



# 三维非对称边坡稳定性分析极限平衡法

高玉峰<sup>1,2\*</sup>, 万愉快<sup>1,3</sup>, 张飞<sup>1,2</sup>

1. 河海大学岩土力学与堤坝工程教育部重点实验室, 南京 210024;

2. 河海大学岩土工程科学研究所, 南京 210024;

3. 宁夏大学土木与水利工程学院, 银川 750021

\* E-mail: [yfgao66@163.com](mailto:yfgao66@163.com)

收稿日期: 2021-07-14; 接受日期: 2021-11-26; 网络版发表日期: 2022-07-28

国家自然科学基金(批准号: 41630638, 51878248)和河海大学岩土力学与堤坝工程教育部重点实验室开放基金(编号: 2020012)资助项目

**摘要** 本文提出了一个三维非对称边坡滑动方向计算公式。将单轴方法与滑动方向计算公式相结合, 建立了基于一个方向力/力矩平衡的三维非对称边坡稳定性分析极限平衡法。应用本文方法迭代计算求得非对称边坡的安全系数和滑动方向, 因此消除了假定滑动方向带来的计算误差。此外, 还给出了滑动方向迭代初始值的估算方法。静力和拟静力条件下4个典型算例的分析结果证明了本文方法的可靠性和迭代计算的收敛性。工程实例分析结果进一步验证了本文方法的工程适用性。本文提出的方法原理简单、结果可靠, 可在边坡工程设计及滑坡治理中推广应用。

**关键词** 非对称边坡, 三维分析方法, 滑坡, 极限平衡, 滑动方向

## 1 引言

自然界的边坡发生失稳破坏时, 滑动面通常呈现出三维形态<sup>[1]</sup>, 但是边坡稳定性分析时仍采用二维方法。与三维分析方法相比, 二维分析方法会得到相对保守的结果<sup>[2]</sup>。此外, 对失稳边坡土体强度参数进行反分析时, 则会高估土体的强度参数。因此, 许多学者将边坡稳定分析方法从二维拓展到三维, 包括极限平衡法、极限分析法和有限单元法等。其中极限平衡法在边坡稳定分析中被广泛采用。

过去的数十年中, 学者们在二维极限平衡法的基础上提出了许多三维极限平衡分析方法, 这些方法可

以分为以下两类: (1) 基于一个方向力/力矩平衡建立的极限平衡分析方法, 称为“单轴方法”<sup>[2~16]</sup>; (2) 基于两个方向力/力矩平衡建立的极限平衡分析方法, 称为“双轴方法”<sup>[17~28]</sup>。三维对称边坡的滑动方向已知, 单轴方法根据已知滑动方向建立力/力矩平衡方程分析三维对称边坡的稳定性。三维非对称边坡的滑动方向难以预测, 单轴方法分析非对称边坡稳定性时需要预先假定滑动方向。滑动方向的假定会导致高估三维非对称边坡的稳定性。因此, 单轴方法通常用于三维对称边坡的稳定性分析。滑动方向是三维非对称边坡的重要特征, 也是影响非对称边坡稳定性分析结果的重要因素。Huang和Tsai<sup>[17]</sup>在2000年提出了“两个方向”的概

**引用格式:** 高玉峰, 万愉快, 张飞. 三维非对称边坡稳定性分析极限平衡法. 中国科学: 技术科学, 2022, 52: 1819–1830  
Gao Y F, Wan Y K, Zhang F. Three-dimensional limit equilibrium method for asymmetrical slope stability analysis (in Chinese). Sci Sin Tech, 2022, 52: 1819–1830, doi: [10.1360/SST-2021-0292](https://doi.org/10.1360/SST-2021-0292)

念, 并将滑动方向作为影响安全系数的因素代入平衡方程, 建立了基于两个力矩平衡方程的双轴Bishop法。双轴Bishop法可以同时计算非对称边坡的安全系数和滑动方向, 因此消除了滑动方向的假定带来的误差。随后, 学者们基于Huang和Tsai<sup>[17]</sup>提出的“两个方向”基本概念, 将三维极限平衡法进行了拓展, 建立了双轴Bishop法<sup>[19,21,23]</sup>、Janbu法<sup>[18,21~23]</sup>、Spencer法<sup>[20,24]</sup>、Morgenstern-Price法<sup>[21]</sup>等。双轴方法满足两个方向力/力矩平衡, 且可以同时计算三维边坡的安全系数和滑动方向, 是较为严格的三维非对称边坡稳定性分析方法。因此, 学者们近年来主要开展三维非对称边坡稳定性分析双轴方法的研究。

与双轴方法相比, 单轴方法具有原理简单、方程数目少、计算效率高的优点。因此, 本文的目的是对单轴方法进行拓展, 建立基于一个方向力/力矩平衡的三维非对称边坡稳定性分析方法, 并通过典型算例与工程实例分析验证本文方法的可靠性与工程适用性。为三维非对称边坡工程设计及滑坡治理提供理论支持。

## 2 三维简化Bishop法的计算公式

三维边坡稳定性分析通常将滑体划分成具有垂直界面的条块(图1), 条块上的作用力如图2(a)所示。滑动方向为土体滑动趋势的方向在水平面(xy)的投影方向。条块底部切向作用力 $T_i$ 是由土体的滑动趋势引起的, 因此 $T_i$ 的方向和滑体下滑趋势方向相反,  $T_i$ 在xy平面的投影方向和滑动方向平行但方向相反, 如图2(b)所示。滑动方向定义为x轴正方向逆时针旋转到 $T_i$ 在xy平面投影 $T_{ih}$ 形成的夹角, 用 $\alpha$ 表示(图2(b))。

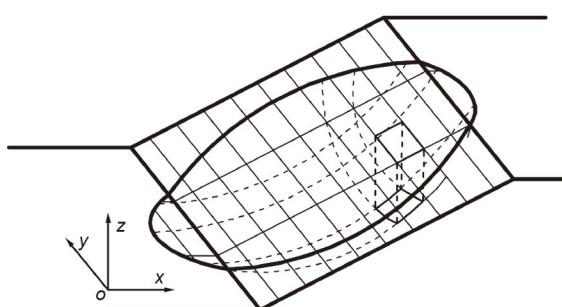


图 1 滑动体条块划分

Figure 1 Discretization of a failure mass.

