

# 改进水平集法模拟不可压缩两相流动时 质量守恒的体积校正法

李向阳<sup>①</sup>, 王跃发<sup>①</sup>, 禹耕之<sup>①</sup>, 杨超<sup>①②</sup>, 毛在砂<sup>①\*</sup>

① 中国科学院过程工程研究所, 绿色过程与工程重点实验室, 北京 100190

② 江苏省海洋资源开发研究院, 连云港 222005

\* 联系人, E-mail: [zsmiao@home.ipe.ac.cn](mailto:zsmiao@home.ipe.ac.cn)

收稿日期: 2007-10-19; 接受日期: 2008-03-26

国家自然科学基金(批准号: 20490206, 50404009, 20576133, 20676134), 中国石油天然气集团总公司和国家基础研究项目(批准号: 2004CB217604, 2007CB613507)资助

**摘要** 发展了一种体积校正法来改进水平集法模拟涉及相界面变形的不可压缩两相流动时的质量守恒. 在传统的重新初始化程序之后, 该体积校正法可以根据不连续相的质量亏盈, 通过整体移动相界面的位置, 使质量亏盈小于预先指定的误差范围. 用 3 个算例验证了包含该体积校正法的水平集算法: 二维单气泡或单液滴在液体中的运动, 二维水滴通过空气介质落入水池, 两个浮力推动的三维变形气泡相互影响下的运动. 每个算例中质量守恒都符合要求的精度, 数值模拟结果与实验数据吻合.

**关键词**

水平集算法  
质量守恒  
重新初始化  
体积校正  
气泡  
液滴

## 1 前言

在自然界和各种工程领域中经常出现多相流动问题. 由于计算机性能和计算流体力学方法的快速发展, 近年来数值模拟方法越来越多地应用于多相流的研究中. 在水平集算法中, 两流体分界面用水平集函数(定义为距界面的代数距离)的零水平集隐含地给出, 该水平集函数可以很容易地用一个简单的对流方程随着时间推进来更新<sup>[1,2]</sup>. 水平集方法现在已经广泛地应用于流体力学、燃烧、计算机显示和材料科学的研究中<sup>[3,4]</sup>.

然而, 水平集函数的推进是一个非守恒的算法. 随着计算时间增长, 总是会出现气泡和液滴的质量亏盈的问题, 使相界面逐渐偏离正确的位置, 同时使流场失真. 到目前为止, 文献中报道了 3 类改善质量

守恒的方法<sup>[5]</sup>.

第一类就是目前广泛采用的改进重新初始化方法<sup>[6-10]</sup>. Sussman等<sup>[6-8]</sup>发展了一种类似于VOF(volume of fluid method)方法的重新初始化程序. 他们认为在重新初始化过程中, 由于界面是不动的, 那么每个网格中体积也是不变的, 提出采用紧致的九点积分格式计算每一个网格单元的体积, 根据网格单元体积与初始体积的差别来重新初始化水平集函数, 这大大增加了计算负担和程序的复杂程度. 与方法不同, Chang等<sup>[9]</sup>注意到导致气泡液滴体积亏盈的数值扩散与局部曲率有密切关系, 提出在每一个时间步还同时求解一个水平集函数的Hamilton-Jacobi方程直至稳态, 得到了二维模拟的精确解. Wang和Zhou<sup>[10]</sup>认为重新初始化过程中体积亏盈有两个原因: 一是数据之间的相互影响, 二是界面两侧

信息的不对称性. 他们通过锁定界面位置, 引入了一种新的重新初始化水平集函数的算法. 该方法针对的是界面而不是直接处理体积, 必然会存在体积的亏盈或波动. 除此之外, 以上提到的改进的重新初始化方法都只是在二维的计算中得到了验证, 在全三维问题模拟中达到同样的效果将是个更大的挑战 [11]. Oka 和 Ishii [11] 在三维问题的模拟中曾设法很好地保持了质量守恒, 但是在每一个时间步内同时使用三种重新初始化方法非常耗用计算机时间.

第二类是几种“杂化”方法, 比如把水平集方法和 volume-tracking [12-14] 或者 front-tracking [15,16] 方法结合起来. 例如 Enright 等 [15] 的方法是把水平集函数和一些 Lagrangian 标记粒子结合起来, 该方法能够保持界面几何形状的光滑描述, 同时大大改进了 under-resolved 流动的质量守恒. 但这些方法往往比较复杂, 会大大增加计算负荷, 尤其是当应用于三维计算时尤其突出.

第三类, 通过减小空间离散误差的方法来改进水平集方法中的质量守恒问题. 能够更准确的求解界面结构的 AMR (adaptive mesh refinement) 方法也曾被用来改进质量守恒问题 [7,12,16-18]. 这类方法中一个典型例子包括两个协同的步骤: (1) 用线性 WENO (weighted essentially nonoscillatory) 格式来减小空间离散误差; (2) 用 SAMR (structured adaptive mesh refinement) 方法提高局部解的精度. 两个协同步骤大大增加了程序的复杂程度和计算的负担, 尤其是在非并行的单机计算时.

