中国科学: 信息科学　2011 年　第 41 卷　第 1 期: 48–65
www.scichina.com　info.scichina.com
《中国科学》杂志社 SCIENCE CHINA PRESS

论　文

一类积分不等式的机器判定

杨路[①③], 郁文生[①②*], 袁如意[②]

① 华东师范大学软件学院, 上海高可信计算重点实验室, 上海 200062
② 中国科学院自动化研究所, 综合信息系统研究中心, 北京 100190
③ 中国科学院成都计算机应用研究所, 自动推理实验室, 成都 610041
* 通信作者. E-mail: wsyu@sei.ecnu.edu.cn

收稿日期: 2009–07–24; 接受日期: 2010–04–06
国家自然科学基金 (批准号: 60874010, 61070048, 90718041)、中国科学院知识创新工程重要方向 (批准号: KJCX-YW-S02)、中国科学院海外杰出学者基金和上海市教育委员会科研创新 (批准号: 11ZZ37) 资助项目

摘要　将一类积分不等式转化为 Tarski 模型外的齐次对称多项式不等式, 该类齐次对称多项式的次数是给定的, 变元个数可以是任意多个, 并且多项式的系数是与变元个数相关的变系数. 这些特点与杨路等人最近提出的几个公开问题密切相关, 是比较有代表性的一类齐次对称多项式. 然后利用 Timofte 关于对称多项式不等式判定的降维方法, 结合不等式证明软件 BOTTEMA 及差分代换方法, 给出对应的一类 Tarski 模型外的齐次对称多项式不等式的机器判定算法, 从而实现原积分不等式的机器判定. 当给定的积分不等式及齐次对称多项式不等式不成立时, 可给出具体不成立的数值反例. 应用例子表明问题的广泛性及算法的有效性.

关键词　积分不等式　对称多项式不等式　Timofte 降维法　差分代换　机器判定　不等式证明软件-BOTTEMA

1　引言

多项式不等式的机器判定问题, 一直是数学机械化及自动推理领域的研究难点和热点问题, 近年来取得了长足的进展, 若需进一步了解可参看专著《不等式机器证明与自动发现》[1]. 在随机分析及力学理论中, 常会涉及一些所谓 “矩量不等式”[2−6], 这实际上是一类齐次积分不等式. 研究积分不等式的机器判定, 文献中尚不多见.

本文考虑一类积分不等式的机器判定, 首先将此类积分不等式转化为齐次对称多项式不等式, 然后利用 Timofte 关于对称多项式不等式判定的降维方法 [7−9], 结合不等式证明软件 BOTTEMA[1,10−12] 及差分代换方法 [1,13−17], 给出对应的齐次对称多项式不等式的机器判定算法, 从而实现原来的积分不等式的机器判定. 为明确起见, 本文考虑的积分均指 Riemann 积分 [18]. 为了使说明更为生动, 先举一个具体问题的例子.

例 1　若已知 $g(s)$ 在区间 $[0,1]$ 上是可积分的, 考虑如下的积分不等式

$$G=\int_0^1|g(s)|^7\mathrm{d}s\int_0^1|g(s)|\mathrm{d}s-3\int_0^1g^6(s)\mathrm{d}s\int_0^1g^2(s)\mathrm{d}s$$

引用格式: 杨路, 郁文生, 袁如意. 一类积分不等式的机器判定. 中国科学: 信息科学, 2011, 41: 48–65

$$+3\int_0^1|g(s)|^5\mathrm{d}s\int_0^1|g(s)|^3\mathrm{d}s-\left(\int_0^1 g^4(s)\mathrm{d}s\right)^2\geqslant 0. \tag{1}$$

问是否对一切在区间 [0, 1] 上是可积的 $g(s)$, 上面的积分不等式均成立?

根据 Riemann 积分的定义 [18], 将区间 $[0,1]$ 等分为 n 个部分

$$P:\quad 0=s_0<s_1<\cdots<s_n=1,$$

易见

$$\int_0^1 g(s)\mathrm{d}s=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n\frac{1}{n}g\left(\frac{i}{n}\right).$$

于是

$$\begin{aligned}G=\lim_{n\to\infty}&\Bigg(\left(\sum_{i=1}^n\frac{1}{n}\left|g\left(\frac{i}{n}\right)\right|^7\right)\left(\sum_{i=1}^n\frac{1}{n}\left|g\left(\frac{i}{n}\right)\right|\right)-3\left(\sum_{i=1}^n\frac{1}{n}g^6\left(\frac{i}{n}\right)\right)\left(\sum_{i=1}^n\frac{1}{n}g^2\left(\frac{i}{n}\right)\right)\\&+3\left(\sum_{i=1}^n\frac{1}{n}\left|g\left(\frac{i}{n}\right)\right|^5\right)\left(\sum_{i=1}^n\frac{1}{n}\left|g\left(\frac{i}{n}\right)\right|^3\right)-\left(\sum_{i=1}^n\frac{1}{n}g^4\left(\frac{i}{n}\right)\right)^2\Bigg).\end{aligned}$$

欲证 $G\geqslant 0$ 对一切在区间 $[0,1]$ 上可积的 $g(s)$ 均成立, 注意到 $g(s)$ 的任意性, 我们只需证明下面的 8 次 n 元对称多项式不等式

$$f^0=\sum_{i=1}^n\frac{x_i^7}{n}\sum_{i=1}^n\frac{x_i}{n}-3\sum_{i=1}^n\frac{x_i^6}{n}\sum_{i=1}^n\frac{x_i^2}{n}+3\sum_{i=1}^n\frac{x_i^5}{n}\sum_{i=1}^n\frac{x_i^3}{n}-\left(\sum_{i=1}^n\frac{x_i^4}{n}\right)^2\geqslant 0 \tag{2}$$

对一切自然数 n 及任意非负实数 x_i 均成立即可. 反之, 若存在自然数 n 及非负实数 x_i, $i=1,\ldots,n$, 使 $f^0<0$, 则不难构造出一个区间 $[0,1]$ 上可积的 $g(s)$, 使 $G<0$.

这样, 我们即把对原先积分不等式的判定转化为对一类对称多项式不等式 $f^0\geqslant 0$ 的判定. 需要注意的是, 这里要判定的多项式不等式实际上可以有任意多个变元, 已不是传统 Tarski 模型内的不等式判定了.

早在 20 世纪 50 年代初, 波兰数学家 Tarski[19] 即发表了著名的论文《初等代数与初等几何的判定方法》, 证明了初等代数以及初等几何范围的命题可以有机械的步骤来判定其对与否, 此种问题被称为机器（或算法）可判定的, 也称为 Tarski 模型内的问题. 该模型的任何一个公式中变元个数都是确定的有限数. 但另一方面, 由著名的 Gödel 不完全性定理可知, 机器可判定的问题类在数学中相对较少, 即使在看似最简单的初等数论范围, 其中命题的机器判定从整体而言也是不可能实现的. 尽管如此, 在过去的 30 年间, 定理机器证明领域仍非常繁荣, 一系列新方法和新成果相继被发现, 例如吴文俊的吴方法 [20−23]、Gröeber 基方法 [24−26]、结式方法 [27]、数值并行法 [28]、能产生可读证明的消点法 [29]、由 Collins 提出并经后人改进的柱形代数分解方法 [30−34] 等等. 这些方法所处理的问题类基本属于 Tarski 模型.

信息与技术科学及数学某些领域中出现的不等式有时可能会依赖于一个 (甚至多个) 离散参数 n, 譬如前面所考虑的变量个数不确定的不等式以及一些用传统数学归纳法证明的命题等, 这类问题已经超出了 Tarski 的判定算法所能处理的 “初等” 范围, 但是这类问题并不等于不能转化为 Tarski 的判定算法所能处理的 “初等” 类型. 事实上, 国外已经有学者用计算机模拟数学归纳法 [35,36], 最近国内也用 BOTTEMA 证明了许多以前未考虑过能用机器证明的不等式, 如 Cauchy-Schwarz 不等式等 [1], 这些都是对非 Tarski 模型命题机械化证明的有启发性的尝试. 近期《中国科学》的一篇论文 [37] 给出了

一种实用的算法, 用于判定一类变元个数是变量的多项式正性命题, 并在 Maple 平台上, 根据该算法设计完成了程序 nprove, 可以快速实现判定目标 [1,37], 这也是一类 Tarski 模型外的机器可判定问题. 研究讨论 Tarski 模型以外具有实际应用价值的机器可判定问题类是极具重要科学意义和发展前景的研究课题.

文献 [37] 的基本思想是利用 Timofte 降维方法 [7−9], 将次数不超过 5 的有理系数齐次 n 元对称多项式的半正定性判定问题转化为有限个与 n 无关的 Tarski 模型范围内的不等式判定问题, 从而再利用不等式证明软件 BOTTEMA[1,10−12] 有效实现判定目标. 如何将文献 [37] 的结果推广到 "次数高于 5" 以及 "系数依赖于 n" 的情形是具有挑战性的研究课题, 在文献 [37] 的文末即提出了 "对称型的系数不是常数, 而是具有与 n 相关的变系数" 以及 "对于 6 次 (或更高次) 的 n 个变元的对称型, 其半正定性是否可以判定?" 等几个公开问题.

前面考虑的积分不等式的机器判定, 即将此类积分不等式转化为了一类 Tarski 模型外的特殊的齐次对称多项式不等式, 该对称型可表示为诸变元幂和平均值的多项式, 次数 m 任意给定 (当然可以大于 5), 变元个数 n 可以是任意的, 该对称型也可以等价地看成是一类系数不是常系数, 而是具有与 n 相关的变系数的对称型类. 本文针对此类对称型, 利用 Timofte 降维方法 [7−9], 结合不等式证明软件 BOTTEMA[1,10−12] 及差分代换方法 [1,13−17], 给出此类 Tarski 模型外的齐次对称多项式不等式的机器判定算法, 从而实现原来的积分不等式的机器判定. 该类齐次对称多项式与文献 [37] 中提出的上述公开问题密切相关, 是比较有代表性的一类齐次对称多项式. 当给定的积分不等式及齐次对称多项式不等式不成立时, 可给出具体不成立的数值反例. 在 Maple 平台上, 根据该算法, 设计完成程序 nm0prove, 应用例子表明问题的广泛性及算法的有效性.