当滑体处于极限平衡状态时, 滑动方向的假定有三种<sup>[21]</sup>: (1) 所有条块具有相同的滑动方向(图3(a)); (2) 每个条块具有独自的滑动方向, 且滑动方向相互背离(图3(b)); (3) 每个条块具有独自的滑动方向, 且滑动方向相互趋近(图3(c))。本文和其他学者<sup>[21,23,24]</sup>一样接受假定(1), 即假定所有条块具有相同的滑动方向。

### 2.1 安全系数的计算

为了清晰地表述条块划分方法以及静力平衡方程的建立, 使用单轴方法进行三维非对称边坡稳定性分析时需建立两个坐标系: xyz和x'y'z'。根据滑动方向的定义和假定, 坐标系x'y'z'可由坐标系xyz绕z轴逆时针旋转 $\alpha$ 得到(图4), 这样滑动方向就和x'在同一直线上。

边坡安全系数 $F$ 的定义如下:

$$F = \frac{c}{c_d} = \frac{\tan\varphi}{\tan\varphi_d}, \quad (1)$$

式中,  $c$ ,  $\varphi$ 分别是土体的黏聚力和内摩擦角,  $c_d$ ,  $\varphi_d$ 分别为边坡极限状态时土体的黏聚力和内摩擦角。

当土体沿着某一滑面滑动, 在这个滑面上土体处处达到极限平衡状态, 条块底部的法向作用力 $N_i$ 和切向作用力 $T_i$ 满足摩尔-库仑强度准则:

$$T_i = (N_i - u_i \cdot A_i) \cdot \tan\varphi_d + c_d \cdot A_i, \quad (2)$$

式中,  $u_i$ 条块*i*底部的孔隙水压力,  $A_i$ 是条块*i*的底面积。

建立 $z'$ 方向力的平衡方程:

$$-W_i - P_i + N_i \cdot n_{z'i} + T_i \cdot m_{z'i} = 0, \quad (3)$$

式中,  $W_i$ 为条块*i*的重力,  $P_i$ 为条块*i*顶部的外部作用力,  $(n_{x'i}, n_{y'i}, n_{z'i})$ 为 $N_i$ 在x'y'z'坐标系的方向余弦,  $(m_{x'i}, m_{y'i}, m_{z'i})$ 为 $T_i$ 在x'y'z'坐标系的方向余弦。

将摩尔-库仑强度准则式(2)代入方程(3)得

$$N_i = \frac{W_i + P_i + (u_i \cdot A_i \cdot (\tan\varphi/F) - (c/F) \cdot A_i) \cdot m_{z'i}}{n_{z'i} + (\tan\varphi/F) \cdot m_{z'i}}. \quad (4)$$

条块底部的切向作用力 $T_i$ 可以通过摩尔-库仑强度准则(式2)计算得到。

建立绕y'轴的力矩平衡方程:

$$\begin{aligned} M_{y'} = & \sum (-W_i \cdot x'_i + Q_{x'i} \cdot z'_{qi} - N_i \cdot n_{x'i} \cdot z'_{qi} \\ & + N_i \cdot n_{z'i} \cdot x'_i - T_i \cdot m_{x'i} \cdot z'_{qi} + T_i \cdot m_{z'i} \cdot x'_{qi}) \\ & = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

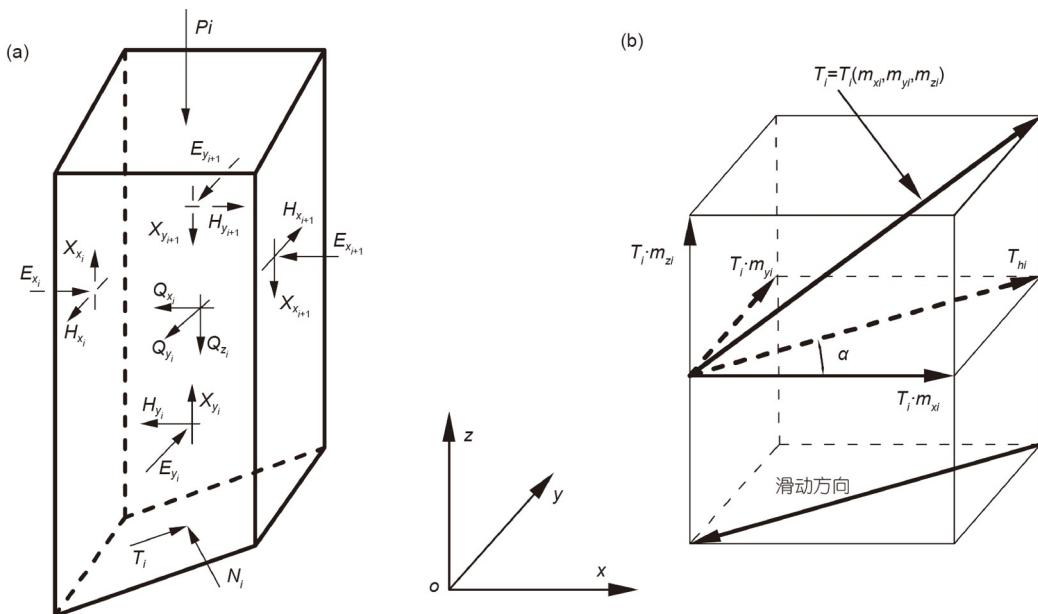
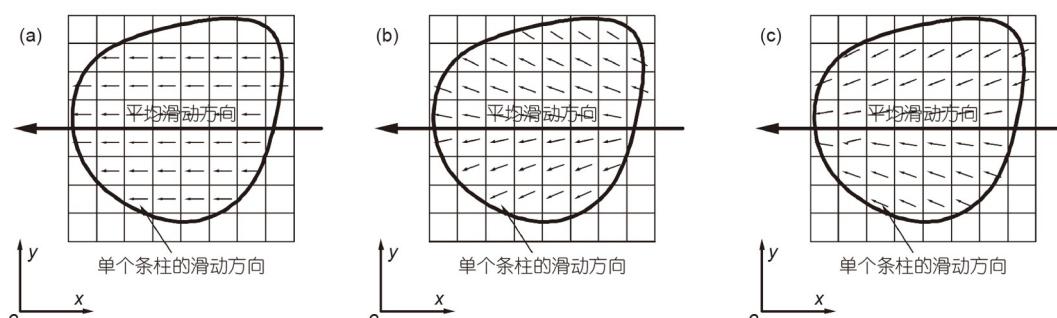
图 2 条块上的作用力(a)和条块底部切向力 $T_i$ 在xy平面的投影(b)Figure 2 Forces acting on soil column (a) and the projection of the share force  $T_i$  in  $xy$  plane (b).

图 3 条块滑动方向的三种假定

Figure 3 Three assumptions of sliding direction.

