

点测量点控制的分布参数系统

宋 健 于 景 元

摘 要

本文是文献[1]的继续,应用广义函数空间—阴范空间作为状态空间,对带有常微分控制器的点测量点控制问题作了进一步的研究.在阴范空间中证明了关于本征值问题和定解问题的一些定理,从而对赋予振型分析方法给以严格的理论基础.此外,关于算子的延拓定理可以应用到含广义系数的线性偏微分方程的计算和研究中去.

在文献[1]中,我们讨论了由常微分方程作线性反馈控制分布参数系统的一般理论和分析方法.在那里,受控对象的状态测量和控制都假定为集中于某一“有限”区域上,尽管这个区域可以很小.但文献[1]中得到的结论,一般不能应用于纯点测量和纯点控制的情况.然而,在工程实践中,这种情况却是经常出现的.例如集中力和力矩的控制,点或线加热温度控制等等.这就要求我们从点测量和点控制以及状态参数的分布性这一特点出发,建立严格的系统分析方法,为工程设计和试验分析提供理论基础.

我们采用的主要方法,是在有限阶广义函数空间(阴范空间)中的本征函数(振型)展开和线性算子扰动理论.最后我们将看到,文献[1]中的主要结果都可以稍加改变而应用到纯点测量和纯点控制的情况^[2].

一、点测量和点控制

采用文献[1]中的符号,讨论如下受控运动方程

$$m(p) \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t} C v + B v + A v = -G z, \quad (1.1)$$

式中 $v(p, t)$ 是自变量 $p = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 和时间 t 的函数,代表受控对象在 t 时刻的状态; A, B, C 是微分算子; G 是反馈控制算子, $z = \{z_1, z_2, \dots, z_m\}$ 是控制器的输出,

$$G z = \sum_{i=1}^m b_i(p)(z, g_i) = \sum_{i=1}^m b_i(p) \left(\sum_{j=1}^n z_j g_{ij} \right), \quad (1.2)$$

$g_i = \{g_{1i}, g_{2i}, \dots, g_{ni}\}$, $i = 1, 2, \dots, m$, 是 m 个 n 维常向量,代表每一控制通道的功率放大系数. $b_i(p)$, $i = 1, 2, \dots, m$, 是 m 个由实际物理问题确定的空间变量 p 的函数,本文中,它们可以是 δ -函数及其微商.例如,对弹性梁在 x_i 点实行集中力控制时,则 $b_i(x) = \delta(x - x_i)$, 在 x_i 点实行集中力矩控制时,则 $b_i(x) = \delta'(x - x_i) = \frac{d\delta(x - x_i)}{dx}$, 等等.

如文献[1]中所述, 控制作用 $\mathbf{z}(t)$ 由常微分方程描述的控制器的输出决定

$$\frac{d\mathbf{z}(t)}{dt} = J\mathbf{z} + S_1 v + S_2 \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right), \quad (1.3)$$

其中

$$S_i v = \sum_{\alpha=1}^l \langle \tilde{S}_{i\alpha} v, u_{i\alpha} \rangle_0 \mathbf{k}_{i\alpha}, \quad i = 1, 2, \quad (1.4)$$

S_i 是测量算子, $\mathbf{k}_{i\alpha}$ 是一组 n 维常向量, 由测量传感器的放大系数和信号通道的结构决定. $\tilde{S}_{i\alpha}$ 是微分算子或有界算子; $u_{i\alpha}$ 是由测量传感器安装位置所决定的函数. 在点测量时, 它们可以是 δ -函数及其微商. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示 $\mathcal{L}^2(Q)$ 中的内积.

采用文献[1]中的变换方法, 令 $v(p, t) = v_1$, $\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial v_1}{\partial t} = v_2$, (1.1) 和 (1.2) 式可化成一阶线性方程组

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_1}{\partial t} &= v_2 \\ \frac{\partial v_2}{\partial t} &= -Av_1 - Bv_1 - Cv_2 - GS_2 v_1 - Gy \\ \frac{dy}{dt} &= Jy + (S_1 + JS_2)v_1, \end{aligned} \quad (1.5)$$

式内 $\mathbf{y} = \mathbf{z} - S_2 v_1$ 是 t 的 n 维向量函数.

用分离系数法求解方程组 (1.5), 令 $v_1(p, t) = e^{\lambda t} u_1(p)$, $v_2(p, t) = e^{\lambda t} u_2(p)$, $\mathbf{y} = e^{\lambda t} \tilde{\mathbf{y}}$, 代入 (1.5) 式并仍记 $\tilde{\mathbf{y}}$ 为 $\mathbf{y}$, 便得到如下的本征值问题

$$\begin{aligned} \lambda u_1 &= u_2, \\ \lambda u_2 &= -Au_1 - Bu_1 - Cu_2 - GS_2 u_1 - Gy, \\ \lambda \mathbf{y} &= J\mathbf{y} + (S_1 + JS_2)u_1. \end{aligned} \quad (1.6)$$

现在我们可以看到, 无论是方程 (1.5) 还是本征值问题 (1.6), 在纯点测量和纯点控制的情况下, 都不能在 $\mathcal{L}^2(Q)$ 空间中求解, 因为测量算子中的 $a_{i\alpha}$ 和反馈控制算子中的 b_i 可以是广义函数. 因此, 必须扩大 $\mathcal{L}^2(Q)$ 空间, 使其包含 $a_{i\alpha}$ 和 b_i 这样的广义函数作为自己的元, 从而赋予方程 (1.5) 和 (1.6) 式以确切的含义, 同时又能和问题的物理特点相一致.

为了以后书写方便, 把 (1.6) 式写成矩阵算子的形式

$$\lambda Y = \mathcal{B}_0 Y + \mathcal{B}_1 Y, \quad (1.6')$$

这里 $Y = \{u_1, u_2, \mathbf{y}\}$,

$$\mathcal{B}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -A-B & -C & 0 \\ 0 & 0 & J \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -GS_2 & 0 & -G \\ S_1 + JS_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.7)$$

二、阴范状态空间和其中的线性算子

一般的广义函数空间, 或者因为内部结构复杂, 不便于实际应用^[3,4] 或者由于对方程系数的光滑性要求太严^[5-7], 致使应用时造成困难. 一个有效的方法是根据受控对象本身的特点, 把 $\mathcal{L}^2(Q)$ 空间适当扩大^[6], 使它足以包含给定阶的广义函数, 并且能够赋予新的希尔伯特

范数,把这样得到的函数空间作为系统的状态空间,既保留了希尔伯特空间的优点,又能充分考虑到实际问题的物理特征.下面我们就用这种方法来解决上面提出的控制问题.

