中国科学(E辑)
第26卷 第6期 SCIENCE IN CHINA (Series E) 1996年12月

广义预测控制系统闭环特性研究*

席裕庚 张 峻
(上海交通大学自动化研究所,上海 200030)

摘要 利用内模控制结构下对象至GPC闭环特征多项式的系数映射关系,讨论了GPC最优控制律的可解性问题,研究了其闭环特性与设计参数之间的关系,给出了通过适当选择设计参数使GPC闭环系统表现为deadbeat控制的定理,进而还得出了有关闭环系统降阶的新结果,从而大大扩展了已有的结论,并提供了一种基于系数空间映射研究GPC系统的新思路.

关键词 广义预测控制 内模控制结构 可解性 deadbeat控制 降阶系统

近年来,预测控制作为一种有吸引力的先进过程控制算法,已引起了控制理论界和工业应用界强烈的兴趣. 这一类算法普遍具有模型预测、滚动优化、实时校正等基本要素,并能很好地结合辨识、自适应的机制,在工业应用中表现出良好的控制性能和较强的鲁棒性. Clarke等提出的广义预测控制(GPC)[1]更是近年来受到广泛重视和研究的一种预测控制算法. 然而,与预测控制在应用领域中取得的蓬勃发展相比,其理论研究的进展较少,人们普遍感到缺乏一种有效的方法来研究预测控制. 目前有关预测控制算法闭环特性的讨论不多[2~4],较为出色的结果是Clarke等在LQ调节问题的背景下研究GPC系统特性,得出了使闭环系统具有deadbeat控制、闭环稳定等性质的参数选择条件[5].

由于特征多项式对于系统动态特性的分析起着重要的作用,许多学者推导了预测控制算法的闭环传递函数以研究其特性[3]1). 但是它们的形式一般较为复杂,往往带有蕴含形式而未能将已知参数直接表达出来,很难对其作系统化的研究. 本文从一个新的角度,利用内模控制(IMC)[6]结构背景下对象至系统闭环特征多项式的系数映射关系,研究了在各种参数选择条件下最优控制律可解性的问题,并进一步给出了使闭环特征多项式系数为零的重要定理,从而讨论了比文献[5]更具有一般性的GPC系统特性,尤其是大大扩展了其中有关deadbeat控制的结论,给出了可以配置GPC闭环系统阶数的新结论. 这一基于系数映射的新方法更为直接地反映了闭环系统的本质特性,从而提供了一种新的思路来研究和设计预测控制系统.

1 IMC结构下的GPC闭环表达式

我们给出GPC在内模控制结构下闭环传递函数的表达式,具体推导在此不作介绍,仅就

1996-04-08收稿,1996-06-27收修改稿
* 国家自然科学基金资助项目

1) Yoon T W. Robust adaptive predictive control. Ph D Thesis, Dept Eng Sci, Oxford Univ, 1994

有关记号作一说明,GPC 采用如下的 CARIMA 模型:

$$A(z^{-1})y(t) = B(z^{-1})u(t-1) + \xi(t)/\Delta,\ \Delta = 1 - z^{-1}, \tag{1}$$

在上式中, $u(t)$, $y(t)$ 分别为控制输入和输出, $\xi(t)$ 表示均值为零的白噪声序列, A 和 B 为 z^{-1} 的多项式

$$B(z^{-1}) = m_1 + m_2 z^{-1} + \cdots + m_n z^{-n+1}, \tag{2}$$

$$A(z^{-1}) = 1 + p_1 z^{-1} + \cdots + p_n z^{-n}, \tag{3}$$

我们总是假定 A, B 不可约.