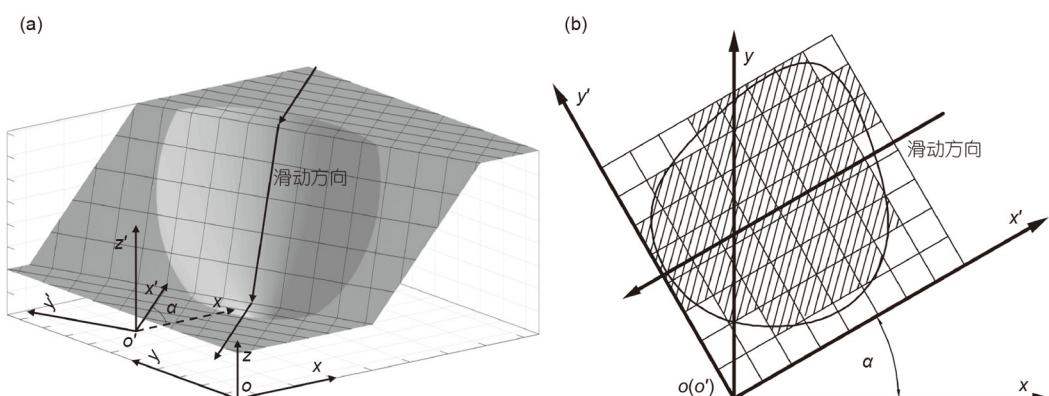


图 4 (a) 两个坐标系和; (b) 条块在xy平面的投影

Figure 4 (a) Two coordinate systems; (b) projection of columns in  $xy$  plane.

式中,  $x'_i, z'_i$ 是条块*i*底部中心相对圆心的坐标;  $z'_{qi}$ 是条块*i*的中心相对圆心的坐标. 安全系数可以通过求解方程(5)得到. 根据滑动方向的定义可得

$$\tan(\alpha) = \frac{T_i \cdot m_{yi}}{T_i \cdot m_{xi}} = \frac{m_{yi}}{m_{xi}}, \quad (6)$$

式中,  $(m_{xi}, m_{yi}, m_{zi})$ 为 $T_i$ 在xyz坐标系的方向余弦.

建立x-轴和y-轴整体力的平衡方程:

$$F_x = \sum(N_i \cdot n_{xi} + T_i \cdot m_{xi} - Q_{xi}) = 0, \quad (7)$$

$$F_y = \sum(N_i \cdot n_{yi} + T_i \cdot m_{yi} - Q_{yi}) = 0, \quad (8)$$

式中,  $(n_{xi}, n_{yi}, n_{zi})$ 为 $N_i$ 在xyz坐标系的方向余弦.

联立求解方程(6)~(8), 可得滑动方向计算公式:

$$\alpha = \arctan \frac{\sum(N_i \cdot n_{yi} - Q_{yi})}{\sum(N_i \cdot n_{xi} - Q_{xi})}. \quad (9)$$

## 2.2 滑动方向的估算

忽略条块*i*的所有条间作用力, 建立条块底部法向方向力的平衡方程, 可得

$$N_i = (W_i + P_i) \cdot n_{zi}. \quad (10)$$

将方程(10)代入方程(9)得

$$\alpha = \arctan \left( \frac{\sum(W_i + P_i) \cdot n_{zi} \cdot n_{yi} - \sum Q_{yi}}{\sum(W_i + P_i) \cdot n_{zi} \cdot n_{xi} - \sum Q_{xi}} \right). \quad (11)$$

将单轴Bishop法与滑动方向计算方程(9)相结合, 建立基于一个方向力/力矩平衡的三维非对称边坡稳定性分析Bishop法, 计算步骤如下:

步骤1: 给定迭代计算初始值滑动方向 $\alpha_0$ , 或使用式(11)估算 $\alpha_0$ , 并令 $\alpha_1 = \alpha_0$ ;

步骤2: 将xyz坐标系逆时针旋转 $\alpha_1$ 得到 $x'y'z'$ 坐标系, 建立力(x'方向)/力矩(绕y'方向)平衡方程, 求解边坡的安全系数 $F$ (式(5))和条块底部法向作用力 $N_i$ (式(4));

步骤3: 使用滑动方向计算公式(9)计算新的滑动方向 $\alpha_2$ ;

步骤4: 若 $|\alpha_1 - \alpha_2| < \varepsilon$ , 则结束计算; 若 $|\alpha_1 - \alpha_2| \geq \varepsilon$ , 则令 $\alpha_1 = \alpha_2$ , 则重复步骤2~4直至滑动方向达到收敛条件.

值得注意的是本文提出的方法框架同样可以与其他单轴方法相结合. 只需要替换步骤2中安全系数 $F$ 和条块底部法向作用力 $N_i$ 的计算方法.

## 3 算例

### 3.1 方法验证

算例1是一个均质三维对称边坡, 几何形状与土性参数如图5所示. 本文方法计算得到的滑动方向 $0^\circ$ , 与对称边坡滑动方向的理论解答一致. 本文方法得到安全系数为1.400, 与理论解<sup>[3]</sup> $F=1.402$ 的相对误差约为0.14%(表1).

算例2是一个均质的非对称楔形体边坡, 几何形状与土性参数如图6所示. 该算例安全系数和滑动方向的理论值分别为0.280和 $26.5^\circ$ . 因此, Cheng和Yip<sup>[21]</sup>使用该算例验证其提出方法的合理性. 将单轴Spencer法与滑动方向计算公式相结合, 对此算例进行分析, 得到的安全系数和滑动方向分别为0.280°和 $26.5^\circ$ , 与理论解答完全一致.

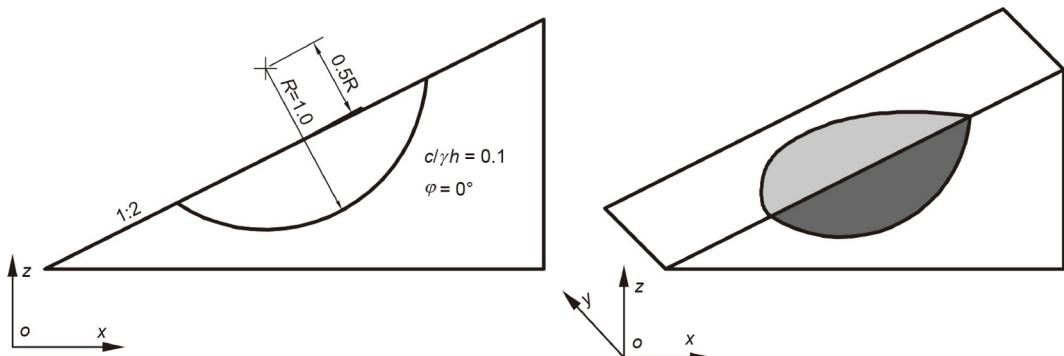
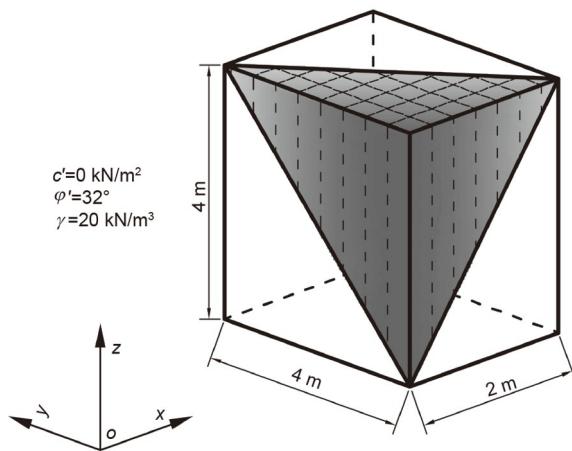


图 5 算例1的几何形状与土性参数

Figure 5 Slope geometry and soil parameters for Example 1.