设 A 是定义于 $\mathcal{L}^2(Q)$ 中的闭稠定线性算子,其定义域为 $D(A)$,对 $D(A)$ 中的元赋予图象范数

$$\|u\|_{+1} = \langle u, u \rangle_{+1}^{1/2} = (\langle u, u \rangle_0 + \langle Au, Au \rangle_0)^{1/2} \quad \forall u \in D(A), \quad (2.1)$$

则 $D(A)$ 成为希尔伯特空间,记为 $H_{+1}(A)$, $\|\cdot\|_{+1}$ 是 $H_{+1}(A)$ 上的范数.由于任意闭稠定线性算子有极分解表达式^[8], $A = U\sqrt{A^*A}$,其中 U 是部分等距算子,故有 $D(A) = D(\sqrt{A^*A}) = D(\sqrt{1 + A^*A})$.因此,图象范数 (2.1) 式可以等价地定义为^[9]:

$$\|u\|_{+1} = \langle \sqrt{1 + A^*A}u, \sqrt{1 + A^*A}u \rangle_0^{1/2} = \langle Tu, Tu \rangle_0^{1/2} \quad \forall u \in H_{+1}(A), \quad (2.2)$$

式内 $T = \sqrt{1 + A^*A}$.显然 T 有有界逆,记 $R = T^{-1} = (1 + A^*A)^{-1/2}$.不难验证, T 的值域是整个空间 $\mathcal{L}^2(Q)$,因此按 (2.2) 式, T 是由 $H_{+1}(A)$ 到 $H_0 = \mathcal{L}^2(Q)$ 上的等距算子,而 R 是 H_0 到 $H_{+1}(A)$ 上的等距算子.

由定义直接推出, $H_{+1}(A) \subset H_0$, 且 $H_{+1}(A)$ 在 H_0 中稠.从 (2.1) 和 (2.2) 式还可以得到下述关系

$$\begin{aligned} \|u\|_0 &\leq \|u\|_{+1} \quad \forall u \in H_{+1}(A), \\ \langle f, g \rangle_0 &= \langle Rf, Rg \rangle_{+1} \quad \forall f, g \in H_0, \end{aligned} \quad (2.3)$$

现在考虑 $H_{+1}(A)$ 的对偶空间,即一切定义于 $H_{+1}(A)$ 上的有界线性泛函的全体.首先我们指出,对每一 $f \in H_0$, 线性泛函 $f(u) = \langle f, u \rangle_0$, $u \in H_{+1}(A)$, 由于 $|f(u)| = |\langle f, u \rangle_0| \leq \|f\|_0 \|u\|_0 \leq \|f\|_0 \|u\|_{+1}$, 可知 $f(u)$ 是 $H_{+1}(A)$ 上的有界线性泛函,所以 f 属于 $H_{+1}(A)$ 的对偶空间,即 H_0 是 $H_{+1}(A)$ 对偶空间的子集.

对于 H_0 中的每一元 f , $\langle f, u \rangle_0$ 作为 $H_{+1}(A)$ 上的有界线性泛函,可以赋予范数

$$\|f\|_{-1} = \sup_{u \in H_{+1}(A)} \frac{|\langle f, u \rangle_0|}{\|u\|_{+1}}, \quad f \in H_0. \quad (2.4)$$

下面将会看到,按此范数完备化 H_0 以后,得到的就是 $H_{+1}(A)$ 的对偶空间.

为了深入讨论 $H_{+1}(A)$ 对偶空间的构成,可以在 H_0 中引入另一种内积和由它产生的范数.对任意 $f, g \in H_0$, 定义

$$\langle f, g \rangle_{-1} = \langle Rf, Rg \rangle_0. \quad (2.5)$$

由于 R 是 H_0 上自伴正定算子,容易验证, (2.5) 式满足内积的一切要求.由它引出的范数,我们仍记为 $\|\cdot\|_{-1}$

$$\|f\|_{-1} = \langle Rf, Rf \rangle_0^{1/2} = \|Rf\|_0 \quad \forall f \in H_0. \quad (2.6)$$

现在我们证明 (2.4) 和 (2.5) 式定义的范数是相等的.

引理 2.1. 对任意的 $f \in H_0$, (2.4) 和 (2.5) 式定义的范数是相等的,即

$$\|f\|_{-1} = \sup_{u \in H_{+1}(A)} \frac{|\langle f, u \rangle_0|}{\|u\|_{+1}} = \|Rf\|_0 \quad \forall f \in H_0. \quad (2.7)$$

证. 对任意 $f \in H_0$, 由 (2.4) 式定义的范数

$$\|f\|_{-1} = \sup_{u \in H_{+1}(A)} \frac{|\langle f, u \rangle_0|}{\|u\|_{+1}} = \sup_{\|u\|_{+1}=1} |\langle f, u \rangle_0| = \sup_{\|Tu\|_0=1} |\langle Rf, Tu \rangle_0| \leq \|Rf\|_0.$$

另一方面,因为 $R^2f \in H_{+1}(A)$, 置 $u = R^2f$, 那么,

$$\frac{|\langle f, u \rangle_0|}{\|u\|_{+1}} = \frac{\|Rf\|_0^2}{\|R^2f\|_{+1}} = \frac{\|Rf\|_0^2}{\|Rf\|_0} = \|Rf\|_0.$$

由此得到,

$$\|f\|_{-1} = \sup_{u \in H_{+1}(A)} \frac{|\langle f, u \rangle_0|}{\|u\|_{+1}} \geq \|Rf\|_0 \quad \forall u \in H_{+1}(A),$$

所以 (2.4) 和 (2.5) 式定义的范数相等. 今后对两种范数不加区别, 统记成 $\|\cdot\|_{-1}$.

按范数 $\|\cdot\|_{-1}$ 完备化 H_0 所得到的空间, 记为 $H_{-1}(A)$. 我们现在证明, $H_{-1}(A)$ 就是 $H_{+1}(A)$ 的对偶空间.

定理 2.1. 对任意 $\alpha \in H_{-1}(A)$, 表达式

$$\alpha(u) = \langle \alpha, u \rangle_0 \quad \forall u \in H_{+1}(A) \quad (2.8)$$

的右端有意义而且是 $H_{+1}(A)$ 上的有界线性泛函, 反之, $H_{+1}(A)$ 上的任意有界线性泛函 $l(u)$, 必可唯一地表示成

$$l(u) = \langle l, u \rangle_0, \quad u \in H_{+1}(A),$$

而 $l \in H_{-1}(A)$.