本文中提出了一种改善水平集方法应用中质量 (体积) 守恒的体积校正法, 该方法不会增加计算代码的复杂程度, 也不会显著地增大计算负担.

## 2 控制方程

本研究中作了以下的合理假设: (1) 两种流体是黏性的、牛顿型的、不可压缩的流体; (2) 流动是等温的; (3) 表面张力是一个定值 [17].

无因次形式的运动方程和连续性方程为:

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{U} \right) = -\nabla p + \nabla \cdot \left( \frac{\mu}{Re} (\nabla \mathbf{U} + \nabla \mathbf{U}^T) \right) + \frac{1}{Fr} \rho \mathbf{g} + \frac{1}{We} \kappa(\phi) \delta_\varepsilon(\phi) \mathbf{n}, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0, \quad (2)$$

其中,  $\rho = \rho_a / \rho_1$  和  $\mu = \mu_a / \mu_1$  分别是分散相密度和黏度与连续相参数的比值, 界面的单位法向量  $\mathbf{n}$  定义为

$$\mathbf{n} = -\frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|}. \quad (3)$$

磨光的  $\delta_\varepsilon(\phi)$  定义为:

$$\delta_\varepsilon(\phi) = \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon} (1 + \cos(\pi\phi/\varepsilon)) & \text{if } |\phi| < \varepsilon, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (4)$$

$\kappa(\phi)$  是自由界面的曲率:

$$\kappa(\phi) = \nabla \cdot \mathbf{n} = -\nabla \cdot \left( \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \right). \quad (5)$$

在水平集算法中, 密度场和黏度场随着流场推进. 为了避免在界面附近, 尤其是大密度梯度条件下出现数值不稳定性, 对密度和黏度函数作如下平滑处理:

$$\rho_\varepsilon(\phi) = \rho_a / \rho_1 + (1 - \rho_a / \rho_1) H_\varepsilon(\phi), \quad (6)$$

$$\mu_\varepsilon(\phi) = \mu_a / \mu_1 + (1 - \mu_a / \mu_1) H_\varepsilon(\phi). \quad (7)$$

其中的磨光的 Heaviside 函数定义为:

$$H_\varepsilon(\phi) = \begin{cases} 0 & \text{if } \phi < -\varepsilon, \\ \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\phi}{\varepsilon} + \sin(\pi\phi/\varepsilon)/\pi \right) & \text{if } |\phi| \leq \varepsilon, \\ 1 & \text{if } \phi > \varepsilon. \end{cases} \quad (8)$$

方程(1)中的无因次数  $Re$ ,  $Fr$  和  $We$  分别定义为:

$$Re \equiv \frac{\rho_1 LV}{\mu_1}, \quad Fr \equiv \frac{V^2}{Lg}, \quad We \equiv \frac{\rho_1 V^2 L}{\sigma}, \quad (9)$$

其中  $L$  和  $V$  分别为特征长度和特征速度.

水平集方程为:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \phi = 0. \quad (10)$$

Sussman 等 [19] 提出的重新初始化方法是积分下列方程至稳态:

$$\frac{\partial \phi}{\partial \tau} = \text{sgn}(\phi_0) (1 - |\nabla \phi|), \quad (11)$$

方程中  $\tau$  是重新初始化过程中迭代的虚拟时间,  $\phi_0$  是  $t$  时刻的水平集函数,  $\text{sgn}(\phi_0)$  是为了避免数值不稳定而磨光的符号函数. 为了获得更高的空间精度, 采用五阶的 weighted essentially nonoscillatory (WENO)

格式来离散重新初始化方程 [20].

Chang等 [9,21]提出的改进质量守恒的重新初始化方程:

$$\frac{\partial \phi}{\partial \tau} + (A_0 - A(\tau))(-P + \kappa(\phi))|\nabla \phi| = 0, \quad (12)$$

其中  $A_0$  表示初始时刻的总质量,  $A(\tau)$  表示与  $\phi(\tau)$  对应的总质量. 参数  $P$  是一个正的常数, 一般取为 1.0.

Yang和Mao [22]在计算中发现, 使用方程(12)来重新初始化, 尽管两相流体的总质量守恒很好, 然而流体颗粒(气泡或液滴)的质量却逐渐丢失. 因此, 他们将  $A(\tau)$  的定义修改为:

$$A(\tau) = \sum_{\phi_{ij} \leq \varepsilon} \rho_\varepsilon(\phi_{ij}) r_j \Delta x \Delta y, \quad (13)$$

式中  $\phi_{ij} \leq \varepsilon$  表示流体颗粒内部和虚拟界面厚度  $2\varepsilon$  内的节点, 也就是说方程(13)中的  $A(\tau)$  取的是气泡/液滴的质量而不是方程(12)中所取的体系总质量.

