandrov-Fenchel type inequalities in the hyperbolic space. Adv Math, 2014, 259: 532–556
29 Makowski M, Scheuer J. Rigidity results, inverse curvature flows and Alexandrov-Fenchel type inequalities in the sphere. Asian J Math, 2016, 20: 869–892
30 Gerhardt C. Curvature flows in the sphere. J Differential Geom, 2015, 100: 301–347
31 Wei Y, Xiong C. Inequalities of Alexandrov-Fenchel type for convex hypersurfaces in hyperbolic space and in the sphere. Pacific J Math, 2015, 277: 219–239
32 Girão F, Pinheiro N M. An Alexandrov-Fenchel-type inequality for hypersurfaces in the sphere. Ann Global Anal Geom, 2017, 52: 413–424
33 Ge Y, Wang G, Wu J, et al. A Penrose inequality for graphs over Kottler space. Calc Var Partial Differential Equations, 2015, 52: 755–782
34 Chen L, Mao J. Non-parametric inverse curvature flows in the AdS-Schwarzschild manifold. J Geom Anal, 2017, 32: 1–29
35 Lu S. Inverse curvature flow in anti-de Sitter-Schwarzschild manifold. ArXiv:1609.09733, 2017
36 Li H, Wei Y. On inverse mean curvature flow in Schwarzschild space and Kottler space. Calc Var Partial Differential Equations, 2017, 56: 62
37 Huisken G, Ilmanen T. Higher regularity of the inverse mean curvature flow. J Differential Geom, 2008, 80: 433–451
38 Zhou H. Inverse mean curvature flows in warped product manifolds. J Geom Anal, 2018, 28: 1749–1772
39 Lu S, Miao P. Minimal hypersurfaces and boundary behavior of compact manifolds with nonnegative scalar curvature. ArXiv:1703.08164, 2017
40 Li H, Wei Y, Xiong C. A note on Weingarten hypersurfaces in the warped product manifold. Internat J Math, 2014, 25: 1450121
41 Eschenburg J H. Maximum principle for hypersurfaces. Manuscripta Math, 1989, 64: 55–75

42 Bray H, Miao P. On the capacity of surfaces in manifolds with nonnegative scalar curvature. Invent Math, 2008, 172: 459–475
43 Bray H, Neves A. Classification of prime 3-manifolds with Yamabe invariant greater than $\mathbb{RP}^3$. Ann of Math (2), 2004, 159: 407–424
44 Moser R. The inverse mean curvature flow and p-harmonic functions. J Eur Math Soc (JEMS), 2007, 9: 77–83
45 Freire A, Schwartz F. Mass-capacity inequalities for conformally flat manifolds with boundary. Comm Partial Differential Equations, 2014, 39: 98–119
46 Lee D A, Neves A. The Penrose inequality for asymptotically locally hyperbolic spaces with nonpositive mass. Comm Math Phys, 2015, 339: 327–352
47 Shi Y. The isoperimetric inequality on asymptotically flat manifolds with nonnegative scalar curvature. Int Math Res Not IMRN, 2016, 22: 7038–7050
48 Wei Y. On the Minkowski-type inequality for outward minimizing hypersurfaces in Schwarzschild space. Calc Var Partial Differential Equations, 2018, 57: 46
49 Streets J D. Quasi-local mass functionals and generalized inverse mean curvature flow. Comm Anal Geom, 2008, 16: 495–537
50 Marquardt T. The inverse mean curvature flow for hypersurfaces with boundary. PhD Thesis. Berlin: Freie Universität, 2012
51 Lambert B, Scheuer J. The inverse mean curvature flow perpendicular to the sphere. Math Ann, 2016, 364: 1069–1093
52 Lambert B, Scheuer J. A geometric inequality for convex free boundary hypersurfaces in the unit ball. Proc Amer Math Soc, 2017, 145: 4009–4020
53 Cruz C T. Capacity estimates and rigidity of domains with corners. ArXiv:1704.04306, 2017
54 Chen L, Mao J, Xiang N, et al. Inverse mean curvature flow inside a cone in warped products. ArXiv:1705.04865, 2017
55 Scheuer J. The inverse mean curvature flow in warped cylinders of non-positive radial curvature. Adv Math, 2017, 306: 1130–1163
56 Scheuer J, Xia C. Locally constrained inverse curvature flows. ArXiv:1708.06125, 2017
57 Huisken G, Ilmanen T. A note on inverse mean curvature flow. In: Proceedings of the Workshop on Nonlinear Partial Differential Equations. Saitama: Saitama University, 1997
58 Drugan G, Lee H, Wheeler G. Solitons for the inverse mean curvature flow. Pacific J Math, 2016, 284: 309–326
59 Chow T K A, Chow K W, Fong F T H. Self-expanders to inverse curvature flows by homogeneous functions. ArXiv:1701.03995, 2017

Inverse curvature flow for hypersurfaces in Riemannian manifold and its application

Haizhong Li, Yong Wei & Tailong Zhou

Abstract This is a survey paper on the inverse curvature flow for hypersurfaces in Riemannian manifold. We first discuss the long time behavior of the inverse curvature flow in Euclidean space, and its application in proving the Alexandrov-Fenchel inequalities for star-shaped hypersurfaces. Then we discuss the related results in hyperbolic space and in sphere. Finally, we discuss the inverse mean curvature flow in Kottler space. Kottler space is an important example of warped product space, and is aymptotically locally hyperbolic at the infinity and satisfies the static equation. We will consider the convergence result of inverse mean curvature flow in such space and also discuss its application in proving the Minkowski-type inequality for star-shaped and mean convex hypersurfaces. Inverse curvature flow is an active research area in recent years. We cannot include all results in this short article. For the convenience of the interested readers, we list a few related references on other topics that we do not mention.

Keywords inverse curvature flow, geometric inequality, space forms, Kottler space

MSC(2010) 53C44, 53C42

doi: 10.1360/N012017-00204