

如何计算密近双星中光时轨道效应

杨远贵*

淮北煤炭师范学院物理与电子信息学院, 淮北 235000

* E-mail: yygc@163.com

收稿日期: 2008-12-08; 接受日期: 2009-02-16

国家自然科学基金(批准号: 10778707)和淮北煤炭师范学院重点教研项目的部分基金资助

摘要 主要研究密近双星的光时轨道效应的算法. 首先扼要地介绍了光时轨道效应的理论公式, 在计算过程中需要采用非线性的最小二乘法, 同时还要求解开普勒方程. 为减小迭代次数以提高计算速度, 采用级数法解开普勒方程($e < 1$). 首次将 $E = E(M, e)$ 展开到 e^6 ; 在 $e = 0.5871$ 时, 最大误差 $|\Delta E| \leq 10^{-4}$. 最后对密近双星 AH Cep 的 $O-C$ 曲线进行分析, 得到了它的第三天体的光时轨道效应参数. 结果表明: 这种算法是可行的和有效的, 获得的光时轨道效应参数可能更能够准确地反映的实际情况. 因此, 研究第三天体的光时轨道效应和开普勒方程的级数解对于密近双星的轨道周期分析、第三天体探索 and 天体(人造卫星和行星)轨道的快速计算具有非常有重要的意义.

关键词

密近双星
光时轨道效应
开普勒方程

在密近双星中, 第三天体的存在可能是一种普遍的现象^[1-3]. 第三天体在双星的形成、演化和并合过程中可能起着至关重要的作用. 如果第三天体相对于双星系统的距离比两子星的距离大得多(即“行星类第三天体”), 可以近似地把食双星对和第三天体分别看成质点, 采用二体问题处理. 在相互的引力作用下, 它们要绕公共质心作椭圆轨道运动. 从而使地球上观测到食双星的光极小发生的时刻随食双星绕公共质心的轨道运动的变化而变化^[4]. 这种由于第三天体的存在而使密近双星的光极小时刻发生周期性的提前或滞后的现象称为光时轨道效应. 当食双星远离我们而去时, 所观测到的食双星轨道周期就会比真实的食双星轨道周期长; 当食双星迎着我们而来时, 所观测到的食双星轨道周期就会比真实的食双星轨道周期短. 这样双星的轨道周期就存在周期性变化. 因此, 对密近双星的轨道周期分析是研究第三天体存在的重要手段. 在计算密近双星的光时轨

道效应时, 需要利用最小二乘法对食双星发生光极小时刻的观测值与理论(计算)值之差(即残差) $O-C$ 进行拟合; 而拟合公式是含有多参数的非线性方程, 同时又涉及到超越方程——开普勒方程, 这使得密近双星的光时轨道效应的计算更加复杂化. Kopal^[4]采用二阶的傅里叶级数导出了小偏心率的近似算法. 但袁金照^[5]计算表明: 对于 $e > 0.4$ 时, 它已经不能够描述真实的第三天体的光时轨道效应^[6]. 因此, 有必要对密近双星的光时轨道效应的算法进行分析和研究.

本文首先介绍密近双星的光时轨道效应理论计算公式; 然后通过给出 $E = E(M, e)$ 的级数展开式并将计算结果与迭代法进行比较; 最后以密近双星 AH Cep 为例, 通过对它的光极小时刻的 $O-C$ 曲线分析, 计算出第三天体的光时轨道效应参数.

1 光时轨道效应

密近双星中第三天体引起的光时轨道效应, Irwin^[6]给出了一个理论计算公式:

$$O-C = \frac{K}{\sqrt{1-e^2 \cos^2 \omega}} \left[\frac{1-e^2}{1+e \cos \nu} \sin(\nu + \omega) + e \sin \omega \right], \quad (1)$$

其中 e 为偏心率、 ν 为真近点角、 ω 为近星点经度, 而半振幅为

$$K = \frac{1}{2} [(O-C)_{\max} - (O-C)_{\min}] = \frac{a \sin i \sqrt{1-e^2 \cos^2 \omega}}{2.590 \times 10^{10}}, \quad (2)$$