本文结构安排如下: 第 1 节给出背景知识的介绍, 并将一类积分不等式转化为了齐次对称多项式不等式; 第 2 节介绍 Timofte 降维方法 [7−9] 与不等式的机器可判定问题, 给出理论上完整的解答; 第 3 节为提高算法效率, 有效利用差分代换方法 [1,13−17], 进一步探讨降维的其他途经; 第 4 节给出程序设计方法和数值例子, 应用例子表明问题的广泛性及算法的有效性; 最后在第 5 节给出总结.

2 Timofte 降维方法与不等式的机器可判定问题

本节介绍 Timofte 降维方法 [7−9] 与不等式的机器可判定问题, 给出理论上完整的解答. 沿用文献 [1, 37] 中的定义和记号.

定义 1 齐次多项式 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 称为对称的, 如果

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(\sigma(x_1, x_2, \ldots, x_n))$$

对所有的 $\sigma \in S_n$ 成立, 这里 S_n 是 n 个文字的全置换群.

齐次多项式也简称为型, $\mathbb{R}^n$ 表示 n 维实数空间, $\mathbb{R}^n_+$ 表示 n 维非负实数空间. 记实数域上 m 次 n 元对称型所成集合为 $S_{n,m}$, 在通常加法和数乘下它形成实向量空间, 维数记为 $\dim(S_{n,m})$.

定义 2 对正整数 k, 一个固定点 $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ 的 k 次幂和定义为

$$p_k(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^k.$$

引理 1 (对称型基本定理)[1,37] 对称型 $f \in S_{n,m}$ 可以唯一地表示为 $(p_1, p_2, \ldots, p_d)$ 的多项式, 这里 $d = \min(n, m)$, 并且 $(p_1, p_2, \ldots, p_d)$ 是代数无关的, 即不存在非零多项式 g, 使 $g(p_1, p_2, \ldots, p_d) = 0$.

记不定方程

$$1y_1+2y_2+\cdots+dy_d=m$$

的非负整数解集为 Ω.

引理 2[1,37]　集合 $B_{n,m}=\{p_1^{\lambda_1}p_2^{\lambda_2}\cdots p_d^{\lambda_d}|(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_d)\in\Omega\}$ 是向量空间 $S_{n,m}$ 的一组基, $S_{n,m}$ 的维数是集合 Ω 中元素个数, 记为 $|\Omega|$, 其中 $d=\min(n,m)$.

按照引理 2, 5 次 n 元齐次对称多项式 $f\in S_{n,5}$ 可以表示为

$$\begin{aligned}f&=a_1p_5+a_2p_4p_1+a_3p_3p_2+a_4p_3p_1^2+a_5p_2^2p_1+a_6p_2p_1^3+a_7p_1^5\\&:=([a_1,a_2,\ldots,a_7]_p).\end{aligned}$$

而 6 次 n 元齐次对称多项式 $f\in S_{n,6}$ 可以表示为

$$\begin{aligned}f=&\ a_1p_6+a_2p_5p_1+a_3p_4p_2+a_4p_4p_1^2+a_5p_3^2+a_6p_3p_2p_1+a_7p_3p_1^3\\&+a_8p_2^3+a_9p_2^2p_1^2+a_{10}p_2p_1^4+a_{11}p_1^6\\:=&\ ([a_1,a_2,\cdots,a_{11}]_p).\end{aligned}$$

进而, 一般地, m 次 n 元齐次对称多项式 $f\in S_{n,m}$ 可以表示为

$$\begin{aligned}f&=a_1p_m+a_2p_{m-1}p_1+a_3p_{m-2}p_2+a_4p_{m-2}p_1^2+\cdots+a_{|\Omega|}p_1^m\\&:=([a_1,a_2,\ldots,a_{|\Omega|}]_p).\end{aligned}$$

此处 $|\Omega|$ 表示集合 Ω 中元素个数.

引入记号

$$1_k=(\underbrace{1,1,\ldots,1}_{k});\qquad 0_k=(\underbrace{0,0,\ldots,0}_{k}).$$

若 $z\in\mathbb{R},[z]$ 表示不超过 z 的最大整数.

对任意的 $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, 记

$$\begin{aligned}v(x)&=|\{x_j|j=1,2,\cdots,n\}|,\\v^*(x)&=|\{x_j|x_j\neq0,j=1,2,\cdots,n\}|,\end{aligned}$$

此处 $|A|$ 表示集合 A 中元素个数. $v(x)$ 的一个直观的解释是, 点 x 的坐标中互不相同的数的个数, $v^*(x)$ 类似理解.

引理 3[1,7–9,37]　(i) 一个 m 次 n 元对称型不等式在 $\mathbb{R}_+^n$ 上成立, 当且仅当这个不等式在集合 $\{x|x\in\mathbb{R}_+^n,v^*(x)\leqslant\max([\frac{m}{2}],1)\}$ 上是成立的. (ii) 一个 m 次 n 元对称型不等式在 $\mathbb{R}^n$ 上成立, 当且仅当这个不等式在集合 $\{x|x\in\mathbb{R}^n,v(x)\leqslant\max([\frac{m}{2}],2)\}$ 上是成立的.

引理 4　对任意的 $f\in S_{n,m}$, 下面的等价关系成立:

$$f(x)\geqslant0,x\in\mathbb{R}_+^n\Longleftrightarrow f(t_1\cdot1_{r_1},t_2\cdot1_{r_2},\ldots,t_l\cdot1_{r_l},0_{n-r_1-r_2-\cdots-r_l})\geqslant0,$$

这里, $l:=\max([\frac{m}{2}],1)$, $\forall t=(t_1,t_2,\ldots,t_l)\in\mathbb{R}_+^l$, $\forall r=(r_1,r_2,\ldots,r_l)\in N_{l,n}$, $N_{l,n}:=\{(r_1,r_2,\ldots,r_l)|r_1,r_2,\ldots,r_l$ 都是正整数, 且 $r_1+r_2+\cdots+r_l\leqslant n\}$.

证明 由引理 3 可得

$$f(x) \geqslant 0, x \in \mathbb{R}_+^n \Longleftrightarrow f(y) \geqslant 0, \forall y \in \mathbb{R}_+^n, v^*(y) \leqslant l = \max\left(\left[\frac{m}{2}\right], 1\right).$$

因 f 是对称形式, 故可以令 $y = (t_1 \cdot 1_{r_1}, t_2 \cdot 1_{r_2}, \dots, t_l \cdot 1_{r_l}, 0_{n-r_1-r_2-\cdots-r_l})$, $\forall t = (t_1, t_2, \dots, t_l) \in \mathbb{R}_+^l, \forall r = (r_1, r_2, \dots, r_l) \in N_{l,n}, N_{l,n} = \{(r_1, r_2, \dots, r_l) | r_1, r_2, \dots, r_l$ 都是正整数, 且 $r_1 + r_2 + \cdots + r_l \leqslant n\}$. 证毕.

为方便起见, 对任意的 $f \in S_{n,m}, l = \max([\frac{m}{2}], 1)$, 对 $\forall t = (t_1, t_2, \dots, t_l) \in \mathbb{R}_+^l, \forall r = (r_1, r_2, \dots, r_l) \in N_{l,n}$, $N_{l,n} = \{(r_1, r_2, \dots, r_l) | r_1, r_2, \dots, r_l$ 都是正整数, 且 $r_1 + r_2 + \cdots + r_l \leqslant n\}$, 记

$$q_k = \sum_{i=1}^{l} r_i t_i^k, \qquad k = 1, 2, \dots, m.$$

对任意的 $f \in S_{n,m}$, 记

$$\begin{aligned} f_r(t) &= a_1 q_m + a_2 q_{m-1} q_1 + a_3 q_{m-2} q_2 + a_4 q_{m-2} q_1^2 + \cdots + a_{|\Omega|} q_1^m \\ &:= ([a_1, a_2, \cdots, a_{|\Omega|}]_{q(r,t)}). \end{aligned}$$

由引理 4, 可直接得到:

引理 5 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in S_{n,m}, (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n$, 则 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \geqslant 0$ 对一切自然数 n 均成立的充分必要条件是: 对任意自然数 $r_1, r_2, \dots, r_l$, 以及 $\forall t = (t_1, t_2, \dots, t_l) \in \mathbb{R}_+^l$, 有 $f_r(t) \geqslant 0$, 这里 $l = \max([\frac{m}{2}], 1)$.

根据引理 5, 一般对称多项式 $f \in S_{n,m}$ 的半正定性判定问题已转化为对不等式 $f_r(t) \geqslant 0$ 的验证问题, 对确定的自然数 $r_1, r_2, \dots, r_l$, 不等式 $f_r(t) \geqslant 0$ 的验证已是 Tarski 模型范围内的不等式判定问题. 但是, 引理 5 实际上要求对任意自然数 $r_1, r_2, \dots, r_l$, 均需验证不等式 $f_r(t) \geqslant 0$, 这就需要验证无限多个 Tarski 模型范围内的不等式. 一般来讲, 这是不可能实现的.

注意到前面的积分不等式转化为 Tarski 模型外的齐次对称多项式不等式后, 得到的对称型可表示为诸变元幂和平均值的多项式. 下面考察此类对称型的特点. 为此, 给出如下的定义与记号.

定义 3 对正整数 k, 一个固定点 $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ 的 k 次幂和平均值定义为

$$A_k(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^k}{n}.$$

下面将研究有理数域上可表示为 $(A_1, A_2, \dots, A_d)$ 的多项式的 m 次 n 元对称型类, 这里 $d := \min(n, m)$. 与前面的记号相同, 记 Ω 是不定方程

$$1y_1 + 2y_2 + \cdots + dy_d = m$$

的非负整数解集, $|\Omega|$ 是集合 Ω 中元素个数. 为方便起见, 所有这样的 m 次 n 元对称型所成集合为 $S_{n,m}^0$. 从本文后面的应用例子可以看到此类对称型的广泛性.

