



三维 Navier-Stokes 方程组解的正则性相关问题的一些探索

献给董光昌教授 90 华诞

方道元, 张挺*

浙江大学数学科学学院, 杭州 310027

E-mail: dyf@zju.edu.cn, zhangting79@zju.edu.cn

收稿日期: 2017-03-13; 接受日期: 2017-06-22; 网络出版日期: 2017-07-27; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11671353) 和浙江省自然科学基金 (批准号: LR17A010001) 资助项目

摘要 本文回顾了近年来作者团队对三维不可压缩 Navier-Stokes 方程组 Cauchy 问题所作的一些探索. 众所周知, 三维不可压缩 Navier-Stokes 系统存在整体 Leray-Hopf 弱解. 当弱解满足 Prodi-Serrin 条件时, 解是正则的. 本文在解正则性条件的判别方面取得了一些新结果. 特别对于轴对称系统, 当旋转速度为零时, 系统的整体适定性结论是众所周知的. 本文在研究中发现了一个新的守恒量, 进而得到了旋转速度非零时其轴对称解正则性条件的一些新进展, 还得到了一个系统只要求初始旋转速度小的整体适定性结果, 进一步还将结果推广到变密度的系统. 最后, 考虑了一类超耗散广义 Navier-Stokes 系统的整体适定性, 其中水平黏性项具有更高阶导数 $D_h^{2\alpha}$, $\alpha \geq \frac{4}{3}$.

关键词 不可压缩 Navier-Stokes 方程组 正则性条件 整体适定性

MSC (2010) 主题分类 35Q30, 76D03, 76D05

1 引言

考虑三维不可压缩 Navier-Stokes 方程组的 Cauchy 问题

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u + (u \cdot \nabla)u + \nabla p = 0, \\ \nabla \cdot u = 0, \\ u(x, 0) = u_0, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^3 \times (0, T), \end{cases} \quad (1.1)$$

其中 $u = (u_1, u_2, u_3) : \mathbb{R}^3 \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}^3$ 是速度场, $p : \mathbb{R}^3 \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ 表示压力, 而 u_0 是初始速度场, $\nu > 0$ 是黏性系数. 众所周知, 这是流体力学中的最重要的基本问题之一. 这样的方程, 不论从它可以

英文引用格式: Fang D Y, Zhang T. Some problems on the regularity of solutions for the 3D Navier-Stokes equations (in Chinese). Sci Sin Math, 2018, 48: 45–70, doi: 10.1360/N012017-00046

看成是 Boltzmann 方程的渐近极限, 还是可以用来描述可压、黏性热传导流的 Navier-Stokes-Fourier 系统当声速趋于无穷 (低 Mach 数极限) 的一个不可压缩极限, 都是合理的. 不仅有大量的实际应用和数值分析都成功验证了它的正确性, 事实上, 它还可以描述理想流体 Euler 方程组的一个自然的黏性正则化. 可以说以 Navier-Stokes 方程组为典型代表的流体力学方程组, 由于在航空航天、空气动力学、工程物理、材料科学、天体物理、等离子物理、半导体物理和科学计算等应用领域有着广泛的应用, 其数学理论的研究一直是国际数学界长期关注的焦点问题之一. 三维不可压缩 Navier-Stokes 方程组整体光滑解是否存在, 是 Clay 数学研究所公布的七个著名有奖千禧问题之一. 通过对方程的细致分析, 不难发现其困难所在. 从方程的结构角度看, 其主要困难表现在对流项引起的非线性性, 以及压强项的非局部微分算子性. 从技术的角度来看, 主要的困难来自于其超临界性, 以及其高维性. 目前人们所掌握的分析和几何方法似乎都难以正面解决这样的问题. 最近, Fields 奖获得者 Tao^[1] 构造了一个变异 Navier-Stokes 方程组, 虽然具有能量等式, 但光滑解会在有限时间爆破. 他指出, 调和工具和分析工具和能量守恒对于研究 Navier-Stokes 系统整体适定性的作用不是很大, 应该充分挖掘非线性项的优良结构. 因此, 对这类非常困难而且富有挑战性问题的研究, 不仅有重大的理论意义, 而且随着问题的解决也必将会对解释某些物理现象和力学规律提供重要的参考.