式中 i 为第三天体的轨道平面与视线的切平面之间的夹角. 残差 $O-C$ 和半振幅 K 以天为单位, 半长轴 a 以千米为单位. 真近点角 ν 和平近点角 M 通过偏近点角 E 联系起来, 具体关系如下:

$$\tan \frac{\nu}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{E}{2}, \quad (3)$$

$$M = E - e \sin E = 2\pi \frac{t - T_0}{P_3}, \quad (4)$$

其中 P_3 为第三天体的轨道周期, T_0 为第三天体过近星点的时刻. (4) 式为开普勒方程. 当 $0 < e < 1$ 时, 第三天体作椭圆轨道运动; 当 $e = 0$ 时, 第三天体作圆轨道运动, 此时(1)式退化为正弦函数. 在实际的计算中, 将(2)式代入(1)式, 可以得到光时效应的半振幅

$$A = \frac{a \sin i}{2.590 \times 10^{10}}, \quad \text{此时(1)式变为}$$

$$O-C = A \left[\frac{1-e^2}{1+e \cos \nu} \sin(\nu + \omega) + e \sin \omega \right]. \quad (5)$$

从(1)~(5)式可以看出: 要计算第三天体的光时轨道, 必须同时确定出 5 个待定参数, 即 A (或者 $a \sin i$), e , ω , T_0 和 P_3 . 利用(1)或(5)式对于观测值与理论(计算)值之差 $O-C$ 进行非线性拟合时, 采用 L-M 算法 (Levenberg-Marquardt algorithm). 此算法的关键是用模型函数对待定参数向量在其领域内作线性近似, 忽略了二阶以上的导数项, 从而转化为线性最小二乘问题, 它具有收敛速度快等优点. 因此 L-M 算法非常实用并已成为标准的非线性最小二乘算法^[7].

2 $E = E(M, e)$ 关于 e 和 M 的展开式

由于开普勒方程 $M = E - e \sin E$ 是超越方程, 在求解偏近点角 E 时常采用迭代法^[8]. 但由于(1)式或(5)式是多参数的非线性方程, 这使得求解第三天体的光时轨道复杂化. 为了减少了迭代次数, 提高计算

效率, 将偏近点角 E 展开为关于 e 和 M 的级数形式. 将方程改写成 $E = M + e \sin E$, 采用以下循环式:

$$E = M + e \sin \{M + e \sin [M + e \sin (M + \dots)]\}, \quad (6)$$

这样便可以获得 $E = E(M, e)$ 可以导出准确的 e 的任意阶的展开式. 但是偏近点角 E 的级数解比较复杂, 其收敛性依赖于偏心率的大小. 当偏心率较小时, 级数解较为有效. 对于 $E = E(M, e)$ 展开式准确到 e^6 时^[9], 只有在 $e < 0.2683$, 偏近点角 E 的误差 $|\Delta E| < 10^{-4}$. 因此, 要使偏近点角 E 获得更高的精度, 只有将(6)式展开到更高阶的级数. 但在实际数值计算中考虑到双精度的限制, 只能将 $E = E(M, e)$ 的展开式准确到 e^{16} . 采用服务器对(6)式进行展开, 获得了偏近点角 E 关于 e 和 M 的级数形式(7)式, 其中 $e^{15} \sin 13M$ 项的系数达到了 15 位.

下面对求偏近点角 E 的级数法和迭代法进行比较. 在平近点角 $M \in [0, 2\pi]$ 的一个周期范围内, 偏近点角 E 与平近点角 M 之差 $E-M$ 与 M 的关系如图 1 所示. 为了更好地比较两种方法, 纵坐标采用 $E-M$, 偏心率 e 的取值为 0.1, 0.2, ..., 0.8. 图 1 中虚线为迭代法的计算结果, 而实线为(7)式的计算结果. 从图中可以看出: 当 $e = 0.7$ 时, 级数解的 $E-M$ 曲线出现了明显的振荡; 并且 e 越大, 振荡幅度越大. 这表明在 $e = 0.7$ 附近展开(7)式已经不收敛. 特别地, 在 $e = 0.5871$ 时, 偏近点角 E 的误差 $|\Delta E| \leq 10^{-4}$. 由此可见: 在精度不太高的条件下(如第三天体光时轨道的偏心率 $e < 0.6$), 应用展开(7)式来计算偏近点角 E 还是比较