证. 先证定理的第一部分. 首先指出, 对任意 $f \in H_0$, 因为 $|\langle f, u \rangle_0| = |\langle Rf, Tu \rangle_0| \leq \|Rf\|_0 \|Tu\|_0 = \|f\|_{-1} \|u\|_{+1}$, 所以 $|\langle f, u \rangle_0| \leq \|f\|_{-1} \|u\|_{+1}$ 成立. 现对任意的 $\alpha \in H_{-1}(A)$, 由于 H_0 在 $H_{-1}(A)$ 中稠, 必存在 H_0 中的元列 $\{f_n\}$, 使得当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\lim \|f_n - \alpha\|_{-1} = 0$, 但对每一 f_n , 有 $|\langle f_n, u \rangle_0| \leq \|f_n\|_{-1} \|u\|_{+1}$, 所以必有 $|\langle \alpha, u \rangle_0| \leq \|\alpha\|_{-1} \|u\|_{+1}$, 这就说明, 对任意的 $\alpha \in H_{-1}(A)$, $\langle \alpha, u \rangle_0$ 是 $H_{+1}(A)$ 上的有界线性泛函.

反之, 若 $l(u)$ 是 $H_{+1}(A)$ 上的任意有界线性泛函, 依有界线性泛函表现定理, 存在一个 $v_l \in H_{+1}(A)$, 使 $l(u) = \langle v_l, u \rangle_{+1}$ 成立, 但 $\langle v_l, u \rangle_{+1} = \langle Tv_l, Tu \rangle_0$, 令 $Tv_l = f_l \in H_0$, 则有 $l(u) = \langle f_l, Tu \rangle_0$. 由于 $H_{+1}(A)$ 在 H_0 中稠, 故存在 $H_{+1}(A)$ 中的元列 $\{u_n\}$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 使得 $\lim \|u_n - f_l\|_0 = 0$. 而对任意固定的 n , 有 $\langle u_n, Tu \rangle_0 = \langle Tu_n, u \rangle_0$. 另一方面, 由于 $\{u_n\}$ 是 H_0 中的基本列, 所以有 $\|T(u_n - u_m)\|_{-1} = \|RT(u_n - u_m)\|_0 = \|u_n - u_m\|_0 \rightarrow 0$, 当 $n, m \rightarrow \infty$ 时. 这说明 $\{Tu_n\}$ 是 $H_{-1}(A)$ 中的基本列, 由 $H_{-1}(A)$ 的完备性, 必存在一元 $l \in H_{-1}(A)$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\lim \|Tu_n - l\|_{-1} = 0$, 所以 $l(u) = \langle l, u \rangle_0$.

若还有一 $\beta \in H_{-1}(A)$, 使 $l(u) = \langle \beta, u \rangle_0$, 那时由内积的双线性性, 必有 $\langle l - \beta, u \rangle_0 = 0$, 它是 $H_{+1}(A)$ 上的零泛函, 所以 $\|l - \beta\|_{-1} = 0$, 即 $l = \beta$. 证完.

定理 2.2. $H_{-1}(A)$ 中的任意元 α , 均可表达成

$$\alpha = f_1 + A^+ f_2, \quad f_1, f_2 \in H_0. \quad (2.9)$$

这里 A^+ 是作为从 $H_{+1}(A)$ 到 H_0 中的算子 A 的伴随算子, 即 A^+ 是从 H_0 到 $H_{-1}(A)$ 中的算子.

证. 依定理 2.1 知道, $H_{+1}(A)$ 上的每一有界线性泛函 $\alpha(u)$, 均可表成 $\alpha(u) = \langle \alpha, u \rangle_0 = \langle f_\alpha, Tu \rangle_0$, $f_\alpha \in H_0$. 在 H_0 的子集 $D(A^*A)$ 上, 显然有 $T^2 = (1 - i\sqrt{A^*A}) \cdot (1 + i\sqrt{A^*A})$, 依文献 [8] 中第三章定理 16 知, 在 $D(A)$ 中 $T = V(1 + i\sqrt{A^*A})$, 其中 V 是 H_0 中的部分等距算子. 根据同一定理又知 $\sqrt{A^*A} = UA$, 所以有 $T = V(1 + iUA)$, U 也是 H_0 中的部分等距算子. 于是, 对 $\alpha(u)$ 有恒等式

$$\alpha(u) = \langle f_\alpha, V(1 + iUA)u \rangle_0 = \langle V^* f_\alpha, (1 + iUA)u \rangle_0. \quad (2.10)$$

显然, 如果 $f \in H_0$, $\langle f, Au \rangle_0$ 是定义在 $H_{+1}(A)$ 上的有界线性泛函. 事实上, $|\langle f, Au \rangle_0| \leq \|f\|_0 \|Au\|_0 = \|f\|_0 \|RAu\|_{+1}$. 而 RA 是 $H_{+1}(A)$ 中的闭算子, 且定义在全空间 $H_{+1}(A)$ 上, 因此 RA 是 $H_{+1}(A)$ 上的有界算子, 所以 $\|RAu\|_{+1} \leq \|RA\|_{+1} \|u\|_{+1}$, $|\cdot|_{+1}$ 表示 $H_{+1}(A)$ 上的算子范数. 由此得到 $|\langle f, Au \rangle_0| \leq \|f\|_0 \|RA\|_{+1} \|u\|_{+1}$. 依定理 2.1 必有 $\alpha \in H_{-1}(A)$, 使 $\langle f, Au \rangle_0 = \langle \alpha, u \rangle_0$. 现令 $\alpha = A^+ f$, 则 A^+ 是 A 的伴随算子, 它映 H_0 到 $H_{-1}(A)$ 中. 再回到 (2.10) 式,

$$\alpha(u) = \langle V^* f_a, u \rangle_0 + \langle V^* f_a, iU Au \rangle_0 = \langle V^* f_a, u \rangle_0 - i \langle A^+ U^* V^* f_a, u \rangle_0,$$

如记 $V^* f_a = f_1$, $-iU^* V^* f_a = f_2$, 则有

$$\alpha(u) = \langle f_1 + A^+ f_2, u \rangle_0,$$

所以 $\alpha = f_1 + A^+ f_2$, $f_1, f_2 \in H_0$, 证完.

为了今后讨论方便, 我们需要将算子 T, R 进行延拓. 首先延拓 T . T 是 $H_{+1}(A)$ 到 H_0 上的等距算子, 我们指出它可以延拓到 H_0 上而成为 H_0 到 $H_{-1}(A)$ 上的等距算子.