所关心问题的局部强解 (或经典解) 的适定性已经解决, 但只能在小初值的条件下证明解的整体光滑性. 具体说来, 目前对于这样的三维情形的光滑解的存在唯一性只能证明在一段小的时间区间内成立, 其区间的长度依赖于初值. 当初值满足一定的小性条件, 才能得到整体光滑解, 其代表性的工作可参见文献 [2-5] 等. 几十年来, 数学家为了解决这样的问题采取了迂回的策略, 先从弱解着手, 然后研究其正则性问题. 从弱解的局部正则性的角度看, 这样的问题解的奇性集的一维 Hausdorff 测度为零 (参见文献 [6, 7]). 从正则性判别的角度看, 也有大量的工作. 为更深入、具体地探讨, 我们首先回顾 Leray-Hopf 弱解的定义. 设

$$\mathcal{V} = \{\phi : \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3) \text{ 且为满足 } \nabla \cdot \phi = 0 \text{ 的 } 3 \text{ 维向量函数}\},$$

令 H 和 V 分别是 $\mathcal{V}$ 在 L^2 空间中按 L^2 拓扑以及在 H^1 空间中按 H^1 拓扑下形成的闭包. 对于 $u_0 \in H$, 方程组 (1.1) 在 $(0, T)$ 上的弱解 u 是由 Leray^[8] 和 Hopf^[9] 建立的, 即 u 满足下面的性质:

- (i) $u \in C_w([0, T]; H) \cap L^2(0, T; V)$ 和 $\partial_t u \in L^1(0, T; V')$, 其中 V' 是 V 的对偶空间;
- (ii) u 在分布的意义下满足方程组 (1.1), 即对于每个试验函数 $\phi \in C^\infty([0, T]; \mathcal{V})$, 且对于几乎每个 t , $t_0 \in (0, T)$, 有

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^3} u(x, t) \cdot \phi(x, t) dx - \int_{\mathbb{R}^3} u(x, t_0) \cdot \phi(x, t_0) dx \\ &= \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^3} [u(x, s) \cdot (\phi_t(x, s) + \nu \Delta \phi(x, s))] dx ds + \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^3} [(u(x, s) \cdot \nabla) \phi(x, s)] \cdot u(x, s) dx ds; \end{aligned}$$

- (iii) 对于每个 $t \in (0, T)$, 有下面的能量不等式:

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^2}^2 + 2\nu \int_0^t \|\nabla u(\cdot, s)\|_{L^2}^2 ds \leq \|u_0\|_{L^2}^2.$$

众所周知, 如果方程组 (1.1) 弱解 u 在 $(0, T)$ 上满足额外条件 $u \in C([0, T]; V) \cap L^2(0, T; H^2)$, $\partial_t u \in L^2(0, T; H)$, 那么 u 是方程组 (1.1) 的强解, 并且强解是正则 (经典) 且唯一的 (参见文献 [3]). 下面的定理是 Leray 关于方程组 (1.1) 弱解的结论:

定理 1.1 令 u_0 是 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 中散度为零的向量场, 则方程组 (1.1) 有一个整体弱解满足 $L^\infty(\mathbb{R}^+; L^2) \cap L^2(\mathbb{R}^+; \dot{H}^1)$, 并且满足能量不等式.

有关这个领域的研究工作很多, 我们无力作系统的介绍. 在此, 我们 (主要和潜陈印、韩斌和陈辉等) 只能结合近些年来对该问题所作的一些探讨, 对相关的理解和结果作一个简要介绍, 有的结果仅公布于 arXiv, 并未正式发表, 仅起抛砖引玉之用. 首先, 我们介绍弱解正则性判别的相关结论. 其次, 介绍轴对称系统的相关结果. 最后, 考虑了一类超耗散广义 Navier-Stokes 系统的整体适定性, 其中水平黏性项具有更高阶导数 $D_h^{2\alpha}$, $\alpha \geq \frac{4}{3}$.

2 弱解正则性判别

下面首先对 Navier-Stokes 方程组的弱解正则性的研究给出一个简要的综述. 最先的结论可追溯到 Prodi-Serrin 条件的提出 (参见文献 [10, 11]), 即如果弱解 u 满足下面额外的条件:

$$u \in L^t(0, T; L^s(\mathbb{R}^3)), \quad \frac{2}{t} + \frac{3}{s} = 1, \quad s \in [3, \infty], \quad (2.1)$$