这样, 5 次 n 元齐次对称多项式 $f^0 \in S_{n,5}^0$ 可以表为

$$\begin{aligned} f^0 &= a_1 A_5 + a_2 A_4 A_1 + a_3 A_3 A_2 + a_4 A_3 A_1^2 + a_5 A_2^2 A_1 + a_6 A_2 A_1^3 + a_7 A_1^5 \\ &:= ([a_1, a_2, \dots, a_7]_A). \end{aligned}$$

而 6 次 n 元齐次对称多项式 $f^0\in S^0_{n,6}$ 可以表示为

$$\begin{aligned}f^0&=a_1A_6+a_2A_5A_1+a_3A_4A_2+a_4A_4A_1^2+a_5A_3^2+a_6A_3A_2A_1+a_7A_3A_1^3\\&\quad+a_8A_2^3+a_9A_2^2A_1^2+a_{10}A_2A_1^4+a_{11}A_1^6\\&:=([a_1,a_2,\dots,a_{11}]_A).\end{aligned}$$

进而, 一般地, m 次 n 元齐次对称多项式 $f^0\in S^0_{n,m}$ 可以表示为

$$\begin{aligned}f^0&=a_1A_m+a_2A_{m-1}A_1+a_3A_{m-2}A_2+a_4A_{m-2}A_1^2+\cdots+a_{|\Omega|}A_1^m\\&:=([a_1,a_2,\dots,a_{|\Omega|}]_A).\end{aligned}$$

考虑下述问题的机器判定算法.

问题 "对任意给定的有理系数 m 次 n 元齐次对称多项式 $f^0(x_1,x_2,\dots,x_n)\in S^0_{n,m}$, 机器判定不等式 $f^0(x_1,x_2,\dots,x_n)\geqslant 0$ 对一切自然数 n 均成立, 其中诸变元 x_i 为非负实数, 即 $x_i\in\mathbb{R}_+, i=1,2,\dots,n$".

显然, $f^0=[\ a_1,\,a_2,\,a_3,\,a_4,\,a_5,\,a_6,\,a_7\ ]_A\in S^0_{n,5}$ 的半正定性等价于 $f=[\ n^4a_1,\,n^3a_2,\,n^3a_3,\,n^2a_4,\,n^3a_5,\,na_6,\,a_7\ ]_p\in S_{n,5}$ 的半正定性. $f^0=[\ a_1,\,a_2,\,a_3,\,a_4,\,a_5,\,a_6,\,a_7,\,a_8,\,a_9,\,a_{10},\,a_{11}\ ]_A\in S^0_{n,6}$ 的半正定性等价于 $f=[\ n^5a_1,\,n^4a_2,\,n^4a_3,\,n^3a_4,\,n^4a_5,\,n^3a_6,\,n^2a_7,\,n^3a_8,\,n^2a_9,\,na_{10},\,a_{11}\ ]_p\in S_{n,6}$ 的半正定性. 一般地, $f^0=[\ a_1,\,a_2,\,a_3,\,a_4,\,\dots,\,a_{|\Omega|}\ ]_A\in S^0_{n,m}$ 的半正定性等价于 $f=[\ n^{m-1}a_1,\,n^{m-2}a_2,\,n^{m-2}a_3,\,n^{m-3}a_4,\,\dots,\,a_{|\Omega|}\ ]_p\in S_{n,m}$ 的半正定性.

对任意的 $f^0\in S^0_{n,m}$, $l=\max([\frac{m}{2}],1)$, 对 $\forall t=(t_1,t_2,\dots,t_l)\in\mathbb{R}^l_+$, $\forall r=(r_1,r_2,\dots,r_l)\in N_{l,n}$, $N_{l,n}=\{(r_1,r_2,\dots,r_l)|r_1,r_2,\dots,r_l$ 都是正整数, 且 $r_1+r_2+\cdots+r_l\leqslant n\}$, 记

$$B_k=\frac{\sum_{i=1}^l r_it_i^k}{n},\qquad k=1,2,\dots,m.$$

对任意的 $f^0\in S^0_{n,m}$, 记

$$\begin{aligned}f^0_r(t)&:=a_1B_m+a_2B_{m-1}B_1+a_3B_{m-2}B_2+a_4B_{m-2}B_1^2+\cdots+a_{|\Omega|}B_1^m\\&:=([a_1,a_2,\dots,a_{|\Omega|}]_{B(r,t)}).\end{aligned}$$

亦即

$$\begin{aligned}f^0_r(t)&=a_1\frac{(r_1t_1^m+r_2t_2^m+\cdots+r_lt_l^m)}{n}\\&\quad+a_2\frac{(r_1t_1^{m-1}+r_2t_2^{m-1}+\cdots+r_lt_l^{m-1})}{n}\frac{(r_1t_1+r_2t_2+\cdots+r_lt_l)}{n}\\&\quad+a_3\frac{(r_1t_1^{m-2}+r_2t_2^{m-2}+\cdots+r_lt_l^{m-2})}{n}\frac{(r_1t_1^2+r_2t_2^2+\cdots+r_lt_l^2)}{n}\\&\quad+a_4\frac{(r_1t_1^{m-3}+r_2t_2^{m-3}+\cdots+r_lt_l^{4})}{n}\frac{(r_1t_1+r_2t_2+\cdots+r_lt_l)^2}{n^2}\\&\quad+\cdots+a_{|\Omega|}\frac{(r_1t_1+r_2t_2+\cdots+r_lt_l)^m}{n^m}.\end{aligned}$$

又记

$$f^0_{\bar r}(t):=a_1(\bar r_1t_1^m+\bar r_2t_2^m+\cdots+\bar r_lt_l^m)$$

$$
\begin{aligned}
&+ a_2(\bar{r}_1 t_1^{m-1} + \bar{r}_2 t_2^{m-1} + \cdots + \bar{r}_l t_l^{m-1})(\bar{r}_1 t_1 + \bar{r}_2 t_2 + \cdots + \bar{r}_l t_l) \\
&+ a_3(\bar{r}_1 t_1^{m-2} + \bar{r}_2 t_2^{m-2} + \cdots + \bar{r}_l t_l^{m-2})(\bar{r}_1 t_1^2 + \bar{r}_2 t_2^2 + \cdots + \bar{r}_l t_l^2) \\
&+ a_4(\bar{r}_1 t_1^{m-2} + \bar{r}_2 t_2^{m-2} + \cdots + \bar{r}_l t_l^{m-2})(\bar{r}_1 t_1 + \bar{r}_2 t_2 + \cdots + \bar{r}_l t_l)^2 \\
&+ \cdots + a_{|\Omega|}(\bar{r}_1 t_1 + \bar{r}_2 t_2 + \cdots + \bar{r}_l t_l)^m \\
:= {}& ([a_1, a_2, \ldots, a_{|\Omega|}]_{q(\bar{r},t)}).
\end{aligned}
$$

同样基于引理 4, 可以得到:

引理 6 $f^0(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in S^0_{n,m}, (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n_+$, 则 $f^0(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geqslant 0$ 对一切自然数 n 均成立的充分必要条件是：对任意自然数 $r_1, r_2, \ldots, r_l, n, r_1 + r_2 + \cdots + r_l \leqslant n$, 以及 $\forall t = (t_1, t_2, \ldots, t_l) \in \mathbb{R}^l_+$, 有 $f^0_r(t) \geqslant 0$; 或者, 等价地, 对任意非负的有理数 $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \ldots, \bar{r}_l, \bar{r}_1 + \bar{r}_2 + \cdots + \bar{r}_l \leqslant 1$, 以及 $\forall t = (t_1, t_2, \ldots, t_l) \in \mathbb{R}^l_+$, 有 $f^0_{\bar{r}}(t) \geqslant 0$; 或者, 等价地, 对任意非负的实数 $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \ldots, \bar{r}_l, \bar{r}_1 + \bar{r}_2 + \cdots + \bar{r}_l \leqslant 1$, 以及 $\forall t = (t_1, t_2, \ldots, t_l) \in \mathbb{R}^l_+$, 有 $f^0_{\bar{r}}(t) \geqslant 0$, 这里 $l = \max([\frac{m}{2}], 1)$.

证明 引理 6 中的第 1 个等价条件由引理 4 可直接得到.

第 2 个等价条件由自然数 $r_1, r_2, \ldots, r_l, n$ 的任意性得到.

为证第 3 个等价条件, 假设存在非负的实数 $\bar{r}_{R1}, \bar{r}_{R2}, \ldots, \bar{r}_{Rl}, \bar{r}_{R1} + \bar{r}_{R2} + \cdots + \bar{r}_{Rl} \leqslant 1$, 以及存在 $t = (t_1, t_2, \ldots, t_l) \in \mathbb{R}^l_+$, 有 $f^0_{\bar{r}_R}(t) < 0$, 这里 $l = \max([\frac{m}{2}], 1)$. 由函数 $f^0_{\bar{r}}(t)$ 的连续性可知, 必存在非负的有理数 $\bar{r}_{Q1}, \bar{r}_{Q2}, \ldots, \bar{r}_{Ql}, \bar{r}_{Q1} + \bar{r}_{Q2} + \cdots + \bar{r}_{Ql} \leqslant 1$, 以及存在 $t = (t_1, t_2, \ldots, t_l) \in \mathbb{R}^l_+$, 有 $f^0_{\bar{r}_Q}(t) < 0$ 成立, 这与引理中的第 2 个等价条件矛盾. 证毕.

由引理 6 的第 3 个等价性条件可直接得到本文的主要结果.

定理 1 下述命题是机器可判定的问题类:

"对任意给定的满足如下条件的有理系数 m 次 n 元齐次对称多项式 $f^0(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in S^0_{n,m}$, 判定不等式 $f^0(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geqslant 0$ 对一切自然数 n 均成立, 其中 $f^0(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in S^0_{n,m}$, 可表示为 $(A_1, A_2, \ldots, A_d)$ 的多项式, 这里 $d = \min(n, m)$,

$$
A_k(x) = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^k}{n}, \quad k = 1, 2, \ldots, d
$$

是 $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 的 k 次幂和平均值, 诸变元 x_i 为非负实数, 即 $x_i \in \mathbb{R}_+, i = 1, 2, \ldots, n$".