线性泛函 $\langle f, Tu \rangle_0$, $f \in H_0$ 在 $H_{+1}(A)$ 上是有界的, 这是由于 $|\langle f, Tu \rangle_0| \leq \|f\|_0 \cdot \|Tu\|_0 = \|f\|_0 \|u\|_{+1}$. 根据定理 2.1, 必有 $\alpha_f \in H_{-1}(A)$, 使

$$\langle f, Tu \rangle_0 = \langle \alpha_f, u \rangle_0,$$

令 $\alpha_f = T^+ f$, T^+ 就是 T 的伴随算子, 它把 H_0 映到 $H_{-1}(A)$ 上. 容易证明, T^+ 就是 T 的延拓, 今后记 $\mathbf{T} = T^+$. 我们指出 $\mathbf{T}$ 是 H_0 到 $H_{-1}(A)$ 上的等距算子. 事实上, 对 $\forall f \in H_0$, $\|\mathbf{T}f\|_{-1} = \|f\|_0$. 因为 $H_{+1}(A)$ 在 H_0 中稠, 必存在 $H_{+1}(A)$ 中的元列 $\{u_n\}$, 使得 $\lim_n \|u_n - f\|_0 = 0$, 因此, $\lim_n \|u_n\|_0 = \|f\|_0$. 对 $u_n, Tu_n \in H_0$ 下述极限存在

$$\lim_n \|Tu_n - \mathbf{T}f\|_{-1} = \lim_{n,m} \|Tu_n - Tu_m\|_{-1} = \lim_{n,m} \|T(u_n - u_m)\|_{-1} = \lim_{n,m} \|u_n - u_m\|_0 = 0,$$

所以 $Tu_n \rightarrow \mathbf{T}f$, 也就是 $\|Tu_n\|_{-1} \rightarrow \|\mathbf{T}f\|_{-1}$, 但 $\|Tu_n\|_{-1} = \|u_n\|_0 \rightarrow \|f\|_0$, 所以 $\|\mathbf{T}f\|_{-1} = \|f\|_0$. 这说明 $\mathbf{T}$ 是等距映 H_0 到 $H_{-1}(A)$ 中. 而且容易看出 $\mathbf{T}$ 的值域必是整个空间 $H_{-1}(A)$. 若 $\alpha \in H_{-1}(A)$ 不属于 $\mathbf{T}$ 的值域. 因为 $\langle \alpha, u \rangle_0$ 是 $H_{+1}(A)$ 上的有界线性泛函, 因此有

$$\langle \alpha, u \rangle_0 = \langle v_u, u \rangle_{+1} = \langle Tv_u, Tu \rangle_0 = \langle \mathbf{T}Tv_u, u \rangle_0,$$

所以 $\alpha = \mathbf{T}Tv_u$, 这和假设矛盾. 由此 $\mathbf{T}$ 确实是 H_0 到 $H_{-1}(A)$ 上的等距算子. 不难验证, $\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{R}$ 是 R 的延拓, 它是 $H_{-1}(A)$ 到 H_0 上的等距算子. 通过上述, 我们可以得到以下关系

$$\begin{aligned} \|\alpha\|_{-1} &= \|\mathbf{R}\alpha\|_0 = \|\mathbf{R}\mathbf{R}\alpha\|_{+1} \quad \forall \alpha \in H_{-1}(A), \\ \|u\|_{+1} &= \|Tu\|_0 = \|\mathbf{T}Tu\|_{-1} \quad \forall u \in H_{+1}(A). \end{aligned} \quad (2.11)$$

为了明确三个空间的关系, 常称 $H_{-1}(A)$ 为闭算子 A 对应的阴范空间, $H_{+1}(A)$ 叫作阳范空间, H_0 则称为装备了阴阳空间的基本空间. 而 $R = (1 + A^*A)^{-\frac{1}{2}}$ 叫作装备算子.

为了研究第一节中提出的控制问题, 我们取 $H_{-1}(A)$ 作为系统的状态空间. 在弹性梁和板这类问题中, 易于证明, 它必然含有 δ -函数及其微商. 在一般情况下, 我们可以证明下述结论.

设 $H_{+1}(A)$ 中的函数在定义域 Ω 和边界 $\partial\Omega = \Gamma$ 上有 q 阶连续微商. 我们定义 $\delta(p - p_0)$ 及其微商 $\delta^{(q)}(p - p_0)$ 如下

$$\begin{aligned} \langle u, \delta(p - p_0) \rangle_0 &= \int_{\Omega} u(p) \delta(p - p_0) dp = u(p_0), \\ \langle u, \delta^{(q)}(p - p_0) \rangle_0 &= \int_{\Omega} u(p) \cdot \delta^{(q)}(p - p_0) dp = (-1)^q u^{(q)}(p_0), \end{aligned}$$

$$u \in H_{+1}(A), \quad (2.12)$$

式内 $u^{(q)}(p) = \frac{\partial^q u}{\partial x_1^{q_1} \cdots \partial x_n^{q_n}}, \quad q = q_1 + q_2 + \cdots + q_n.$

定理 2.3. 设 $W_l^1(Q)$ 为一切具有 l 阶广义导数的函数全体构成的索波列夫空间^[10]. 如果 $H_{+1}(A) \subset W_l^1(Q)$, 那么对任意正整数 $q < l - \frac{n}{2}$, 按(2.12)式定义的 δ -函数及其微商皆属于 $H_{-1}(A)$. 同时, 如果算子 $R\mathbf{R}$ 是正定紧算子并具有格林函数 $K(p, s)$, 则 δ -函数及其微商的阴范数是

$$\begin{aligned} \|\delta(p - p_0)\|_{-1} &= \sqrt{K(p_0, p_0)}, \\ \|\delta^{(q)}(p - p_0)\|_{-1} &= \sqrt{K_{ps}^{(2q)}(p_0, p_0)}, \quad q = 0, 1, \cdots, k < l - \frac{n}{2}, \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\text{式内 } K_{ps}^{(2q)}(p_0, p_0) = \left. \frac{\partial^{2q} K(p, s)}{\partial p^q \partial s^q} \right|_{p=s=p_0}.$$

证. 依索波列夫空间的嵌入定理^[11], $W_l^1(Q)$ 中的每一函数至少有 $q < l - \frac{n}{2}$ 阶连续微商, 故(2.12)式有意义. 又因为从 $W_l^1(Q)$ 到 $C^q(Q \cup \Gamma)$ 中的嵌入算子是紧的, 故 $W_l^1(Q)$ 中的任意有界集合在 $C^q(Q \cup \Gamma)$ 中是一致有界且等度连续的^[6], 因而有下列估计式

$$\begin{aligned} |\langle u(p), \delta^{(q)}(p - p_0) \rangle_0| &= |u^{(q)}(p_0)| \leq \sup_{Q \cup \Gamma} |u^{(q)}(p)| \\ &\leq k \|u(p)\|_{W_2^q(Q)} \leq k_1 \|u(p)\|_{W_2^l(Q)} \leq k_1 \|u(p)\|_{+1} \quad \forall u \in H_{+1}(A). \end{aligned}$$