那么弱解 u 在 $(0, T] \times \mathbb{R}^3$ 是正则的, 即 $u \in C^\infty((0, T] \times \mathbb{R}^3)$. 对于 $s = 3$ 的情形, Escauriaza 等^[12] 建立了 $L^\infty, 3$ 的正则性标准, 即如果弱解 $u \in L^\infty(0, T; L^3(\mathbb{R}^3))$, 那么它在 $(0, T] \times \mathbb{R}^3$ 是正则的. 从方程组的量纲分析知道, 如果 (u, p) 是 Navier-Stokes 方程组的解, 那么 (u_λ, p_λ) 也是解, 其中 $\lambda > 0$ 是任意的,

$$u_\lambda(x, t) = \lambda u(\lambda x, \lambda^2 t), \quad p_\lambda(x, t) = \lambda^2 p(\lambda x, \lambda^2 t).$$

这个 Serrin 型条件是基于方程组解的伸缩变换不变的观点提出的, 它蕴含: 对于任意的 $\lambda > 0$, 有 $\|u_\lambda\|_{L^t L^s} = \|u\|_{L^t L^s}$ 成立等价于 $\frac{2}{t} + \frac{3}{s} = 1$. 弱解的全局正则性条件也可基于速度的梯度 ∇u 提出. 文献 [13] 建立了另一个基于速度梯度的 Serrin 型正则性标准, 即

$$\nabla u \in L^t(0, T; L^s(\mathbb{R}^3)), \quad \frac{2}{t} + \frac{3}{s} = 2, \quad s \in \left[\frac{3}{2}, \infty\right].$$

不幸的是, 当我们对于速度 u 提出只是基于一个分量 (如 u_3) 的正则性条件时, 我们得不到类似于上面的 Prodi-Serrin 型条件. 例如, Neustupa 等^[14] 证明了, 如果弱解满足下面的条件:

$$u_3 \in L^t(0, T; L^s(\mathbb{R}^3)), \quad \frac{2}{t} + \frac{3}{s} \leq \frac{1}{2}, \quad s \in (6, \infty],$$

则弱解 u 在 $(0, T] \times \mathbb{R}^3$ 是正则的 (也可参见文献 [15]). 这个结果在文献 [16] 中被改进为

$$u_3 \in L^t(0, T; L^s(\mathbb{R}^3)), \quad \frac{2}{t} + \frac{3}{s} \leq \frac{5}{8}, \quad s \in \left(\frac{24}{5}, \infty\right].$$

Cao 和 Titi^[17] 得到了更好的结果: $u_3 \in L^t(0, T; L^s(\mathbb{R}^3)), \frac{2}{t} + \frac{3}{s} \leq \frac{2(s+1)}{3s}, s > \frac{7}{2}$, 或者 $u_3 \in L^\infty(0, T; L^s(\mathbb{R}^3)), s > \frac{7}{2}$. Zhou 和 Pokorný^[18] 将上述结果改进为

$$u_3 \in L^t(0, T; L^s(\mathbb{R}^3)), \quad \frac{2}{t} + \frac{3}{s} \leq \frac{3}{4} + \frac{1}{2s}, \quad s > \frac{10}{3}.$$

同样地, 对于速度梯度的分量也有相应的结果, 例如, Penel 和 Pokorný^[19] 证明了, 如果下面条件成立:

$$\partial_3 u \in L^t(0, T; L^s(\mathbb{R}^3)), \quad \frac{2}{t} + \frac{3}{s} \leq \frac{3}{2}, \quad s \in [2, \infty],$$

那么弱解 u 在 $(0, T] \times \mathbb{R}^3$ 是正则的. 该结果在文献 [20] 中被改进为

$$\partial_3 u \in L^t(0, T; L^s(\mathbb{R}^3)), \quad \frac{2}{t} + \frac{3}{s} \leq 2, \quad s \in \left[\frac{9}{4}, 3\right]. \quad (2.2)$$

最近, Cao^[21] 得到了新的结果, 他将 s 的范围扩大到 $s \in [\frac{27}{16}, \infty]$. 与之平行的结果是基于一速度分量的梯度的正则性标准, 例如, 文献 [22] 得到的结论是

$$\nabla u_3 \in L^t(0, T; L^s(\mathbb{R}^3)), \quad \frac{2}{t} + \frac{3}{s} \leq \frac{3}{2}, \quad s \in [2, \infty].$$

接着, Kukavica 和 Ziane^[16] 将此结果改进为

$$\nabla u_3 \in L^t(0, T; L^s(\mathbb{R}^3)), \quad \frac{2}{t} + \frac{3}{s} \leq \frac{11}{6}, \quad s \in \left[\frac{54}{23}, \frac{18}{5}\right],$$

并且 Zhou 和 Pokorný^[23] 得到了进一步的结论:

$$\nabla u_3 \in L^t(0, T; L^s(\mathbb{R}^3)), \quad \frac{2}{t} + \frac{3}{s} \leq \frac{23}{12}, \quad s \in [2, 3].$$