根据定理 1 及引理 6 的结论, 理论上已将 m 次 n 元对称型类 $S^0_{n,m}$ 中的半正定性判定问题, 成功转化为有限个实变元的多项式不等式 $f^0_{\bar{r}}(t) \geqslant 0$ 在约束条件 $\bar{r} = (\bar{r}_1, \bar{r}_2, \ldots, \bar{r}_l) \in \mathbb{R}^l_+, t = (t_1, t_2, \ldots, t_l) \in \mathbb{R}^l_+$ 及 $\bar{r}_1 + \bar{r}_2 + \cdots + \bar{r}_l \leqslant 1$ 下的验证问题. 这已在 Tarski 模型内 [1,19,21–23,27,37], 可以用代数不等式的胞腔分解 [30–34] 算法来完成, 杨路等人开发的 DISCOVERER[1,38,39] 和 BOTTEMA[1,10–12] 软件即可以做胞腔分解, 其中以 BOTTEMA[1,10–12] 最为适合我们的编程需要, 原则上只需调用 BOTTEMA[1,10–12] 中的 xprove 命令即可.

3 降维方法的进一步讨论

第 2 节中理论上已将 m 次 n 元对称型类 $S^0_{n,m}$ 中的半正定性判定问题, 成功转化为 Tarski 模型内 [1,19,21–23,27,37] 的不等式验证问题. 可以看到这里得到的不等式是带有约束的, 虽然可以用代数不等式的胞腔分解 [30–34] 算法来完成, 但是, 胞腔分解 [30–34] 算法的复杂度很高, 算法的效率较低. 当涉及变量个数较多时, 耗费计算机内存资源极大, 相应软件通常已不能正常运行或运行时间已无法接

受. 由于给定 $f^0(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in S^0_{n,m}$ 的对称性, 我们可对约束进行适当的处理, 再采用不等式证明的差分代换方法 [1,13−15] 来检验所得到的不等式. 差分代换方法只用到很少的数学 [1,13−15], 可避免不等式的胞腔分解, 极大地提高算法的效率. 最近发表的论文 [16, 17] 讨论了差分代换算法的终止性, 表明该方法可用于非常广泛的一类多项式不等式的证明, 很适合上述的不等式判定.

为此, 对任意的 $f^0\in S^0_{n,m}$, 考虑

$$\begin{aligned}
f^0_r(t)=a_1&\frac{(r_1t_1^m+r_2t_2^m+\cdots+r_lt_l^m)}{n}\\
&+a_2\frac{(r_1t_1^{m-1}+r_2t_2^{m-1}+\cdots+r_lt_l^{m-1})}{n}\frac{(r_1t_1+r_2t_2+\cdots+r_lt_l)}{n}\\
&+a_3\frac{(r_1t_1^{m-2}+r_2t_2^{m-2}+\cdots+r_lt_l^{m-2})}{n}\frac{(r_1t_1^2+r_2t_2^2+\cdots+r_lt_l^2)}{n}\\
&+a_4\frac{(r_1t_1^{m-3}+r_2t_2^{m-3}+\cdots+r_lt_l^{4})}{n}\frac{(r_1t_1+r_2t_2+\cdots+r_lt_l)^2}{n^2}\\
&+\cdots+a_{|\Omega|}\frac{(r_1t_1+r_2t_2+\cdots+r_lt_l)^m}{n^m}.
\end{aligned}$$

引入新变量 $r_{l+1}:=n-r_1-r_2-\cdots-r_l$, 又记

$$\begin{aligned}
F^0_r(t):=&\left(\sum_{i=1}^{l+1}r_i\right)^{m-1}a_1(r_1t_1^m+r_2t_2^m+\cdots+r_lt_l^m)\\
&+\left(\sum_{i=1}^{l+1}r_i\right)^{m-2}a_2(r_1t_1^{m-1}+r_2t_2^{m-1}+\cdots+r_lt_l^{m-1})(r_1t_1+r_2t_2+\cdots+r_lt_l)\\
&+\left(\sum_{i=1}^{l+1}r_i\right)^{m-2}a_3(r_1t_1^{m-2}+r_2t_2^{m-2}+\cdots+r_lt_l^{m-2})(r_1t_1^2+r_2t_2^2+\cdots+r_lt_l^2)\\
&+\left(\sum_{i=1}^{l+1}r_i\right)^{m-3}a_4(r_1t_1^{m-2}+r_2t_2^{m-2}+\cdots+r_lt_l^{m-2})(r_1t_1+r_2t_2+\cdots+r_lt_l)^2\\
&+\cdots+a_{|\Omega|}(r_1t_1+r_2t_2+\cdots+r_lt_l)^m\\
=&\left(\left[\left(\sum_{i=1}^{l+1}r_i\right)^{m-1}a_1,\left(\sum_{i=1}^{l+1}r_i\right)^{m-2}a_2,\ldots,a_{|\Omega|}\right]_{q(r,t)}\right).
\end{aligned}$$

基于引理 6, 容易得到:

引理 7　$f^0(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in S^0_{n,m},(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n_+$, 则 $f^0(x_1,x_2,\ldots,x_n)\geqslant 0$ 对一切自然数 n 均成立的充分必要条件是：对任意非负的实数 $r_1,r_2,\ldots,r_l,r_{l+1}$, 以及 $\forall t=(t_1,t_2,\ldots,t_l)\in\mathbb{R}^l_+$, 有 $F^0_r(t)\geqslant 0$, 这里 $l=\max([\frac{m}{2}],1)$.

引理 7 中需要验证的不等式已不含约束, 可方便地直接应用逐次差分代换程序来检验.

至此, 我们已经利用 Timofte 降维方法 [1,7−9,37], 将 m 次 n 元对称型类 $S^0_{n,m}$ 中的半正定性判定问题, 成功转化为含 $2l$(或 $2l+1$) 个变元的 Tarski 模型内的不等式验证问题. 但是, 这一方法降维后的变元个数完全被多项式的次数所决定, 当次数偏高时, 降维后变元个数较多, 给实际判定造成困难.

文献 [40, 41] 中有效地运用了另一种降维方法. 该方法不直接依赖于多项式的次数, 明显不同于 Timofte. 最终得到的不等式不含约束, 可直接应用逐次差分代换程序来检验, 变元个数在某些情况下还有可能小于 $2l$.

对任意的 m 次 n 元齐对称多项式 $f^0 \in S^0_{n,m}$,

$$f^0 = a_1A_m + a_2A_{m-1}A_1 + a_3A_{m-2}A_2 + a_4A_{m-2}A_1^2 + \cdots + a_{|\Omega|}A_1^m.$$

为判定 $f^0(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 在 n 维非负实数空间 $\mathbb{R}^n_+$ 上的半正定性, 计算其驻点方程

$$\frac{\mathrm{d}f^0}{\mathrm{d}x_i} = a_1\frac{\mathrm{d}A_m}{\mathrm{d}x_i} + a_2\frac{\mathrm{d}A_{m-1}A_1}{\mathrm{d}x_i} + a_3\frac{\mathrm{d}A_{m-2}A_2}{\mathrm{d}x_i} + a_4\frac{\mathrm{d}A_{m-2}A_1^2}{\mathrm{d}x_i} + \cdots + a_{|\Omega|}\frac{\mathrm{d}A_1^m}{\mathrm{d}x_i} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

显然, 上面方程 $\frac{\mathrm{d}f^0}{\mathrm{d}x_i} = 0$ 中关于 x_i 的最高次数只有 $m-1$, 因此最多只有 $m-1$ 个正实根. 事实上, 在有些情况下我们可以利用著名的 Descartes 符号法则 [1,27] 或者多项式判别系统 [27,39] 方便地给出上面驻点方程的正实根个数估计. 在下节中将通过具体例子说明这一点.

由于 $f^0(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in S^0_{n,m}$ 的对称性, 驻点方程对每一个 $x_i, i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ 在形式上都是一样的. 不妨设上面驻点方程的正实根个数的上界为 L, 引进 L 个非负的变元 $\{t_1, t_2, \ldots, t_L\}$. 显然, 若 f^0 是半正定的, 则将 $f^0(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 中的诸变元限定在 $\{t_1, t_2, \ldots, t_L\}$ 中取值时必保持非负; 反之, 若将 $f^0(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 中的诸变元限定在 $\{t_1, t_2, \ldots, t_L\}$ 中取值时均是非负的, 则说明 $f^0(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 在所有可能的驻点处的值均是非负的, 从而 f^0 是半正定的.