**表 1** 算例1的安全系数对比**Table 1** Comparisons of safety factors for Example 1

方法	安全系数
Baligh 和 Azzouz <sup>[3]</sup>	1.402
Hungr 等人 <sup>[7]</sup>	1.422
Lam 和 Fredlund <sup>[8]</sup>	1.386
Huang 和 Tsai <sup>[17]</sup>	1.399
Huang 等人 <sup>[18]</sup>	1.387
Cheng 和 Yip <sup>[21]</sup>	1.390
本文结果 (Bishop)	1.400

**图 6** 算例2的几何形状与土性参数**Figure 6** Slope geometry and soil parameters for Example 2.

### 3.2 与双轴方法的对比分析

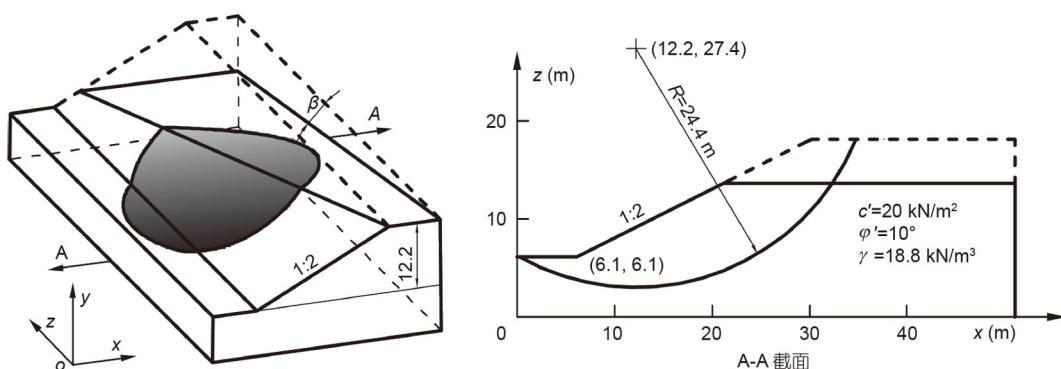
算例3是一坡顶倾斜的三维非对称均质边坡(图7). 坡顶倾角 $\beta$ 的变化范围为 $0^\circ \sim 20^\circ$ . Wan等人<sup>[24]</sup>使用此算

例研究了滑动方向对安全系数的影响规律. 为与Wan等人<sup>[24]</sup>提出的双轴Spencer法进行对比分析, 本文使用Spencer法对此算例进行重新分析, 计算结果如表2所示. 滑动方向迭代计算的初始值 $\alpha_0$ 使用式(11)进行估算, 滑动方向的收敛精度 $\varepsilon$ 设置为 $1.0^\circ$ .

从表2中可以看出, 本文方法得到的安全系数、滑动方向和双轴Spencer法<sup>[24]</sup>得到结果十分接近. 本文方法得到滑动方向略大于双轴Spencer法<sup>[24]</sup>得到的滑动方向, 但最大误差不超过 $1^\circ$ . 此外, 本文方法得到的安全系数与双轴Spencer法<sup>[24]</sup>得到的安全系数的最大相对误差不超过 $0.1\%$ . 上述结果表明, 分析静力条件下的三维非对称边坡稳定性时, 本文提出的方法与双轴方法可以得到近似相等的安全系数与相差不大的滑动方向.

算例4是一均质三维对称边坡(图8). 此算例由Hungr等人<sup>[7]</sup>提出, 随后被一些学者用来验证各自方法的合理性. Cheng和Yip<sup>[21]</sup>使用双轴Bishop法和双轴Janbu法分析了算例4拟静力作用下的稳定性, 用来检验其方法在横向地震力( $k_y$ )作用下的适用性. 为与双轴Bishop法和双轴Janbu法进行对比, 使用本文提出的Bishop法和Janbu法对拟静力条件下的算例4进行了分析. 滑动方向迭代计算的初始值 $\alpha_0$ 使用式(11)进行估算, 滑动方向的收敛精度 $\varepsilon$ 设置为 $1.0^\circ$ .

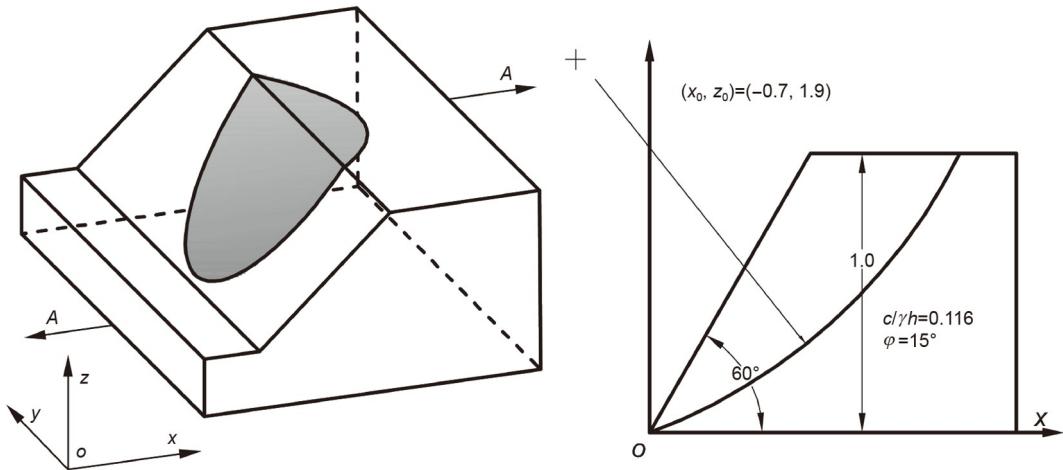
表3和4分别给出了简化Bishop法和简化Janbu法的计算结果. 从表3和4中可以看出, 本文方法得到的安全系数略大于Cheng和Yip<sup>[21]</sup>得到安全系数, 相对误差约为 $2\%$ . 安全系数的微小误差可能是由条块划分方法和数量不同引起的. 本文Janbu法得到滑动方向与Cheng和Yip<sup>[21]</sup>双轴Janbu法得到滑动方向十分接近(表

