



斜向波与任意多个长水平圆柱的相互作用

沈永明*

(大连理工大学海岸和近海工程国家重点实验室, 大连 116023)

郑永红

(中科院广州能源研究所, 广州 510640)

吴朝安

(香港大学机械工程系, 香港)

摘要 采用多极子展开法对有限水深下线性斜向波与任意多个完全淹没的长水平圆柱相互作用的散射和辐射问题进行了研究. 首先建立由多极子线性组合表示的散射势和辐射势的级数形式的解析表达式, 然后利用 Bessel 函数的加法定理和物面边界条件来确定该级数表达式中的未知系数, 在此基础上, 导出了波浪力、附加质量和透反射系数的解析表达式. 采用边界元方法对本文的解析解进行了验证, 同时利用本文的解析方法研究了 3 种不同工况的线性斜向波与多个水平圆柱的相互作用问题. 结果表明, 圆柱个数、排列方式及其间距对波浪力、水动力学系数以及透反射系数有显著影响, 并在数值实验中发现了一些重要而有趣的物理现象.

关键词 散射和辐射 水波 解析解 水动力学特性

随着海洋开发的深入, 结构物群在海洋工程中的应用将日益普遍. 目前关于波浪与单个海洋结构物相互作用的研究已十分深入, 也有不少关于波浪与多个垂直圆柱体相互作用的研究, 然而关于波浪与多个水平圆柱体相互作用的研究工作还很少, 尤其当入射波为斜向波时, 现有的研究工作是十分有限的. 为此, 本文将研究斜向波与任意多个淹没长水平圆柱体的相互作用, 探讨结构物的几何参数、淹没深度、结构物间距和排列方式等对其水动力学特性的影响. 该研究来自需要对多个长条形水平圆柱体组成的淹没型波能装置群进行水动力学特性分

收稿日期: 2006-08-16; 接受日期: 2006-11-14

国家自然科学基金(批准号: 10332050, 50579005)和国家高技术研究发展计划(编号: 20060105Z4010)资助项目

* E-mail: ymshe@dlut.edu.cn

析. 就作者所知, 尽管在波浪与单个淹没型波能装置相互作用方面有一些研究成果^[1~4], 也有大量关于波浪与多个垂直圆柱的相互作用的研究^[5~10], 然而关于斜向波与多个水平圆柱组成的淹没型波能装置群相互作用问题的研究迄今尚未见报道. 为此, 本文将采用多极子展开法对该问题进行研究. 该方法是一种求解波浪与结构物相互作用的散射和辐射问题的有效方法. 此法最初由 Ursell^[11]提出并用于计算一个半淹没的水平圆柱的垂荡问题, 随后许多学者利用该方法得到了波浪与无限长水平圆柱体的相互作用问题^[12~16]和波浪与三维球体结构物的相互作用^[17~25]的半解析解, 该方法与边界元等数值方法相结合, 还可以得到波浪与任意形状物体相互作用的高效数值解^[22].

本文应用文献^[26]中介绍的多极子构造了斜向波与多个水平圆柱相互作用的散射和辐射问题的级数形式的解析解, 并利用 Bessel 函数的加法定理, 根据物面边界条件来确定级数解析解的未知系数, 同时推导了波浪力、水动力学系数和透反射系数的简单计算式. 在此基础上, 利用本文得到的解析解, 分析了 3 种不同圆柱组成的结构物群的水动力学特性, 包括波浪力、水动力学系数和透反射系数, 并发现了若干重要而有趣的物理现象. 本文工作对水平圆柱结构物群, 如波能装置群的优化设计有重要的指导价值.

1 问题描述

这里考虑一微幅波从无穷远处向右传播, 斜向入射到 P 个完全淹没于水深为 h 的水中的长条形水平圆柱浮体组成的海洋结构物群引起的散射和辐射问题. 采用右手直角坐标系 (x, y, z) , x 轴和 y 轴位于静水面上, z 轴竖直向上为正, 如图 1. 静止时, 第 p 浮体在二维横截面 $y = y_0$ 上的中心坐标为 (ξ_p, y_0, η_p) , 半径为 a_p ($p = 1, 2, \dots, P$). 此外, 引入 P 个局部柱坐标 (r_q, θ_q, y_q) , 其坐标原点位于 q 物体横截面的中心处, 且有 $x - \xi_q = r_q \sin \theta_q$, $z - \eta_q = -r_q \cos \theta_q$ 和 $y_q = y$. 假定角频率为 ω 的入射波从 $x = -\infty$ 向右传播, 其传播方向与 x 轴正向的夹角为 β ($\beta \neq 0$).

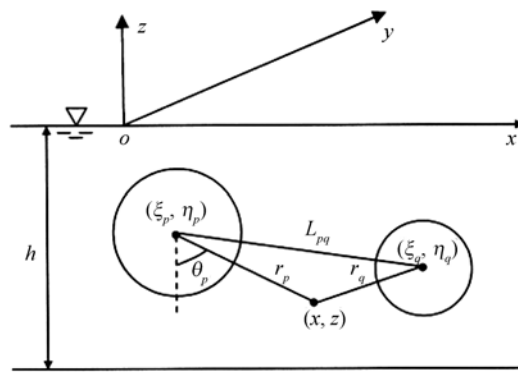


图 1 结构物几何特征与坐标定义

假定流体不可压、无粘性, 流体的流动无旋, 则存在速度势 ϕ , 满足下面的三维 Laplace 方程:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0. \quad (1)$$

由于本文考虑的圆柱形浮体是刚性的且在 y 方向足够长, 为了使问题简化, 可忽略浮体的端部效应而将这些浮体视为无限长, 从而可假定流体在时间上和沿 y 方向均呈周期性运动, 该假定已被许多学者用于研究斜向波与长条形结构物的相互作用问题, 如文献[12,14,16,27]. 于是速度势 ϕ 可表示为

$$\phi = \operatorname{Re} \left[\Phi e^{i(l y - \omega t)} \right], \quad (2)$$

其中 Φ 为与时间 t 和空间坐标 y 无关的复势函数; l 为波数在 y 方向的分量, $l = k_0 \sin \beta$; k_0 为波数, 由色散关系 $K = \omega^2 / g = k_0 \tanh(k_0 h)$ 确定; g 为重力加速度; $i = \sqrt{-1}$ 为虚单位. 由(1)式可得势函数 Φ 满足下面的控制方程:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - l^2 \Phi = 0, \quad (3)$$

在线性波理论意义上, 势函数 Φ 还必须满足下面的边界条件:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = K \Phi \quad (\text{在自由面上}), \quad (4)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad (\text{在海底 } z = -h), \quad (5)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n_q} = V_{n_q} \quad (\text{在 } q \text{ 物体的表面}), \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{\partial(\Phi - \Phi_I)}{\partial x} \mp i k_0 \cos \beta (\Phi - \Phi_I) \right] = 0, \quad (7)$$

其中 n_q 为第 q ($q = 1, 2, \dots, P$) 个物体表面的单位内法线; V_{n_q} 为第 q 物体沿法线 n_q 的速度分量.

对于线性波, 为了求解方便, 通常将复势函数 Φ 分解为

$$\Phi = \Phi_I + \Phi_D + \sum_{k=1}^P \sum_{L=1}^3 \Phi_{R,k}^L, \quad (8)$$

其中 Φ_I , Φ_D 和 $\Phi_{R,k}^L$ 分别为与入射式 ϕ_I , 散射势 ϕ_D 和辐射势 $\phi_{R,k}^L$ 有关的势函数; $\phi_{R,k}^L$ 表示第 k 物体做 L 模式运动产生的辐射势, 这里 $L = 1, 2$ 和 3 分别表示垂荡、横荡和横摇 3 种运动模式.

如果假定物体做小振幅运动, 并且将第 k 物体做 L 模式运动的振幅记作 $A_{R,k}^L$, 则 $\Phi_{R,k}^L$ 可表示为 $\Phi_{R,k}^L = -i\omega A_{R,k}^L \phi_{R,k}^L$. 于是(8)式变为

$$\Phi = \Phi_I + \Phi_D - i\omega \sum_{k=1}^P \sum_{L=1}^3 A_{R,k}^L \phi_{R,k}^L, \quad (9)$$

其中 $\phi_{R,k}^L$ 为待求的势函数.

对本文问题, 势函数 Φ_I 为已知, 其表达式为

$$\Phi_I = -\frac{igA \cosh[k_0(z+h)]}{\omega \cosh(k_0 h)} e^{ik_0 x \cos \beta}. \quad (10a)$$

应用第一类变形 Bessel 函数的生成函数, 可将上式在第 q 个局部极坐标 (r_q, θ_q) 下表示为

$$\Phi_I = -\frac{igA e^{ik_0 z_q \cos \beta}}{2\omega \cosh(k_0 h)} \left[\sum_{m=0}^{\infty} C_{1m,q} \cos(m\theta_q) I_m(lr_q) - i \sum_{m=1}^{\infty} C_{2m,q} \sin(m\theta_q) I_m(lr_q) \right], \quad (10b)$$

其中 A 为入射波振幅; I_m 为 m 阶第一类变形 Bessel 函数; $C_{1m,q}$ 和 $C_{2m,q}$ 的表达式如下:

$$C_{1m,q} = \left[(-1)^m e^{k_0(\eta_q+h)} + e^{-k_0(\eta_q+h)} \right] \varepsilon_m \cosh(m\gamma),$$

$$C_{2m,q} = \left[(-1)^m e^{k_0(\eta_q+h)} - e^{-k_0(\eta_q+h)} \right] \varepsilon_m \sinh(m\gamma),$$

其中 $\varepsilon_0 = 1$, 当 $m > 1$ 时, $\varepsilon_m = 2$; γ 由 $k_0 = l \cosh \gamma$ 确定.