具体地, 记

$$\bar{q}_k = \sum_{i=1}^{L} r_i t_i^k, \qquad k = 1, 2, \ldots, m.$$

类似于引理 7 的处理方法, 记

$$\begin{aligned}
\bar{F}^0_r(t) :=& \left(\sum_{i=1}^{L} r_i\right)^{m-1} a_1(r_1t_1^m + r_2t_2^m + \cdots + r_Lt_L^m) \\
&+ \left(\sum_{i=1}^{L} r_i\right)^{m-2} a_2(r_1t_1^{m-1} + r_2t_2^{m-1} + \cdots + r_Lt_L^{m-1})(r_1t_1 + r_2t_2 + \cdots + r_Lt_L) \\
&+ \left(\sum_{i=1}^{L} r_i\right)^{m-2} a_3(r_1t_1^{m-2} + r_2t_2^{m-2} + \cdots + r_Lt_L^{m-2})(r_1t_1^2 + r_2t_2^2 + \cdots + r_Lt_L^2) \\
&+ \left(\sum_{i=1}^{L} r_i\right)^{m-3} a_4(r_1t_1^{m-2} + r_2t_2^{m-2} + \cdots + r_Lt_L^{m-2})(r_1t_1 + r_2t_2 + \cdots + r_Lt_L)^2 \\
&+ \cdots + a_{|\Omega|}(r_1t_1 + r_2t_2 + \cdots + r_Lt_L)^m \\
:=& \left(\left[\left(\sum_{i=1}^{L} r_i\right)^{m-1} a_1, \left(\sum_{i=1}^{L} r_i\right)^{m-2} a_2, \ldots, a_{|\Omega|}\right]_{\bar{q}(r,t)}\right).
\end{aligned}$$

类似于引理 6 的证明, 我们有

引理 8 $f^0(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in S^0_{n,m}, (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n_+$, 则 $f^0(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geqslant 0$ 对一切自然数 n 均成立的充分必要条件是: 对任意自然数 $r_1, r_2, \ldots, r_L$, 以及 $\forall t = (t_1, t_2, \ldots, t_L) \in \mathbb{R}^L_+$, 有 $\bar{F}^0_r(t) \geqslant 0$; 或者, 等价地, 对任意非负的有理数 $r_1, r_2, \ldots, r_L$, 以及 $\forall t = (t_1, t_2, \ldots, t_L) \in \mathbb{R}^L_+$, 有 $\bar{F}^0_r(t) \geqslant 0$; 或者, 等价地, 对任意非负的实数 $r_1, r_2, \ldots, r_L$, 以及 $\forall t = (t_1, t_2, \ldots, t_L) \in \mathbb{R}^L_+$, 有 $\bar{F}^0_r(t) \geqslant 0$, 这里 $L \leqslant m-1$ 是驻点方程 $\frac{\mathrm{d}f^0}{\mathrm{d}x_i} = 0$ 的正实根个数的上界.

证明 考虑驻点方程

$$\frac{\mathrm{d}f^0}{\mathrm{d}x_i} = 0, i = 1, 2, \ldots, n.$$

由于 $f^0(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in S^0_{n,m}$ 的对称性, 驻点方程对每一个 $x_i, i\in\{1,2,\ldots,n\}$ 在形式上都是一样的. 设上面驻点方程的正实根个数的上界为 L, 引进 L 个非负的变元 $\{t_1,t_2,\ldots,t_L\}$.

引理 8 中的第 1 个等价条件由上面的讨论可直接得到.

第 2 个等价条件由自然数 $r_1, r_2, \ldots, r_L$ 的任意性得到.

为证第 3 个等价条件, 假设存在非负的实数 $\bar{r}_{R1},\bar{r}_{R2},\ldots,\bar{r}_{RL}$ 以及存在 $t=(t_1,t_2,\ldots,t_L)\in\mathbb{R}^L_+$, 有 $\bar{F}^0_r(t)<0$. 由函数 $\bar{F}^0_r(t)$ 的连续性可知, 必存在非负的有理数 $\bar{r}_{Q1},\bar{r}_{Q2},\ldots,\bar{r}_{QL}$, 以及存在 $t=(t_1,t_2,\ldots,t_L)\in\mathbb{R}^L_+$, 有 $\bar{F}^0_r(t)<0$ 成立, 这与引理中的第 2 个等价条件矛盾. 证毕.

引理 8 中已将 m 次 n 元对称型类 $S^0_{n,m}$ 中的半正定性判定问题, 转化为含 $2L$ 个变元的 Tarski 模型内的不等式验证问题, 并且得到的不等式不含约束, 可直接应用差分代换方法来检验, 变元个数 $2L$ 在某些情况下还有可能小于 $2l$.

本节最后还需要指出, 在我们验算的多数例子中, 当得到 $\bar{F}^0_r(t)$ 的表达式后, 只要稍加整理, 例如, 利用 Maple 的命令 "$\bar{F}1$:=collect($\bar{F}, [r_1,r_2,\ldots,r_L]$, distributed)"; 将 $\bar{F}^0_r(t)$ 看成是 $(r_1,r_2,\ldots,r_L)$ 的多项式, 再对各系数因式分解, 即可看出各系数均为非负的. 这样, 甚至不必应用差分代换即可验证 $\bar{F}^0_r(t)$ 的非负性, 从而得到 $f^0\in S^0_{n,m}$ 的半正定性. 这一点实际应用中可能又会进一步提高算法效率, 应当引起足够重视. 差分代换是一种可读性 (readable) 的机器证明方法 [1], 不用差分代换, 直接由 $\bar{F}^0_r(t)$ 确切表达式得到 $\bar{F}^0_r(t)$ 的非负性, 可以认为是一种明证 (certificate) 的机器证明 [1].

4 算法设计与应用例子

基于前面两节的讨论, 根据定理 1 及引理 6–8 的结论, 将给定的积分不等式转化为对应 $S^0_{n,m}$ 中齐次对称多项式不等式后, 我们可以设计算法 nm0prove 如下.

算法 nm0prove

输入: $S^0_{n,m}$ 中的 m 次 n 元有理系数齐次对称多项式 $f^0(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in S^0_{n,m}$,

本算法判定在 $(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n_+$ 上, 不等式 $f^0(x_1,x_2,\ldots,x_n)\geqslant 0$ 是否对一切自然数 n 均成立, 成立则输出 "true", 否则输出 "false".

N1: 分别计算 l 与 L, 以便确定需验证的不等式变量个数;

N2: 分别计算 $f^0_{\bar{r}}(t), F^0_r(t)$ 及 $\bar{F}^0_r(t)$;

N3: 分别对 $f^0_{\bar{r}}(t), F^0_r(t)$ 及 $\bar{F}^0_r(t)$ 利用 Maple 命令 "collect" 和命令 "factor" 重新整理, 检查它们的各个系数是否均是非负的, 如果确定 $f^0_{\bar{r}}(t)\geqslant 0$, 或 $F^0_r(t)\geqslant 0$, 或 $\bar{F}^0_r(t)\geqslant 0$ 成立, 则输出 "true" 并停机.

N4: 分别用 BOTTEMA 软件或差分代换方法判定 $f^0_{\bar{r}}(t)$(含约束), $F^0_r(t)$ 及 $\bar{F}^0_r(t)$ 的半正定性, 如果确定 $f^0_{\bar{r}}(t)\geqslant 0$, 或 $F^0_r(t)\geqslant 0$, 或 $\bar{F}^0_r(t)\geqslant 0$ 成立, 则输出 "true" 并停机; 如果 $f^0_{\bar{r}}(t)\geqslant 0$(含约束) 不成立, 或 $F^0_r(t)\geqslant 0$ 不成立, 或 $\bar{F}^0_r(t)\geqslant 0$ 不成立, 则输出 "false" 并停机.

可以看到, 上述算法各步骤中的命令可以并行地处理, 也可以根据具体例子选择效率较高的命令运行.

下面给出几个具体的例子, 运行结果均在一台 Pentium 2.0 GHz dual CPU(内存 2.0 GB) 个人台式计算机上 Maple 环境下完成.

首先, 考虑引言中已经提到的例子.

例 1 在引言中, 我们已将齐次积分不等式问题 (1) 等价地转化为 8 次 n 元幂和平均对称多项式不等式问题 (2).

由引理 6, 我们需验证下面的不等式

$$f_{\bar{r}}^0=\sum_{i=1}^4\bar{r}_it_i^7\sum_{i=1}^4\bar{r}_it_i-3\sum_{i=1}^4\bar{r}_it_i^6\sum_{i=1}^4\bar{r}_it_i^2+3\sum_{i=1}^4\bar{r}_it_i^5\sum_{i=1}^4\bar{r}_it_i^3-\left(\sum_{i=1}^4\bar{r}_it_i^4\right)^2\geqslant 0,$$

其中 $t=(t_1,t_2,t_3,t_4)\in\mathbb{R}_+^4,\bar{r}_1,\bar{r}_2,\bar{r}_3,\bar{r}_4$ 为任意非负实数, 且满足 $\bar{r}_1+\bar{r}_2+\bar{r}_3+\bar{r}_4\leqslant 1$.

由引理 7, 我们需验证下面的不等式

$$\begin{aligned}F_r^0=&\left(\sum_{i=1}^5r_i\right)^6\sum_{i=1}^4r_it_i^7\sum_{i=1}^4r_it_i-3\left(\sum_{i=1}^5r_i\right)^6\sum_{i=1}^4r_it_i^6\sum_{i=1}^4r_it_i^2\\&+3\left(\sum_{i=1}^5r_i\right)^6\sum_{i=1}^4r_it_i^5\sum_{i=1}^4r_it_i^3-\left(\sum_{i=1}^5r_i\right)^6\left(\sum_{i=1}^4r_it_i^4\right)^2\geqslant 0,\end{aligned}$$

其中 $\forall t=(t_1,t_2,t_3,t_4)\in\mathbb{R}_+^4,r_1,r_2,r_3,r_4,r_5$ 为任意非负实数.

略去 F_r^0 正的公因式 $(\sum_{i=1}^5r_i)^6$ 后, 调用差分代换程序 tsds, 机器运行 1103 s 后, 输出 “true”, 调用部分差分代换程序, 输入命令 “sds($F_r^0,\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$)”, 机器运行不足 1 s 即输出 “true”, 故对一切自然数 $n,\forall x_i\in\mathbb{R}_+(i=1,\dots,n)$ 均有 $f^0\geqslant 0$ 成立. 因此, 原积分不等式成立.

由引理 8, 计算 f^0 的驻点方程

$$\frac{\mathrm{d}f^0}{\mathrm{d}x_i}=7A_1x_i^6-18A_2x_i^5+15A_3x_i^4-8A_4x_i^3+9A_5x_i^2-6A_6x_i+A_7=0,\quad i=1,\dots,n.$$

由 Descartes 符号法则看出, 上面的驻点方程最多只有 6 个正实根. 故由引理 8, 需验证下面的不等式

$$\begin{aligned}\bar{F}_r^0=&\left(\sum_{i=1}^6r_i\right)^6\sum_{i=1}^6r_it_i^7\sum_{i=1}^6r_it_i-3\left(\sum_{i=1}^6r_i\right)^6\sum_{i=1}^6r_it_i^6\sum_{i=1}^6r_it_i^2\\&+3\left(\sum_{i=1}^6r_i\right)^6\sum_{i=1}^6r_it_i^5\sum_{i=1}^6r_it_i^3-\left(\sum_{i=1}^6r_i\right)^6\left(\sum_{i=1}^6r_it_i^4\right)^2\geqslant 0,\end{aligned}$$

其中 $\forall t=(t_1,\dots,t_6)\in\mathbb{R}_+^6,r_i,i=1,\dots,6$ 为任意非负实数.