式内 k 和 k_1 皆为常数. 由此看出, $\delta^{(q)}(p - p_0)$ 确实是 $H_{+1}(A)$ 上的有界线性泛函, 即

$$\delta^{(q)}(p - p_0) \in H_{-1}(A).$$

设 $K(p, s)$ 是 $R\mathbf{R}$ 的格林函数, 它是对称和正定的, 依照 $H_{-1}(A)$ 和 H_0 之间的范数关系, 则有

$$\begin{aligned} \|\delta^{(q)}(p - p_0)\|_{-1}^2 &= \langle \delta^{(q)}, \delta^{(q)} \rangle_{-1} = \langle R\mathbf{R} \delta^{(q)}, \delta^{(q)} \rangle_0 \\ &= \int_Q \int_Q K(p, s) \delta^{(q)}(p - p_0) \delta^{(q)}(s - p_0) dp ds = (-1)^{2q} K_{ps}^{(2q)}(p_0, p_0) \\ &= K_{ps}^{(2q)}(p_0, p_0), \end{aligned}$$

此即(2.13)式. 最后还须指出, 对正定对称的格林函数 $K(p, s)$, 总有一致收敛的展式

$$K(p, s) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(p) \overline{\varphi_i(s)}}{\lambda_i}, \quad \lambda_i > 0, \quad i = 1, 2, \cdots,$$

λ_i 和 φ_i 是 K 的本征值和本征元, 所以对 $q < l - \frac{n}{2}$

$$\left. \frac{\partial^{2q} K(p, s)}{\partial p^q \partial s^q} \right|_{p=s=p_0} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|\varphi_i(p_0)|^2}{\lambda_i}$$

总是一致收敛且大于零.

在把状态空间由 H_0 扩大到 $H_{-1}(A)$ 以后, 为了讨论受控系统的一般运动规律, 还需要研究方程组(1.5)中诸算子的延拓问题. 由于这些算子通常都是在 H_0 中定义的, 而现在的状态空间是 $H_{-1}(A)$, 因此, 要把这些算子延拓到 $H_{-1}(A)$ 中. 我们首先讨论有界算子的延拓.

在文献[6]中证明了一类有界算子的有界延拓. 下面我们可以证明更强一些的事实.

定理 2.4. 定义于全空间 H_0 上的有界线性算子 B 在 $H_{-1}(A)$ 上有有界延拓的充分必要条件是

$$B^*D(T) \subset D(T).$$

证. 先证充分性. 设 $f, g \in H_0$, 那么

$$|\langle Bf, g \rangle_{-1}| = |\langle RBf, Rg \rangle_0| = |\langle Rf, (TB^*R)Rg \rangle_0|,$$

依假设 $B^*D(T) \subset D(T)$, TB^*R 是定义于全空间 H_0 上的闭算子^[12], 因而是有界算子. 由不等式

$$|\langle Bf, g \rangle_{-1}| \leq \|TB^*R\|_0 \|Rf\|_0 \|Rg\|_0 = \|TB^*R\|_0 \|f\|_{-1} \|g\|_{-1},$$

可知在 H_0 上 $\|B\|_{-1} \leq \|TB^*R\|_0$, 又因为 H_0 在 $H_{-1}(A)$ 中稠, 所以 B 可以保范(按范数)延拓到全空间 $H_{-1}(A)$ 上.

再证必要性. 如果定义于 H_0 上的有界线性算子 B 在 $H_{-1}(A)$ 上有有界延拓 B , 那么必存在正数 M , 使

$$\|Bf\|_{-1} \leq M \|f\|_{-1}, \quad f \in H_0.$$

但是, 由恒等式 $\|Bf\|_{-1} = \|RBTRf\|_0$, 可推知 $RBTR$ 在 $D(T)$ 上必是有界算子, 而且 $\|RBTR\|_0 \leq M$, 注意到 T 和 R 在 H_0 上是自伴算子, RB 是有界算子, 所以在 H_0 中 $(RBTR)^* = TB^*R$ 是定义于全空间 H_0 上的有界算子^[13]. 又因为 $RH_0 = D(T)$, 故有 $B^*D(T) \subset D(T)$. 证完.

推论. 定义于 H_0 上的任何与 R 可交换的有界线性算子 B , 均可按 $H_{-1}(A)$ 中的算子范数保范延拓到全空间 $H_{-1}(A)$ 上. 用 B 表示这种延拓, 则有

$$\|B\|_{-1} = \|B\|_0, \quad (2.14)$$

其中 $\|\cdot\|_{-1}, \|\cdot\|_0$ 分别表示算子在 $H_{-1}(A)$ 和 H_0 中的算子范数.

证. 由于 R 和 B 是可交换的, 在 H_0 上有 $RB = BR$, 所以有 $B^*R = RB^*$. 该式的右边, 把 H_0 映到 $D(T)$ 中, 而左边 R 的值域是 $D(T)$, 所以有 $B^*D(T) \subset D(T)$, 依定理 2.3, B 可有界延拓到 $H_{-1}(A)$ 上.

为了证明保范性, 只须证明在 H_0 上有

$$\|B\|_{-1} = \|B\|_0.$$

事实上, 对 $\forall f \in H_0$

$$\|B\|_{-1} = \sup_{\|f\|_{-1}=1} \|Bf\|_{-1} = \sup_{\|f\|_{-1}=1} \|RBf\|_0 = \sup_{\|Rf\|_0=1} \|BRf\|_0 = \|B\|_0.$$

现在我们讨论 $H_{-1}(A)$ 中的基. 设 $\{\varphi_i\}, \{\phi_i\}$ 是 H_0 中的双直交基, 那么 $\{T\varphi_i\}, \{T\phi_i\}$ 必是 $H_{-1}(A)$ 中的双直交基. 事实上, 依照 (2.11) 式, 有

$$\langle T\varphi_i, T\phi_j \rangle_{-1} = \langle RT\varphi_i, RT\phi_j \rangle_0 = \langle \varphi_i, \phi_j \rangle_0 = \delta_{ij}.$$

于是 $H_{-1}(A)$ 中的任意元 α , 均可展成级数

$$\alpha = \sum_{i=1}^{\infty} \langle \alpha, T\varphi_i \rangle_{-1} T\varphi_i = \sum_{i=1}^{\infty} \langle \alpha, R\varphi_i \rangle_0 T\varphi_i, \quad (2.15)$$

右端级数按 $H_{-1}(A)$ 中范数强收敛. 显然, 这一级数在 H_0 中是毫无意义的.