### 3 改进质量守恒的体积校正法

由于已假设流体是不可压缩的, 所以质量守恒和体积守恒是等价的. 本文的重新初始化过程中, 首先求解方程(11)使水平集函数成为代数距离函数, 然后根据下边公式所示不连续相(气泡/液滴)体积 ( $V = \sum_{\phi \leq 0} H(\phi) r \Delta x \Delta y$ ) 的亏盈来调整相界面的位置:

$$\Delta V = \frac{V(t) - V_0}{V_0}. \quad (14)$$

假设气泡/液滴是球形的, 半径的增量为:

$$\Delta r = r - r_0 = \left( (1 + \Delta V) \frac{1}{C_1} - 1 \right) r_0, \quad (15)$$

其中  $C_1$  取模拟体系的维数. 由于分散相体积的增加对应于从界面到分散相中心距离的增加, 所以可取水平集函数的校正量正比于  $\Delta r$ . 于是水平集函数的校正量可以表达为:

$$\delta \phi = C_2 \left( (1 + \Delta V) \frac{1}{C_1} - 1 \right), \quad (16)$$

这里的  $C_2$  是一个经验参数, 较大的  $C_2$  可能导致重新初始化方程不收敛, 较小的  $C_2$  降低计算效率.  $C_2$  一般在 0.01~0.1 中按经验选取.

这样, 水平集函数的体积校正方程可以写为:

$$\phi = \phi_0 + \delta \phi. \quad (17)$$

本文采用控制体积法和Patankar [23]所描述的幂指数方案来求解方程(1)和(2). 耦合了本文提出的体积校正的重新初始化程序的水平集方法的主要计算步骤如下:

1. 初始化流场( $U$  和  $p$ )、各相的物性参数( $\rho$ ,  $\mu$  和  $\sigma$ ), 初始化  $\phi(\mathbf{X}, 0)$  为相对于相界面的符号距离函数;
2. 使用压力耦合的半隐式 SIMPLEC 算法在每一个时间步内求解方程(1)和(2)得到速度场和压力场;
3. 在每一个时间步, 利用已得到的速度场求解方程(10)来更新水平集函数  $\phi$ ;
4. 通过求解方程(11)至稳态, 使  $\phi$  更新为代数距离函数;
5. 判断分散相(气泡/液滴)体积的亏盈是否超出了(预先指定的)标准. 如果没有超出标准, 接受步骤 4 得到的  $\phi$  为新的水平集函数, 并根据它来更新物性; 然后回到步骤 2 开始下一时间步的计算; 否则, 求解方程(17), 然后回到步骤 4.

### 4 结果和讨论

在各种工业过程中, 常常会遇见具有鲜明相界面的多相流动, 实践证明很难通过数值方法模拟这类流动. 因此本文从该类流动中选择 3 个典型的问题作为算例, 来演示本文提出的体积校正的重新初始化程序: 二维单气泡或单液滴在液体中的运动、二维水滴通过空气介质落入水池和两个浮力推动的三维变形气泡的相互作用运动.

#### 4.1 二维轴对称单气泡或单液滴在液体中的运动

在过去的几十年里, 许多研究者通过实验和数值模拟的手段对气泡和液滴的运动进行了研究 [11,22,24-29]. 本算例的重点放在确定气泡的稳态形状和上升速度上. 和 Yang 和 Mao [22] 的模拟一样, 计算的区域为  $\Omega = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 10R, 0 \leq y \leq 8R\}$ , 采用  $100 \times 80$  非均匀网格进行计算, 该设置可以得到足够的空间精度.

首先模拟了空气泡分别在在高黏度和低黏度的糖浆水溶液中自由上升运动. 数值计算得出平衡态气泡的上升速度分别为 0.181 和 0.317 m/s, 与实验结果 0.190 和 0.306 m/s [24] 非常接近. 图 1 和 2 所示的气泡稳定态形状也与实验可视化结果吻合较好 [24].

为了验证气泡是否适用传统的零密度、无黏度的传统观点, 模拟了气泡密度和黏度的量级对计算的影响. 成功地模拟了零密度、无黏度的气泡在糖浆中的上升运动, 如图 3 所示, 与Yang和Mao<sup>[22]</sup>的模拟结果比较一致, 但与图 1 中的气泡形状有明显差别.

此外, 目前的算法还能够用来捕捉运动中流体颗粒的拓扑变形. 模拟得到的存在较大密度比和有拓扑变形的运动气泡的稳定态形状如图 4 所示, 其中无因次时间的定义是  $\theta = t/\sqrt{g/(2R)}$ ,  $R$  是气泡半径.

以上模拟结果表明, 在层流条件下, 使用欧拉网格, 耦合了本文提出的体积校正的重新初始化程序的水平集方法对这类相界面存在较大的密度和黏度梯度的稳态流体颗粒的运动是很有效的.

#### 4.2 水滴通过空气介质落入水池

水滴通过空气介质落入水池中的运动是有趣的自由界面问题<sup>[1]</sup>. 在这一过程中, 会有一系列复杂的界面拓扑变形发生, 对数值模拟提出了挑战.