略去 $\bar{F}_r^0$ 正的公因式 $(\sum_{i=1}^6r_i)^6$ 后, 调用部分差分代换程序, 输入命令 “sds($\bar{F}_r^0,\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\}$)”, 机器运行 145 s 后, 输出 “true”. 故对一切自然数 $n,\forall x_i\in\mathbb{R}_+(i=1,\dots,n)$ 均有 $f^0\geqslant 0$ 成立. 因此, 原积分不等式成立.

注 1 F_r^0 中的 $(\sum_{i=1}^5r_i)^6$ 和 $\bar{F}_r^0$ 中的 $(\sum_{i=1}^6r_i)^6$ 都可以略去, 从而降低多项式的次数. 算法 nm0prove 中都是略去的, 以降低运行时间与问题复杂度.

注 2 将 $\bar{F}_r^0$(略去 $(\sum_{i=1}^6r_i)^6$ 后) 看做关于 $r_1,r_2,\dots,r_6$ 的多项式, 调用 Maple 命令 collect($\bar{F}_r^0$, [$r_1,r_2,\dots,r_6$], distributed), 并对各系数进行因式分解, 整理可得到如下结果:

$$\begin{aligned}\bar{F}_r^0=&G_1r_1r_2+G_2r_1r_3+G_3r_1r_4+G_4r_1r_5+G_5r_6r_1+G_6r_2r_3+G_7r_2r_4+G_8r_2r_5\\&+G_9r_6r_2+G_{10}r_3r_4+G_{11}r_3r_5+G_{12}r_6r_3+G_{13}r_4r_5+G_{14}r_6r_4+G_{15}r_6r_5,\end{aligned}$$

其中

$$G_1=t_1t_2(t_1^2+t_1t_2+t_2^2)(t_1-t_2)^4,\qquad G_2=t_1t_3(t_1^2+t_1t_3+t_3^2)(t_1-t_3)^4,$$

$$G_3 = t_1t_4(t_1^2 + t_1t_4 + t_4^2)(t_1 - t_4)^4, \qquad G_4 = t_1t_5(t_1^2 + t_1t_5 + t_5^2)(t_1 - t_5)^4,$$
$$G_5 = t_1t_6(t_1^2 + t_1t_6 + t_6^2)(t_1 - t_6)^4, \qquad G_6 = t_2t_3(t_2^2 + t_2t_3 + t_3^2)(t_2 - t_3)^4,$$
$$G_7 = t_2t_4(t_2^2 + t_2t_4 + t_4^2)(t_2 - t_4)^4, \qquad G_8 = t_2t_5(t_2^2 + t_2t_5 + t_5^2)(t_2 - t_5)^4,$$
$$G_9 = t_2t_6(t_2^2 + t_2t_6 + t_6^2)(t_2 - t_6)^4, \qquad G_{10} = t_3t_4(t_3^2 + t_3t_4 + t_4^2)(t_3 - t_4)^4,$$
$$G_{11} = t_3t_5(t_3^2 + t_3t_5 + t_5^2)(t_3 - t_5)^4, \qquad G_{12} = t_3t_6(t_3^2 + t_3t_6 + t_6^2)(t_3 - t_6)^4,$$
$$G_{13} = t_4t_5(t_4^2 + t_4t_5 + t_5^2)(t_4 - t_5)^4, \qquad G_{14} = t_4t_6(t_4^2 + t_4t_6 + t_6^2)(t_4 - t_6)^4,$$
$$G_{15} = t_5t_6(t_5^2 + t_5t_6 + t_6^2)(t_5 - t_6)^4.$$

容易看出 $G_i \geqslant 0, i = 1, \ldots, 15$, 从而易得 $\bar{F}_6^0 \geqslant 0$, 故对一切自然数 $n, \forall x_i \in \mathbb{R}_+ (i = 1, \ldots, n)$ 均有 $f^0 \geqslant 0$ 成立. 对 F_r^0 也可以做类似处理.

注 3　本文考虑的积分不等式中的 "积分区间为 [0,1]" 这一限制显然不是本质的, 可自然推广为任意积分区间的情形.

注 4　文献 [15] 中也曾用差分代换方法直接考虑了本例中 $\bar{F}_r^0 \geqslant 0$ 的判定.

例 2　已知 $g(s)$ 在区间 $[0,1]$ 上是可积分的, 考虑如下的积分不等式

$$\begin{aligned} G = {} & 4\int_0^1 |g(s)|^5 \mathrm{d}s - \int_0^1 g^4(s)\mathrm{d}s \int_0^1 |g(s)|\mathrm{d}s - 4\int_0^1 |g(s)|^3\mathrm{d}s \int_0^1 g^2(s)\mathrm{d}s \\ & + 2\int_0^1 |g(s)|^3\mathrm{d}s \left(\int_0^1 |g(s)|\mathrm{d}s\right)^2 - 3\left(\int_0^1 g^2(s)\mathrm{d}s\right)^2 \int_0^1 |g(s)|\mathrm{d}s \\ & + 3\int_0^1 g^2(s)\mathrm{d}s \left(\int_0^1 |g(s)|\mathrm{d}s\right)^3 - \left(\int_0^1 |g(s)|\mathrm{d}s\right)^5 \geqslant 0. \end{aligned}$$

问是否对一切在区间 [0, 1] 上是可积的 $g(s)$, 上面的积分不等式均成立? 或对应地, 考虑

$$\begin{aligned} f^0 = {} & 4\sum_{i=1}^n \frac{x_i^5}{n} - \sum_{i=1}^n \frac{x_i^4}{n} \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{n} - 4\sum_{i=1}^n \frac{x_i^3}{n} \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{n} + 2\sum_{i=1}^n \frac{x_i^3}{n} \left(\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{n}\right)^2 \\ & - 3\left(\sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{n}\right)^2 \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{n} + 3\sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{n} \left(\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{n}\right)^3 - \left(\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{n}\right)^5, \end{aligned}$$

其中 $x_i \in \mathbb{R}_+, i = 1, \ldots, n$, 问是否对一切自然数 n 均有 $f^0 \geqslant 0$ 成立?

由引理 6, 我们需验证下面的不等式

$$\begin{aligned} f_{\bar{r}}^0 = {} & 4(\bar{r}_1t_1^5 + \bar{r}_2t_2^5) - (\bar{r}_1t_1^4 + \bar{r}_2t_2^4)(\bar{r}_1t_1 + \bar{r}_2t_2) - 4(\bar{r}_1t_1^3 + \bar{r}_2t_2^3)(\bar{r}_1t_1^2 + \bar{r}_2t_2^2) \\ & + 2(\bar{r}_1t_1^3 + \bar{r}_2t_2^3)(\bar{r}_1t_1 + \bar{r}_2t_2)^2 - 3(\bar{r}_1t_1^2 + \bar{r}_2t_2^2)^2(\bar{r}_1t_1 + \bar{r}_2t_2) \\ & + 3(\bar{r}_1t_1^2 + \bar{r}_2t_2^2)(\bar{r}_1t_1 + \bar{r}_2t_2)^3 - (\bar{r}_1t_1 + \bar{r}_2t_2)^5 \geqslant 0, \end{aligned}$$

其中 $t = (t_1, t_2) \in \mathbb{R}_+^2, \bar{r}_1, \bar{r}_2$ 为任意非负实数, 且满足 $\bar{r}_1 + \bar{r}_2 \leqslant 1$.

由引理 7, 我们需验证下面的不等式

$$\begin{aligned} F_r^0 = {} & 4(r_1 + r_2 + r_3)^4(r_1t_1^5 + r_2t_2^5) - (r_1 + r_2 + r_3)^3(r_1t_1^4 + r_2t_2^4)(r_1t_1 + r_2t_2) \\ & - 4(r_1 + r_2 + r_3)^3(r_1t_1^3 + r_2t_2^3)(r_1t_1^2 + r_2t_2^2) + 2(r_1 + r_2 + r_3)^2(r_1t_1^3 + r_2t_2^3)(r_1t_1 + r_2t_2)^2 \\ & - 3(r_1 + r_2 + r_3)^2(r_1t_1^2 + r_2t_2^2)^2(r_1t_1 + r_2t_2) + 3(r_1 + r_2 + r_3)(r_1t_1^2 + r_2t_2^2)(r_1t_1 + r_2t_2)^3 \end{aligned}$$

$$-(r_1t_1+r_2t_2)^5 \geqslant 0,$$

其中 $\forall t=(t_1,t_2)\in\mathbb{R}_+^2, r_1,r_2,r_3$ 为任意非负实数.

调用差分代换程序 tsds, 机器运行不到 2 s 后, 输出 "true". 故对一切自然数 $n, \forall x_i\in\mathbb{R}_+(i=1,\ldots,n)$ 均有 $f^0\geqslant 0$ 成立. 因此, 原积分不等式成立.

由引理 8, 计算 f^0 的驻点方程

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}f^0}{\mathrm{d}x_i}=&20x_i^4-4A_1x_i^3-(12A_2-6A_1^2)x_i^2-(8A_3+12A_1A_2-6A_1^3)x_i\\&-(A_4-4A_1A_3+3A_2^2-9A_1^2A_2+5A_1^4)=0,\qquad i=1,\ldots,n.\end{aligned}$$

上面驻点方程最高次数不超过 4, 每个方程最多只有 4 个正实根. 故由引理 8, 需验证下面的不等式

$$\begin{aligned}\bar{F}_r^0=&4\left(\sum_{i=1}^4 r_i\right)^4\sum_{i=1}^4 r_it_i^5-\left(\sum_{i=1}^4 r_i\right)^3\sum_{i=1}^4 r_it_i^4\sum_{i=1}^4 r_it_i-4\left(\sum_{i=1}^4 r_i\right)^3\sum_{i=1}^4 r_it_i^3\sum_{i=1}^4 r_it_i^2\\&+2\left(\sum_{i=1}^4 r_i\right)^2\sum_{i=1}^4 r_it_i^3\left(\sum_{i=1}^4 r_it_i\right)^2-3\sum_{i=1}^4 r_i\left(\sum_{i=1}^4 r_it_i^2\right)^2\sum_{i=1}^4 r_it_i+3\sum_{i=1}^4 r_i\sum_{i=1}^4 r_it_i^2\left(\sum_{i=1}^4 r_it_i\right)^3\\&-\left(\sum_{i=1}^4 r_it_i\right)^5\geqslant 0,\end{aligned}$$

其中 $\forall t=(t_1,\ldots,t_4)\in\mathbb{R}_+^4, r_i, i=1,\ldots,4$ 为任意非负实数.