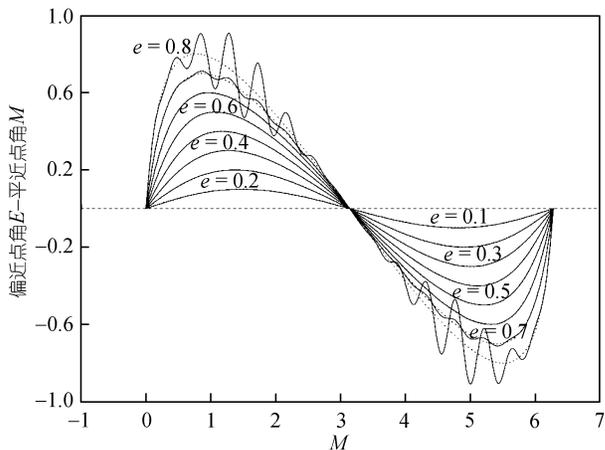


图 1 级数法和迭代法的比较

$$\begin{aligned}
 E = M + e \sin M + \frac{e^2}{2} \sin 2M + \left(\frac{3}{8} \sin 3M - \frac{1}{8} \sin M \right) e^3 &+ \left(\frac{1}{29030400} \sin 2M - \frac{8}{42525} \sin 4M \right. \\
 + \left(\frac{1}{3} \sin 4M - \frac{1}{6} \sin 2M \right) e^4 &+ \frac{6561}{358400} \sin 6M - \frac{131072}{467775} \sin 8M \\
 + \left(\frac{15}{384} \sin 5M - \frac{27}{128} \sin 3M + \frac{1}{192} \sin M \right) e^5 &+ \frac{48828125}{8320128} \sin 10M - \frac{52488}{25025} \sin 12M \\
 + \left(\frac{27}{80} \sin 6M - \frac{4}{15} \sin 4M + \frac{1}{48} \sin 2M \right) e^5 &+ \frac{1977326743}{1779148800} \sin 14M \left. \right) e^{14} \\
 + \left(\frac{16807}{46080} \sin 7M - \frac{3125}{9216} \sin 5M \right. &+ \left(\frac{1}{3329438515200} \sin M + \frac{6561}{5872025600} \sin 3M \right. \\
 + \frac{243}{5120} \sin 3M - \frac{1}{9216} \sin M \left. \right) e^7 &- \frac{48828125}{57076088832} \sin 5M + \frac{96889010407}{2242274918400} \sin 7M \\
 + \left(\frac{128}{315} \sin 8M - \frac{243}{560} \sin 6M \right. &+ \frac{31381059609}{64592281600} \sin 9M + \frac{34522712143931}{18549728870400} \sin 11M \\
 + \frac{4}{45} \sin 4M - \frac{1}{720} \sin 2M \left. \right) e^8 &- \frac{302875106592253}{109871471001600} \sin 13M \\
 + \left(\frac{1}{737280} \sin M - \frac{243}{40960} \sin 3M + \frac{78125}{516096} \sin 5M \right. &+ \frac{320361328125}{235115905024} \sin 15M \left. \right) e^{15} \\
 - \frac{823543}{1474560} \sin 7M + \frac{531441}{1146880} \sin 9M \left. \right) e^9 &+ \left(-\frac{638512883}{14631321600} \sin 2M - \frac{638381803}{10450944000} \sin 4M \right. \\
 + \left(\frac{1}{17280} \sin 2M - \frac{16}{945} \sin 4M + \frac{2187}{8960} \sin 6M \right. &- \frac{8355267}{157696000} \sin 6M + \frac{1508970773}{22992076800} \sin 8M \\
 - \frac{2048}{2835} \sin 8M + \frac{78125}{145152} \sin 10M \left. \right) e^{10} &- \frac{9893327575}{11955879936} \sin 10M + \frac{7731787653}{2870067200} \sin 12M \\
 + \left(-\frac{1}{88473600} \sin M + \frac{2187}{4587520} \sin 3M \right. &- \frac{775203299381}{213497856000} \sin 14M \\
 - \frac{1953125}{49545216} \sin 5M + \frac{40353607}{106168320} \sin 7M &+ \left. \frac{35183733575957}{20922789888000} \sin 16M \right) e^{16} + O(e)^{17} \quad (7) \\
 - \frac{43046721}{45875200} \sin 9M + \frac{2357947691}{3715891200} \sin 11M \left. \right) e^{11} \\
 + \left(-\frac{1}{604800} \sin 2M + \frac{2}{945} \sin 4M \right. & \\
 - \frac{729}{8960} \sin 6M + \frac{8192}{14175} \sin 8M & \\
 - \frac{1953125}{1596672} \sin 10M + \frac{1458}{1925} \sin 12M \left. \right) e^{12} & \\
 + \left(\frac{1}{14863564800} \sin M - \frac{19683}{734003200} \sin 3M \right. & \\
 + \frac{48828125}{7134511104} \sin 5M - \frac{1977326743}{12740198400} \sin 7M & \\
 + \frac{3486784401}{4037017600} \sin 9M - \frac{285311670611}{178362777600} \sin 11M & \\
 + \frac{1792160394037}{1961990553600} \sin 13M \left. \right) e^{13} &
 \end{aligned}$$