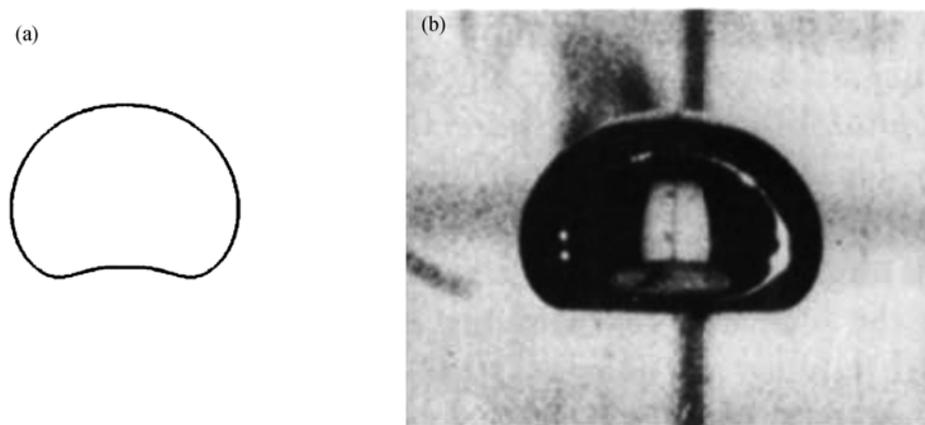


图 1 高黏度糖溶液中  $9.3 \text{ cm}^3$  气泡稳态运动时的形状与实验的比较

(a) 数值模拟的气泡; (b) 实验拍的照片(Bhaga和Weber, 图 3(b))<sup>[24]</sup> ( $R=0.013 \text{ m}$ ,  $\rho_l=1390 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ,  $\rho_g=1.226 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ,  $\mu_l=2.786 \text{ Pa} \cdot \text{s}$ ,  $\mu_g=1.78 \times 10^{-5} \text{ Pa} \cdot \text{s}$ ,  $\sigma=0.0794 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ )

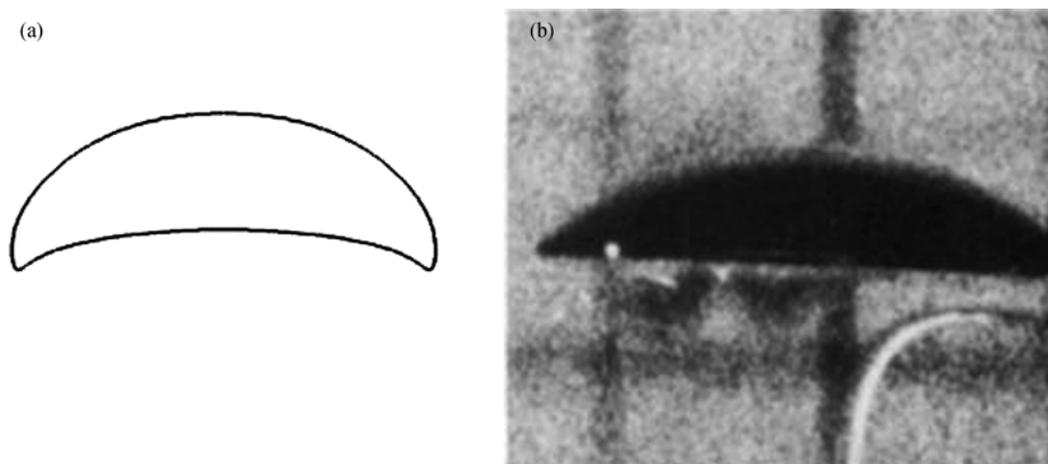


图 2 低黏度糖溶液中  $9.3 \text{ cm}^3$  气泡稳态运动时的形状与实验的比较

(a) 数值模拟的气泡; (b) 实验拍的照片(Bhaga和Weber, 图 3(g))<sup>[24]</sup> ( $R=0.013 \text{ m}$ ,  $\rho_l=1320 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ,  $\rho_g=1.226 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ,  $\mu_l=0.525 \text{ Pa} \cdot \text{s}$ ,  $\mu_g=1.78 \times 10^{-5} \text{ Pa} \cdot \text{s}$ ,  $\sigma=0.0754 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ )

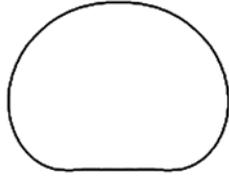


图3 零密度、无黏度的气泡在高黏度糖溶液中的上升到  $\theta=3.4$  时的形状

$R=0.013\text{ m}$ ,  $\rho_l=1390\text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ ,  $\rho_g=1.390\times 10^{-2}\text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ ,  $\mu_l=2.786\text{ Pa}\cdot\text{s}$ ,  
 $\mu_g=1.137\times 10^{-13}\text{ Pa}\cdot\text{s}$ ,  $\sigma=0.0794\text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$ ,  $\theta=3.4$



图4 气泡上升过程中形状的拓扑变化

$\rho_l/\rho_g=1000$ ,  $\mu_l/\mu_g=100$ ,  $Fr=1.0$ ,  $Re=100$ ,  $We=200$

这个算例中对二维平面轴对称水滴通过空气介质落入水池中的运动进行了数值模拟. 如图 5 所示, 在  $\theta=0$  时刻, 一个中等大小的液滴从高度  $H_1$  开始下落. 初始时刻的液滴假设为球形, 其直径( $D=2R$ )是 1 cm, 这一长度指定为特征长度  $L$ . 该轴对称运动使用  $10R\times 6R$  的计算区域和  $200\times 120$  的均匀网格, 以保证足够的空间计算精度. 模拟中的无因次数按照下列式子进行计算:

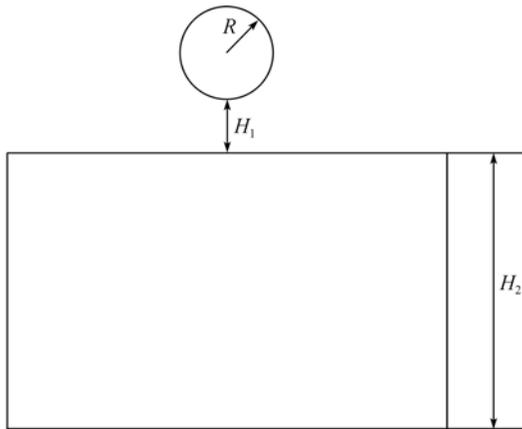


图5  $\theta=0$  时水滴位于水池上方的示意图

$$Re=(2R)(2gH_1)^{1/2}/\mu_l, Fr=H_1/2R, \quad (18)$$

$$We=4RH_1g\rho_l/\sigma, H_1^*=H_1/2R, H_2^*=H_2/2R.$$

主要的预测结果如图 6 所示, 模拟结果定性地与 Osher 和 Fedki 的结果一致 [11]. 这一过程简单描述如下:

- (1) 在  $\theta=0$  时刻, 整个系统处于静止状态;
- (2) 在重力的作用下, 释放的水滴开始加速下落;
- (3) 由于周围空气的阻力, 水滴在下落过程中变形, 其加速度也逐渐减小;
- (4) 当下降水滴和水池之间的距离变得非常小的时候, 水滴的表面和水池表面都会不同程度的变形;
- (5) 之后水滴继续靠近水池表面, 二者间形成了一层薄膜, 一些气泡可能被捕获;
- (6) 水滴撞击水层, 形成了一个凹坑;
- (7) 凹坑向两侧很快地扩展, 同时逐渐变深;
- (8) 一段时间后, 两侧的水向中间回流, 凹坑的底部开始上升. 凹坑逐渐被填平, 液面在正中处逐渐凸起;
- (9) 最后形成了向上的射流.

### 4.3 浮力推动的两个三维变形气泡的相互作用

和其他的改进重新初始化方法一样, 应用本文体积校正法的水平集方法, 在二维算例中体积守恒很容易保持下去. 但是对于三维问题的模拟, 维持体积守恒是很大的挑战 [11].

我们曾成功模拟了浮力推动的两个三维变形气泡的相互作用运动 [30], 然而两个气泡在竖直的直线上一前一后的运动, 构成了一个轴对称的体系. 为了说明本文的体积校正方法在有复杂界面变形的全三维问题中的使用效果, 本算例考虑初始时刻不在一条垂线上的两个气泡的相互作用运动. 正如实验结果显示的那样, 该问题中牵涉复杂的界面拓扑变形 [31]. 在 Oka 和 Ishii 的模拟中, 质量守恒得到了很好的保持, 然而同时使用 3 种重新初始化程序造成了计算资源的浪费 [11].

位于计算区域中心平面、半径比  $a_1/a_2=1.5$  两个气泡在初始时刻静止, 其中  $a_1$  和  $a_2$  分别是两个气泡的半径. 除了两个气泡之间的间距外, 主要模拟条件与 Manga 等的实验条件相同 [31], 即  $We=ga_1^2\Delta\rho/\sigma\approx 50$ ,  $Re=\rho Ua_1/\mu\approx 5\times 10^{-3}$ , 其中  $\Delta\rho$  为气泡与