除物面边界条件(6)和无穷远处辐射边界条件(7)外, 未知势函数 Φ_D 和 $\varphi_{R,k}^L$ 满足的控制方程和边界条件与 Φ 所满足的控制方程和边界条件完全相同. 对 Φ_D , (6)和(7)式分别改写为下式:

$$\frac{\partial \Phi_D}{\partial n_q} = -\frac{\partial \Phi_I}{\partial n_q} \quad (\text{在 } q \text{ 物体的表面}), \quad (6a)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{\partial \Phi_D}{\partial x} \mp ik_0 \cos \beta \Phi_D \right] = 0, \quad (7a)$$

而对 $\varphi_{R,k}^L$, 它们变为

$$\frac{\partial \varphi_{R,k}^L}{\partial n_q} = n_q^L \delta_{q,k} \quad (\text{在 } q \text{ 物体的表面}), \quad (6b)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{\partial \varphi_{R,k}^L}{\partial x} \mp ik_0 \cos \beta \varphi_{R,k}^L \right] = 0, \quad (7b)$$

其中 $\delta_{q,k}$ 为 Kronecker Delta 函数; n_q^L 为第 q 物体表面的广义内法线, 其表达式为

$$n_q^L = \left[\delta_{1,L} - (x - x_{0,q}) \delta_{3,L} \right] n_{q,z} + \left[\delta_{2,L} + (z - z_{0,q}) \delta_{3,L} \right] n_{q,x}, \quad (11)$$

其中 $n_{q,x}$ 和 $n_{q,z}$ 分别为 n_q 在 x 和 z 方向的分量, $(n_{q,x}, n_{q,z}) = (-\sin \theta_q, \cos \theta_q)$; $(x_{0,q}, z_{0,q})$ 为假定的第 q 物体的旋转中心.

2 求解方法

采用多极子方法求解线性波与多个物体相互作用的基本步骤包括: (i) 推导满足控制方程和物面边界条件除外的其他所有边界条件的多极子; (ii) 将导出的多极子布置在每个物体的中心, 并将速度势表示为未知系数与各多极子乘积的线性组合; (iii) 将每个极子用局部坐标表示出来, 以便利用各个物体的物面边界条件得到关于未知系数的无穷个线性代数方程组成的方程组, 对方程组截断并数值求解, 就可以得到未知系数的值; (iv) 一旦求出未知系数,

就可以利用速度势得到物体的水动力学特性.

对本文考虑的问题, 在 (ξ_p, η_p) 处奇异的多极子可表示为^[26]

$$\psi_{n,p}^+ = K_n(lr_p) \cos(n\theta_p) + \int_0^\infty \frac{\cosh(n\mu) \cos[l(x - \xi_p) \sinh \mu] f_{n,p}(\nu)}{\nu \sinh(\nu h) - K \cosh(\nu h)} d\mu, \quad (12a)$$

$$\psi_{n,p}^- = K_n(lr_p) \sin(n\theta_p) + \int_0^\infty \frac{\sinh(n\mu) \sin[l(x - \xi_p) \sinh \mu] g_{n,p}(\nu)}{\nu \sinh(\nu h) - K \cosh(\nu h)} d\mu, \quad (12b)$$

其中 $\psi_{n,p}^+$ 和 $\psi_{n,p}^-$ 分别为置于第 p 物体形心处的对称和反对称的多极子; K_n 为 n 阶第二类变形 Bessel 函数; $\nu = l \cosh \mu$; $f_n(\nu)$ 和 $g_n(\nu)$ 由下式给出:

$$f_{n,p}(\nu) = e^{-\nu(\eta_p+h)} [K \sinh(\nu z) + \nu \cosh(\nu z)] + (-1)^n (\nu + K) e^{\nu \eta_p} \cosh[\nu(z+h)],$$

$$g_{n,p}(\nu) = e^{-\nu(\eta_p+h)} [K \sinh(\nu z) + \nu \cosh(\nu z)] + (-1)^{n+1} (\nu + K) e^{\nu \eta_p} \cosh[\nu(z+h)],$$

注意(12a)和(12b)式中的积分是奇异的, 其值等于对应的主值积分与其被积函数的留数与 πi 的乘积之和.

利用(12a)和(12b)式给出的多极子, 势函数 Φ_D 和 $\phi_{R,k}^L$ 可表示如下:

$$\Phi_D = \sum_{p=1}^P \left(\sum_{n=0}^\infty A'_{n,p} \psi_{n,p}^+ + \sum_{n=1}^\infty B'_{n,p} \psi_{n,p}^- \right), \quad (13)$$

$$\phi_{R,k}^L = \sum_{p=1}^P \left(\sum_{n=0}^\infty A_{n,p}^L \psi_{n,p}^+ + \sum_{n=1}^\infty B_{n,p}^L \psi_{n,p}^- \right), \quad (14)$$

其中 $A'_{n,p}$, $B'_{n,p}$, $A_{n,p}^L$ 和 $B_{n,p}^L$ 为待求的未知复常数, 由物体表面边界条件确定, $L=1, 2, 3$.

(12a)和(12b)式中的多极子是以各个局部极坐标 (r_p, θ_p) 表示的, 为了应用 q 浮体的物面边界条件, 当 $p \neq q$ 时, 还需要将这些极子用局部坐标 (r_q, θ_q) 表示出来. 经过一系列推导, 多极子 $\psi_{n,p}^+$ 和 $\psi_{n,p}^-$ 可用局部坐标 (r_q, θ_q) 表示如下(具体推导过程见附录):

$$\begin{aligned} \psi_{n,p}^+ &= \sum_{m=0}^\infty (\lambda_{m,n,p,q}^+ + A_{m,n,p,q}^+) I_m(lr_q) \cos(m\theta_q), \\ &+ \sum_{m=1}^\infty (\lambda_{m,n,p,q}^- - A_{m,n,p,q}^-) I_m(lr_q) \sin(m\theta_q), \quad \text{当 } p \neq q \text{ 时}, \end{aligned} \quad (15a)$$

$$\psi_{n,p}^+ = K_n(lr_q) \cos(n\theta_q) + \sum_{m=0}^\infty A_{m,n,q,q}^+ I_m(lr_q) \cos(m\theta_q), \quad \text{当 } p = q \text{ 时}, \quad (15b)$$

$$\begin{aligned} \psi_{n,p}^- &= \sum_{m=0}^\infty (\tau_{m,n,p,q}^+ + B_{m,n,p,q}^+) I_m(lr_q) \cos(m\theta_q) \\ &+ \sum_{m=1}^\infty (\tau_{m,n,p,q}^- + B_{m,n,p,q}^-) I_m(lr_q) \sin(m\theta_q), \quad \text{当 } p \neq q \text{ 时}, \end{aligned} \quad (16a)$$

$$\psi_{n,p}^- = K_n(lr_q) \sin(n\theta_q) + \sum_{m=1}^\infty B_{m,n,q,q}^- I_m(lr_q) \sin(m\theta_q), \quad \text{当 } p = q \text{ 时}, \quad (16b)$$

其中 $A_{m,n,p,q}^+$, $A_{m,n,p,q}^-$, $B_{m,n,p,q}^+$, $B_{m,n,p,q}^-$, $\lambda_{m,n,p,q}^+$, $\lambda_{m,n,p,q}^-$, $\tau_{m,n,p,q}^+$ 和 $\tau_{m,n,p,q}^-$ 的表达式分别由附录中的(a18), (a19), (a21), (a22)和(a13)~(a16)式给出.

由(6a), (13), (15)和(16)式, 并考虑三角函数的正交性, 可以很容易地得到下面的两组无穷维方程组, 它们必须截断并联立求解, 才能得到未知系数 $A'_{n,p}$ 和 $B'_{n,p}$ 的值:

$$\sum_{p=1}^P \left[\sum_{n=0}^{\infty} A'_{n,p} (\lambda_{m,n,p,q}^+ + A_{m,n,p,q}^+) + \sum_{n=1}^{\infty} B'_{n,p} (\tau_{m,n,p,q}^+ + B_{m,n,p,q}^+) \right] + \frac{K'_m(la_q)}{I'_m(la_q)} A'_{m,q} + \sum_{n=0}^{\infty} A_{m,n,q,q}^+ A'_{n,q} = \frac{igAe^{ik_0\xi_q \cos \beta} C_{1m,q}}{2\omega \cosh(k_0 h)}, \quad (17a)$$

$$\sum_{p=1}^P \left[\sum_{n=0}^{\infty} A'_{n,p} (\lambda_{m,n,p,q}^- - A_{m,n,p,q}^-) + \sum_{n=1}^{\infty} B'_{n,p} (\tau_{m,n,p,q}^- + B_{m,n,p,q}^-) \right] + \frac{K'_m(la_q)}{I'_m(la_q)} B'_{m,q} + \sum_{n=1}^{\infty} B_{m,n,q,q}^- B'_{n,q} = \frac{gAe^{ik_0\xi_q \cos \beta} C_{2m,q}}{2\omega \cosh(k_0 h)}, \quad (17b)$$

其中 $K'_m = \partial K_m / \partial r_q$, $I'_m = \partial I_m / \partial r_q$, $q = 1, 2, \dots, P$.

同样, 利用(6b), (14), (15)和(16)式, 可得到关于未知系数 $A_{n,p}^L$ 和 $B_{n,p}^L$ ($L=1, 2, 3$) 的两组无穷维方程组如下:

$$\sum_{p=1}^P \left[\sum_{n=0}^{\infty} A_{n,p}^L (\lambda_{m,n,p,q}^+ + A_{m,n,p,q}^+) + \sum_{n=1}^{\infty} B_{n,p}^L (\tau_{m,n,p,q}^+ + B_{m,n,p,q}^+) \right] + \frac{K'_m(la_q)}{I'_m(la_q)} A_{m,q}^L + \sum_{n=0}^{\infty} A_{m,n,q,q}^+ A_{n,q}^L = -\delta_{1,m} \delta_{q,k} E_{1q}^L / [I'_m(la_k)], \quad (18a)$$

$$\sum_{p=1}^P \left[\sum_{n=0}^{\infty} A_{n,p}^L (\lambda_{m,n,p,q}^- - A_{m,n,p,q}^-) + \sum_{n=1}^{\infty} B_{n,p}^L (\tau_{m,n,p,q}^- + B_{m,n,p,q}^-) \right] + \frac{K'_m(la_q)}{I'_m(la_q)} B_{m,q}^L + \sum_{n=0}^{\infty} B_{m,n,q,q}^- B_{n,q}^L = \delta_{1,m} \delta_{q,k} E_{2q}^L / [I'_m(la_k)], \quad (18b)$$

其中 $E_{1q}^L = \delta_{1,L} + (x_{0,q} - \xi_q) \delta_{3,L}$; $E_{2q}^L = \delta_{2,L} + (\eta_q - z_{0,q}) \delta_{3,L}$. 注意, 在(17a)和(18a)式中, $m=0, 1, 2, \dots, \infty$; 而在(17b)和(18b)式中, $m=1, 2, 3, \dots, \infty$.