有效. 利用 $E = E(M, e)$ 的展开式, 还可以得到真近点角 $\nu = \nu(M, e)$ 的表达式, 即中心差 $\nu - M$ 公式^[9].

3 密近双星 AH Cep 的光时轨道效应

下面利用已知的密近双星光时轨道效应数据进行分析, 将计算结果与之比较, 以评估此算法. 根据密近双星 AH Cep 的光极小时刻资料, 很容易计算出每个光极小时刻的 $O - C$ 值. 在图 2 中具体数据见文献[10]的表 2. 权重的选择与 Kim 等人^[10]相同, 即对光电和 CCD 测光极小时刻取权重为 200, 对目视测光极小时刻取权重为 10; 对一个巡天测光极小时刻取权重为 1, 而对一个照相测光极小时刻取权重为 20. 对观测值与理论(计算)值之差 $O - C$ 作非线性最小二乘(法)拟合, 采用如下公式:

$$O - C = A_0 + A \left[\frac{1 - e^2}{1 + e \cos \nu} \sin(\nu + \omega) + e \sin \omega \right], \quad (8)$$

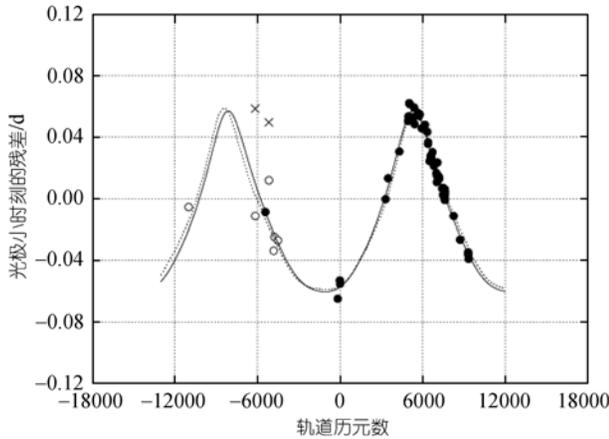


图2 密近双星 AH Cep 的光时轨道效应

实心点表示光电和 CCD 极小时刻资料; 空心点表示目视观测资料, 其中两个目视观测资料由于存在较大的误差, 在数据处理中没有采用, 用叉号表示

上式中的 A_0 为零点常数, 它是对密近双星轨道历元起点的修正. 采用(8)式, 在数据拟合中更接近真实的情况. 计算结果如下: $A_0 = -0.0015(\pm 0.0007)$, $A = 0.0588(\pm 0.0010)$, $e = 0.4974(\pm 0.0149)$, $P_3 = 65.32(\pm 2.06)$ a, $\omega = 82.6^\circ(\pm 1.1^\circ)$ 和 $T_0 = HJD2444232(\pm 92)$. 所得的残差均方根为 0.0037 d. Kim 等人^[10]在仅考虑第三天体的光时轨道效应时的计算结果是: $A = 0.059$, $e = 0.56(\pm 0.05)$, $P_3 = 67.1(\pm 1.9)$ a, $\omega = 80.9^\circ(\pm 4.0^\circ)$ 和 $T_0 = HJD2444347(\pm 143)$, 此时的残差均方根为 0.0043 d. 综合以上数据可以得到: 两个光时轨道效应参数在误差的范围内基本一致, 但(8)式的残差均方根要小些. 这可能

是增加零点 A_0 的结果. 在如图 2 中, 实线和虚线分别是我们的和 Kim 等人^[10]的理论曲线. 显然, 实线比虚线对整体资料拟合比得更好些. 因此, 我们确定光时轨道效应参数可能更能准确地反映实际情况.

4 结论

通过对密近双星的光时轨道效应的分析与研究, 得到如下结论:

(i) 在密近双星的光时轨道效应的计算过程中, 需要对数据进行非线性的最小二乘拟合, 同时涉及到求解开普勒方程. 采用 L-M 算法, 通过对密近双星 AH Cep 的光时轨道效应的计算, 获得的光时轨道效应参数可能更能够准确地反映的实际情况. 此外, 我们还把光时轨道效应和轨道周期的长期变化结合起来, 以研究分析密近双星的轨道周期变化特征, 并已经取得了较好的研究成果^[11]. 因此, 研究光时轨道效应的计算方法, 为密近双星的周期分析和第三天体探索提供了有力的计算工具.