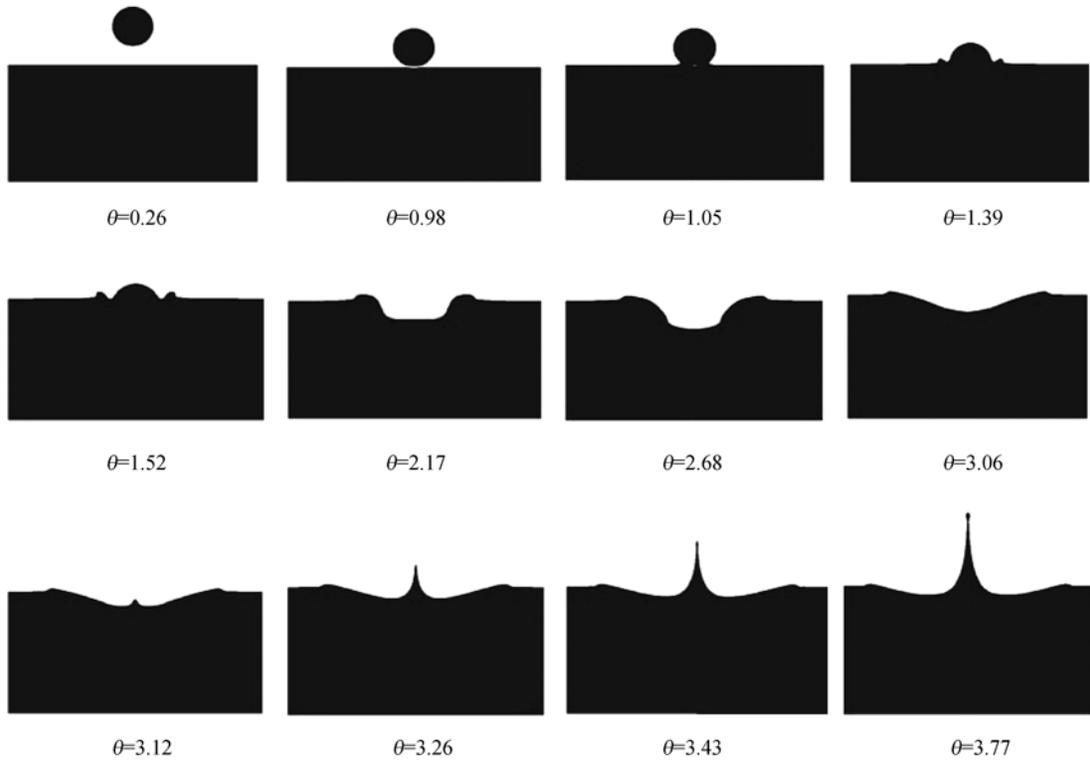


图 6 水滴通过空气层下落撞击水池的过程

$$H_1^* = 0.5, H_2^* = 3.0, Re = 3110.4, Fr = 1.0, We = 134.5, \rho_g/\rho_l = 1.23 \times 10^{-3}, \mu_g/\mu_l = 1.77 \times 10^{-2}$$

周围液相介质的密度差,  $U$  是气泡上升速度. 为了使两个气泡之间早些开始相互作用, 本文模拟中气泡间的初始距离略小于实验中的设置. 模拟中采用  $30 \times 30 \times 50$  网格和周期性的计算区域, 当气泡上升接近计算区域顶端时, 计算区域周期性地向上延展, 使气泡重新移回计算区域的中央.

数值预测的气泡相互作用行为的一些重要阶段如图 7(b)所示. 在上升的过程中, 两个气泡发生很大

的变形, 变形规律各自不同. 上边的气泡向着单气泡自由上升的稳定阶段的形状变化, 后边的气泡发生的变形较小. 后来上边气泡的下端逐渐凹进, 而后边气泡的上端逐渐凸起. 随后两个气泡之间的距离越来越小. 最后后边的气泡被“吸”进上边气泡的尾部, 两个气泡合并在一起. 本文模拟的定性结果与实验结果(图 7(a))<sup>[31]</sup>吻合得较好.

两个相互作用的三维变形气泡数值模拟中, 分

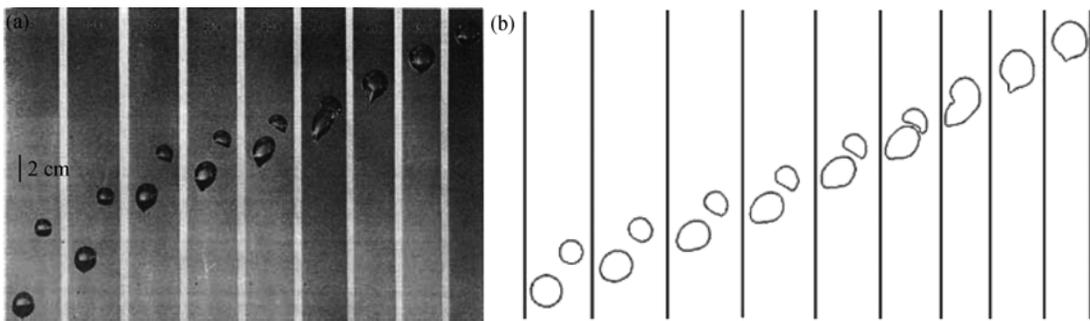


图 7 两个三维空气泡在玉米糖浆中相互作用运动的实验和数值模拟结果的比较

时间间隔为 10 s. (a) Manga和Stone的实验照片<sup>[31]</sup>; (b) 数值模拟结果

别使用 3 种不同重新初始化方案(即方程(11), 方程(11)和(12)及本文的体积校正重新初始化方案)的水平集方法模拟过程中, 质量偏差随时间的变化规律如图 8 所示. 当只使用方程(11)时, 相当多的气泡体积会一直丢失, 最后气泡甚至会消失. 使用方程(11)和(12)时, 在开始阶段体积守恒保持得较好, 之后体积偏离 1.0 的程度会比较大, 接下去的时间内, 体积偏差可能会重新回到预先指定的误差范围内, 但是在这一过程中会导致相界面捕捉不准确. 所以在有较大的拓扑变形的三维数值模拟中, 使用这种方法对水平集函数进行重新初始化是不明智的. 而使用本文提出的体积校正重新初始化方法, 相对体积偏差最小, 在所有的计算时间内, 两个气泡的总体积总是在以 1.0 为中心的一个很小范围内上下波动.