比较(17a)和(18a)式及(17b)和(18b)式, 可以看出这两组线性方程组的系数矩阵是相同的. 如果将该系数矩阵记为 $\mathbf{S}$, 则可将这两个线性方程组表示成下面的矩阵形式:

$$\mathbf{S} \begin{bmatrix} \mathbf{A}'_{n,p} & \mathbf{A}_{n,p}^L \\ \mathbf{B}'_{n,p} & \mathbf{B}_{n,p}^L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{17a} & \mathbf{V}_{18a} \\ \mathbf{V}_{17b} & \mathbf{V}_{18b} \end{bmatrix}, \quad (19)$$

其中 $\mathbf{A}'_{n,p}$, $\mathbf{B}'_{n,p}$, $\mathbf{A}_{n,p}^L$ 和 $\mathbf{B}_{n,p}^L$ 分别为未知系数 $A'_{n,p}$, $B'_{n,p}$, $A_{n,p}^L$ 和 $B_{n,p}^L$ 对应的向量; $\mathbf{V}_{17a}$, $\mathbf{V}_{17b}$, $\mathbf{V}_{18a}$ 和 $\mathbf{V}_{18b}$ 分别为(17a), (17b), (18a)和(18b)式的右端项构成的向量. (19)式可采用线性方

程组的标准解法进行求解.

3 水动力学特性的计算式

3.1 波浪力表达式

作用在第 q 个水平圆柱体的横截面 $y = y_0$ 上的波浪力沿 j 方向的分量为 $F_{jqt} = \text{Re} \left[F_{j,q} e^{i(ky_0 \sin \beta - \omega t)} \right]$, 其中 $F_{j,q}$ 为频域波浪力, 由下式计算:

$$F_{j,q} = \rho i \omega \int_{S_q} (\Phi_I + \Phi_D) n_j ds,$$

其中 ρ 为水的密度; S_q 为 q 圆柱体的淹没横截面积. 将(10b)和(13)式代入上式并利用(17a)和(17b)式, 得到垂向力 $F_{1,q}$, 水平力 $F_{2,q}$ 和横摇力矩 $F_{3,q}$ 的一个非常简单的计算式如下:

$$F_{1,q} = \pi \rho i \omega a_q C_k(1, q) I_1(la_q) A'_{1,q}, \quad (20a)$$

$$F_{2,q} = -\pi \rho i \omega a_q C_k(1, q) I_1(la_q) B'_{1,q}, \quad (20b)$$

$$F_{3,q} = \pi \rho i \omega a_q I_1(la_q) C_k(1, q) \left[A'_{1,q}(x_{0,q} - \xi_q) + B'_{1,q}(z_{0,q} - \eta_q) \right], \quad (20c)$$

其中

$$C_k(m, q) = \frac{K_m(la_q)}{I_m(la_q)} - \frac{K'_m(la_q)}{I'_m(la_q)},$$

从(20c)式可以看出, 如果假定的第 q 物体的旋转中心 $(x_{0,q}, z_{0,q})$ 与其形心 (ξ_q, η_q) 一致, 则横摇力矩必定为 0.

3.2 水动力学系数的表达式

第 k 物体做 L 模式运动在第 q 物体 j 方向上引起的水动力学系数包括附加质量 $M_{k,q}^{L,j}$ 和附加阻尼系数 $N_{k,q}^{L,j}$, 其计算式经推导表示如下:

$$M_{k,q}^{L,j} = \text{Re} \left[\rho \int_{S_q} \phi_{R,k}^L n_q^j ds \right] = \text{Re} \left[\rho \pi G_{k,q}^{L,j} \right], \quad (21a)$$

$$N_{k,q}^{L,j} = \text{Im} \left[\rho \omega \int_{S_q} \phi_{R,k}^L n_q^j ds \right] = \text{Im} \left[\rho \pi \omega G_{k,q}^{L,j} \right], \quad (21b)$$

其中 $G_{k,q}^{L,j}$ ($j = 1, 2, 3$) 由下式给出:

$$G_{k,q}^{L,j} = a_q I_1(la_q) \left\{ E_{1q}^j \left[C_k(1, q) A_{1,q}^L - \frac{\delta_{q,k} E_{1q}^L}{H'_1(la_k)} \right] - E_{2q}^j \left[C_k(1, q) B_{1,q}^L + \frac{\delta_{q,k} E_{2q}^L}{H'_1(la_k)} \right] \right\},$$

从(18a)和(18b)式可以看出, 当假定的第 q 物体的旋转中心 $(x_{0,q}, z_{0,q})$ 与其形心 (ξ_q, η_q) 一致时, 横摇附加质量和阻尼系数为 0, 因为此时(18a)和(18b)式的右端均为 0.

3.3 透反射系数的表达式

本节将给出所有水平圆柱体固定不动时的透反射系数的计算表达式, 即不考虑辐射波对

透反射系数的影响.

当 $x \rightarrow \pm\infty$ 时, 有

$$\psi_{n,p}^+ \approx \frac{\pi i \cosh[k_0(z+h)] C_{1n,q}}{2\alpha h N_0^2 \varepsilon_n} e^{\pm i\alpha(x-\xi_p)}, \quad (22a)$$

$$\psi_{n,p}^- \approx \mp \frac{\pi \cosh[k_0(z+h)] C_{2n,q}}{2\alpha h N_0^2 \varepsilon_n} e^{\pm i\alpha(x-\xi_p)}, \quad (22b)$$

其中 $N_0^2 = [1 + \sinh(2k_0 h)/(2k_0 h)]/2$, $\alpha = k_0 \cos \beta$. 于是当 $x \rightarrow \pm\infty$ 时, 有

$$\Phi_D \approx \frac{\pi \cosh[k_0(z+h)] e^{\pm i\alpha x}}{2\alpha h N_0^2} \sum_{p=1}^P e^{\mp i\alpha \xi_p} \left[\sum_{n=0}^{\infty} A'_{n,p} i \frac{C_{1n,q}}{\varepsilon_n} \mp \sum_{n=1}^{\infty} B'_{n,p} \frac{C_{2n,q}}{\varepsilon_n} \right], \quad (23)$$

利用上式, 可以很容易地得到反射系数 C_R 和透射系数 C_T 的计算式如下:

$$C_R = \left| \frac{i\omega\pi \cosh(k_0 h)}{2\alpha h g N_0^2 A} \sum_{p=1}^P e^{i\alpha \xi_p} \left[\sum_{n=0}^{\infty} A'_{n,p} i \frac{C_{1n,q}}{\varepsilon_n} + \sum_{n=1}^{\infty} B'_{n,p} \frac{C_{2n,q}}{\varepsilon_n} \right] \right|, \quad (24a)$$

$$C_T = \left| 1 + \frac{i\omega\pi \cosh(k_0 h)}{2\alpha h g N_0^2 A} \sum_{p=1}^P e^{-i\alpha \xi_p} \left[\sum_{n=0}^{\infty} A'_{n,p} i \frac{C_{1n,q}}{\varepsilon_n} - \sum_{n=1}^{\infty} B'_{n,p} \frac{C_{2n,q}}{\varepsilon_n} \right] \right|. \quad (24b)$$

4 结果及讨论

为了验证本文方法, 并研究线性斜向波与多个水平长圆柱浮体相互作用的水动力学特性, 这里考虑图 2 的 3 种不同工况的浮体组成方式. 计算过程中, (13)和(14)式中的无穷级数被截断, 并保留 $N_n + 1$ 个对称多极子 $\psi_{n,p}^+$ ($n = 0, 1, \dots, N_n$) 和 N_n 个反对称多极子 $\psi_{n,p}^-$ ($n = 1, \dots, N_n$). 对(15a), (15b), (16a)和(16b)式中的无穷级数也进行了类似截断, 即保留 $N_m + 1$ 个对称的角分量

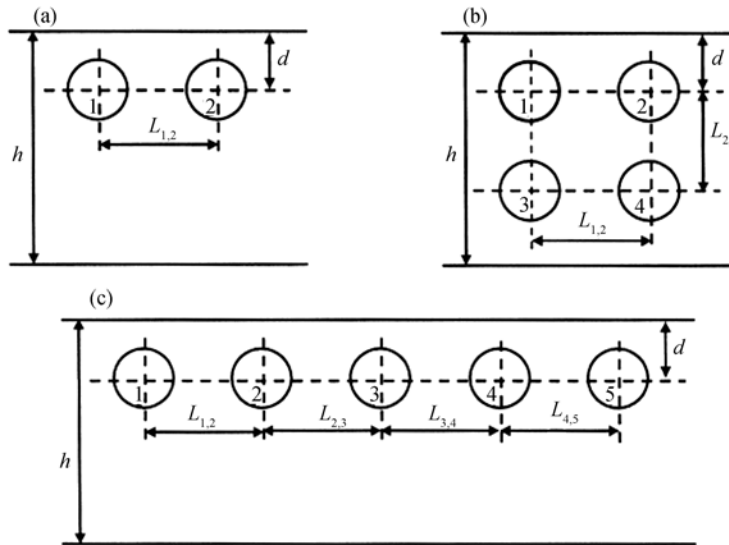


图 2 3 种工况的波能装置群组成

(a) 2 个相同的水平圆柱; (b) 4 个相同的水平圆柱; (c) 5 个等间距分布的相同圆柱

$\cos(m\theta)$, ($m=0, 1, \dots, N_m$)和 N_m 个反对称角分量 $\sin(m\theta)$, ($m=1, \dots, N_m$). 文中计算得到的所有结果按下列公式无因次化:

$$f_{j,q} = \begin{cases} |F_{j,q}| / (2\rho g A a_q), & j=1, 2, \\ |F_{j,q}| / (2\rho g A a_q^2), & j=3, \end{cases} \quad (25a)$$

$$m_{k,q}^{L,j} = \begin{cases} M_{k,q}^{L,j} / (\rho \pi a_q^2), & j=1, 2, \\ M_{k,q}^{L,j} / (\rho \pi a_q^4), & j=3, \end{cases} \quad (25b)$$

$$n_{k,q}^{L,j} = \begin{cases} N_{k,q}^{L,j} / (\rho \pi \omega a_q^2), & j=1, 2, \\ N_{k,q}^{L,j} / (\rho \pi \omega a_q^4), & j=3, \end{cases} \quad (25c)$$

其中 $f_{j,q}$, $m_{k,q}^{L,j}$ 和 $n_{k,q}^{L,j}$ 分别为无因次的波浪力、附加质量和附加阻尼系数.

(1) 工况 1: 两个相同的水平圆柱浮体组成的结构物群: 本节考虑图 2(a)的工况 1, 其结构物群由两个相同的水平圆柱浮体构成, 分别记为浮体 1 和浮体 2, 半径 $a_1 = a_2 = 0.2h$, 淹没深度 $d = 0.25h$. 这两个浮体的中心距离为 $L_{12} = 0.45h$, 入射波向 $\beta = 30^\circ$. 本计算中, 无穷级数被截断为有限项, 其对应的截断收敛性试验结果在表 1 中给出. 显然, 对给定的截断精度, 截断项数随无因次波数 k_0h 的增大而增加. 当 $N_n = N_m = 7$ 时, 可以得到 4 位小数精度的结果, 因此本研究中对所有工况均取此截断项数. 为了验证本文方法, 这里还采用文献[27]的边界积分方程法同时计算了这两个水平圆柱浮体的波浪力和水动力学系数. 图 3 给出了无因次波浪力和水动力学系数随 k_0h 的变化, 可以看出本文方法和边界元方法得到的结果吻合良好.