(ii) 由于开普勒方程是超越方程, 大多采用迭代法处理. 为减少迭代次数提高计算速度, 首次给出了 $E = E(M, e)$ 的准确到 e^{16} 的级数解; 在 $e = 0.5871$ 时, 误差 $|\Delta E| \leq 10^{-4}$. 由于大多数人造天体和行星的轨道偏心率较小, $E = E(M, e)$ 级数解有广泛的应用价值, 对于天体(卫星和行星)轨道的快速计算和实时跟踪具有非常重要的意义.

致谢 本文的计算使用淮北煤炭师范学院物理与电子信息学院服务器, 在此作者表示感谢.

参考文献

- 1 Pribulla T, Rucinski S M. Contact binaries with additional components. I. The extant data. *Astron J*, 2006, 131: 2986—3007 [\[DOI\]](#)
- 2 D'Angelo C, van Kerkwijk M H, Rucinski S M. Contact binaries with additional components. II. A spectroscopic search for faint tertiaries. *Astron J*, 2006, 132: 650—662 [\[DOI\]](#)
- 3 Rucinski S M, Pribulla T, van Kerkwijk M H. Contact binaries with additional components. III. A search using adaptive optics. *Astron J*, 2007, 134: 2353—2365 [\[DOI\]](#)
- 4 Kopal Z. *Close Binary Systems*. London: Chapman & Hall, 1959
- 5 袁金照. 密近双星在极端物理条件下磁活动规律的研究. 博士学位论文. 云南: 中国科学院研究生院, 2008
- 6 Irwin J B. The determination of a light-time orbit. *Astrophys J*, 1952, 116: 211—217 [\[DOI\]](#)
- 7 Press W, Teukolski S A, Flannery B P, et al. *Numerical recipes in FORTRAN*. Cambridge: Cambridge University Press, 1992
- 8 岳锦海, 黄天衣. Kepler 方程解法的评估. *紫金山天文台台刊*, 1997, 16: 164—174
- 9 易照华. *天体力学基础*. 南京: 南京大学出版社, 1993. 53—56
- 10 Kim C H, Nha I S, Kreiner J M. A possible detection of a second light-time orbit for the massive early-type eclipsing binary star AH cephei. *Astron J*, 2005, 129: 990—1000 [\[DOI\]](#)
- 11 Yang Y G, Dai J M, Yin X G. Orbital period changes for the weak-contact binary TY Bootis. *Astron J*, 2007, 134: 179—184 [\[DOI\]](#)