同样, 容易检查, H_0 中的直交基, 经 T 作用后, 成为 $H_{-1}(A)$ 中的直交基. 设 P 是 H_0 中的直交投影算子, $\{\varphi_i\}_1^\infty$ 是有穷维子空间 PH_0 中的直交基. 如果 $\{\varphi_i\}_1^\infty \subset D(T)$, 则 P 在 $H_{-1}(A)$ 中的延拓为

$$P = \sum_{i=1}^v \langle R \cdot, T\varphi_i \rangle_0 \varphi_i. \quad (2.16)$$

P 仍然是 $H_{-1}(A)$ 中的投影算子:

$$P^2\alpha = P \sum_{i=1}^v \langle R\alpha, T\varphi_i \rangle_0 \varphi_i = \sum_{i=1}^v \langle R\alpha, T\varphi_i \rangle_0 \varphi_i = P\alpha, \quad \forall \alpha \in H_{-1}(A), \quad (2.17)$$

即 $P^2 = P$, 但一般来说已不再是直交投影了. 容易看出, 如果 P 是无穷维的投影算子, 即 $v = \infty$ 时, 则用上述办法构成的延拓 P 可能不是有界线性算子. 在 P 和 R 可交换的情况下, P 的延拓 P 在 $H_{-1}(A)$ 上仍然是直交投影算子, 不论是有穷维的或者是无穷维的.

重复上述讨论可知, 在 H_0 上定义的任意有穷维线性算子 $B = \sum_{i=1}^n \mu_i \langle \cdot, \varphi_i \rangle_0 \varphi_i$, 在 $H_{-1}(A)$ 上有有界延拓 B , 只要 $\varphi_i \in D(T)$, $i = 1, 2, \dots, n$, 那时,

$$B\alpha = \sum_{i=1}^n \mu_i \langle R\alpha, T\varphi_i \rangle_0 \varphi_i, \quad \forall \alpha \in H_{-1}(A). \quad (2.18)$$

下面再讨论一下 H_0 中无界算子的扩张问题. 设 C 是 H_0 中的无界线性算子, $D(A) \subset D(C)$, $\mathcal{R}(C) \subset H_0$, 且 RC 是 $D(C)$ 上的有界算子, 在这种情况下, C 可以扩张到 $H_{-1}(A)$ 中, 记为 $\mathbf{C}$, 它的定义域 $D(\mathbf{C})$ 包含着 H_0 而值域 $\mathcal{R}(\mathbf{C}) \subset H_{-1}(A)$, 即 $\mathbf{C}$ 是 $H_{-1}(A)$ 中的稠定算子. 事实上, 我们可以用下述方法扩张 C . 首先, $Cu = TRCu = T(RC)u$, 对 $\forall u \in H_{+1}(A)$ 是恒等式, 依设 RC 是 $D(C)$ 上的有界算子, 故可有界延拓到 H_0 上, 记为 $\widetilde{RC}$, 于是由等式

$$\mathbf{C}f = T(\widetilde{RC})f, \quad \forall f \in H_0 \quad (2.19)$$

所确定的 $\mathbf{C}$ 是 C 的一种扩张, 且 $D(\mathbf{C}) \supseteq H_0$, 而 $\mathcal{R}(\mathbf{C}) \subset H_{-1}(A)$.

如果 $C = A$, A 是 H_0 中的自伴算子, 在 $H_{+1}(A)$ 上 A 与 T, R 可交换, 那么 A 在 $H_{-1}(A)$ 中有自伴扩张 $\mathbf{A} = \mathbf{TA}R$. 事实上, 当 A 与 T, R 可交换时, 由恒等式 $Au = ARTu = ATRu = T ARu \quad \forall u \in H_{+1}(A)$ 所确定的 A 的扩张 $\mathbf{A} = \mathbf{TA}R$, $D(\mathbf{A}) = H_0$, $\mathcal{R}(\mathbf{A}) \subset H_{-1}(A)$. 它在 $H_{-1}(A)$ 中是自伴算子, 可由下述关系

$$\langle \alpha, \mathbf{TA}R\beta \rangle_{-1} = \langle R\alpha, AR\beta \rangle_0 = \langle AR\alpha, R\beta \rangle_0 = \langle \mathbf{TA}R\alpha, \beta \rangle_{-1}$$

得出.

现在, 我们来证明一个重要事实, 即在特定情况下, 古典解和广义解的一致性.

定理 2.5 设 A 是定义于 $H_0 = \mathcal{S}^2(Q)$ 中的自伴正定算子, 有紧预解式并可与装备算子 R 和 T 交换, $\{\mu_i\}, \{\varphi_i\}$ 是其在 H_0 中的本征值和对应的规范本征元列. 那么, A 在 $H_{-1}(A)$ 中的自伴扩张 $\mathbf{A}$ 的本征值列与 $\{\mu_i\}$ 重合, 相应的规范本征元列为 $\{T\varphi_i\}$. 除此外, $\mathbf{A}$ 再没有别的本征值和本征元.

证. 依假设, $\{\mu_i\}, \{\varphi_i\}$ 是 A 在 H_0 中的本征值和对应的完备的本征元列, 则 $A\varphi_i = \mu_i\varphi_i$, $i = 1, 2, \dots$. 由于 A 与 R, T 可交换, 所以它在 $H_{-1}(A)$ 中有自伴扩张 $\mathbf{A} = \mathbf{TA}R$. 而 $\mathbf{A}T\varphi_i = \mathbf{TA}RT\varphi_i = \mathbf{TA}\varphi_i = \mu_i T\varphi_i$, $i = 1, 2, 3, \dots$. 这说明 μ_i 是 $\mathbf{A}$ 的本征值, $T\varphi_i$ 是对应的本征元. 如果 $\mathbf{A}$ 还有别的本征值和本征元, 比如 $\mathbf{A}\alpha = \mu\alpha$, $\mu \neq 0$, $\alpha \in H_{-1}(A)$, 那么 α 必与 $\{T\varphi_i\}$ 直交,

$$\langle \alpha, T\varphi_i \rangle_{-1} = 0, \quad i = 1, 2, \dots,$$

从而有 $\langle \alpha, T\varphi_i \rangle_{-1} = \langle R\alpha, \varphi_i \rangle_0 = 0$, $i = 1, 2, \dots$. 这时必须 $R\alpha = 0$, 即 $\alpha = 0$, 但这是不

可能的. 因此, $\mathbf{A}$ 除 $\{\mu_i\}$ 外, 没有别的本征值, 而每一本征值对应的本征子空间的维数都不会增加. 证完.

由这个定理推得, 如果算子 A 在 H_0 中自伴正定且有紧的逆, 那么它在 $H_{-1}(A)$ 中的扩张 $\mathbf{A}$ 不可能有新的本征值和本征元, 即本征值问题的古典解和广义解是一致的. 这样, 主算子 A 的本征值和本征元并不因为空间的扩大而有实质性的变化.

三、阴范空间中的振型分析

现在我们可以用 $H_{-1}(A)$ 作为状态空间来讨论方程组 (1.5) 和本征值问题 (1.6).

