中国科学 (E 辑)
第 33 卷 第 6 期 SCIENCE IN CHINA (Series E) 2003 年 6 月

电路划分问题的 Laplace 谱分析和生成树法*

杨华中
(清华大学电子工程系, 北京 100084)
胡冠章
(清华大学数学科学系, 北京 100084)

摘要 讨论 Laplace 谱的理论在电路划分问题中的应用, 对电路划分的标准作了改进, 对带权图给出了划分的分割率的上下界. 介绍了用 Laplace 特征向量得到划分的方法, 分析其存在的问题, 提出利用图的生成树得到图的划分的算法, 更好地考虑图的结构和满足划分的一般要求.

关键词 图的划分 图的 Laplace 谱 分割率 图的生成树

随着微系统芯片(SoC: system-on-a-chip)的到来, 软硬件划分、基于可重用 IP 的设计方法、基于平台的设计方法、以及低功耗设计等日渐成为 EDA 领域的核心难题, 而这些问题都可以抽象为边权图、顶点权图或边与顶点都有权的图的划分问题. 不言而喻, 划分标准将直接影响划分结果的优劣, 本文将讨论图的划分标准与图的 Laplace 谱的关系, 以及适合于电路划分问题的算法.

设 $G(V,E)$ 为一个顶点集为 V、边集为 E 的图, $|V|=n$, G 的邻接矩阵为 $\boldsymbol{A}(G)$, G 的度矩阵为 $\boldsymbol{D}(G) = \mathrm{diag}(d_1, d_2, \cdots, d_n)$, d_i 是顶点 v_i 的度. 令 $\boldsymbol{L}(G)=\boldsymbol{D}(G)-\boldsymbol{A}(G)$, 称为 G 的 Laplace 矩阵, 我们简称它为 Laplace 矩阵. 这个名词的来源最初是由于研究鼓膜的振动得到 Laplace 算子方程时, 用差分法得到的线性方程组的系数矩阵正好是网格所对应的图的 Laplace 矩阵. 关于 $\boldsymbol{A}(G)$的特征值与特征向量的理论称为图的谱理论, 它是代数图论的主要内容之一[1], 关于 $\boldsymbol{L}(G)$ 的特征值与特征向量的理论称为图的 Laplace 谱理论, 它是近几年有很大发展的并有很多应用的研究方向[2,3].

本文涉及图论的术语与符号可参看文献[4,5].

1 划分标准的改进

将规模庞大的复杂系统分解为若干子系统, 并采用各个击破的策略是人们常用的手段. 处理大规模的复杂电路也是这样: 我们将一个大规模集成电路表示为一个图 G, 当图的规模很大时, 为了简化分析、提高处理效率, 可将 G 分为两部分或若干部分. 我们把这种处理方法称为电路的划分(circuit partitioning)[6]. 按什么标准来划分呢? 通常提出以下要求: 设 $E_1 \subset E$

2002-11-19 收稿, 2003-02-16 收修改稿
* 国家重点基础研究规划项目(G1999032903)、国家杰出青年基金(60025101)和自然科学基金重大科学计划(批准号: 90207001)资助项目

使 $G-E_1$ 成为若干分支，最简单的划分是将 $V(G)$ 划分为两个子集 A 与 B，它们满足: $V(G-E_1)=A\bigcup B$, $A\bigcap B=\varnothing$. 我们用(A, B)表示该划分，由 A 和 B 导出子图分别记为 $G[A]$和 $G[B]$, $E(A, B)$ 表示 A 与 B 之间的所有的边的集合，称为边割集. 我们称满足下面三个要求的划分为最优划分:

(ⅰ) 通常要求边割集尽可能的小，称为最小边割集划分;

(ⅱ) 考虑到划分的均匀性，要求 $|A|$ 与 $|B|$ 尽可能相等;

(ⅲ) 由 A, B 导出的两个子图 $G[A]$ 和 $G[B]$ 至少有一个是连通的.