**图 7** 算例3的几何形状与土性参数**Figure 7** Slope geometry and soil parameters for Example 3.

**表 2** 算例3的计算结果对比**Table 2** Comparisons of results for Example 3

$\beta$ (°)	安全系数 $F$			滑动方向 $\alpha$ (°)		
	Wan等人 <sup>[24]a)</sup> ( $F_2$ )	本文结果 ( $F_1$ )	相对误差 (%) ( $F_1 - F_2$ )/ $F_2$ )	Wan等人 <sup>[24]a)</sup> ( $\alpha_2$ )	本文结果 ( $\alpha_1$ )	误差 ( $\alpha_1 - \alpha_2$ )
0	1.346	1.346	0.00	0.0	0.0	0
5	1.473	1.472	-0.07	1.2	1.4	0.2
10	1.748	1.748	0.00	6.9	7.4	0.5
15	2.130	2.131	0.05	21.1	21.7	0.6
20	2.349	2.350	0.04	42.9	43.2	0.3

a) 表示本文根据Wan等人<sup>[24]</sup>的方法编制程序计算的结果

**图 8** 算例4的几何形状与土性参数**Figure 8** Slope geometry and soil parameters for Example 4.

4). Cheng和Yip<sup>[21]</sup>的双轴Bishop法得到的滑动方向较Janbu法得到结果偏小约2°~4°，而本文Bishop法得到滑动方向与Janbu法得到的结果吻合较好。这说明较双轴Bishop法，本文提出的Bishop法能够得到更为合理的计算结果。上述结果表明，分析拟静力条件下的三维非对称边坡稳定性时，本文提出的方法与双轴方法可以得到相差不大的安全系数与滑动方向。

### 3.3 本文方法的收敛性

本文提出的方法通过迭代计算求非对称边坡的安全系数和滑动方向。为检验迭代计算的收敛性和收敛速度，本文将迭代计算初始滑动方向 $\alpha_0$ 设置为与计算结果距离较远的值。滑动方向的收敛精度 $\varepsilon$ 设置为1.0°。

**表5**给出了算例3安全系数和滑动方向的迭代计算过程。从**表5**中可以看出，虽然滑动方向初始值 $\alpha_0$ 与真值相差较大，但是经不超过3次迭代即可达到收敛要求。横向地震力作用下的边坡，收敛速度相对较慢，需3~6次迭代才可达到收敛要求(**表6**和**7**)。

### 3.4 滑动方向初始值对迭代过程的影响

为了提高计算效率，本文给出了滑动方向初始值的估算方法。为了检验滑动方向估算对迭代计算的影响，本文使用**方程(11)**估算的滑动方向作为初始值，对算例3和算例4进行重新计算。

**表8**给出了算例3的迭代计算过程。当滑动方向的精度小于1°时，无需迭代计算即可得到三维非对称边

**表 3** 算例4的计算结果对比(简化Bishop法)**Table 3** Comparisons of results for Example 4 (Bishop's simplified method)

拟静力系数		安全系数F			滑动方向 $\alpha$ (°)		
$k_x$	$k_y$	Chen和Yip <sup>[21]</sup> ( $F_2$ )	本文结果 ( $F_1$ )	相对误差(%) ( $F_1-F_2$ )/ $F_2$	Chen和Yip <sup>[21]</sup> ( $\alpha_2$ )	本文结果 ( $\alpha_1$ )	误差 ( $\alpha_1-\alpha_2$ )
0.0	0.3	1.099	1.118	1.73	26.57	30.33	3.76
0.0	0.5	0.993	1.014	2.11	39.16	42.98	3.82
0.3	0.3	0.813	0.827	1.72	21.16	23.30	2.14
0.5	0.5	0.645	0.656	1.71	28.96	31.22	2.26

**表 4** 算例4的计算结果对比(简化Janbu法)**Table 4** Comparisons of results for Example 4 (Janbu's simplified method)

拟静力系数		安全系数F			滑动方向 $\alpha$ (°)		
$k_x$	$k_y$	Chen和Yip <sup>[21]</sup> ( $F_2$ )	本文结果 ( $F_1$ )	相对误差 (%) ( $F_1-F_2$ )/ $F_2$	Chen和Yip <sup>[21]</sup> ( $\alpha_2$ )	本文结果 ( $\alpha_1$ )	误差 ( $\alpha_1-\alpha_2$ )
0.0	0.3	1.103	1.123	1.81	29.97	30.27	0.30
0.0	0.5	0.975	0.992	1.74	42.93	43.23	0.30
0.3	0.3	0.794	0.809	1.89	23.61	23.57	-0.04
0.5	0.5	0.615	0.628	2.11	31.63	31.50	-0.13

**表 5** 算例3的迭代计算过程( $\alpha_0=75^\circ$ )**Table 5** The iteration process for Example 3 ( $\alpha_0=75^\circ$ )

迭代次数	$\beta=0^\circ$		$\beta=5^\circ$		$\beta=10^\circ$		$\beta=15^\circ$		$\beta=20^\circ$	
	$\alpha$ (°)	F	$\alpha$ (°)	F	$\alpha$ (°)	F	$\alpha$ (°)	F	$\alpha$ (°)	F
0	75.0	5.1994	75.0	5.1884	75.0	4.5028	75.0	3.5004	75.0	2.7416
1	-3.6	1.3495	-1.9	1.4756	4.1	1.7504	18.1	2.1338	40.4	2.3512
2	0.9	1.3466	2.2	1.4729	8.1	1.7493	22.2	2.1312	43.5	2.3496
3	-0.2	1.3467	1.1	1.4722	7.2	-	21.5	-	43.1	-
4	0.1	-	1.4	-	-	-	-	-	-	-

**表 6** 算例4简化Bishop法迭代过程( $\alpha_0=75^\circ$ )**Table 6** The iteration process of Bishop's simplified method for Example 4 ( $\alpha_0=75^\circ$ )

迭代次数	$k_x=0.0, k_y=0.3$		$k_x=0.0, k_y=0.5$		$k_x=0.3, k_y=0.3$		$k_x=0.5, k_y=0.5$	
	$\alpha$ (°)	F						
0	75.0	2.0669	75.0	1.5138	75.0	1.8033	75.0	1.2816
1	15.2	1.1175	26.3	1.0044	10.8	0.8246	16.3	0.6519
2	33.2	1.1301	48.5	1.0478	25.2	0.8289	33.9	0.6645
3	29.1	1.1170	39.5	1.0051	23.1	0.8248	30.3	0.6554
4	30.4	1.1206	44.2	1.0226	23.5	-	31.4	0.6576
5	30.0	-	41.9	1.0129	-	-	31.1	-
6	-	-	43.1	1.0177	-	-	-	-
7	-	-	42.5	-	-	-	-	-