调用差分代换程序 tsds, 机器运行 6055 s 后, 输出 "true", 调用部分差分代换程序, 输入命令 "sds($\bar{F}_r^0$, $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$)", 机器运行 2 s 即输出 "true". 故对一切自然数 $n, \forall x_i\in\mathbb{R}_+(i=1,\ldots,n)$ 均有 $f^0\geqslant 0$ 成立. 因此, 原积分不等式成立.

注 5 此例虽不易判断驻点方程系数列的变号数, 但可以根据方程的次数确定正实根个数的上界. 若能确定驻点方程系数列的变号数, 则有可能得到更为简单 (变元个数少, 次数低) 的等价多项式不等式.

注 6 文献 [15] 中也曾用差分代换方法直接考虑了本例中 $\bar{F}_r^0\geqslant 0$ 的判定.

例 3 已知 $g(s)$ 在区间 $[0,1]$ 上是可积分的, 考虑如下的积分不等式

$$G=\int_0^1 g^8(s)\mathrm{d}s-\left(\int_0^1|g(s)|\mathrm{d}s\right)^8\geqslant 0.$$

问是否对一切在区间 $[0,1]$ 上是可积的 $g(s)$, 上面的积分不等式均成立? 或对应地, 考虑

$$f^0=\sum_{i=1}^n\frac{x_i^8}{n}-\left(\sum_{i=1}^n\frac{x_i}{n}\right)^8\geqslant 0.$$

其中 $x_i\in\mathbb{R}_+, i=1,\ldots,n$, 问是否对一切自然数 n 均有 $f^0\geqslant 0$ 成立?

由引理 6, 我们需验证下面的不等式

$$f_{\bar{r}}^0=\sum_{i=1}^4\bar{r}_it_i^8-\left(\sum_{i=1}^4\bar{r}_it_i\right)^8\geqslant 0,$$

其中 $t=(t_1,t_2,r_3,r_4)\in\mathbb{R}_+^4, \bar{r}_1,\bar{r}_2,\bar{r}_3,\bar{r}_4$ 为任意非负实数, 且满足 $\bar{r}_1+\bar{r}_2+\bar{r}_3+\bar{r}_4\leqslant 1$.

由引理 7, 我们需验证下面的不等式

$$F_r^0=\left(\sum_{i=1}^5 r_i\right)^7\sum_{i=1}^4 r_i t_i^8-\left(\sum_{i=1}^4 r_i t_i\right)^8\geqslant 0,$$

其中 $\forall t=(t_1,\ldots,t_4)\in\mathbb{R}_+^4, r_1,r_2,r_3,r_4,r_5$ 为任意非负实数.

调用部分差分代换程序, 输入命令 "sds($F_r^0,\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$)", 机器运行 57 s 后, 输出 "true". 故对一切自然数 $n,\forall x_i\in\mathbb{R}_+(i=1,\ldots,n)$ 均有 $f^0\geqslant 0$ 成立. 因此, 原积分不等式成立.

由引理 8, 计算 f^0 的驻点方程

$$\frac{\mathrm{d}f^0}{\mathrm{d}x_i}=8x_i^7-8A_1^7=0,\quad i=1,2,\ldots,n.$$

由 Descartes 符号法则看出, 上面的驻点方程最多只有 1 个正实根. 故由引理 8, 仅需验证下面的不等式

$$\bar{F}_r^0=(r_1^7)r_1t_1^8-(r_1t_1)^8\geqslant 0,$$

其中 $\forall t=(t_1)\in\mathbb{R}_+, r_1$ 为任意非负实数. 上述不等式显然成立, 故对一切自然数 $n,\forall x_i\in\mathbb{R}_+(i=1,\ldots,n)$ 均有 $f^0\geqslant 0$ 成立. 因此, 原积分不等式成立.

例 4 已知 $g(s)$ 在区间 [0,1] 上是可积分的, 考虑如下的积分不等式

$$\begin{aligned}G=&-20\left(\int_0^1 g^4(s)\mathrm{d}s\right)^2+3\int_0^1|g(s)|^3\mathrm{d}s\int_0^1|g(s)|^5\mathrm{d}s\\&+13\int_0^1 g^2(s)\mathrm{d}s\int_0^1 g^6(s)\mathrm{d}s+\int_0^1 g^8(s)\mathrm{d}s+7\int_0^1|g(s)|^7\mathrm{d}s\int_0^1|g(s)|\mathrm{d}s\geqslant 0.\end{aligned}$$

问是否对一切在区间 $[0,1]$ 上是可积的 $g(s)$, 上面的积分不等式均成立? 或对应地, 考虑

$$f^0=-20\left(\sum_{i=1}^n\frac{x_i^4}{n}\right)^2+3\sum_{i=1}^n\frac{x_i^3}{n}\sum_{i=1}^n\frac{x_i^5}{n}+13\sum_{i=1}^n\frac{x_i^2}{n}\sum_{i=1}^n\frac{x_i^6}{n}+\sum_{i=1}^n\frac{x_i^8}{n}+7\sum_{i=1}^n\frac{x_i^7}{n}\sum_{i=1}^n\frac{x_i}{n}\geqslant 0,$$

其中 $x_i\in\mathbb{R}_+, i=1,\ldots,n$, 问是否对一切自然数 n 均有 $f^0\geqslant 0$ 成立?

由引理 6, 我们需验证下面的不等式

$$\begin{aligned}f_{\bar{r}}^0=&-20\left(\sum_{i=1}^4\bar{r}_ix_i^4\right)^2+3\sum_{i=1}^4\bar{r}_ix_i^3\sum_{i=1}^4\bar{r}_ix_i^5+13\sum_{i=1}^4\bar{r}_ix_i^2\sum_{i=1}^4\bar{r}_ix_i^6\\&+\sum_{i=1}^4\bar{r}_ix_i^8+7\sum_{i=1}^4\bar{r}_ix_i^7\sum_{i=1}^4\bar{r}_ix_i\geqslant 0,\end{aligned}$$

其中 $t=(t_1,t_2,r_3,r_4)\in\mathbb{R}_+^4,\bar{r}_1,\bar{r}_2,\bar{r}_3,\bar{r}_4$ 为任意非负实数, 且满足 $\bar{r}_1+\bar{r}_2+\bar{r}_3+\bar{r}_4\leqslant 1$.

由引理 7, 我们需验证下面的不等式

$$\begin{aligned}F_r^0=&-20\left(\sum_{i=1}^5 r_i\right)^6\left(\sum_{i=1}^4 r_ix_i^4\right)^2+3\left(\sum_{i=1}^5 r_i\right)^6\sum_{i=1}^4 r_ix_i^3\sum_{i=1}^5 r_ix_i^5+13\left(\sum_{i=1}^5 r_i\right)^6\sum_{i=1}^4 r_ix_i^2\sum_{i=1}^4 r_ix_i^6\\&+\left(\sum_{i=1}^5 r_i\right)^7\sum_{i=1}^4 r_ix_i^8+7\left(\sum_{i=1}^5 r_i\right)^6\sum_{i=1}^4 r_ix_i^7\sum_{i=1}^4 r_ix_i\geqslant 0,\end{aligned}$$

其中 $\forall t=(t_1,\dots,t_4)\in\mathbb{R}_+^4, r_1,r_2,r_3,r_4,r_5$ 为任意非负实数.

对 F_r^0 略去正公因式 $(\sum_{i=1}^5 r_i)^6$ 后, 调用部分差分代换程序 sds, 输入命令 "sds(F_r^0, $\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$)", 机器运行不到 1 s 后, 输出 "true". 故对一切自然数 $n,\forall x_i\in\mathbb{R}_+(i=1,\dots,n)$ 均有 $f^0\geqslant 0$ 成立. 因此, 原积分不等式成立.

由引理 8, 计算 f^0 的驻点方程

$$\frac{\mathrm{d}f^0}{\mathrm{d}x_i}=8x_i^7+49A_1x_i^6+78A_2x_i^5+15A_3x_i^4-160A_4x_i^3+9A_5x_i^2+26A_6x_i+7A_7=0,\quad i=1,\dots,n.$$

由 Descartes 符号法则看出, 上面的驻点方程最多只有 2 个正实根. 故由引理 8, 仅需验证下面的不等式

$$\begin{aligned}\bar{F}_r^0=&-20(r_1+r_2)^6(r_1t_1^4+r_2t_2^4)^2+3(r_1+r_2)^6(r_1t_1^3+r_2t_2^3)(r_1t_1^5+r_2t_2^5)\\&+13(r_1+r_2)^6(r_1t_1^2+r_2t_2^2)(r_1t_1^6+r_2t_2^6)+(r_1+r_2)^7(r_1t_1^8+r_2t_2^8)\\&+7(r_1+r_2)^6(r_1t_1+r_2t_2)(r_1t_1^7+r_2t_2^7)\geqslant 0,\end{aligned}$$

其中 $\forall t=(t_1,t_2)\in\mathbb{R}_+^2, r_1,r_2$ 为任意非负实数.

调用差分代换程序 tsds, 机器运行不到 1 s 后, 输出 "true". 故对一切自然数 $n,\forall x_i\in\mathbb{R}_+(i=1,\dots,n)$ 均有 $f^0\geqslant 0$ 成立. 因此, 原积分不等式成立.