首先对方程组 (1.6) 的变量作变换. 令 $\varphi_1 = A^{\frac{1}{2}}u_1$, $\varphi_2 = u_2$, 代入 (1.6) 式后, 得到

$$\begin{aligned} \lambda \varphi_1 &= A^{\frac{1}{2}} \varphi_2 \\ \lambda \varphi_2 &= -A^{\frac{1}{2}} \varphi_1 - BA^{-\frac{1}{2}} \varphi_1 - C \varphi_2 - GS_2 A^{-\frac{1}{2}} \varphi_1 - G\mathbf{y} \\ \lambda \mathbf{y} &= J\mathbf{y} + (S_1 + JS_2)A^{-\frac{1}{2}} \varphi_1. \end{aligned} \quad (3.1)$$

在文献[1]中曾指出过, 若 A 是正定自伴线性算子, 且有紧豫解式, $BA^{-\frac{1}{2}}, C, S_1 A^{-\frac{1}{2}}, S_2 A^{-\frac{1}{2}}$ 都是有界线性算子, 则 (3.1) 和 (1.6) 式的本征值问题是等价的. 应用文献[1]中的符号, (3.1) 式可以写成

$$\lambda \phi = \mathcal{A} \phi = (\mathcal{A}_0 + \mathcal{T} + \mathcal{D}) \phi, \quad (3.2)$$

式内 $\phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \mathbf{y}\}$, $\mathcal{A}_0$ 是反自伴算子,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_0 &= \begin{pmatrix} 0 & A^{\frac{1}{2}} & 0 \\ -A^{\frac{1}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & iE_1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{T} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -GS_2 A^{-\frac{1}{2}} & 0 & -G \\ (S_1 + JS_2)A^{-\frac{1}{2}} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathcal{D} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -BA^{-\frac{1}{2}} & -C & 0 \\ 0 & 0 & J - iE_1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

易见, $\mathcal{A}_0$ 在 $\mathfrak{H}_0 = H_0 \times H_0 \times \mathbf{R}^n$ 中的定义域 $\mathcal{D}(\mathcal{A}_0) = D(A^{\frac{1}{2}}) \times D(A^{\frac{1}{2}}) \times \mathbf{R}^n$, 而其值域 $\mathcal{R}(\mathcal{A}_0) \subseteq \mathfrak{H}_0$. 在 $\mathcal{D}(\mathcal{A}_0)$ 中引进图象范数后, 构成阳范空间, 记为 $\mathfrak{H}_{+1} = H_{+1}(A^{\frac{1}{2}}) \times H_{+1}(A^{\frac{1}{2}}) \times \mathbf{R}^n$, 依空间的插入定理[5], 知 $H_{+1}(A^{\frac{1}{2}}) = H_{\frac{1}{2}}(A)$. 这样与 $\mathfrak{H}_0$ 相联系的阴范空间为 $\mathfrak{H}_{-1} = H_{-\frac{1}{2}}(A) \times H_{-\frac{1}{2}}(A) \times \mathbf{R}^n$. 这三个希氏空间有以下关系

$$\mathfrak{H}_{-1}(\mathcal{A}_0) \supset \mathfrak{H}_0 \supset \mathfrak{H}_{+1}(\mathcal{A}_0). \quad (3.4)$$

依假设 A 是自伴正定算子, A 的图象范数 (2.2) 式等价于下列范数 (能量范数)

$$\|u\|_{+1} = \|Au\|_0, \quad (3.5)$$

因此, 装备算子 R 为

$$R = \begin{pmatrix} A^{-\frac{1}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & A^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & E \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} A^{\frac{1}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & A^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & E \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

其中 R 是 $\mathfrak{H}_0$ 到 $\mathfrak{H}_{+1}$ 上的等距算子, T 是 $\mathfrak{H}_{+1}$ 到 $\mathfrak{H}_0$ 上的等距算子. 按第二节的方法, 可把 R, T 分别延拓, 记成 $\mathbf{R}, \mathbf{T}$, 它们分别是 $\mathfrak{H}_{-1}$ 到 $\mathfrak{H}_0$ 和 $\mathfrak{H}_0$ 到 $\mathfrak{H}_{-1}$ 上的等距算子.

现在进一步讨论一下反馈算子 $\mathcal{T}$. 其中控制算子 $G\mathbf{z} = \sum_{i=1}^m b_i(p)(\mathbf{z}, \mathbf{g}_i)$, 在点控制的

情况下, $b_i(p)$ 是 δ -函数或其微商, 当 $b_i(p) \in H_{-\frac{1}{2}}(A)$ 时, G 是从 $\mathbf{R}^n$ 到 $H_{-\frac{1}{2}}(A)$ 中的有界算子. 至于测量算子, 它由(1.4)式定义, 经(3.1)式变换后成为 $S_i A^{-\frac{1}{2}} \varphi = \sum_a \langle \tilde{S}_{ia} A^{-\frac{1}{2}} \varphi, a_{ia} \rangle \mathbf{k}_{ia}$, $\varphi \in H_0$. 在目前的情况下, a_{ia} 可以是 δ -函数或其微商. 如果 $S_{ia} A^{-\frac{1}{2}} \varphi \in H_{\frac{1}{2}}(A)$, 那么 $S_i A^{-\frac{1}{2}}$ 可以有界延拓到 $H_{-\frac{1}{2}}(A)$ 中. 当然这样对算子 $\tilde{S}_{ia}$ 的要求比较强. 如果 δ -函数属于 $H_{-\frac{1}{4}}(A)$, 而 $\tilde{S}_{ia} A^{-\frac{1}{2}} \varphi \in H_{\frac{1}{4}}(A)$, 则 $S_i A^{-\frac{1}{2}}$ 的定义域将包含 H_0 , 即 $D(\tilde{S}_i A^{-\frac{1}{2}}) \supset H_0$. 在这种情况下我们有 $D(\tilde{S}_i A^{-\frac{1}{2}}) \supset D(A)$, 所以本征值问题(3.1)式可以认为是在 $\mathfrak{H}_{-1}$ 中定义的, 因而有明确的意义. 在数字计算时, 若用连续函数逼近 δ -函数, 可以确信, 方程(3.1)的本征元将按阴范数收敛到某一极限.

现在我们可以把文献[1]中的关于本征元列的完备性和定解问题的两个定理加以修改, 推广到点控和点测的情况. 这些定理的证明不再重述.