考虑性能指标

$$J(t) = E\left\{\sum_{j=N_1}^{N_2}[y(t+j) - \omega(t+j)]^2 + \sum_{j=1}^{N_u}\lambda[\Delta u(t+j-1)]^2\right\}. \tag{4}$$

GPC 的最优控制律由下式给出[1]:

$$\Delta u(t) = \boldsymbol{d}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{w} - \boldsymbol{Y}_{\mathrm{P}}), \tag{5}$$

其中

$$\boldsymbol{d}^{\mathrm{T}} = (1\ 0\ \cdots\ 0)(G^{\mathrm{T}}G + \lambda I)^{-1}G^{\mathrm{T}} \triangleq (d_1 \cdots d_{N_2-N_1+1}), \tag{6}$$

$\boldsymbol{Y}_{\mathrm{P}}$ 是输入保持不变时的系统未来输出. G 是由阶跃响应系数 $\{a_i\}$ 组成的动态矩阵:

$$G = \begin{pmatrix} a_{N_1} & \cdots & 0 & \\ & & \ddots & \\ \vdots & & & 0 \\ & & & \vdots \\ a_{N_2} & & \cdots & a_{N_2-N_u+1} \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} \omega(t+\mathrm{N}_1) \\ \vdots \\ \omega(t+N_2) \end{pmatrix}.$$

为了分析 GPC 的控制性能,与文献[5]相同,假设模型与对象之间无失配,并且不考虑扰动和自适应的情况. 利用文献[7]导出的 GPC 内模控制结构,可得系统的闭环传递函数为

$$G(z^{-1}) = \frac{d_s z^{-1} B(z^{-1})}{A_c(z^{-1})}, \tag{7}$$

式中

$$d_s = \sum_{i=1}^{N_2-N_1+1} d_i,$$

$$A_c(z^{-1}) = 1 + p_1^* z^{-1} + \cdots + p_{n+1}^* z^{-(n+1)}.$$

$A_c(z^{-1})$ 的系数由下式决定:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ p_1^* \\ \vdots \\ p_{n+1}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ b_{N_1+1} - 1 & & 1 & \\ \vdots & \ddots & & \ddots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ b_{N_1+n+1} - b_{N_1+n} & \cdots & \cdots & b_{N_1+1} - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix}, \tag{8}$$

其中
$$b_i = \sum_{j=1}^{N_2-N_1+1} d_j a_{i+j-1}.$$

可以看到，$A_c(z^{-1})$即为闭环系统的特征多项式．由于(8)式正刻划了从对象特征多式项式 $A(z^{-1})$至 $A_c(z^{-1})$的系数映射关系，所以这一映射关系便成为本文研究工作的出发点．

为进一步研究的需要，以下给出几个描述(8)式刻划的特征多项式系数映射关系基本特性的引理．

引理 1.1　设对象的 Z 传递函数为
$$G_P(z^{-1}) = \frac{z^{-1}B(z^{-1})}{A(z^{-1})}, \tag{9}$$
A, B 分别由(2)、(3)式给出，则对象阶跃响应系数$\{a_i\}$和 A, B 的系数之间满足
$$\begin{cases} a_1 = m_1, \\ (a_2 - a_1) + a_1 p_1 = m_2, \\ \quad\vdots \\ (a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) p_1 + \cdots + a_1 p_{n-1} = m_n, \\ (a_{n+1} - a_n) + (a_n - a_{n-1}) p_1 + \cdots + a_1 p_n = 0, \\ (a_{i+2} - a_{i+1}) + (a_{i+1} - a_i) p_1 + \cdots + (a_{i-n+2} - a_{i-n+1}) p_n = 0, \ i \geqslant n. \end{cases} \tag{10}$$

引理 1.2　若 $\lambda = 0$，G 列满秩，则有下列等式成立：
$$\begin{cases} b_{N_1} = 1, \\ b_{N_1-1} = \cdots = b_{N_1-N_u+1} = 0. \end{cases} \tag{11}$$