表 1 两个圆柱组成工况的无穷级数截断的典型收敛试验

		本文多极子方法				边界元
		$N_n=N_m=3$	$N_n=N_m=5$	$N_n=N_m=7$	$N_n=N_m=9$	
$K_0h = 0.1$	$f_{1,1}$	0.01032	0.01039	0.01039	0.01039	0.01039
	$f_{1,2}$	0.01013	0.01020	0.01020	0.01020	0.01020
$K_0h = 2.0$	$f_{1,1}$	0.67197	0.67627	0.67564	0.67565	0.67583
	$f_{1,2}$	1.08567	1.08848	1.08896	1.08898	1.08877
$K_0h = 5.0$	$f_{1,1}$	0.50484	0.50753	0.50802	0.50801	0.50809
	$f_{1,2}$	0.46174	0.46319	0.46312	0.46312	0.46300

从图 3(a)和(b)可以看出, 对于上面给出的计算参数, 作用在浮体 1 上的垂向波浪力 $f_{1,1}$ 随 k_0h 变化过程的峰值远小于作用在浮体 2 上的垂向波浪力 $f_{1,2}$ 的峰值, 而作用在浮体 1 上的水平波浪力 $f_{2,1}$ 随 k_0h 变化过程的峰值则远大于作用在浮体 2 上的水平波浪力 $f_{2,2}$ 的峰值. 显然, 这种现象是由于两个浮体的相互作用所致, 因为当两个相同的浮体单独置于同样的淹没深度时, 作用在其上的波浪力必然相等. 我们认为, 两个浮体间的距离对它们的相互作用起非常重要的作用, 因此下面将讨论距离的影响.

为了方便讨论浮体间距离对其相互作用的影响, 这里定义一个无量纲参数 $\sigma = (L_{12} - a_1 - a_2)/L$. 有关计算参数为 $a_1 = a_2 = 0.2h$, $d = 0.25h$ 及 $\beta = 30^\circ$. 本文方法计算得到

的结果如图 4、5 和 6, 它们分别表示浅水 $h/L=0.025$ 、中等水深 $h/L=0.3$ 和深水 $h/L=0.6$ 三种情况下的无因次波浪力、透反射系数和水动力学系数随 σ 的变化, 其中 L 为散射问题的入射波长或者辐射问题的辐射波长. 有趣的是, 当 σ 超过某个临界无因次距离 σ_c 后, 作用在浮体 1 上的波浪力呈现出周期振荡, 如图 4, 即当 $\sigma > \sigma_{c1}$ 时, $f_{1,1}(\sigma) = f_{1,1}(\sigma + T_\sigma)$; 当 $\sigma > \sigma_{c2}$ 时, $f_{2,1}(\sigma) = f_{2,1}(\sigma + T_\sigma)$, 其中 T_σ 为振荡周期; σ_{c1} 和 σ_{c2} 分别为垂向和水平波浪力出现周期振荡的两个临界无因次距离. 同样的周期振荡特征也出现在图 5 的透反射系数中, 且对本节考虑的工况, 在浅水和深水中时的振荡幅值很小.

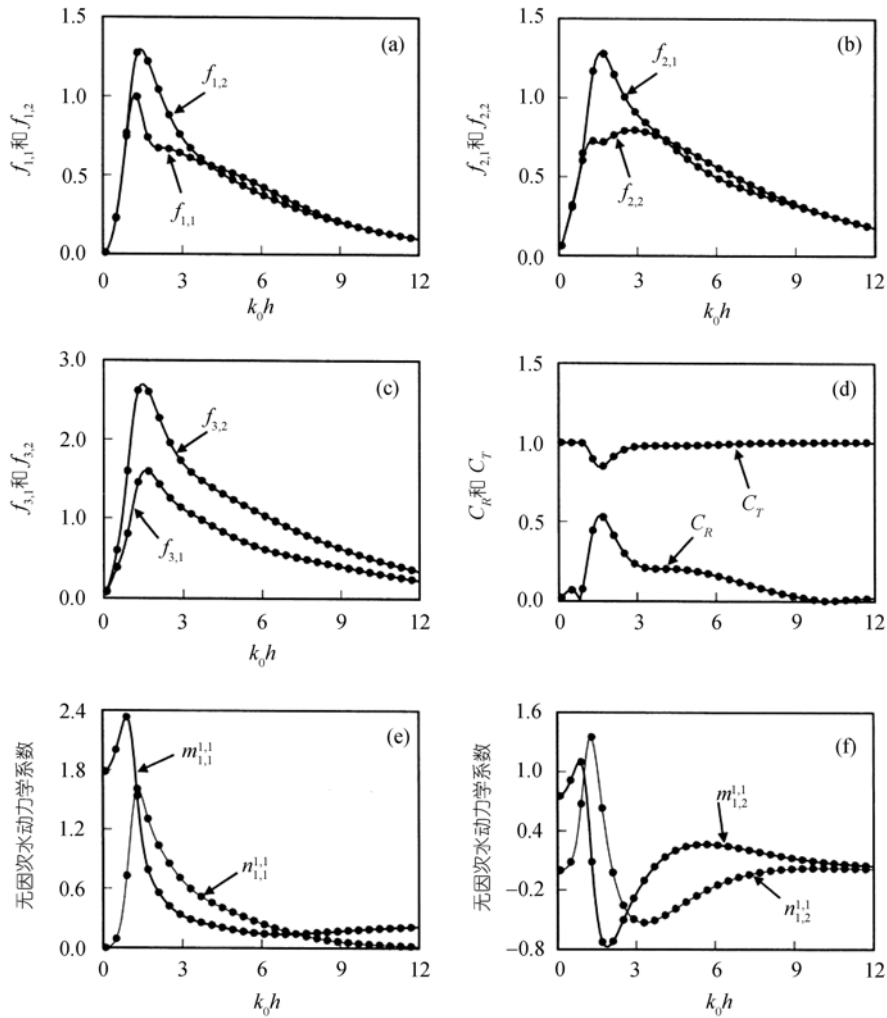


图 3 两个相同圆柱工况的无因次波浪力、透反射系数及水动力学系数随无因次波数的变化

$a_1=a_2=0.2h$, $d=0.25h$, $L_{1,2}=0.45h$, $\beta=30^\circ$; —示本文方法; ●示边界积分方程法

下面讨论入射波向 β 对振荡周期 T_σ 和振荡幅值的影响, 考虑四种不同的入射波向, 即 $\beta = 15^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ 和 75° . 限于篇幅, 这里仅给出中等水深 $h/L=0.3$ 情况下的结果, 如图 7. 可以看出振荡幅值和振荡周期 T_σ 随入射波向 $\beta (0 < \beta < 90^\circ)$ 的增大而增大. 仔细分析结果得到

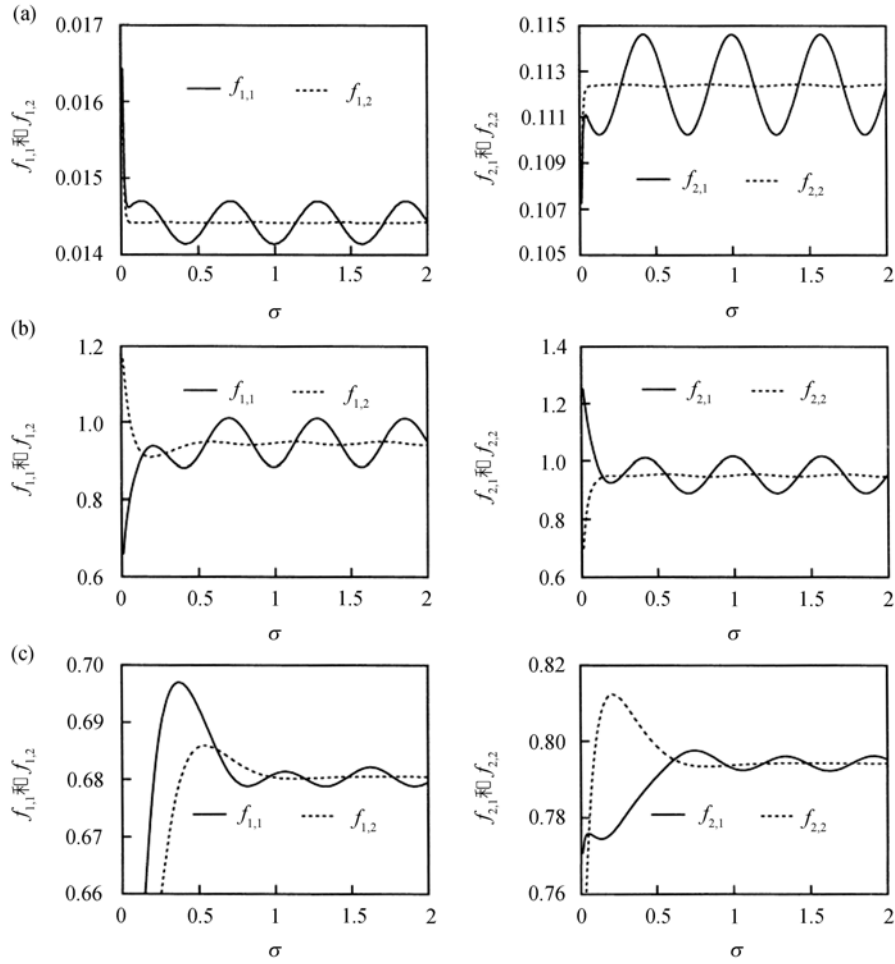


图 4 两个圆柱工况时, 浮体间的距离对无因次波浪力的影响

(a) 两个圆柱在浅水 $h/L = 0.025$ 时的无因次波浪力; (b) 两个圆柱在中等水深 $h/L = 0.3$ 时的无因次波浪力; (c) 两个圆柱在深水 $h/L = 0.6$ 时的无因次波浪力; $a_1 = a_2 = 0.2h$, $d = 0.25h$, $\beta = 30^\circ$; —示作用于浮体 1 上的波浪力; ----示作用于浮体 2 上的波浪力