为了同时考虑要求(ⅰ)和(ⅱ)，有人定义划分的分割率为[7]: $\rho(A,B)=|E(A,B)|/\left(|A|\cdot|B|\right)$，使分割率最小也就意味着满足要求(ⅰ)和(ⅱ)，称为最小分割率划分. 然而，情况并非如此，拿完全图来看，任意一个划分的分割率均为 1，因而无法区分划分的优劣，而实际上最优划分为二等分. 因此对边比较稠密的图，用以上的分割率 $\rho(A,B)$ 作为划分标准不合理. 为改进划分标准，我们定义以下形式的分割率:

$$\rho_1(A,B)\equiv\frac{|E(A,B)|}{|A|^2\cdot|B|^2}. \tag{1}$$

对完全图的任意一个划分(A, B)，设 $|A|=k$，则它的分割率为 $\rho_1(A,B)=[k(n-k)]^{-1}$，最小值在 $k=n/2$ 时达到，因而最优划分为二等分，分割率为 $4n^{-2}$. 因此，用 $\rho_1(A,B)$ 作为标准完全可区分出不同划分的优劣.

对一些实际问题，还需考虑图的边和点有权的情况. 对有权图的谱问题研究得很少，本文将讨论有边权的树的谱半径问题，已经有一些初步的结论 1). 现设图 $G(V,E)$ 的边集和点集上分别定义两个正函数: 边权函数 $w(e)$, $e\in E$ 和点权函数 $h(v)$, $v\in V$，并对任意一个划分(A, B)定义分割率为

$$\rho_2(A,B)\equiv\frac{w(A,B)}{h(A)^2\cdot h(B)^2}, \tag{2}$$

其中 $w(A,B)=\sum\limits_{\substack{(u,v)\in E\\ u\in A,v\in B}}w(u,v)$, $h(V_1)=\sum\limits_{v\in V_1}h(v)$, $V_1\subset V$.

由(1)和(2)式不难看出: $\rho_1(A,B)$ 是 $\rho_2(A,B)$ 在 $w(e)=1,\ \forall e\in E$ 和 $h(v)=1,\ \forall v\in V$ 时的特殊情形.

2　图的 Laplace 谱和图的分割率的关系

图的谱和 Laplace 谱理论及其在图的划分中的应用从 20 世纪 70 年代以来有很多论述，到 80 年代以后将其用于电路划分问题.

设 $\boldsymbol{L}(G)=\boldsymbol{D}(G)-\boldsymbol{A}(G)$, 显然, 0 是 $\boldsymbol{L}(G)$的特征值，而且当 G 是连通图时, 0 是 G 的单特征值，且其他的特征值都是正的. 本文后续讨论假设 G 是连通图，并设 $\boldsymbol{L}(G)$的特征值为$\lambda_1=0<\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant\lambda_n$, λ_2是 $\boldsymbol{L}(G)$的第二特征值, Fiedler 称λ_2为图的代数连通度[8]. 记图的特征值为μ, 图的 Laplace 特征值为λ, 则对于简单 k 正则图它们的关系为

$$\lambda=k-\mu. \tag{3}$$

1) Yang H Z, Hu G Z, Hong Y. Bounds of spectral radius of weighted trees. Tsinghua Science and Technology, 2003

图 G 的谱可用两种方法表示：列出所有的特征值或用下列式子来表示：

$$Spec(G)=\begin{pmatrix}\mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_k\\ m_1 & m_2 & \cdots & m_k\end{pmatrix}. \tag{4}$$

其中 $\mu_1>\mu_2>\cdots>\mu_k$，m_i 是 μ_i 的重数.

图 G 的 Laplace 谱记作 $LSpec(G)$，意义与(4)式类似；或列出所有的 Laplace 特征值.

我们来看若干类典型简单图的谱与 Laplace 谱：

1) 完全图 K_n：它的谱为 $Spec(k_n)=\begin{pmatrix}n-1 & -1\\ 1 & n-1\end{pmatrix}$；它是 $n-1$ 正则图，根据(3)式可得完全图的 Laplace 谱为 $LSpec\,(k_n)=\begin{pmatrix}n & 0\\ n-1 & 1\end{pmatrix}$.

2) 圈 C_n：它是正则图，它的谱和 Laplace 谱分别为：

$$\mu_i=2\cos\frac{2\pi i}{n},\quad i=0,1,\cdots,n-1;\qquad \lambda_i=4\sin^2\frac{\pi i}{n},\quad i=0,1,\cdots,n-1.$$

3) 路 P_n：它是非正则图，可求出它的谱为 $\mu_i=2\cos\dfrac{2i\pi}{n+1}$，$i=1,2,\cdots,n$；它的 Laplace 谱为 $\lambda_i=4\sin^2\dfrac{i\pi}{2n}$，$i=0,1,\cdots,n-1$.