**表 7** 算例4简化Janbu法迭代过程( $\alpha_0=75^\circ$ )**Table 7** The iteration process of Janbu's simplified method for Example 4 ( $\alpha_0=75^\circ$ )

迭代次数	$k_x=0.0, k_y=0.3$		$k_x=0.0, k_y=0.5$		$k_x=0.3, k_y=0.3$		$k_x=0.5, k_y=0.5$	
	$\alpha$ (°)	F						
0	75.0	1.9818	75.0	1.4313	75.0	1.7175	75.0	1.2048
1	15.0	1.1367	26.1	1.0012	10.6	0.8138	16.1	0.6268
2	32.9	1.1306	48.6	1.0176	25.4	0.8113	34.6	0.6335
3	29.2	1.1223	39.9	0.9859	23.3	0.8080	30.7	0.6243
4	30.3	1.1242	44.5	0.9981	23.8	—	31.9	0.6269
5	30.0	—	42.2	0.9910	—	—	31.6	—
6	—	—	43.4	0.9944	—	—	—	—
7	—	—	42.8	—	—	—	—	—

**表 8** 算例3的迭代计算过程( $\alpha_0$ 使用式(11)求得)**Table 8** The iteration process for Example 3 ( $\alpha_0$  is obtained by using eq. (11))

迭代次数	$\beta=0^\circ$		$\beta=5^\circ$		$\beta=10^\circ$		$\beta=15^\circ$		$\beta=20^\circ$	
	$\alpha$ (°)	F	$\alpha$ (°)	F	$\alpha$ (°)	F	$\alpha$ (°)	F	$\alpha$ (°)	F
0	0.0	1.3465	1.3	1.4719	7.0	1.7483	21.1	2.1311	42.7	2.3501
1	0.0	—	1.4	—	7.4	—	21.7	—	43.2	—

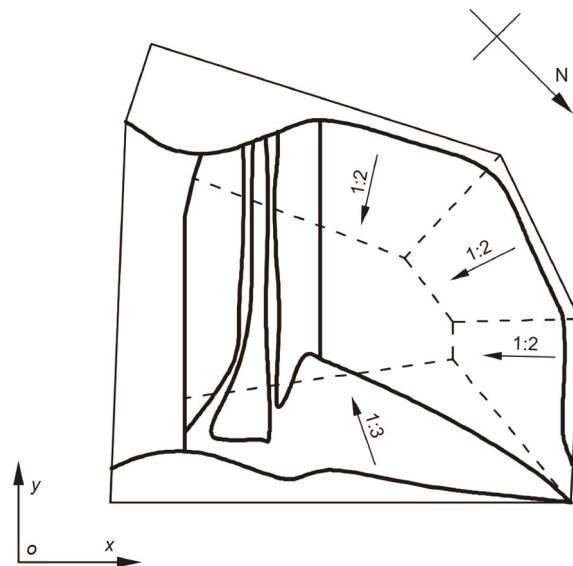
坡的安全系数和滑动方向。算例4的迭代计算过程如表9和10所示。当横向地震力较大时( $k_x=0.0, k_y=0.5$ )，需要3次迭代才可达到收敛要求。其他条件下，1次迭代即可达到收敛要求。结果表明，使用方程(11)估算的滑动方向作为初始值可以提高改进单轴方法的计算效率。

#### 4 工程实例

Kettleman Hills填埋场(B-19填埋场)是一个I类危险废弃物填埋场，位于美国加利福尼亚州Kettleman城市郊区，占地面积约为3600 m<sup>2</sup>，是一个典型的“山谷”型填埋场。填埋场的侧壁坡度为1:2或1:3，底部近乎水平，其内垃圾堆填高度约为27.4 m(图9)。为了防止填埋场内的有毒液体物质渗入周围土体进入水循环，造成水资源污染，损害人民的健康，填埋场的侧面和底部分层铺设了黏土、土工膜等防渗材料。

1988年3月19日，Kettleman Hills填埋场发生整体失稳破坏，垃圾表面最大竖向和水平位移分别达到了4.3和10.7 m。通过对Kettleman Hills填埋场滑坡现场

观测发现，填埋场整体沿着土工合成材料和黏土的接触面发生滑动破坏，这主要是由于黏土和土工膜接触面抗剪强度较低引起的。

**图 9** Kettleman Hills填埋场示意图**Figure 9** Slope geometry for Kettleman Hills.

**表 9** 算例4简化Bishop法的迭代计算过程( $\alpha_0$ 使用式(11)求得)**Table 9** The iteration process of Bishop's simplified method for Example 4 ( $\alpha_0$  is obtained by using eq. (11))

迭代次数	$k_x=0.0, k_y=0.3$		$k_x=0.0, k_y=0.5$		$k_x=0.3, k_y=0.3$		$k_x=0.5, k_y=0.5$	
	$\alpha$ (°)	F						
0	32.3	1.1269	46.5	1.0353	24.2	0.8269	32.2	0.6599
1	29.4	1.1179	40.6	1.0085	23.3	—	30.8	0.6564
2	30.3	—	43.7	1.0204	—	—	31.2	—
3	—	—	42.2	1.0138	—	—	—	—
4	—	—	43.0	—	—	—	—	—

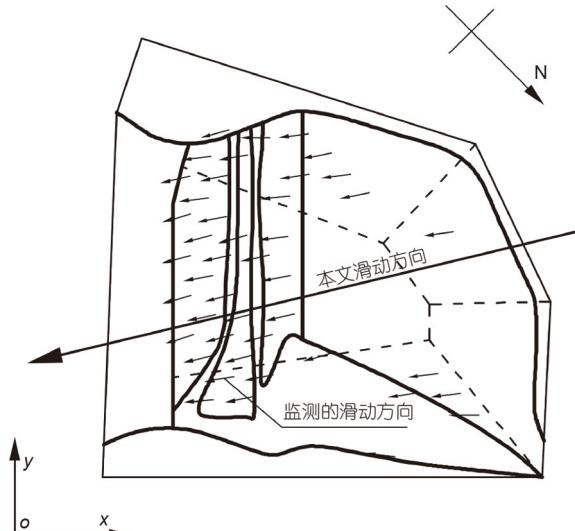
**表 10** 算例4简化Janbu法的迭代计算过程( $\alpha_0$ 使用式(11)求得)**Table 10** The iteration process of Janbu's simplified method for Example 4 ( $\alpha_0$  is obtained by using eq. (11))