振荡周期与波向的关系为

$$T_\sigma = 0.5 / \cos \beta, \quad (26)$$

且一个振荡周期上的垂向波浪力(或水平波浪力)的平均值等于单个浮体处于同样淹没深度时的垂向波浪力(或水平波浪力)。

图 8 给出了中等水深 $h/L = 0.3$ 条件下, 辐射波向对水动力学系数的影响。分析图 8 的结果发现, (26)式对 $m_{1,1}^{1,1}$, $n_{1,1}^{1,1}$, $m_{1,1}^{2,2}$ 和 $n_{1,1}^{2,2}$ 的变化是成立的, 而不适用于 $m_{1,2}^{1,1}$ 和 $n_{1,2}^{1,1}$ 的变化。

(2) 工况 2: 4 个相同水平圆柱组成的结构物群: 为了研究局部波动的影响, 这里考虑图 2(b)的 4 个相同水平圆柱浮体组成的工况 2。该工况的浮体组成与工况 1 的区别在于除了浮体 1 和 2 外, 还有另外两个浮体, 其中浮体 3 和 4 分别位于浮体 1 和 2 的正下方。为了便于考虑由于浮体 3 和 4 的存在对浮体 1 和 2 的水动力学特性以及透反射系数的影响, 计算参数 a_1 和 d

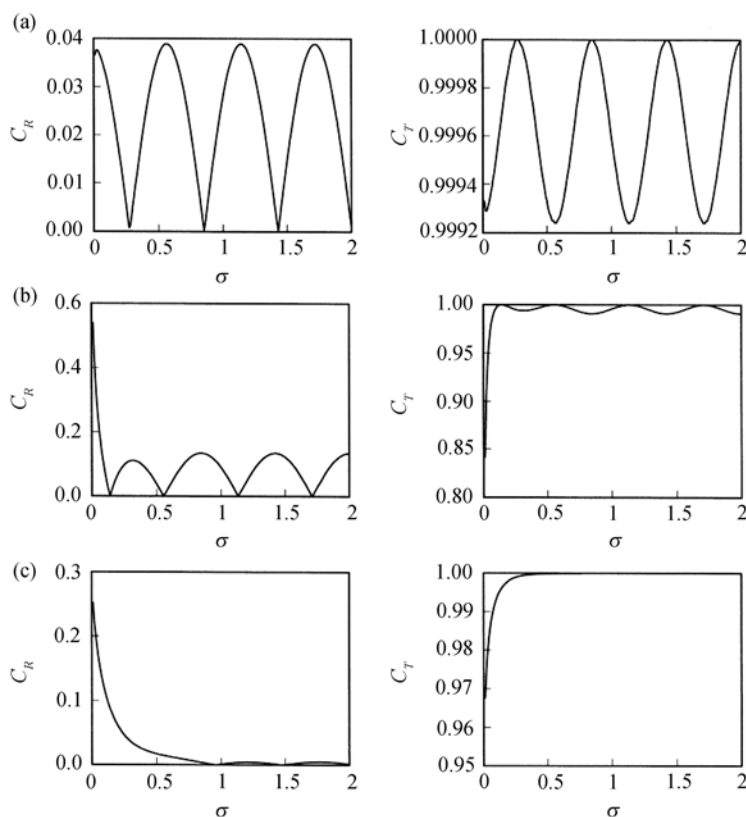


图 5 两个圆柱工况下, 浮体间的距离对透反射系数的影响

(a) 浅水 $h/L = 0.025$ 时透反射系数; (b) 中等水深 $h/L = 0.3$ 时的透反射系数; (c) 深水 $h/L = 0.6$ 时的透反射系数; $a_1 = a_2 = 0.2h$, $d = 0.25h$, $\beta = 30^\circ$

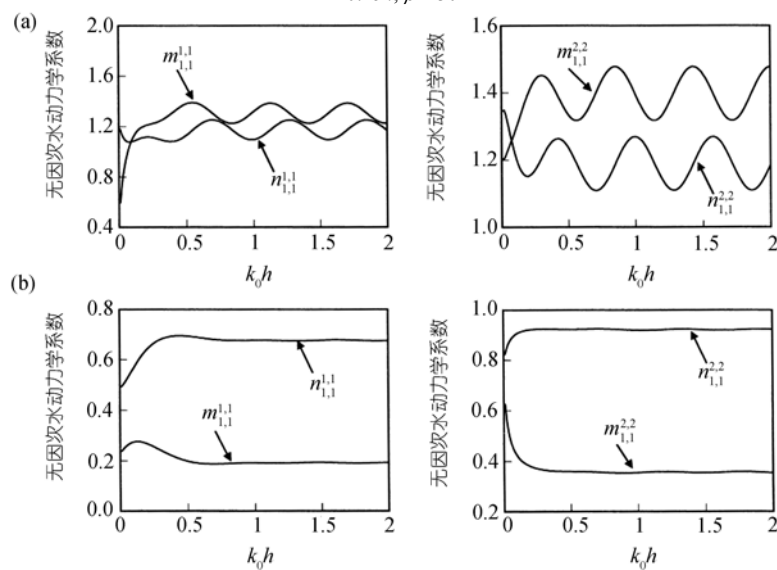


图 6 两个圆柱工况下, 浮体间的距离对浮体 1 上的水动力学系数的影响

(a) 中等水深 $h/L = 0.3$ 时, 浮体 1 上的无因次水动力学系数; (b) 深水 $h/L = 0.6$ 时, 浮体 1 上的无因次水动力学系数; $a_1 = a_2 = 0.2h$, $d = 0.25h$, $\beta = 30^\circ$

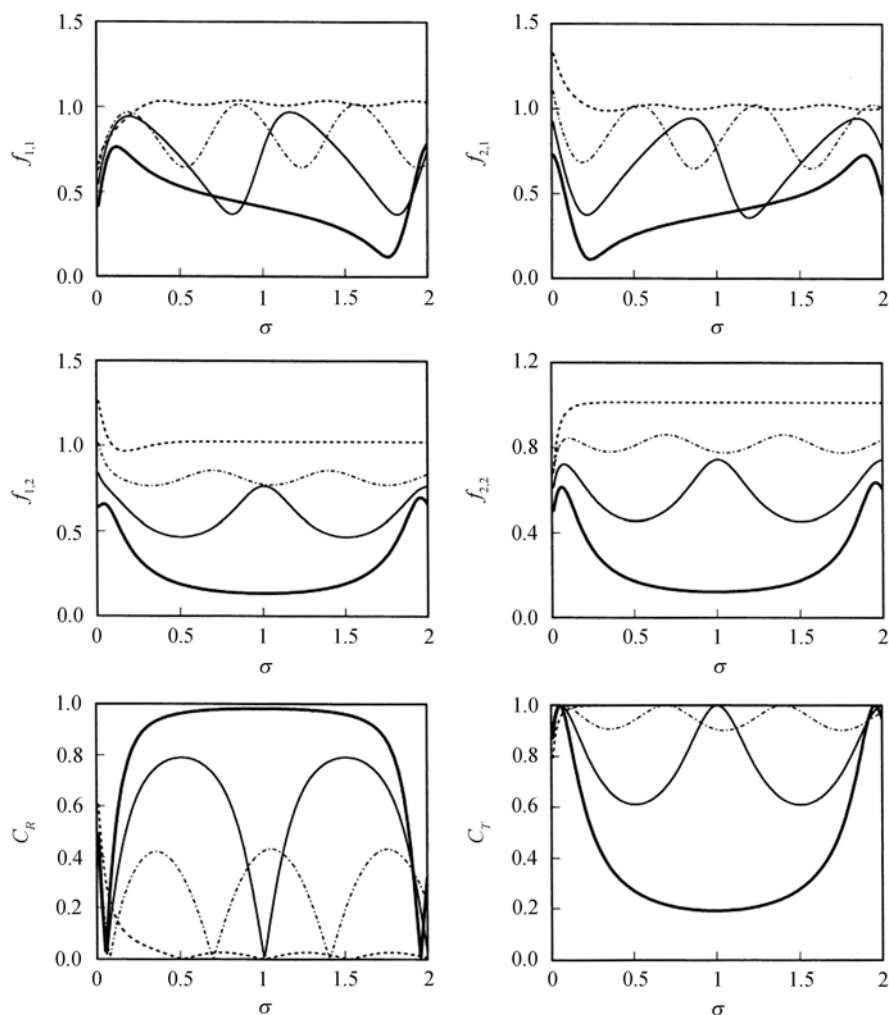


图7 两个圆柱工况在中等水深条件下,入射波向对无因次波浪力和透反射系数的影响

$a_1 = a_2 = 0.2h, d = 0.25h, h/L = 0.3$, ---- $\bar{\sigma} = 15^\circ$, - - - $\bar{\sigma} = 45^\circ$, — $\bar{\sigma} = 60^\circ$, — $\bar{\sigma} = 75^\circ$

的取值与工况 1 的取值相同,浮体 2 和 4 间的距离为 $L_{34} = L_{12} = 0.45h$, 入射波向 $\beta = 60^\circ$. 图 9 给出了 4 个浮体同时存在时作用在浮体 1 和 2 上的无因次波浪力和透反射系数, 同时为方便说明浮体 3 和 4 的影响, 该图还给出了仅有浮体 1 和 2 时的波浪力和透反射系数. 可以看出在浅水和深水情况下, 浮体 3 和 4 的存在对作用在浮体 1 和 2 上的波浪力的影响很小, 特别是当水深很深时 ($kh > 6$), 其影响小到足以忽略. 在中等水深情况下, 浮体 3 和 4 的存在对透反射系数的影响比较明显, 更有趣的是浮体 3 和 4 的存在反而引起反射系数的减小(图 9(e)). 然而, 该有趣现象与入射波向 β 有关, 如当波向变为 $\beta = 30^\circ$ 而保持其他计算参数不变时, 发现在某些中等水深区域, 浮体 3 和 4 的存在会引起反射系数增加, 而在另一些中等水深区域, 则导致反射系数减小.