4) Petersen 图 O_3：它是正则图，它的谱与 Laplace 谱分别为：

$$Spec\,(O_3)=\begin{pmatrix}3 & 1 & -2\\ 1 & 5 & 4\end{pmatrix};\qquad LSpec(O_3)=\begin{pmatrix}5 & 2 & 0\\ 4 & 5 & 1\end{pmatrix}.$$

$\boldsymbol{L}(G)$的第二特征值 λ_2 在电路划分中有重要应用，Hagen 和 Kahng[7]得到了无权图的 $\rho(A,B)$ 与 λ_2 的关系，我们已经把它推广到边有权的情形，并用来解决低功耗集成电路设计问题[9]. 本文进一步得出边、点都有权的图中 $\rho_2(A,B)$ 与 λ_2 的关系.

定理 1 设 $G(V,E)$ 为连通图，边权函数为 $w(e)$, $e\in E$，点权函数为 $h(v)$, $v\in V$. $\boldsymbol{A}(G)=\left(a_{i,j}\right)_{n\times n}$，其中

$$a_{i,j}=\begin{cases}w(v_i,v_j), & \text{如果 } (v_i,v_j)\in E,\\ 0, & \text{如果 } (v_i,v_j)\notin E.\end{cases}$$

$\boldsymbol{D}(G)=\mathrm{diag}(d_1,d_2,\cdots,d_n)$，其中 $d_i=\sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}a_{i,j}$. $\boldsymbol{L}(G)=\boldsymbol{D}(G)-\boldsymbol{A}(G)$. λ_2 是 $\boldsymbol{L}(G)$的第二特征值，则对于 G 的任何一个划分(A, B)有

$$\frac{4\lambda_2}{n^3h_{\max}^4}\leqslant\rho_2(A,B)\leqslant\frac{\lambda_n}{(n-1)nh_{\min}^4}, \tag{5}$$

其中，$h_{\max}=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{h(v_i)\}$，$h_{\min}=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{h(v_i)\}$.

证 显然 $\boldsymbol{L}(G)$是对称非负的，当 G 是连通时，0 是 $\boldsymbol{L}(G)$的单特征值，对应的特征向量为 $\boldsymbol{l}=(1, 1,\cdots, 1)^{\mathrm{T}}$. 因而 $\forall \boldsymbol{X}\perp\boldsymbol{l}$，$\boldsymbol{X}\neq 0$，有

$$\lambda_2 \leqslant \frac{\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}\boldsymbol{X}}{\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}} \leqslant \lambda_n,$$

设 $|A| = r$, $|B| = s$, 则 $r + s = n$, 按如下方式构造向量 $\boldsymbol{X}$:

$$x_i = \begin{cases} \dfrac{s}{n}, & \text{如果 } v_i \in A, \\ -\dfrac{r}{n}, & \text{如果 } v_i \in B. \end{cases}$$

易见 $\boldsymbol{X} \perp \boldsymbol{l}$, $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X} = \dfrac{rs}{n}$, 而且,

$$\left|x_i - x_j\right| = \begin{cases} 1, & \text{如果 } v_i \in A \text{ 且 } v_j \in B, \\ 0, & \text{否则}, \end{cases}$$

从而有

$$\begin{aligned} \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}\boldsymbol{X} &= \sum_{i=1}^{n} d_i x_i^2 - \sum_{i<j} 2a_{i,j} x_i x_j = \sum_{i<j} a_{i,j}(x_i - x_j)^2 \\ &= \sum_{v_i \in A, v_j \in B} w(v_i, v_j) = w(A, B). \end{aligned}.$$

由于 $n-1 \leqslant rs \leqslant n^2/4$ 和 $rs = n\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}$, 得

$$\rho_2(A,B) = \frac{w(A,B)}{h(A)^2 \cdot h(B)^2} \geqslant \frac{\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}\boldsymbol{X}}{r^2 s^2 h_{\max}^4} = \frac{\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}\boldsymbol{X}}{r\ snh_{\max}^4 \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}} \geqslant \frac{4\lambda_2}{n^3\ h_{\max}^4}.$$

另一方面, $\rho_2(A,B) = \dfrac{w(A,B)}{h(A)^2 \cdot h(B)^2} \leqslant \dfrac{\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}\boldsymbol{X}}{r^2 s^2 h_{\min}^4} = \dfrac{\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}\boldsymbol{X}}{r\ snh_{\min}^4 \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}} \leqslant \dfrac{\lambda_n}{(n-1)nh_{\min}^4}$.