定理 3.1 设(3.1)中的 A 是正定自伴算子, 有紧的逆, 它的本征值列 $\{\mu_i^2\}$ 都是单重的, 且满足条件 $\lim_{n \rightarrow \infty} |\mu_n - \mu_{n-1}| = \infty$; 而 $C, BA^{-\frac{1}{2}}$ 是 H_0 中的有界算子且 $C^* D(A^{\frac{1}{2}}) \subset D(A^{\frac{1}{2}})$, $S_i A^{-\frac{1}{2}}, i = 1, 2$, 是 H_0 到 $\mathbf{R}^n$ 中的有界算子并能有界延拓到 $H_{-\frac{1}{2}}(A)$ 上, G 中的 $b_i, i = 1, 2, \dots, m$ 属于 $H_{-\frac{1}{2}}(A)$, 那么(3.2)在 $\mathfrak{H}_{-1}(\mathcal{A}_0)$ 中的本征值除有无穷个外都是单重的, 它的本征元列 $\{(\phi_{li})_{l=0}^{m-1}\}_{i=-\infty}^{\infty}$ 与它的伴随算子的本征元列 $\{(\phi_{li})_{l=0}^{m-1}\}_{i=-\infty}^{\infty}$ 构成阴范空间 $\mathfrak{H}_{-1}(\mathcal{A}_0)$ 中的双直交基. 对任意 $W \in \mathfrak{H}_{-1}(\mathcal{A}_0) = H_{-\frac{1}{2}}(A) \times H_{-\frac{1}{2}}(A) \times \mathbf{R}^n$, 可展成下列强收敛级数

$$\begin{aligned} W &= \sum_{|l| \leq N_0} \left(\sum_{j=0}^{m_l-1} \langle W, \phi_{lj} \rangle_{-\frac{1}{2}} \phi_{lj} \right) + \sum_{|l| > N_0} \langle W, \phi_l \rangle_{-\frac{1}{2}} \phi_l, \\ W &= \sum_{|l| \leq N_0} \left(\sum_{j=0}^{m_l-1} \langle W, \phi_{lj} \rangle_{-\frac{1}{2}} \phi_{lj} \right) + \sum_{|l| > N_0} \langle W, \phi_l \rangle_{-\frac{1}{2}} \phi_l. \end{aligned} \quad (3.7)$$

如果 A 的本征值还满足条件 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} (\mu_n - \mu_{n-1})^{-2} < \infty$, 则上述双直交基是可换基, 此时(3.7)式右端的系数是平方可和的, 并有如下估计

$$\begin{aligned} \sum_{|l| \leq N_0} \left(\sum_{j=0}^{m_l-1} |\langle W, \phi_{lj} \rangle_{-\frac{1}{2}}|^2 \right) + \sum_{|l| > N_0} |\langle W, \phi_l \rangle_{-\frac{1}{2}}|^2 &\leq M_1^2 \|W\|_{-1}^2, \\ \sum_{|l| \leq N_0} \left(\sum_{j=0}^{m_l-1} |\langle W, \phi_{lj} \rangle_{-1}|^2 \right) + \sum_{|l| > N_0} |\langle W, \phi_l \rangle_{-1}|^2 &\leq M_2^2 \|W\|_{-1}^2, \end{aligned} \quad (3.8)$$

式内 M_1, M_2 是不依赖于 W 的常数.

定理 3.2 在定理 3.1 的条件下, 由(3.2)式定义的算子 $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 + \mathcal{T} + \mathcal{D}$ 是阴范空间 $H_{-\frac{1}{2}}(A) \times H_{-\frac{1}{2}}(A) \times \mathbf{R}^n$ 中的强连续准有界单参数群 $U(t)$ 的生成算子, $U(t)$ 是自己一切本征运动群的和

$$U(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} U_l(t) = \sum_{|l| \leq N_0} e^{\lambda_l t} \left(Q_l + t D_l + \dots + \frac{(t D_l)^{m_l-1}}{(m_l-1)!} \right) + \sum_{|l| > N_0} e^{\lambda_l t} Q_l, \quad (3.9)$$

上式右端对 $\forall |t| < \infty$ 按算子阴范数收敛, 而

$$Q_l = \sum_{j=0}^{m_l-1} \langle \cdot, \phi_{lj} \rangle_{-\frac{1}{2}} \phi_{lj}, \quad D_l = \sum_{j=0}^{m_l-2} \langle \cdot, \phi_{l, j+1} \rangle_{-\frac{1}{2}} \phi_{lj}, \quad (3.10)$$

ϕ_{lj} 和 ϕ_{lj} 分别是 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{A}^*$ 对应于 λ_l 和 $\bar{\lambda}_l$ 的规范广义本征元. 对任何初值 $W_0 \in H_0 \times H_0 \times$

R^n , 由 (3.9) 式确定的 $U(t)$ 使 $W(t) = U(t)W_0$ 是下列方程组的唯一解

$$\frac{dW}{dt} = (\mathcal{A}_0 + \mathcal{T} + \mathcal{D})W, \quad W(0) = W_0. \quad (3.11)$$

本文第二、三节所证明了的事实, 全部解决了第一节中提出的问题. 在 (1.2) 式中令 $b_i(p) = \delta_i(p - p_i)$, 在 (1.4) 式中置 $\alpha_{ia} = \delta_i(p - p_a)$, 只要测量算子 $\tilde{S}_{ia}$ 有足够光滑的系数, 使内积 $\langle \tilde{S}_{ia}v, \delta_i(p - p_a) \rangle_0$ 对凡是 $v \in D(A^{\frac{1}{2}})$ 都有意义, 那么方程式 (3.1) 就是定义在 $\mathfrak{H}_{-1}$ 中的本征值问题, 从而原始方程组 (1.5) 就是定义在相空间 $H_{-1}(A)^{\frac{1}{2}} \times H_{-1}(A^{\frac{1}{2}}) \times R^n$ 中的微分方程. 这样以来, 无论是振型分析、定解问题和其它控制问题都可以用一般希尔伯特空间中的微分方程理论和方法去进行处理.

参 考 文 献

- [1] 宋 健、于景元, 中国科学, 1975, 2, 141—166.
- [2] Greenberg, S. G., *NASA CR-104087*, N69, 34911, 1969.
- [3] Гельфанд И. М., Шиллов Г. Е., *Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений*, Москва, 1958.
- [4] 冯 康, 数学进展, 3 (1957), 2, 201—209.
- [5] Lions, J. L., Magenes, E., *Problèmes aux Limites Non-homogènes et Applications*, Vol. 1, Dunod, 1968.
- [6] Березанский Ю. М., *Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов*, Киев, 1965.
- [7] Yosida, K., *Functional Analysis*, Springer-Verlag, 1965.
- [8] 关肇直, 泛函分析讲义, 高教出版社, 1958.
- [9] Михлин С. Г. *Проблема минимума квадратичного функционала*, Гостехиздат, 1952.
- [10] Соболев С. Л., *Некоторые применение функционального анализа в математической физике* (泛函分析在数学物理中的应用, 王柔怀等译, 科学出版社, 1959).
- [11] Гохберг И. Ц., Крейн М. Г., *Введение в теорию несамопржённых операторов*, Москва, 1965.
- [12] Kato, T., *Perturbation Theory for Linear Operators*, Springer-Verlag, 1976.
- [13] Goldberg, S., *Unbounded Linear Operators, Theory and Applications*, 1966.