(3) 工况 3: 5 个相同水平圆柱组成的结构物群: 本节考虑图 2(c) 的工况 3, 该结构物群由

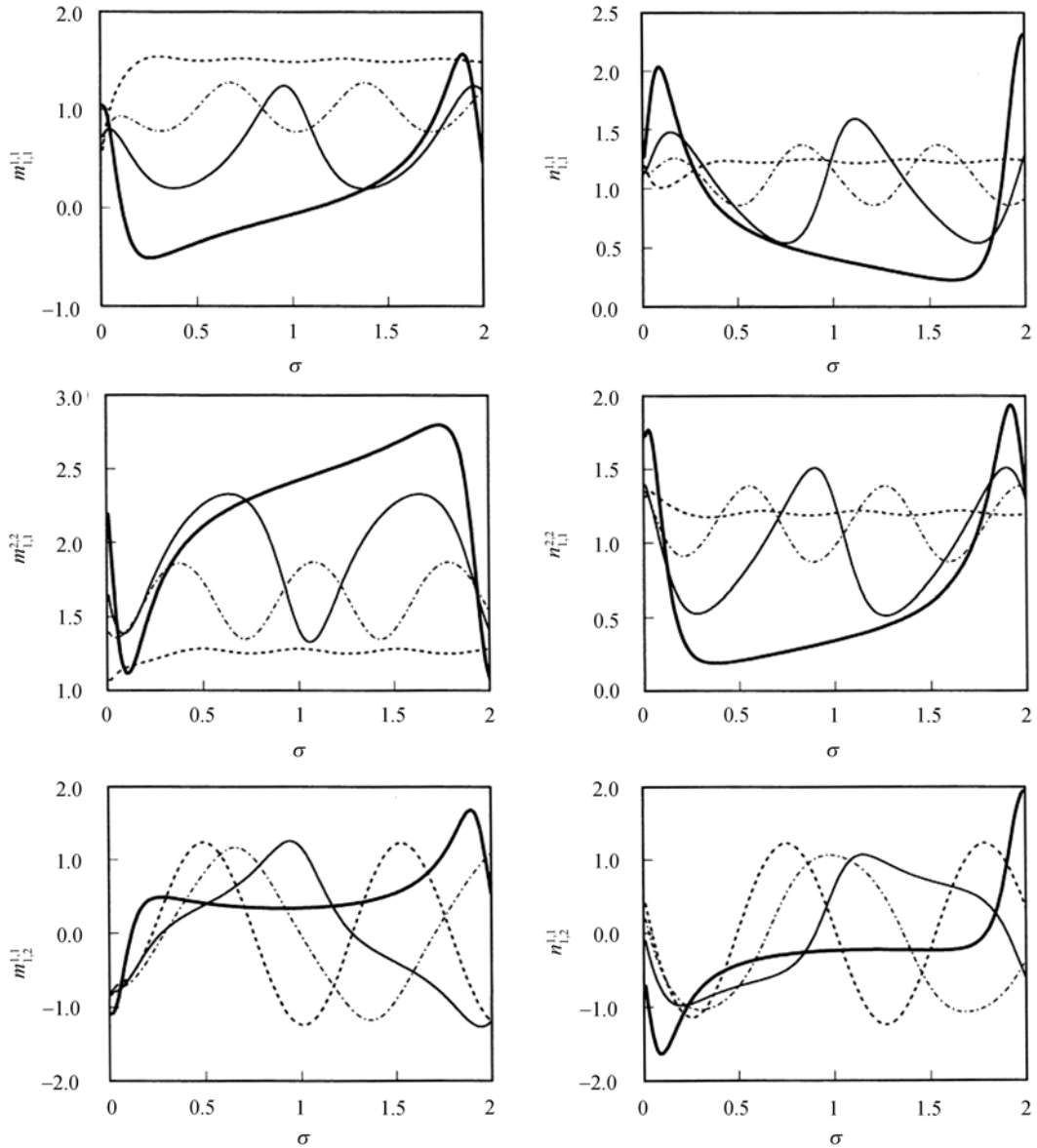


图 8 两个圆柱在中等水深条件下, 辐射波向对水动力学系数的影响

$a_1 = a_2 = 0.2h$, $d = 0.25h$, $h/L = 0.3$; ---- 示 $\beta = 15^\circ$, — 示 $\beta = 45^\circ$, -·- 示 $\beta = 60^\circ$, —·— 示 $\beta = 75^\circ$

邻近自由面的 5 个相同的淹没水平圆柱浮体组成, 各圆柱浮体间的水平间距相同. 有关计算参数为 $a_j (j=1, 2, \dots, 5) = 0.2h$, $d = 0.25h$, $L_{12} = L_{23} = L_{34} = L_{45} = 0.45h$ 及 $\beta = 30^\circ$. 图 10 给出了无因次波浪力和透反射系数的计算结果, 图 11 给出了前 3 个浮体由于浮体 1 做垂荡运动而引起的水动力学系数. 显然, 由于浮体间的相互作用, 使得波浪力等物理量的变化比较复杂, 最显著的特征是浮体间的相互作用引起透反射系数随无因次波数的变化呈现出多个峰值的振

荡特征, 可以预料, 随着水平圆柱浮体数目的增加, 透反射系数的这种振荡特征将更明显.

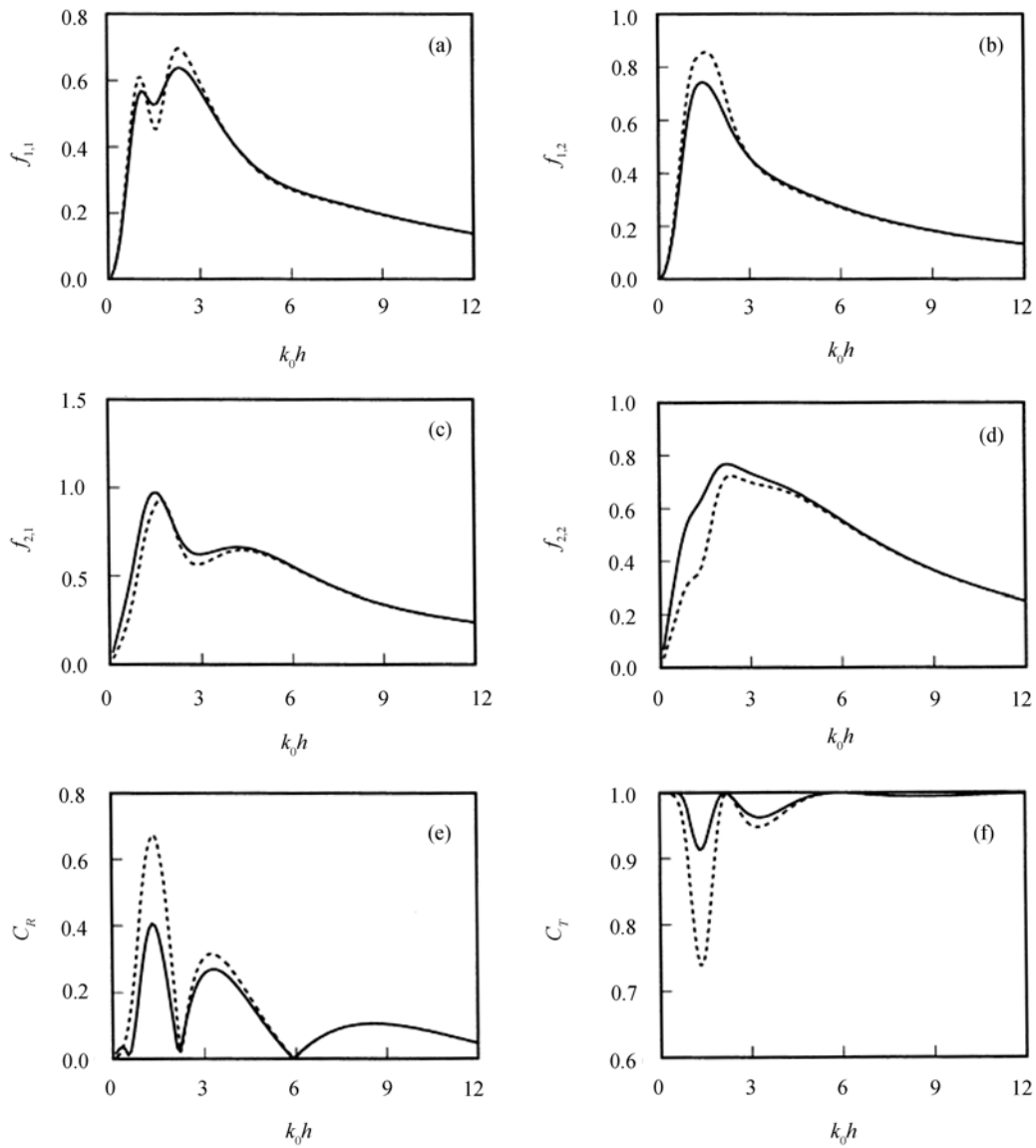


图 9 4 个圆柱工况下, 浮体 3 和 4 的存在对作用在浮体 1 和 2 上的波浪力及透反射系数的影响

$a_1 = a_2 = 0.2h$, $d = 0.25h$, $L_{12} = L_{24} = 0.45h$; — 示 4 个浮体同时存在; ---- 示仅有浮体 1 和 2