证　在(6)式中令 $\lambda = 0$，并在其两边同时右乘 G 可得
$$\begin{cases} d_1 a_{N_1} + \cdots + d_{N_2-N_1+1} a_{N_2} = 1, \\ d_1 a_{N_1-1} + \cdots + d_{N_2-N_1+1} a_{N_2-1} = 0, \\ \quad\vdots \\ d_1 a_{N_1-N_u+1} + \cdots + d_{N_2-N_1+1} a_{N_2-N_u+1} = 0, \end{cases}$$
其中 $a_j = 0$，$\forall j \leqslant 0$．然后即可得本引理．

引理 1.3　在 GPC 中，总有 $1 + p_1^* + \cdots + p_{n+1}^* = d_s B(1)$成立．

证　在(8)式的两边同乘以$(1 \cdots 1)$可得
$$1 + p_1^* + \cdots + p_{n+1}^* = (b_{N_1+n+1}\ b_{N_1+n} \cdots b_{N_1+1})\boldsymbol{p} =$$
$$(d_1 \cdots d_{N_2-N_1+1}) \begin{pmatrix} a_{N_1+n+1} & a_{N_1+n} & \cdots & a_{N_1+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{N_2+n+1} & a_{N_2+n} & \cdots & a_{N_2+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}.$$

将(10)式的前 $n+i-1$ 个等式相加即可得
$$a_{i+n-1} + a_{i+n-2} p_1 + \cdots + a_{i-1} p_n = m_1 + \cdots + m_n = B(1), \ i \geqslant 1,$$
所以有 $1 + p_1^* + \cdots + p_{n+1}^* = d_s B(1)$成立．

2 最优控制律的可解性

在本文中,所谓可解性是指在给定性能指标(4)式的条件下,相应的最优控制律是否存在且唯一的问题. 前面由(5)式给出的只是形式上的控制律,是否真正成立还需要通过检验,因此有关可解性的研究是十分有意义的. 由(6)式易知,当$(G^{\mathrm{T}}G+\lambda I)$满秩时,以上优化问题的解存在且唯一,因此只需讨论矩阵$(G^{\mathrm{T}}G+\lambda I)$是否满秩. 首先考虑控制加权不为零的情况.

定理 2.1 若 $\lambda>0$,则 GPC 最优控制律存在且唯一.

上述定理是显然的,因此只要控制加权不为零时,GPC 最优解总存在且唯一;而当控制加权 $\lambda=0$,即性能指标对于控制增量不作惩罚时,不能保证最优控制律一定存在.

下面将着重讨论 $\lambda=0$ 的情况. 此时,当且仅当 G 列满秩时,$(G^{\mathrm{T}}G)$非奇异,即最优控制律可解. 由于当 $N_2-N_1+1<N_u$ 时 G 必列不满秩,所以只需研究 $N_2-N_1+1\geqslant N_u$ 的情况.

定理 2.2 对于 n 阶系统,若 $N_u\leqslant n+1$, $N_2\geqslant N_1+N_u-1$,则 GPC 最优控制律存在且唯一.

由 Markov 参数的性质直接可得本定理.

定理 2.3 对于 n 阶系统,若 $N_u\geqslant n+2$, $N_1\geqslant n+1$,则必不存在唯一的 GPC 最优控制律.

证 (10)式可重写为

$$\begin{bmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_n \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ a_n & \cdots & a_1 & 0 & 0 \\ a_{n+1} & \cdots & \cdots & a_1 & 0 \\ a_{n+2} & \cdots & \cdots & \cdots & a_1 \\ \vdots & & & & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ p_1-1 \\ \vdots \\ p_n-p_{n-1} \\ -p_n \end{bmatrix}, \tag{12}$$

当 $N_u\geqslant n+2$ 及 $N_1\geqslant n+1$ 时,有

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{n+1} & \cdots a_1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{N_u} & \cdots & a_{N_u-n} \cdots & a_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \multicolumn{2}{c}{\underbrace{a_{N_2} \quad \cdots \quad a_{N_2-n}}_{n+1}} & \multicolumn{2}{c}{\underbrace{\cdots \quad a_{N_2-N_u+1}}_{N_u-(n+1)}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ p_1-1 \\ p_n-p_{n-1} \\ -p_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

注意到 G 是上述矩阵最后 N_2-N_1+1 行,所以 G 的列向量线性相关,即必不存在唯一的 GPC 最优控制律.