例 5 陈胜利在中国不等式研究网上曾断言石焕南所提不等式 $S_1S_2S_7+S_4S_3^2\geqslant 2nS_4S_6$ 反向成立, 这里 $S_k=x_1^k+x_2^k+\cdots+x_n^k, x_i>0, k=1,2,\dots,7$. 我们试图利用本文的算法验证此结论时, 却输出如下的反例:

$$n=902,\quad x_1=x_2=\cdots=x_{899}=1,\quad x_{900}=x_{901}=x_{902}=2,$$

这说明石焕南不等式反向亦不成立. 后来, 陈胜利进一步验证石焕南不等式当 $n\leqslant 106$ 时反向成立 1). 本例也说明如下的齐次积分不等式

$$G=\int_0^1|g(s)|\mathrm{d}s\int_0^1 g^2(s)\mathrm{d}s\int_0^1|g(s)|^7\mathrm{d}s+\int_0^1 g^4(s)\mathrm{d}s\left(\int_0^1|g(s)|^3\mathrm{d}s\right)^2-2\int_0^1 g^4(s)\mathrm{d}s\int_0^1 g^6(s)\mathrm{d}s\leqslant 0,$$

对任意的区间 $[0,1]$ 上是可积的 $g(s)$ 不是恒成立的.

注 7 例 5 说明, 当给定的齐次积分不等式或对应的齐次对称多项式不等式不成立时, 我们的程序可给出具体不成立的数值反例. 当然给出反例的功能是含在用差分代换方法 [1,13−17] 判定不等式的算法中的.

5 结论

本文考虑了一类积分不等式的机器判定. 首先将此类积分不等式转化为一类 Tarski 模型外的齐次对称多项式不等式, 该对称型可表示为诸变元幂和平均值的多项式. 利用 Timofte 对称多项式的降维理论, 结合不等式证明软件 BOTTEMA 及差分代换方法, 给出此类对称型非负性的机器判定算法, 从而实现原来的积分不等式的机器判定. 当该积分不等式不成立时, 可给出具体的数值反例. 在 Maple 平台上, 根据该算法设计完成程序了 nm0prove, 应用例子表明问题的广泛性及算法的有效性.

1) 见 http://old.irgoc.org/bbs/dispbbs.asp?boardid=17&id=2808&page=&star=2

参考文献

1 Yang L, Xia B C. Automated Proving and Discovering for Inequalities (Series in Mathematical Mechanization)(in Chinese). Beijing: Science Press, 2008

2 Chow Y S, Teicher H. Probability Theory. New York: Springer, 1978

3 Corduneanu C. Integral Equations and Stability of Feedback Systems. London/New York: Springer-Verlag, 1973

4 Courant R, Hilbert D. Methods of Mathematical Physics. New York: Interscience Publishing Company, 1953

5 Liptser R S, Shiryayev A N. Stastistics of Random Processes. New York: Springer, 1977

6 Wang L, Yu W S, Zhang L. On the number of positive solutions to a class of integral equations. Control Cybern, 2003, 32: 383–395

7 Timofte V. On the positivity of symmetric polynomial functions. Part I: General results. J Math Anal Appl, 2003, 284: 174–190

8 Timofte V. On the positivity of symmetric polynomial functions. Part II: Lattice general results and positivity criteria for degrees 4 and 5. J Math Anal Appl, 2005, 304: 652–667

9 Timofte V. On the positivity of symmetric polynomial functions. Part III: Extremal polynomials of degrees 4. J Math Anal Appl, 2005, 307: 565–578

10 Yang L. A dimension-decreasing algorithm with generic program for automated inequality proving (in Chinese). Chin High Tech Lett, 1998, 8: 20–25

11 Yang L. Recent advances in automated theorem proving on inequalities. J Comput Sci Tech, 1999, 14: 434–446

12 Yang L, Xia S H. Automated proving for a class of constructive geometric inequalities (in Chinese). Chin J Comput, 2003, 26: 769–778

13 Yang L. Solving harder problems with lesser mathematics. In: Proceedings of the 10th Asian Technology Conference in Mathematics. Blacksburg: ATCM Inc, 2005. 37–46

14 Yang L. Difference substitution and automated inequality proving (in Chinese). J Guangzhou Univ (Nat Sci Ed), 2006, 5: 1–7

15 Yang L. Deciding the nonnegativity of multivariate polynomials without cell-decomposition. In: Preproceedings of the 7th International Workshop on Automated Deduction in Geometry. Shanghai: East China Normal University, 2008. 143–153

16 Yang L, Yao Y. Difference substitution matrices and decision on nonnegativity of polynomials (in Chinese). J Syst Sci Math Sci, 2009, 29: 1169–1177

17 Yao Y. Infinite product convergence of column stochastic mean matrix and machine decision for positive semi-definite forms (in Chinese). Sci Sin Math, 2010, 53: 251–264 (also see http://arxiv.org/abs/0904.4030 for English version)

18 Rudin W. Principles of Mathematical Analysis. 3rd ed. New York: McGraw-Hill, 1976

19 Tarski A. A Decision Method for Elementary Algebra and Geometry. Berkeley: The University of California Press, 1951

20 Chou S C. Mechanical Geometry Theorem Proving. Dordrecht: Reidel, 1988

21 Wu W J. On the decision problem and the mechanization of theorem-proving in elementary geometry. Sci China, 1978, 21: 150–172

22 Wu W J. Mechanical Theorem Proving in Geometries: Basic Principle. New York: Springer, 1984

23 Wu W J. Mathematical Mechanization (Series in Mathematical Mechanization)(in Chinese). Beijing: Science Press, 2003

24 Buchberger B. Grobner bases: an algorithmic method in polynomial ideal theory. In: Multidimensional Systems Theory. Dordrecht: Reidel, 1985. 184–232

25 Kapur D. Geometry theorem proving using Hilbert's Nullstellensatz. In: Proceedings of SYMSAC'86. New York: ACM Press, 1986. 202–208

26 Kutzler B, Stifter S. Automated geometry theorem proving using Buchberger's algorithm. In: Proceedings of SYMSAC'86. New York: ACM Press, 1986. 209–214
27 Yang L, Zhang J Z, Hou X R. Nonlinear Algebraic Equation Systems and Automated Theorem Proving (Series in Nonlinear Sciences)(in Chinese). Shanghai: Shanghai Scientific and Technological Education Publishing House, 1996
28 Zhang J Z, Yang L, Deng M K. The parallel numerical method of mechanical theorem proving. Theo Comput Sci, 1990, 74: 253–271
29 Chou S C, Zhang J Z, Gao X S. Machine Proofs in Geometry: Automated Production of Readable Proofs for Geometry Theorems. Singapore: World Scientific, 1994
30 Arnon D S, Collins G E, McCallum S. Cylindrical algebraic decomposition I: the basic algorithm. SIAM J Comput, 1984, 13: 865–877
31 Arnon D S, Collins G E, McCallum S. Cylindrical algebraic decomposition II: an adjacency algorithm for the plane. SIAM J Comput, 1984, 13: 878–889
32 Brown C W. Simple CAD construction and its applications. J Symb Comput, 2001, 31: 521–547
33 Collins G E. Quantifier elimination for real closed fields by cylindrical algebraic decomposition. In: Brakhage H, ed. Automata Theory and Formal Languages, LNCS Vol 33. Berlin Heidelberg: Springer, 1975. 134–165
34 Collins G E, Hong H. Partial cylindrical algebraic decomposition for quantifier elimination. J Symb Comput, 1991, 12: 299–328
35 Gerhold S, Kauers M. A procedure for proving special function inequalities involving a discrete parameter. In: Proceedings of ISSAC'05. New York: ACM Press, 2005. 156–162
36 Kauers M. Computer proofs for polynomial identities in arbitrary many variables. In: Proceedings of ISSAC'04. New York: ACM Press, 2004. 199–204
37 Yang L, Feng Y, Yao Y. A class of mechanically decidable problems beyond Tarski's model. Sci China Ser A-Math, 2007, 50: 1611–1620
38 Yang L, Hou X R, Xia B C. A complete algorithm for automated discovering of a class of inequality-type theorems. Sci China Ser F-Inf Sci, 2001, 44: 33–49
39 Yang L, Hou X R, Zeng Z B. A complete discrimination system for polynomials. Sci China Ser E-Tech Sci, 1996, 39: 628–646
40 Wen J J, Cheng S S, Gao C B. Optimal sublinear inequalities involving geometric and power means. Math Bohem, 2009, 134: 133–149
41 Yao Y, Xu J. Descartes' law of signs for generalized polynomials and its application to dimension-decreasing method (in Chinese). Acta Math Sin, 2009, 52: 625–630

Mechanical decision for a class of integral inequalities

YANG Lu[1,3], YU WenSheng[1,2*] & YUAN RuYi[2]

1 *Shanghai Key Laboratory of Trustworthy Computing, Software Engineering Institute, East China Normal University, Shanghai* 200062*, China;*
2 *The integrated Information System Research Center, Institute of Automation, Chinese Academy of Sciences, Beijing* 100190*, China;*
3 *Laboratory for Automated Reasoning and Programming, Chengdu Institute of Computer Applications, Chinese Academy of Sciences, Chengdu* 610041*, China*
*E-mail: wsyu@sei.ecnu.edu.cn

Abstract A class of integral inequalities is transformed into homogeneous symmetric polynomial inequalities beyond Tarski model, where the number of elements of the polynomial, say n, is also a variable and the coefficients are functions of n. This is closely associated with some open problems formulated recently by Yang et al. Using Timofte's dimension-decreasing method for symmetric polynomial inequalities, combined with the inequality-proving package BOTTEMA and a program of implementing the method known as successive difference substitution, we provide a procedure for deciding the nonnegativity of the corresponding polynomial inequality such that the original integral inequality is mechanically decidable; otherwise, a counterexample will be given. The effectiveness of the algorithm is illustrated by some more examples.

Keywords integral inequality, symmetric polynomial inequality, Timofte's dimension-decreasing method, successive difference substitution, mechanical decision, inequality-proving package BOTTEMA