迭代次数	$k_x=0.0, k_y=0.3$		$k_x=0.0, k_y=0.5$		$k_x=0.3, k_y=0.3$		$k_x=0.5, k_y=0.5$	
	$\alpha$ (°)	F						
0	32.3	1.1288	46.5	1.0071	24.2	0.8093	32.2	0.6275
1	29.4	1.1227	41.0	0.9882	23.6	—	31.5	—
2	30.3	—	43.9	0.9964	—	—	—	—
3	—	—	42.5	0.9920	—	—	—	—
4	—	—	43.2	—	—	—	—	—

自Kettleman Hills填埋场于1988年发生失稳破坏以来, 已经有许多学者专家对该滑坡进行了深入的研究<sup>[29~32]</sup>。土工合成材料黏土接触面的抗剪强度参数的大小会随着实验设备以及极限抗剪位移的不同而存在一定的差异。本文采用和Seed等人<sup>[30]</sup>一样的土工合成材料黏土接触面的抗剪强度参数。侧壁衬垫系统的抗剪强度参数为 $c'=0$ ,  $\varphi'=8.5^\circ$ 。底部厚度小于17.7 m部分的抗剪强度参数为 $c'=0$ ,  $\varphi'=8.0^\circ$ , 而厚度大于17.7 m部分的抗剪强度参数为 $c'=43.1$  kPa。现场观测得到填埋场内部堆填物的天然重度为17.3 kN/m<sup>3</sup>。

将单轴Spencer法与滑动方向计算公式(11)相结合, 分析Kettleman Hills填埋场的稳定性。本文得到的安全系数和滑动方向分别为1.065和13°。安全系数和Seed等人<sup>[30]</sup>得到的计算结果 $F=1.08$ 较为接近。本文计算的滑动方向和实测滑动方向吻合较好(图10)。

表11给出了Kettleman Hills填埋场的迭代计算过程, 经过2次迭代就达到了收敛要求。采用传统方法对此算例进行分析, 当滑动方向的计算精度为0.5°, 计算区间为0.0°~20.0°, 经过41次计算得到的安全系数和滑动方向分别为1.065和12°(图11)。与试算41次得到安全系数和滑动方向的传统试算方法相比, 本文方法只需

**图 10** Kettleman Hills填埋场计算滑动方向和实测值对比**Figure 10** Comparison between the actual observed direction and the calculated direction of Kettleman Hills Landfill Slope.**表 11** Spencer法迭代计算过程**Table 11** The iteration process of Spencer's method

迭代次数	$\alpha$ (°)	F
1	13.1	1.0649
2	12.9	1.0649

要2次迭代就可达到收敛要求, 计算效率提高显著.

## 5 结论

本文提出了一个滑动方向计算公式, 将单轴方法与本文提出的滑动方向计算公式相结合, 建立了三维非对称边坡稳定性分析单轴方法. 对4个典型算例和一个实际工程案例进行了分析, 主要结论如下.

(1) 典型算例的对比分析验证了本文方法的合理性与迭代计算的收敛性, 工程案例分析验证了本文方法的工程适用性.

(2) 非对称边坡稳定性分析时, 本文提出的Janbu法、Spencer法与双轴Janbu法、Spencer法是等效的; 较双轴Bishop法, 本文的Bishop法可以得到更为合理的计算结果.

(3) 对于静力条件下的边坡, 方程(11)估算的滑动方向初始值与计算结果十分接近, 无需迭代计算即可求得三维非对称边坡的安全系数与滑动方向; 对于

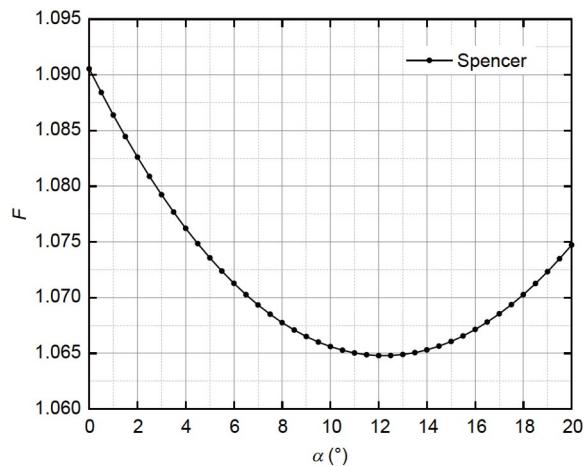


图 11 单轴方法安全系数和滑动方向关系

Figure 11 Relationship between  $F$  and  $\alpha$  of one-direction method.

拟静力条件下的边坡, 使用方程(11)估算的滑动方向作为迭代计算的初始值, 可以提高本文方法的计算效率.

## 参考文献

- Chen Z Y, Mi H L, Wang X G. A three-dimensional limit equilibrium method for slope stability analysis (in Chinese). Chin J Geotech Eng, 2001, 23: 525–529 [陈祖煜, 弥宏亮, 汪小刚. 边坡稳定三维分析的极限平衡方法. 岩土工程学报, 2001, 23: 525–529]
- Hungr O. An extension of Bishop's simplified method of slope stability analysis to three dimensions. *Géotechnique*, 1987, 37: 113–117
- Baligh M M, Azzouz A S. End effects on stability of cohesive slopes. *J Geotech Engrg Div*, 1975, 101: 1105–1117
- Hovland H J. Three-dimensional slope stability analysis method. *J Geotech Engrg Div*, 1977, 103: 971–986
- Chen R H, Chameau J L. Three-dimensional limit equilibrium analysis of slopes. *Géotechnique*, 1983, 33: 31–40
- Xing Z. Three-dimensional stability analysis of concave slopes in plan view. *J Geotech Eng*, 1988, 114: 658–671
- Hungr O, Salgado F M, Byrne P M. Evaluation of a three-dimensional method of slope stability analysis. *Can Geotech J*, 1989, 26: 679–686
- Lam L, Fredlund D G. A general limit equilibrium model for three-dimensional slope stability analysis. *Can Geotech J*, 1993, 30: 905–919
- Feng S R, Feng D X, Ge X R, et al. 3D limit equilibrium method for slope stability and its application (in Chinese). Chin J Geotech Eng, 1999, 21: 657–661 [冯树仁, 丰定祥, 葛修润, 等. 边坡稳定性的三维极限平衡分析方法及应用. 岩土工程学报, 1999, 21: 657–661]
- Chen Z, Mi H, Zhang F, et al. A simplified method for 3D slope stability analysis. *Can Geotech J*, 2003, 40: 675–683
- Li T L, Wang Y X, Deng H K. An improved method for three-dimensional slope stability analysis (in Chinese). Chin J Geotech Eng, 2003, 25: 611–614 [李同录, 王艳霞, 邓宏科. 一种改进的三维边坡稳定性分析方法. 岩土工程学报, 2003, 25: 611–614]
- Zheng H. A rigorous three-dimensional limit equilibrium method (in Chinese). Chin J Rock Mech Eng, 2007, 26: 1529–1537 [郑宏. 严格三维极限平衡法. 岩石力学与工程学报, 2007, 26: 1529–1537]
- Zhu D Y, Ding X L, Qian Q H. Three-dimensional limit equilibrium solution to generalized-shaped slope stability (in Chinese). Chin J Geotech Eng, 2007, 29: 1460–1464 [朱大勇, 丁秀丽, 钱七虎. 一般形状边坡三维极限平衡解答. 岩土工程学报, 2007, 29: 1460–1464]
- Zhang C L, Li T L, Li P, et al. Generalized equation of three dimensional limit equilibrium methods for slope stability analysis (in Chinese). *J Eng Geol*, 2008, 16: 70–75 [张常亮, 李同录, 李萍, 等. 边坡三维极限平衡法的通用形式. 工程地质学报, 2008, 16: 70–75]
- Chen C F, Zhu J F. A three-dimensional slope stability analysis procedure based on Morgenstern-Price method (in Chinese). Chin J Rock Mech Eng, 2010, 29: 1473–1480 [陈昌富, 朱剑锋. 基于Morgenstern-Price法边坡三维稳定性分析. 岩石力学与工程学报, 2010, 29: 1473–1480]