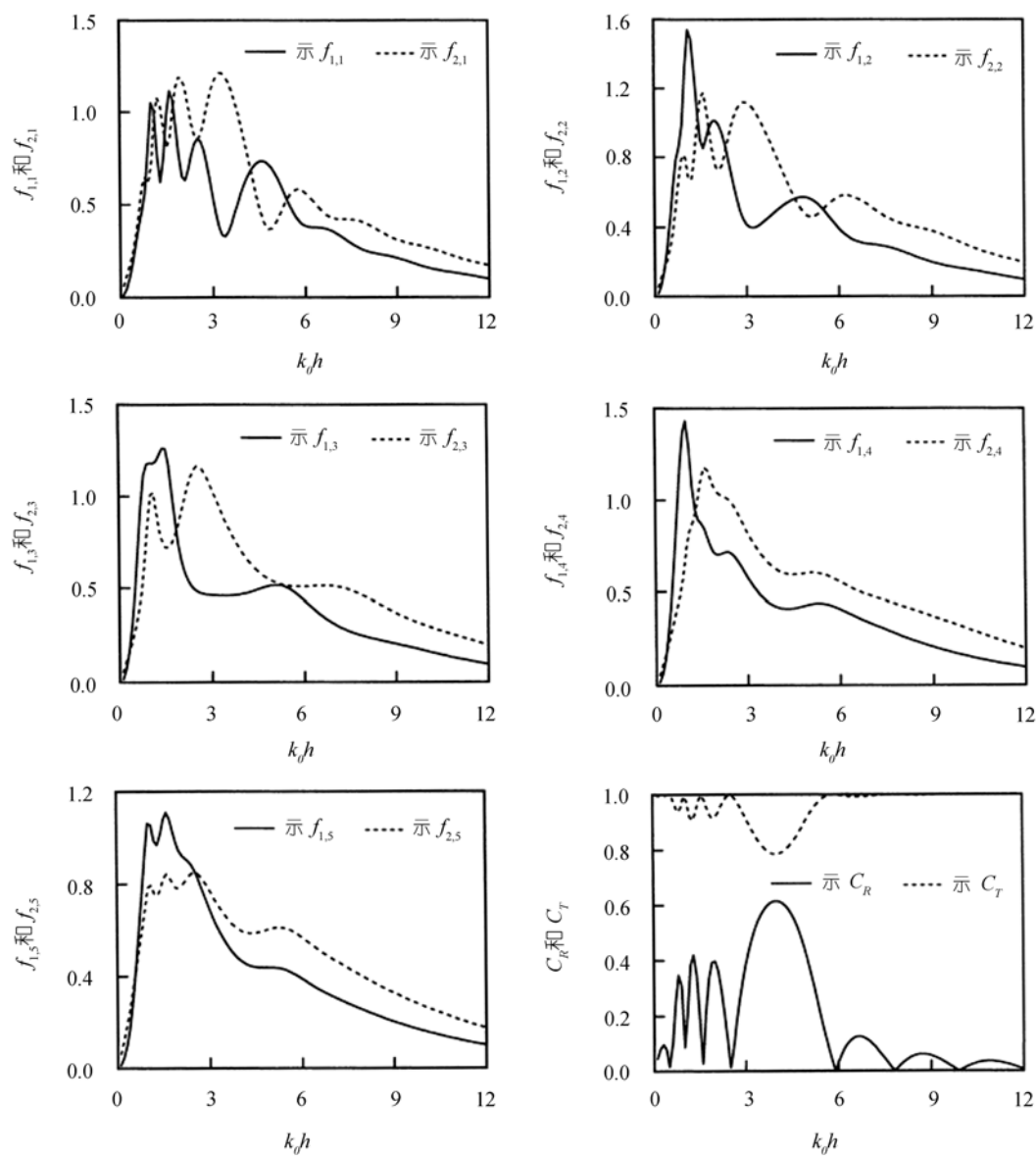


图 10 5 个水平圆柱组成下的无因次波浪力和透反射系数

$a_j (j = 1, 2, \dots, 5) = 0.2h, d = 0.25h, L_{12} = L_{23} = L_{34} = L_{45} = 0.45h, \beta = 30^\circ$

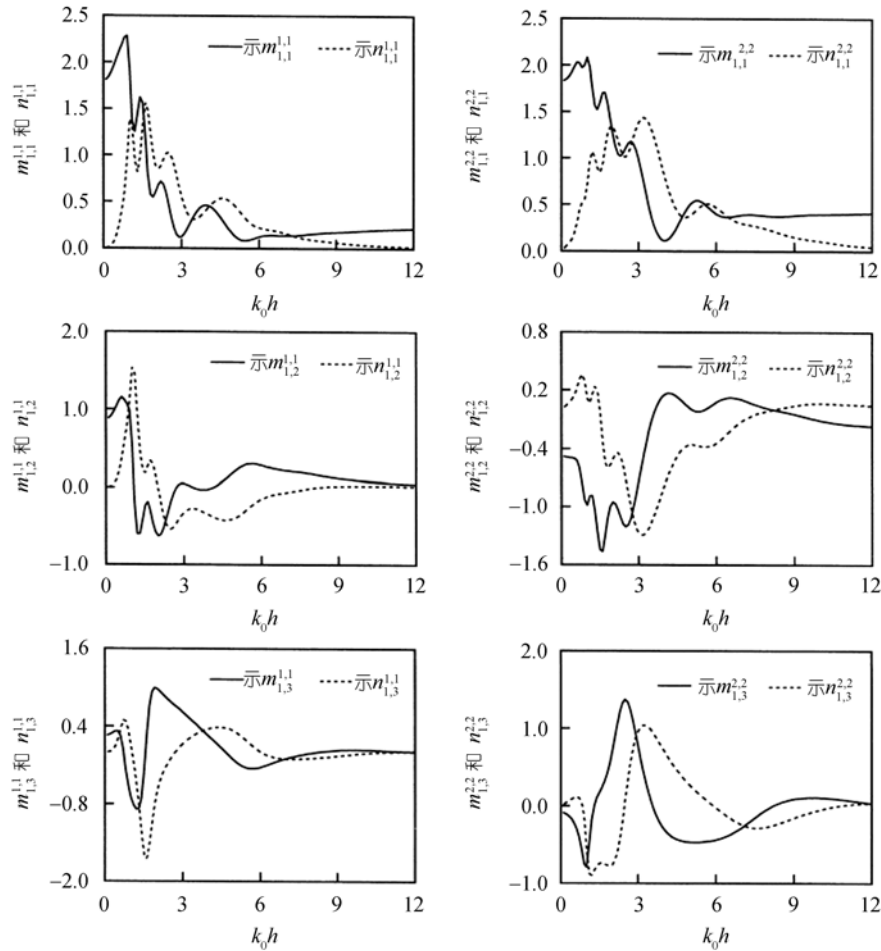


图 11 5 个水平圆柱组成下, 浮体 1 运动引起的前 3 个浮体的水动力学系数

$$a_j (j = 1, 2, \dots, 5) = 0.2h, d = 0.25h, L_{12} = L_{23} = L_{34} = L_{45} = 0.45h, \beta = 30^\circ$$

5 结论

水动力学分析是海洋结构物群优化设计的基础. 根据水动力学分析的结果, 可对结构物的几何参数、结构物群的排列方式和间距等进行优化. 尽管可以采用多种数值方法, 如有限元和边界元方法求解该问题, 但是它们与解析方法相比, 对计算资源的要求要高得多. 为此, 基于多极子展开法, 本文导出了斜向波与多个淹没水平圆柱群相互作用的散射和辐射问题的解析数值解, 同时也给出了波浪激励力、水动力学系数及透反射系数的简单计算式. 采用本文的解析数值法分析了 3 种不同的水平圆柱群的水动力学特性, 发现了一些有趣的物理现象. 本文工作为多向不规则波作用下的多个淹没的水平圆柱体群的设计奠定了重要基础.

参 考 文 献

- 1 Evans D V, Jeffrey D C, Salter S H, et al. The submerged cylinder wave energy device: Theory and experiment. Appl Ocean Res, 1979, 1: 3—12
- 2 Evans D V, Linton C M. Active devices for the reduction in wave intensity. Appl Ocean Res, 1989, 11(1): 26—32 [\[DOI\]](#)
- 3 Srokosz M A. The submerged sphere as an absorber of wave power. J Fluid Mech, 1979, 95: 717—741

- 4 Thomas J R. The absorption of wave energy by a three-dimensional submerged duct. *J Fluid Mech*, 1981, 104: 189—215 [\[DOI\]](#)
- 5 Simon M J. Multiple scattering in arrays of axisymmetric wave-energy devices (Part 1): A matrix method using a plane-wave approximation. *J Fluid Mech*, 1982, 120: 1—25 [\[DOI\]](#)
- 6 Kagemoto H, Yue D K P. Interactions among multiple three-dimensional bodies in water waves: An exact algebraic method. *J Fluid Mech*, 1986, 166: 189—209 [\[DOI\]](#)
- 7 Williams A N, Abul-Azm A G. Hydrodynamic interactions in floating cylinder arrays-II: Wave radiation. *Ocean Eng*, 1989, 16(3): 217—263 [\[DOI\]](#)
- 8 Linton C M, Evans D V. The interaction of waves with arrays of vertical circular cylinders. *J Fluid Mech*, 1990, 215: 549—569 [\[DOI\]](#)
- 9 Mciver P. Water-wave propagation through an infinite array of cylindrical structures. *J Fluid Mech*, 2000, 424: 101—125 [\[DOI\]](#)
- 10 Kagemoto H, Murai M, Saito M, et al. Experimental and theoretical analysis of the wave decay along a long array of vertical cylinders. *J Fluid Mech*, 2002, 456: 113—135 [\[DOI\]](#)
- 11 Ursell F. On the heaving motion of a circular cylinder on the free surface of a fluid. *Q J Mech Appl Math*, 1949, 2: 218—231
- 12 Bolton W E, Ursell F. The wave force on an infinitely long circular cylinder in an oblique sea. *J Fluid Mech*, 1973, 57: 241—256
- 13 O'Leary M. Radiation and scattering of surface waves by a group of submerged, horizontal, circular cylinders. *Appl Ocean Res*, 1985, 7: 51—57 [\[DOI\]](#)
- 14 Porter R, Evans D V. The trapping of surface waves by multiple submerged horizontal cylinders. *J Eng Math*, 1998, 38: 417—433 [\[DOI\]](#)
- 15 Linton C M, McIver M. The interaction of waves with horizontal cylinders in two-layer fluids. *J Fluid Mech*, 1995, 304: 213—229 [\[DOI\]](#)
- 16 Linton C M, Cadby J R. Scattering of oblique waves in a two-layer fluid. *J Fluid Mech*, 2002, 461: 343—364 [\[DOI\]](#)
- 17 Havelock T H. Waves due to a floating sphere making periodic heaving oscillations. *Proc R Soc London Ser A*, 1955, 231: 1—7
- 18 Hulme A. The wave forces acting on a floating hemisphere undergoing forced periodic oscillations. *J Fluid Mech*, 1982, 121: 443—463 [\[DOI\]](#)
- 19 Wang S. Motions of a spherical submarine in waves. *Ocean Eng*, 1986, 13(3): 249—271 [\[DOI\]](#)
- 20 Wu G X, Taylor R E. The exciting force on a submerged spheroid in regular waves. *J Fluid Mech*, 1987, 182: 411—426 [\[DOI\]](#)
- 21 Linton C M. Radiation and diffraction of water waves by a submerged sphere in finite depth. *Ocean Eng*, 1991, 18: 61—74 [\[DOI\]](#)
- 22 Taylor R E, Hu C S. Multipole expansions for wave diffraction and radiation in deep water. *Ocean Eng*, 1991, 18(3): 191—224 [\[DOI\]](#)
- 23 Wu G X. The interaction of water waves with a group of submerged spheres. *Appl Ocean Res*, 1995, 17(3): 165—184 [\[DOI\]](#)
- 24 Wu G X. Wave radiation and diffraction by a submerged sphere in a channel. *Q J Mech Appl Math*, 1998, 51(4): 647—666 [\[DOI\]](#)
- 25 Cadby J R, Linton C M. Three-dimensional water-wave scattering in two-layer fluids. *J Fluid Mech*, 2000, 423: 155—173 [\[DOI\]](#)
- 26 Linton C M, McIver P. *Handbook of mathematical techniques for wave/structure interactions*. England: CRC Press, 2001
- 27 Cho I H, Kee S T, Kim M H. The performance of flexible-membrane wave barriers in oblique incident waves. *Appl Ocean Res*, 1997, 19: 171—182 [\[DOI\]](#)