定理得证.

我们考察前面讨论过的几类无权图的最优划分与本文提出的划分标准的关系. 对完全图 K_n, 前面提到, 最优划分为二等分, 最优划分的分割比率为 $\dfrac{4}{n^2}$, 而(5)式的下界也为 $\dfrac{4}{n^2}$; 对圈 C_n, 最优划分的分割比率为 $\dfrac{32}{n^4}$, 而(5)式的下界为 $\dfrac{16}{n^3}\sin^2\dfrac{\pi}{n}$, 当 $n >> 1$ 时, 近似为 $\dfrac{16\pi^2}{n^5}$, 只有当 $n = 2$ 时, 圈 C_n 的最优划分的分割比率才能达到(5)式的下界; 对 Petersen 图 O_3, 可以看出最优划分的分割比率为 $1/5^3$, 而(5)式的下界也为 $1/5^3$. 由这些数据可见, 在一些特殊情况, (5)式的下界可达.

3 求最优划分的算法

但是如何得到最优划分呢? 如果用枚举法来搜索最优划分, 其复杂度是指数型的. 通常用启发式算法来求最优划分[10], 这些算法大致可以分为以下几类: 迭代法[11], 遗传算法[12], 谱方法[7], 网络流算法[13]等. 其中谱方法是利用 $\boldsymbol{L}(G)$ 的第二特征向量 $\boldsymbol{X}_2$ 的分量获得初始划分, 其理论根据是以下的定理.

定理 A[14] 设 $G(V, E)$ 是有边权的连通图, λ_2, $\boldsymbol{X}_2 = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{L}(G)$ 的第二特征值和特征向量, 对实数 $r \geqslant 0$, 定义 $V_1(r) = \{v \in V \mid x_v \geqslant -r\}$, 则由 $V_1(r)$ 导出的子图是连通的; 类似地,

定义 $V_2(r) = \{v\in V\,|x_v\leqslant r\}$, 则由 $V_2(r)$导出的子图是连通的.

由定理 A 所得的划分, 可以保证至少一个子图是连通的[15,16]. 事实上对一些图的接近二等分的划分, 只能做到使其中一个子图是连通的, 例如, 一个极端的例子是星图 $K_{1,n-1}$, 当 $n\geqslant 4$ 时无论怎样对它二等分都只能得到一个子图是连通的. 但如果 $\boldsymbol{X}_2$ 的分量全不为 0, 令

$$A=\left\{v\in V\left|x_v>0\right.\right\},\ B=\left\{v\in V\left|x_v<0\right.\right\}, \tag{6}$$

如 A 与 B 都非空, 则由定理 A 知: 由 A 和 B 导出的子图 $G[A]$和 $G[B]$都是连通的. 但是由此得到的划分不一定接近二等分. 至于使分割率最小, 还需要用其他方法改进.

为了使划分后得到的两个子图至少一个是连通的, 且它们的点数最多差 1, 我们提出以下的更为简单的最小生成树法.

设 $G(V, E)$是有边权 $w(e)$, $e\in E$ 的连通图. 图 G 的最小生成树 $T_{\min}$, 指 $T_{\min}$ 的权(指它的边权和)在图 G 的所有生成树中是最小的.

首先求出图 G 的最小生成树 $T_{\min}$, 然后将 $T_{\min}$ 划分为点数接近相等的两部分, 必可使其中一部分是连通的, 因而对应原图中的子图也是连通的.

求图 G 的最小生成树有以下多项式复杂度的算法[4]:

1) 取最小边, 设为 e_1, 即 $w(e_1)=\min\limits_{e\in E}\left(w(e)\right)$. 令 $T=\{e_1\}$.