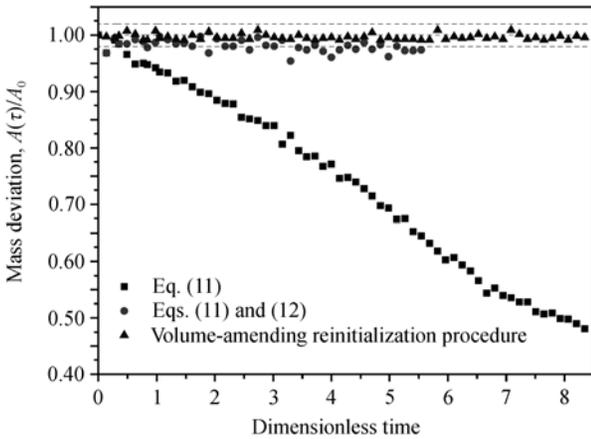


图 8 两个相互作用的三维变形气泡数值模拟中体积亏盈随时间的变化

## 5 总结

本文发展了一种用水平集法模拟相界面有较大变形的两相不可压缩流体运动时维持质量守恒的体积校正法. 在传统的重新初始化程序之后, 根据体积(或质量)的亏盈整体平移相界面位置, 对气泡或液滴的体积(或质量)进行校正, 直到体积(或质量)的亏盈率进入预先指定的允许范围内. 选择了 3 个典型的具有复杂相界面变形的不可压缩两相流问题作为算例, 来验证本文提出的体积校正重新初始化程序, 即二维轴对称单气泡在液体中的运动, 二维水滴通过空气介质落入水池, 浮力推动的两个三维变形气泡的相互作用运动.

本文数值预测的单个上升气泡稳定状态的形状和最终的速度与实验结果吻合得较好. 对零密度无黏性的上升单气泡和有拓扑变化的单气泡的模拟也得出了较好的结果. 在二维液滴通过空气介质落入水层的算例中, 会发生一系列更加复杂的界面拓扑结构变化. 本文对这一过程进行了成功的模拟, 捕捉到了这一过程中大多数的动力学特征. 在第三个算例里, 本文提出的方法应用于三维体系的模拟, 成功地预示了两气泡相互作用的一些重要行为, 数值结果与实验结果定性吻合.

在以上的算例里, 无论是在具有复杂界面变化的二维还是三维问题中, 耦合本文提出的体积校正重新初始化程序的水平集方法均获得成功. 一些其他的颗粒水平集方法和耦合了 AMR 的水平集方法也能起到相似的作用, 然而这些方法会增大计算程序代码的复杂程度, 或增大计算的负担, 或两者兼有. 本文提出的体积校正重新初始化程序, 只需在原来传统的重新初始化程序基础上略加修改, 基本上不增大计算量.

## 符号表

$A$	流体质量, kg
$a$	气泡半径, m
$D$	直径, m
$Fr$	Froude 数 ( $Fr = V^2 L^{-1} g^{-1}$ )
$g$	重力加速度, $9.81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$
$H$	距离, m
$h$	速度压力网格的尺寸
$L$	特征长度, m
$n$	界面的法向矢量
$p$	压力, Pa
$R$	等体积的当量半径, m
$Re$	Reynolds 数 ( $Re = \rho_1 L V \mu_1^{-1}$ )
$r$	径向坐标, m
$t$	时间, s
$U$	平衡状态下的速度, $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$
$U$	速度矢量, $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$
$u$	轴向速度分量, $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$
$V$	参考速度, $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$
$v$	径向或横向速度分量, $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$
$We$	Webber 数 ( $We = V^2 \rho_1 L \sigma^{-1}$ )

$X$	空间位置矢量( $x, y$ )	下角	
$x$	轴向坐标, m	0	“旧”值
$y$	径向或横向坐标, m	1	液相
$\varepsilon$	界面厚度的一半	$g$	气相
$\theta$	无因次时间( $\theta = tVL^{-1}$ )	$i$	$i$ 方向
$\phi$	水平集函数, m	$j$	$j$ 方向
		$k$	$k$ 方向
上角		$n$	第 $n$ 个时间步
*	无因次	$\varepsilon$	界面层
$n$	第 $n$ 个时间步	$\phi$	水平集函数