定理 2.4 对于 n 阶系统,若 $N_u\geqslant n+2$, $N_1\leqslant n$, $N_2\geqslant N_u+N_1-1$ 以及 $m_n\neq 0$,则 GPC 最优控制律存在且唯一.

证 当 $N_u\geqslant n+2$, $N_1\leqslant n$, $N_2\geqslant N_u+N_1-1$ 时,

$$G = \begin{bmatrix} a_{N_1} & \cdots a_1 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_n & \cdots\cdots & a_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ a_{N_u} & \cdots & \cdots & \cdots & a_1 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{N_2} & & \cdots\cdots & & a_{N_2-N_u+1} \end{bmatrix}$$

利用(12)式，可进行如下的列变换：

$$G \xrightarrow[\cdots(n+2)\times(1-p_n)]{(1)\leftarrow(2)\times(p_n-1)+} \begin{bmatrix} m_{N_1} & a_{N_1-1} & \cdots & a_1 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ m_n & a_{n-1} & \cdots\cdots & & a_1 & 0 & \vdots \\ 0 & a_n & \cdots\cdots & & & a_1 \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & & \ddots & 0 \\ 0 & a_{N_u-1} & \cdots\cdots & & & & a_1 \\ \vdots & \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & a_{N_2-1} & \cdots\cdots & & & & a_{N_2-N_u+1} \end{bmatrix} \to$$

$$\cdots \to \begin{bmatrix} \overbrace{\begin{matrix} * & \cdots & * \\ \vdots & & \vdots \\ * & & \vdots \\ m_n & \ddots & \vdots \\ & \ddots & * \\ 0 & & m_n \end{matrix}}^{N_u-n} & * \\ 0 & \begin{matrix} a_n & \cdots & a_1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{N_2-N_u+n} & \cdots & a_{N_2-N_u+1} \end{matrix} \end{bmatrix}.$$

因为 $\begin{bmatrix} a_n & \cdots & a_1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{N_2-N_u+n} & \cdots & a_{N_2-N_u+1} \end{bmatrix}$ 列满秩以及 $m_n \neq 0$，所以 GPC 最优控制律存在且唯一.

以上 4 个定理完整地给出了 λ, N_1, N_u 各种可能的选取条件下 GPC 最优控制律的可解性结果. 应当指出，对于 N_2 只需满足使 G 列满秩的必要条件 $N_2 \geqslant N_1 + N_u - 1$ 即可. 有关可解性的讨论将有助于选择合适的设计参数，并保证我们在控制有意义的范围内讨论问题.

3　GPC 的 deadbeat 控制性质

本节将着重研究 GPC 中的 deadbeat 控制问题. 众所周知，受控系统表现为 deadbeat 控制

时,其闭环传递函数具有如下的形式:

$$G(z^{-1}) = l_1 z^{-1} + \cdots + l_n z^{-n}, \tag{13}$$

即在 n 个采样周期之后,系统的脉冲响应将变为零,从而意味着系统在 n 拍之内达到稳态. deadbeat 控制的形式简单,易于分析,是进一步深入研究的基础. 由(7)式以及(13)式可知,要使 GPC 系统实现 deadbeat 控制,只需将其所有闭环极点都配置于原点,保证有 $A_c(z^{-1})=1$ 成立即可. 这一条件等价于 $p_1^* = \cdots = p_{n+1}^* = 0$,所以我们首先讨论如何使闭环特征多项式系数为零的条件.

由前面的引理,不难得到如下的推论.

推论 3.1 对 n 阶对象,若 $\lambda = 0$ 以及 G 列满秩,则 $p_{n+1}^* = 0$.