2) 设已求得 $T=\{e_1,e_2,\cdots,e_i\}$, 按以下规则在 $E\setminus\{e_1,e_2,\cdots,e_i\}$ 中选取 e_{i+1}:

(a) 由 $\{e_1,e_2,\cdots,e_i,e_{i+1}\}$ 导出的子图 $G[e_1,e_2,\cdots,e_i,e_{i+1}]$ 无圈,

(b) 在条件(a)之下取 $w(e_{i+1})$ 尽可能小.

3) 重复步骤 2), 直至 $|T|=n-1$.

得到最小生成树后, 用逐次删去一度顶点的方法找到树的中心(单中心或双中心), 再去掉中心附近的边, 就可把树分为两部分, 使至少一部分是连通的, 对应的原图中的相应部分也是连通的, 且可使两部分的点数最多相差 1. 从而得到划分.

然后用迭代法改进划分的分割率, 由定理 1 可判断是否接近最优划分, 当达到最优时就停止, 或直到不能进一步改进时停止.

由于用最小生成树进行划分所获得的割集的权较小, 可能与最优划分接近. 且在求生成树的过程中可以利用电路结构本身的特点, 使划分结果更合理、划分过程更快速. 还可以在划分过程中加入各种约束, 使划分结果更好地满足电路设计的某些特殊要求.

4　结论

在图 G 的边数比较稠密时, 用 $E(A,B)/(|A|\cdot|B|)$ 来度量划分(A, B)的优劣是不恰当的, 而本文提出的分割率对各种图都能较好地度量划分的优劣. 本文讨论了该分割率与图的 Laplace 谱之间的关系, 证明了其上界和下界, 由于这些结论适用于边和顶点都有权的图, 因而可用于各种电路划分问题. 本文还分析了利用$\boldsymbol{L}(G)$的第二特征向量 $\boldsymbol{X}_2$ 的分量获得划分的方法的不足, 并提出了将生成树方法和迭代改进法相结合的电路划分策略.

参　考　文　献

1　Biggs N L. Algebraic Graph Theory. Cambridge: Cambridge University Press, 1974

2 Grone R, Merris R, Sunder V. The Laplacian spectrum of a graph. SIAM J Matrix Anal Appl, 1990, 11(2): 218~238
3 Merris R. Laplacian matrices of graphs: A survey. Linear Algebra and Its Applications, 1994, 197/198: 143~176
4 Bondy J A, Murty U S R. Graph Theory with Applications. London: The Macmillan Press LTD, 1976
5 胡冠章. 现代应用数学手册. 离散数学卷: 组合数学与图论. 北京: 清华大学出版社, 2002
6 Alpert C J, Kahgn A B. Recent directions in netlist partitioning——A survey. Integration, 1995, 19: 1~81
7 Hagen L, Kahng A B. New spectral methods for ratio cut partition and clustering. IEEE Trans Computer-Aided Design, 1992, 11: 1074~1085
8 Fiedler M. Algebraic connectivity of graphs. Czechoslovak Math J, 1973, 23(98): 298~305
9 Yang H Z, Hu G Z, Wang H. Criterion for reducing power consumption by means of ratio-cut circuit partitioning. Electronic Letters, 2000, 36(16): 1346~1347
10 Lengauer T. Combinatorial algorithms for integrated circuit layout. New York: Wiley-Teubner, 1990
11 Fiduccia C M, Matheyses R M. A linear time heuristic for improving network partitions. In: Proc ACM/IEEE Design Automation Conf, 1982. 175~181
12 Kernigham B, Lin S. An efficient heuristic procedure for partitioning of electrical circuits. Bell Syst Tech J, 1970, 49: 291~307
13 Bui T Z, Moon B R. Genetic algorithm and graph partitioning. IEEE Trans Comput, 1996, 45: 841~855
14 Yang H, Wang D F. Efficient network flow based on min-cut, balanced partitioning. IEEE Trans Computer-Aided Design, 1996, 15(12): 1533~1540
15 Fiedler M. A property of eigenvectors of nonnegative symmetric matrices and its application to graph theory. Czechoslovak Math J, 1973, 25(100): 619~633
16 Pothen A, Simon H, Liou K P, et al. Partitioning sparse matrices with eigenvectors of graphs. SIAM J Matrix Anal Appl, 1990, 11(3): 430~452