附录

(15)和(16)式的推导利用了下面 4 个恒等式, 这些恒等式可由第一类变形 Bessel 函数的生成函数得到:

$$\sinh(\nu z) \cos[LX_q \sinh \mu] = \sum_{m=0}^{\infty} \left[(-1)^m e^{\nu \eta_q} - e^{-\nu \eta_q} \right] \frac{\varepsilon_m}{2} \cosh(m\mu) I_m(lr_q) \cos(m\theta_q), \quad (\text{a1})$$

$$\cosh(\nu z) \cos[LX_q \sinh \mu] = \sum_{m=0}^{\infty} \left[(-1)^m e^{\nu \eta_q} + e^{-\nu \eta_q} \right] \frac{\varepsilon_m}{2} \cosh(m\mu) I_m(lr_q) \cos(m\theta_q), \quad (\text{a2})$$

$$\sinh(\nu z) \sin[LX_q \sinh \mu] = \sum_{m=1}^{\infty} \left[(-1)^{m+1} e^{\nu \eta_q} - e^{-\nu \eta_q} \right] \sinh(m\mu) I_m(lr_q) \sin(m\theta_q), \quad (\text{a3})$$

$$\cosh(\nu z) \sin[LX_q \sinh \mu] = \sum_{m=1}^{\infty} \left[(-1)^{m+1} e^{\nu \eta_q} + e^{-\nu \eta_q} \right] \sinh(m\mu) I_m(lr_q) \sin(m\theta_q), \quad (\text{a4})$$

和下面的两个三角函数恒等式:

$$\cos(LX_p \sinh \mu) = \cos(LX_q \sinh \mu) \cos \chi_{q,p} - \sin(LX_q \sinh \mu) \sin \chi_{q,p}, \quad (\text{a5})$$

$$\sin(LX_p \sinh \mu) = \sin(LX_q \sinh \mu) \cos \chi_{q,p} + \cos(LX_q \sinh \mu) \sin \chi_{q,p}, \quad (\text{a6})$$

其中 $X_q = x - \xi_q = r_q \sin \theta_q$, $z = \eta_q - r_q \cos \theta_q$, $\chi_{q,p} = l(\xi_q - \xi_p) \sinh \mu$, $\nu = l \cosh(\mu)$, $\varepsilon_0 = 1$ 和 $\varepsilon_m = 2 (m > 1)$.

利用(a1)~(a4)式, 有

$$f_{n,p}(\nu) \cos[LX_q \sinh \mu] = \sum_{m=0}^{\infty} f_{m,n,p,q}^+ \frac{\varepsilon_m}{2} \cosh(m\mu) I_m(lr_q) \cos(m\theta_q), \quad (\text{a7})$$

$$f_{n,p}(\nu) \sin[LX_q \sinh \mu] = \sum_{m=1}^{\infty} f_{m,n,p,q}^- \sinh(m\mu) I_m(lr_q) \sin(m\theta_q), \quad (\text{a8})$$

$$g_{n,p}(\nu) \cos[LX_q \sinh \mu] = \sum_{m=0}^{\infty} g_{m,n,p,q}^+ \frac{\varepsilon_m}{2} \cosh(m\mu) I_m(lr_q) \cos(m\theta_q), \quad (\text{a9})$$

$$g_{n,p}(\nu) \sin[LX_q \sinh \mu] = \sum_{m=1}^{\infty} g_{m,n,p,q}^- \sinh(m\mu) I_m(lr_q) \sin(m\theta_q), \quad (\text{a10})$$

其中

$$\begin{aligned} f_{m,n,p,q}^+ &= (\nu + K) \left[(-1)^m e^{-\nu(\eta_p - \eta_q + h)} + (-1)^{m+n} e^{\nu(\eta_q + \eta_p + h)} + (-1)^n e^{-\nu(\eta_q - \eta_p + h)} \right] \\ &\quad + (\nu - K) e^{-\nu(\eta_q + \eta_p + h)}, \\ f_{m,n,p,q}^- &= (\nu + K) \left[(-1)^{m+1} e^{-\nu(\eta_p - \eta_q + h)} + (-1)^{m+n+1} e^{\nu(\eta_q + \eta_p + h)} + (-1)^n e^{-\nu(\eta_q - \eta_p + h)} \right] \\ &\quad + (\nu - K) e^{-\nu(\eta_q + \eta_p + h)}, \\ g_{m,n,p,q}^+ &= (\nu + K) \left[(-1)^m e^{-\nu(\eta_p - \eta_q + h)} + (-1)^{m+n+1} e^{\nu(\eta_q + \eta_p + h)} + (-1)^{n+1} e^{-\nu(\eta_q - \eta_p + h)} \right] \\ &\quad + (\nu - K) e^{-\nu(\eta_q + \eta_p + h)}, \\ g_{m,n,p,q}^- &= (\nu + K) \left[(-1)^{m+1} e^{-\nu(\eta_p - \eta_q + h)} + (-1)^{m+n} e^{\nu(\eta_q + \eta_p + h)} + (-1)^{n+1} e^{-\nu(\eta_q - \eta_p + h)} \right] \\ &\quad + (\nu - K) e^{-\nu(\eta_q + \eta_p + h)}. \end{aligned}$$

利用第二类变形 Bessel 函数的加法定理, 当 $r_q < L_{p,q}$ 时, 有,

$$\begin{aligned} K_n(lr_p) e^{in\theta_p} &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} K_{n+m}(lL_{p,q}) I_m(lr_q) (-1)^m e^{i[(n+m)\alpha_{p,q} - m\theta_q]} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_m}{2} (-1)^m I_m(lr_q) \left\{ K_{n+m}(lL_{p,q}) e^{i[(n+m)\alpha_{p,q} - m\theta_q]} + K_{n-m}(lL_{p,q}) e^{i[(n-m)\alpha_{p,q} + m\theta_q]} \right\}, \end{aligned}$$

即有

$$K_n(lr_p) \cos(n\theta_p) = \sum_{m=0}^{\infty} I_m(lr_q) \left[\lambda_{m,n,p,q}^+ \cos(m\theta_q) + \lambda_{m,n,p,q}^- \sin(m\theta_q) \right], \quad (\text{a11})$$

$$K_n(lr_p) \sin(n\theta_p) = \sum_{m=0}^{\infty} I_m(lr_q) \left[\tau_{m,n,p,q}^+ \cos(m\theta_q) + \tau_{m,n,p,q}^- \sin(m\theta_q) \right], \quad (\text{a12})$$

其中

$$L_{pq} = \sqrt{(\xi_q - \xi_p)^2 + (\eta_q - \eta_p)^2},$$

$$\alpha_{pq} = \tan^{-1} [(\eta_q - \eta_p) / (\xi_q - \xi_p)] + \pi/2,$$

$$\lambda_{m,n,p,q}^+ = \frac{\varepsilon_m (-1)^m}{2} \left\{ K_{n+m}(lL_{p,q}) \cos[(n+m)\alpha_{p,q}] + K_{n-m}(lL_{p,q}) \cos[(n-m)\alpha_{p,q}] \right\}, \quad (\text{a13})$$

$$\lambda_{m,n,p,q}^- = \frac{\varepsilon_m (-1)^m}{2} \left\{ K_{n+m}(lL_{p,q}) \sin[(n+m)\alpha_{p,q}] - K_{n-m}(lL_{p,q}) \sin[(n-m)\alpha_{p,q}] \right\}, \quad (\text{a14})$$

$$\tau_{m,n,p,q}^+ = \frac{\varepsilon_m (-1)^m}{2} \left\{ K_{n+m}(lL_{p,q}) \sin[(n+m)\alpha_{p,q}] + K_{n-m}(lL_{p,q}) \sin[(n-m)\alpha_{p,q}] \right\}, \quad (\text{a15})$$

$$\tau_{m,n,p,q}^- = \frac{\varepsilon_m (-1)^m}{2} \left\{ -K_{n+m}(lL_{p,q}) \cos[(n+m)\alpha_{p,q}] + K_{n-m}(lL_{p,q}) \cos[(n-m)\alpha_{p,q}] \right\}, \quad (\text{a16})$$

由(a5), (a7), (a8)式以及(a11)式, 可将(12a)式用局部坐标 (r_q, θ_q) 重新表示为

$$\begin{aligned} \psi_{n,p}^+ &= \sum_{m=0}^{\infty} (\lambda_{m,n,p,q}^+ + A_{m,n,p,q}^+) I_m(lr_q) \cos(m\theta_q) \\ &\quad + \sum_{m=1}^{\infty} (\lambda_{m,n,p,q}^- - A_{m,n,p,q}^-) I_m(lr_q) \sin(m\theta_q), \end{aligned} \quad (\text{a17})$$

其中

$$A_{m,n,p,q}^+ = \frac{\varepsilon_m}{2} \int_0^{\infty} \frac{\cosh(n\mu) \cosh(m\mu) \cos \chi_{q,p}}{\nu \sinh(\nu h) - K \cosh(\nu h)} f_{m,n,p,q}^+ d\mu, \quad (\text{a18})$$

$$A_{m,n,p,q}^- = \int_0^{\infty} \frac{\cosh(n\mu) \sinh(m\mu) \sin \chi_{q,p}}{\nu \sinh(\nu h) - K \cosh(\nu h)} f_{m,n,p,q}^- d\mu, \quad (\text{a19})$$

同样, 由(a6), (a9), (a10)式及(a12), 则正文中(12b)式在局部坐标 (r_q, θ_q) 下表示为

$$\begin{aligned}\psi_{n,p}^- &= \sum_{m=0}^{\infty} \left(\tau_{m,n,p,q}^+ + B_{m,n,p,q}^+ \right) I_m(lr_q) \cos(m\theta_q) \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} \left(\tau_{m,n,p,q}^- + B_{m,n,p,q}^- \right) I_m(lr_q) \sin(m\theta_q),\end{aligned}\quad (\text{a20})$$

其中

$$B_{m,n,p,q}^+ = \frac{\varepsilon_m}{2} \int_0^{\infty} \frac{\sinh(n\mu) \cosh(m\mu) \sin \chi_{q,p}}{\nu \sinh(\nu h) - K \cosh(\nu h)} g_{m,n,p,q}^+ d\mu, \quad (\text{a21})$$

$$B_{m,n,p,q}^- = \int_0^{\infty} \frac{\sinh(n\mu) \sinh(m\mu) \cos \chi_{q,p}}{\nu \sinh(\nu h) - K \cosh(\nu h)} g_{m,n,p,q}^- d\mu. \quad (\text{a22})$$