## 参考文献

- Osher S, Fedkiw R. The Level Set Method and Dynamic Implicit Surfaces. New York: Springer-Verlag, 2002
- Sethian J. Level Set Methods and Fast Marching Methods. Cambridge: Cambridge University Press, 1999
- Osher S, Fedkiw R. Level set methods: An overview and some recent results. J Comput Phys, 2001, 169(2): 463—502 [DOI](#)
- Sethian J. Evolution, implementation, and application of level set and fast marching methods for advancing fronts. J Comput Phys, 2001, 169(2): 503—555 [DOI](#)
- Losasso F, Fedkiw R, Osher S. Spatially adaptive techniques for level set methods and incompressible flow. Comput Fluids, 2006, 35(10): 995—1010 [DOI](#)
- Sussman M, Smereka P. Axi-symmetric free boundary problems. J Comput Phys, 1997, 341(1): 269—294
- Sussman M, Fatemi E. An efficient, interface-preserving level set redistancing algorithm and its application to interfacial incompressible fluid flow. SIAM J Sci Comput, 1999, 20(4): 1165—1191 [DOI](#)
- Sussman M, Almgren A S, Bell J B, Colella P, Howell L H, Welcome M L. An adaptive level-set approach for incompressible two-phase flows. J Comput Phys, 1999, 148(1): 81—124 [DOI](#)
- Chang Y C, Hou T Y, Merriman B, Osher S. A level set formulation of Eulerian interface capturing methods for incompressible fluid flows. J Comput Phys, 1996, 124(2): 449—464 [DOI](#)
- Wang Z L, Zhou Z W. An improved level-set re-initialization solver. Appl Math Mech, 2004, 25(10): 1083—1088 [DOI](#)
- Oka H, Ishii K. Numerical analysis on the motion of gas bubbles using level set method. J Phys Soc Japan, 1999, 68(3): 823—832 [DOI](#)
- Sussman M. A second order coupled level set and volume-of-fluid method for computing growth and collapse of vapor bubbles. J Comput Phys, 2003, 187(1): 110—136 [DOI](#)
- Sussman M, Puckett E G. A coupled level set and volume-of-fluid method for computing 3D and axisymmetric incompressible two-phase flows. J Comput Phys, 2000, 162(2): 301—337 [DOI](#)
- Sussman M, Smith K M, Hussaini M Y, Ohta M, Zhi-Wei R. A sharp interface method for incompressible two-phase flows. J Comput Phys, 2007, 221(2): 469—505 [DOI](#)
- Enright D, Fedkiw R, Ferziger J, Mitchell I. A hybrid particle level set method for interface capturing. J Comput Phys, 2002, 183(1): 83—116 [DOI](#)
- Enright D, Losasso F, Fedkiw R. A fast and accurate semi-Lagrangian particle level set method. Comput Struct, 2005, 83: 479—490 [DOI](#)
- Strain J. Tree methods for moving interfaces. J Comput Phys, 1999, 151(2): 616—648 [DOI](#)
- Nourgaliev R R, Wiri S, Dinh N T, Theofanous T G. On improving mass conservation of level set by reducing spatial discretization errors. Int J Multiphase Flow, 2005, 31(12): 1329—1336 [DOI](#)
- Sussman M, Smereka P, Osher S. A level set approach for computing solutions to incompressible two-phase flow. J Comput Phys, 1994, 114(1): 146—159 [DOI](#)
- Fedkiw R P, Aslam T, Merriman B, Osher S. A non-oscillatory Eulerian approach to interfaces in multimaterial flows (the ghost fluid

- method). *J Comput Phys*, 1999, 152(2): 457—492 [\[DOI\]](#)
- 21 Zhang H, Zheng L L, Prasad V, Hou T Y. A curvilinear level set formulation for highly deformable free surface problems with application to solidification. *Num Heat Transfer, Part B*, 1998, 34(1): 1—20
- 22 Yang C, Mao Z S. An improved level set approach to the simulation of drop and bubble motion. *Chin J Chem Eng*, 2002, 10(3): 263—272
- 23 Patankar S V. *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*. Washington: Hemisphere, 1980
- 24 Bhaga D, Webber M E. Bubbles in viscous liquids: Shapes, wakes and velocities. *J Fluid Mech*, 1981, 105(1): 61—85 [\[DOI\]](#)
- 25 Ryskin G, Leal L G. Numerical solution of free boundary problems in fluid mechanics. Part 2. Buoyancy-driven motion of a gas bubble through a quiescent liquid. *J Fluid Mech*, 1984, 148(1): 19—35 [\[DOI\]](#)
- 26 Ryskin G, Leal L G. Numerical solution of free boundary problems in fluid mechanics. Part 3. Bubble deformation in an axisymmetric straining flow. *J Fluid Mech*, 1984, 148(1): 37—43 [\[DOI\]](#)
- 27 Tomiyama A, Zun I, Sou A. Numerical analysis of bubble motion with the VOF method. *Nucl Eng Des*, 1993, 141(1-2): 69—82 [\[DOI\]](#)
- 28 Lin T J, Reese J, Hong T, Fan L S. Quantitative analysis and computation of two-dimensional bubble columns. *AIChE J*, 1996, 42(2): 301—318 [\[DOI\]](#)
- 29 Sankaranarayanan K, Shan X, Kevrekidis I G, Sundaresan S. Bubble flow simulation with the lattice Boltzmann method. *Chem Eng Sci*, 1999, 54(21): 4817—4823 [\[DOI\]](#)
- 30 王跃发, 杨超, 毛在砂, 陈家镛. 水平集方法在两相体系颗粒运动数值模拟中的应用. *自然科学进展*, 2004, 14(2): 220—222
- 31 Manga M, Stone H A. Buoyancy-driven interactions between two deformable viscous drops. *J Fluid Mech*, 1993, 256(3): 647—683 [\[DOI\]](#)