证 由引理 1.2,

$$b_{N_1} = d_1 a_{N_1} + \cdots d_{N_2-N_1+1} a_{N_2} = 1,$$

故

$$p_{n+1}^* = [b_{N_1+n+1} - b_{N_1+n} \cdots b_{N_1+1} - 1]\boldsymbol{p} =$$

$$[d_1 \cdots d_{N_2-N_1+1}]\begin{bmatrix} a_{N_1+n+1} - a_{N_1+n} \cdots a_{N_1+1} - a_{N_1} \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{N_2+n+1} - a_{N_2+n} \cdots a_{N_2+1} - a_{N_2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix}$$

再利用引理 1.1,有 $p_{n+1}^* = 0$.

以上推论给出了闭环特征多项式系数 p_{n+1}^* 为零的条件. 更进一步,可以得出以下任一系数 p_i^* 为零的条件.

定理 3.1 对 n 阶对象,若 $\lambda = 0$ 以及 G 列满秩且 $N_1 \geqslant n+1-i$, $N_u \geqslant n+2-i$,则

$$p_i^* = 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

证 由给定的条件,引理 1.2 成立,

$$p_i^* = [b_{N_1+i} - b_{N_1+i-1} \cdots 1 \overbrace{0 \cdots 0}^{n-i}]\boldsymbol{p},$$

因

$$N_u \geqslant n + 2 - i$$

所以

$$N_1 + i - n - 1 \geqslant N_1 - N_u + 1,$$

由此有

$$b_{N_1} = 1 \text{ 及 } b_{N_1-1} = \cdots = b_{N_1+i-n-1} = 0,$$

故

$$p_1^* = (b_{N_1+i} - b_{N_1+i-1} \cdots b_{N_1} - b_{N_1-1} \cdots b_{N_1+i-n} - b_{N_1+i-n-1})\boldsymbol{p} =$$

$$(d_1 \cdots d_{N_2-N_1+1})\begin{pmatrix} a_{N_1+i} - a_{N_1+i-1} \cdots a_{N_1} - a_{N_1-1} \cdots a_{N_1+i-n} - a_{N_1+i-n-1} \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{N_2+i} - a_{N_2+i-1} \cdots a_{N_2} - a_{N_2-1} \cdots a_{N_2+i-n} - a_{N_2+i-n-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix},$$

因

$$N_1 \geqslant n+1-i$$

所以

$$N_1+i-n-1 \geqslant 0,$$

利用引理 1.1 有 $p_i^*=0$.

以上定理给出了任一 p_i^* 等于零的条件，这是本文的一个重要定理，由引可通过适当选择参数将闭环特征多项式的全部或部分系数配置为零，结合 deadbeat 控制的要求，立即可以得出以下使 GPC 为 deadbeat 控制的定理.

定理 3.2　对于 n 阶对象，若 G 列满秩以及 $\lambda=0$, $N_1 \geqslant n$, $N_u \geqslant n+1$，则 GPC 表现为 deadbeat 控制，且不论如何选择 N_1 和 N_u，系统的动态特性均相同.

证　在给定条件下，对所有 $i=1,2,\cdots,n$, $N_u \geqslant n+2-i$, $N_1 \geqslant n+1-i$ 均成立. 所以由定理 3.1，有 $p_1^*=\cdots=p_n^*=0$ 成立. 又由推论 3.1 有 $p_{n+1}^*=0$，故

$$A_c(z^{-1})=1,\ G(z^{-1})=d_s z^{-1} B(z^{-1}).$$

即 GPC 为 deadbeat 控制.

又根据引理 1.3 有 $1+p_1^*+\cdots+p_{n+1}^*=d_s B(1)$，
因为此时 $p_1^*=\cdots=p_{n+1}^*=0$，故 $d_s=1/B(1)$，故 $G(z^{-1})=z^{-1}B(z^{-1})/B(1)$，
即闭环都具有相同的动态特性，与参数选择无关.