- 16 Lu K L, Zhu D Y, Gan W N, et al. 3D limit equilibrium method for slope stability analysis and its application (in Chinese). *Chin J Geotech Eng*, 2013, 35: 2276–2282 [卢坤林, 朱大勇, 甘文宁, 等. 一种边坡稳定性分析的三维极限平衡法及应用. 岩土工程学报, 2013, 35: 2276–2282]
- 17 Huang C C, Tsai C C. New method for 3D and asymmetrical slope stability analysis. *J Geotech Geoenvir Eng*, 2000, 126: 917–927
- 18 Huang C C, Tsai C C, Chen Y H. Generalized method for three-dimensional slope stability analysis. *J Geotech Geoenvir Eng*, 2002, 128: 836–848
- 19 Zheng R M, Zhu L J, Gu Z Q. Rotational failure of 3D non-symmetric slope predicted by Bishop's method (in Chinese). *Chin J Geotech Eng*, 2002, 24: 706–709 [郑榕明, 朱禄娟, 谷兆祺. 非对称旋转破坏的三维 bishop 边坡稳定算法. 岩土工程学报, 2002, 24: 706–709]
- 20 Zhang J F, Ding H. Generalized 3D limit-equilibrium method for slope stability analysis and its application (in Chinese). *Chin J Rock Mech Eng*, 2005, 24: 365–370 [张均锋, 丁桦. 边坡稳定性分析的三维极限平衡法及应用. 岩石力学与工程学报, 2005, 24: 365–370]
- 21 Cheng Y M, Yip C J. Three-Dimensional asymmetrical slope stability analysis extension of Bishop's, Janbu's, and Morgenstern-Price's techniques. *J Geotech Geoenvir Eng*, 2007, 133: 1544–1555
- 22 Li L, Chi S C, Zheng R M. Three-dimensional slope stability analysis based on ellipsoidal sliding body and simplified Janbu method (in Chinese). *Rock Soil Mech*, 2008, 29: 2439–2445 [李亮, 迟世春, 郑榕明. 基于椭球滑动体假定和三维简化Janbu法的边坡稳定分析. 岩土力学, 2008, 29: 2439–2445]
- 23 Kalatehjari R, A Rashid A S, Hajihassani M, et al. Determining the unique direction of sliding in three-dimensional slope stability analysis. *Eng Geol*, 2014, 182: 97–108
- 24 Wan Y, Gao Y, Zhang F. A simplified approach to determine the unique direction of sliding in 3D slopes. *Eng Geol*, 2016, 211: 179–183
- 25 Lu K L, Zhu D Y. A three-dimensional rigorous method for stability analysis and its application. *Bull Eng Geol Environ*, 2016, 75: 1445–1457
- 26 Deng D, Li L, Zhao L. LEM for stability analysis of 3D slopes with General-Shaped slip surfaces. *Int J Geomech*, 2017, 17: 06017017
- 27 Qi S, Ling D, Yao Q, et al. Evaluating slope stability with 3D limit equilibrium technique and its application to landfill in China. *Eng Geol*, 2021, 280: 105939
- 28 Jiang Q, Zhou C. A rigorous method for three-dimensional asymmetrical slope stability analysis. *Can Geotech J*, 2018, 55: 495–513
- 29 Mitchell J K, Seed R B, Seed H B. Kettleman hills waste landfill slope failure. I: Liner-system properties. *J Geotech Eng*, 1990, 116: 647–668
- 30 Seed R B, Mitchell J K, Seed H B. Kettleman hills waste landfill slope failure. II: Stability analyses. *J Geotech Eng*, 1990, 116: 669–690
- 31 Stark T D, Poeppel A R. Landfill liner interface strengths from Torsional-Ring-Shear tests. *J Geotech Eng*, 1994, 120: 597–615
- 32 Chang M. Three-dimensional stability analysis of the Kettleman Hills landfill slope failure based on observed sliding-block mechanism. *Comput Geotech*, 2005, 32: 587–599

## Three-dimensional limit equilibrium method for asymmetrical slope stability analysis

GAO YuFeng<sup>1,2</sup>, WAN YuKuai<sup>1,3</sup> & ZHANG Fei<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> Key Laboratory of Ministry of Education for Geomechanics and Embankment Engineering, Hohai University, Nanjing 210024, China;

<sup>2</sup> Geotechnical Research Institute of Hohai University, Nanjing 210024, China;

<sup>3</sup> School of Civil and Hydraulic Engineering, Ningxia University, Yinchuan 750021, China

A formula is proposed to calculate the DOS of 3D slopes based on the limit equilibrium theory. By combining the one-direction method with the proposed computational formula of DOS, a three-dimensional method for asymmetrical slope stability analysis based on one-direction force or/and moment equilibrium is proposed. The proposed method can compute both the factor of safety and the DOS of asymmetrical problems. As a result, the one-direction method's potentially overestimated safety factors due to assumed DOS can be eliminated. Examples under static and pseudo-static forces are used to validate the proposed method's logic and the algorithm's stringency. The practical engineering examples further demonstrate the proposed method's engineering applicability. The proposed method, with its simple principle and reliable results, can be widely used in slope design and landside treatment.

**asymmetrical slope, three-dimensional analysis, landslides, limit equilibrium, direction of sliding**

doi: [10.1360/SST-2021-0292](https://doi.org/10.1360/SST-2021-0292)