更进一步，结合前面讨论的最优解的可解性，可得：

推论 3.2　对于 n 阶对象，GPC 在如下条件为 deadbeat 控制器：

(1) $\lambda=0$, $N_u=n+1$, $N_1 \geqslant n$, $N_2 \geqslant N_1+n$ 或

(2) $\lambda=0$, $N_u \geqslant n+2$, $N_1=n$, $N_2 \geqslant N_u+n-1$ 以及 $m_n \neq 0$.

注　(1) Clarke 在文献[5]中提出，当 $\lambda=0$, $N_1=n^*$, $N_2 \geqslant 2n^*-1$, $N_u=n^*$ 时 GPC 表现为 deadbeat 控制，由于这一结果是在增量型的状态空间模型下取得的，故应有 $n^*=n+1$. 显然，推论 3.2 大大放松了文献[5]的条件.

(2) 由于此时闭环系统的传递函数为：

$$G(z^{-1})=(m_1 z^{-1}+\cdots+m_n z^{-n})/\sum_{i=1}^{n} m_i.$$

所以闭环系统的阶跃响应可以精确地求出，并且只取决于对象的分子多项式. 这样，我们不仅得到了 deadbeat 控制参数选取的条件，而且还可以求得其动态响应.

4　GPC 的降阶性质

由(8)式的映射关系可知，GPC 的闭环特征多项式一般为 $n+1$ 阶，即闭环系统有 $n+1$ 个特征根. 由于闭环系统的动态复杂性取决于特征根的位置，若能将其中某些特征根置于零点，它们将不再影响动态过程，闭环动态复杂性将得到简化. 这在闭环特征多项式中表现为阶数的降低. 因此，研究 GPC 闭环系统的降阶性质将是十分有意义的. 上节的 deadbeat 性质意味着将全部闭环特征根置于零点，即特征多项式降为零阶，这只是降阶的极端情况. 以下将根据上节的定理 3.1，导出 GPC 降阶的参数选择条件.

定理 4.1 对于 n 阶对象，若 $\lambda=0$, $N_2\geqslant N_1+N_u-1$，则 GPC 闭环系统的阶数 n_c 由下式给出：

$$n_c=\begin{cases} n-N_u+1, & 1\leqslant N_u\leqslant n, N_1\geqslant N_u-1, \\ n-N_1, & 1\leqslant N_1\leqslant n-1, N_u\geqslant N_1+1, \\ 0, & N_u\geqslant n+1, N_1\geqslant n. \end{cases}$$

证 首先，由推论 3.1 有 $p^*_{n+1}=0$. 然后我们利用定理 3.1 来证明本定理：

(1)当 $1\leqslant N_u\leqslant n$, $N_1\geqslant N_u-1$ 时，对所有的 $n-N_u+2\leqslant i\leqslant n$，有 $N_u=n+2-(n-N_u+2)\geqslant n+2-i$ 以及 $N_1\geqslant N_u-1\geqslant n+1-i$. 利用定理 3.1, $p^*_{n-N_u+2}=\cdots=p^*_n=0$，即 $n_c=n-N_u+1$.

(2)当 $1\leqslant N_1\leqslant n-1$, $N_u\geqslant N_1+1$ 时，对所有的 $n-N_1+1\leqslant i\leqslant n$，有 $N_1=n+1-(n-N_1+1)\geqslant n+1-i$ 以及 $N_u\geqslant N_1+1\geqslant n+2-i$，
故 $p^*_{n-N_1+1}=\cdots=p^*_n=0$，即 $n_c=n-N_1$.

(3)即为定理 3.1 的情形.

上述定理给出了当 $\lambda=0$ 时所有各种可能的 N_1, N_u 选取情况下的闭环系统阶数. 联系到前面给出的有关控制律可解性的讨论，可以得出如下 GPC 系统降阶的形象说明. 在给定参数选择的条件下，由图 1 可直接查出相应闭环系统的阶数. 注意在图中×所对应的参数选择正是文献[5]中 deadbeat 控制的结果，而两条 0 线对应的则是本文推论 3.3 给出的结果.

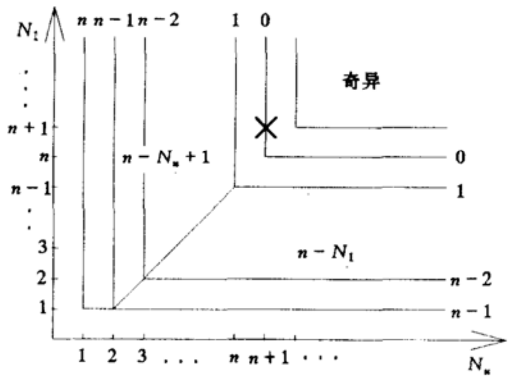

图 1 N_1, N_u 与闭环系统阶数的关系

定理 4.1 给出的使 GPC 闭环系统降阶的条件，是一个未见诸文献报道的新结果，对于系统的设计和分析是十分有意义的. 通过合适地选取系统设计参数，我们可以在{0, …, $n+1$}集合内任意配置 GPC 闭环系统的阶数. 特别地，还可以将 GPC 系统配置为一阶系统.

推论 4.1 对于 n 阶对象，若 $\lambda=0$，且

(1) $N_u=n$, $N_1\geqslant n-1$, $N_2\geqslant N_1+n-1$ 或

(2) $N_1=n-1$, $N_u\geqslant n$, $N_2\geqslant N_u+n-2$,

则 GPC 为一阶系统，且有 $A_c(z^{-1})=1+p_1^*z^{-1}$，其中 $p_1^*=d_sB(1)-1$.

证 同引理 1.3 我们有 $1+p_1^*+\cdots+p^*_{n+1}=d_sB(1)$. 由于现有 $p_2^*=\cdots=p^*_{n+1}=0$，故 $p_1^*=d_sB(1)-1$.

若根据推论 4.1 选取设计参数，则闭环系统降为一阶. 通过检验是否有 $|p_1^*|<1$ 成立，立即可以得到系统的稳定性结论，且此时的系统闭环传递函数为

$$G(z^{-1})=\frac{d_sz^{-1}B(z^{-1})}{A_c(z^{-1})}=\frac{d_sm_1z^{-1}}{1+p_1^*z^{-1}}+\cdots+\frac{d_sm_nz^{-n}}{1+p_1^*z^{-1}},$$

系统的动态响应也可以直接由简单叠加得到.

5 结论

本文利用 GPC 在 IMC 结构下从对象至闭环特征多项式之间的系数映射关系，分析了闭环系统最优解的可解性问题和 deadbeat 控制、降阶等特性，从而有利于 GPC 闭环系统的设计和分析．这些结论不仅同样适用于 DMC 等其他预测控制系统，而且也为进一步的研究提供了一种新的思路．

参　考　文　献

1 Clarke D W, Mohtadi C, Tuffs P S. Generalized predictive control (Part 1 and 2). Automatica, 1987, 23:137～160

2 Mohtadi C, Clarke D W. Generalized perdictive control, LQ or pole placement: a unified approach. Proc 25th CDC Conf, Athens, Greece, 1986. 1 536～1 541

3 Maurath P R, Mellichamp D A, Seborg D E. Predictive controller design for single input/single output (SISO) systems. Ind Eng Chem Res, 1986, 27:956～963

4 McIntosh A R, Shah S L, Fisher D G. Analysis and tuning of adaptive generalized predictive control. The Canadian Journal of Chemical Engineering, 1991, 69:97～110

5 Clarke D W, Mohtadi C. Property of generalized predictive control. Automatica, 1989, 25: 859～875

6 Garcia C E, Morari M. Internal model control, 1. a unifying review and some new results. IEC Process Des Dev, 1982, 21: 308～323

7 席裕庚，厉隽怿．广义预测控制系统的闭环分析．控制理论与应用，1991，8(4):419～424