回顾上面所涉及的结果, 知道它们存在一个共同的不足之处是不能满足所谓的 Prodi-Serrin 型条件 ((2.2) 除外), 利用量纲分析的观点可知, 关于 ∇u_3 理想的结论是 $\nabla u_3 \in L^t(0, T; L^s(\mathbb{R}^3))$, $\frac{2}{t} + \frac{3}{s} \leq 2$, 其他可类似分析. 因此, 这些正则性判别准则与 Prodi-Serrin 型条件还存在一定的距离. 特别是当我们考虑只是基于 9 个速度梯度分量的任何一个时, 这个距离就会明显增大, 例如, 文献 [18] 得到的基于 $\partial_3 u_3$ 的正则性标准为

$$\partial_3 u_3 \in L^\beta(0, T; L^\alpha(\mathbb{R}^3)), \quad \frac{3}{\alpha} + \frac{2}{\beta} < \frac{4}{5}, \quad \alpha \in \left(\frac{15}{4}, \infty\right). \quad (2.3)$$

Cao 和 Titi^[24] 考虑了更一般的情形, 他们不仅仅考虑基于对角线上的元素的正则性标准, 即

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_k} \in L^\beta(0, T; L^\alpha(\mathbb{R}^3)), \quad \text{当 } j \neq k, \quad \alpha > 3, \quad 1 \leq \beta < \infty, \quad \frac{3}{\alpha} + \frac{2}{\beta} \leq \frac{\alpha + 3}{2\alpha}, \quad (2.4)$$

或者

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} \in L^\beta(0, T; L^\alpha(\mathbb{R}^3)), \quad \text{当 } \alpha > 2, \quad 1 \leq \beta < \infty, \quad \frac{3}{\alpha} + \frac{2}{\beta} \leq \frac{3(\alpha + 2)}{4\alpha}. \quad (2.5)$$

当我们只考虑基于一个速度分量 (如 u_3 或者 ∇u_3) 的正则性标准时, 要得到 Prodi-Serrin 型条件似乎是困难的. 这是因为方程组中的非线性项 $u \cdot \nabla u$ 难以处理, 假如我们对 u_3 提条件, 我们发现 $\partial_i u_j$ ($i, j = 1, 2$) 是难以控制的, 一个有效的方法是利用不可压缩性质, 将其转换成含有 u_3 的表达式或者是利用含有 u_3 的量来控制. 文献 [25, 26] 得到了 u_j ($j = 1, 2$) 与 u_3 和 ω_3 (或者 $\partial_3 u_3$ 和 ω_3) 的关系, 特别地, 文献 [25] 证明了下面的不等式:

$$\|\partial_i u_j\|_{L^q} \leq C(\|\omega_3\|_{L^q} + \|\partial_3 u_3\|_{L^q}), \quad 1 < q < \infty, \quad i, j = 1, 2, \quad (2.6)$$

$$\|u_j\|_{L^q} \leq C(\|\omega_3\|_{L^{\frac{3q}{3+q}}} + \|u_3\|_{L^q}), \quad \frac{3}{2} \leq q < \infty, \quad i, j = 1, 2, \quad (2.7)$$

其中 $\omega_3 = \partial_1 u_2 - \partial_2 u_1$, $C = C(q)$. 基于 ω_3 和 $\partial_3 u_3$ 组合或者 ω_3 和 u_3 组合的 Prodi-Serrin 型正则性判别标准在文献 [26] 中得到证明. 对于其他组合的结果可参见文献 [19], 设

$$u_3 \in L^\beta(0, T; L^\alpha(\mathbb{R}^3)), \quad \frac{3}{\alpha} + \frac{2}{\beta} \leq 1, \quad \alpha \in (3, \infty], \quad \beta \in [2, \infty),$$

并且下面的任何一条成立:

- (i) $\partial_3 u_1$ 和 $\partial_3 u_2$ 属于 $L^\beta(0, T; L^\alpha(\mathbb{R}^3))$, 满足 $\frac{3}{\alpha} + \frac{2}{\beta} \leq 2$, $\alpha \in (3/2, \infty]$, $\beta \in [1, \infty)$;
 - (ii) $\partial_2 u_1$ 和 $\partial_1 u_2$ 属于 $L^\beta(0, T; L^\alpha(\mathbb{R}^3))$, 满足 $\frac{3}{\alpha} + \frac{2}{\beta} \leq 2$, $\alpha \in [2, 3]$, $\beta \in [2, \infty]$;
 - (iii) $\partial_3 u_2$ 属于 $L^\beta(0, T; L^\alpha(\mathbb{R}^3))$, $\frac{3}{\alpha} + \frac{2}{\beta} \leq 2$, $\alpha \in (3/2, \infty]$, $\beta \in [1, \infty)$, 且 $\partial_2 u_1$ 属于 $L^\beta(0, T; L^\alpha(\mathbb{R}^3))$, $\frac{3}{\alpha} + \frac{2}{\beta} \leq 2$, $\alpha \in [2, 3]$, $\beta \in [2, \infty]$,
- 则弱解 u 在 $(0, T] \times \mathbb{R}^3$ 是正则的. 文献 [19] 还指出条件 (i) 可由 $(\partial_3 u_2, \partial_2 u_2)$, 或者 $(\partial_3 u_2, \partial_1 u_1)$, 或者 $(\partial_3 u_1, \partial_2 u_2)$, 或者 $(\partial_3 u_1, \partial_2 u_1)$ 代替. 类似地, 条件 (iii) 中的 $\partial_3 u_2$ 可由 $\partial_3 u_1$ 代替, 而 $\partial_2 u_1$ 由 $\partial_1 u_2$ 代替. 后来, Zhang^[27] 得到了下面的结果:

$$u_3 \in L^p(0, T; L^q(\mathbb{R}^3)), \quad \partial_3 u_3 \in L^\beta(0, T; L^\alpha(\mathbb{R}^3)), \quad (2.8)$$

其中 $1 \leq p, q, \beta, \alpha \leq \infty$, $0 \leq \lambda, \gamma < \infty$ 满足

$$\begin{cases} \frac{2}{p} + \frac{3}{q} = \lambda, & \frac{2}{\beta} + \frac{3}{\alpha} = \gamma, \\ \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)q = \frac{1/\beta + 3/8}{3/8 - 1/p} = \frac{9/4 - \gamma}{\lambda - 3/4} > 1, \\ \beta < \infty \text{ 或者 } p < \infty. \end{cases} \quad (2.9)$$

最后, 我们指出, 关于解的正则性判别标准也可以在不同于前面的 Lebesgue 框架下考虑, 例如, Chemin 和 Zhang^[28] 得到的最近的结果是在齐次的 Sobolev 空间中考虑的, 即

$$u_3 \in L^p(0, T; \dot{H}^{\frac{1}{2} + \frac{2}{p}}(\mathbb{R}^3)), \quad p \in [4, 6].$$

显然这个结果仅基于一个速度分量, 同时是临界的, 这实现了原本在 Lebesgue 空间中的不能得到临界的结果. 文献 [29] 给出了各向异性可积性的正则性标准, 即

$$\int_0^T \| \| u_i(\tau) \|_{L_{x_j}^p} \|_{L_{x_h, x_k}^{\alpha}}^{\beta} d\tau < \infty,$$

其中 $h, i, j, k \in \{1, 2, 3\}$, $h \neq j$, $h \neq k$, $j \neq k$. 对于其他的正则性准则可参见文献 [30–34] 等.

近年来, 我们在上面提到结果的基础上给出了新的结果. 概要地讲, 我们讨论了基于一个速度分量的判别准则, 其主要动机是改进 Cao 和 Titi^[24] 的结果. 我们发现文献 [24] 的证明是将水平和竖直两个方向的界分开估计, 其关键是依赖于弱解所带的性质, 即 $u \in L_t^\infty L^2$. 我们用他们的方法证明了 $u_3 \in L_t^\infty L^q$, $q > 2$. 在证明中我们发现, 当对矩阵 ∇u 的对角线上元素 $(\partial_i u_i, i = 1, 2, 3)$ 提条件时, 可以得到比非对角线元素的情形 $(\partial_i u_j, i, j = 1, 2, 3, i \neq j)$ 更好的结果. 其原因是, 对于对角线上的元素, 我们可以通过方程组来控制. 我们也考虑了基于两个或多个速度分量的判别准则. 在 Penel 和 Pokorný^[19] 的结果中, 当对 u_3 提出临界的条件时, 剩下的条件没有涉及 $\partial_i u_3, i = 1, 2, 3$, 我们的目的之一就是考虑当剩下条件中含有 $\partial_i u_3 (i = 1, 2, 3)$ 时的弱解正则性标准. 另外, 我们还考虑了 u_3 和速度梯度的一个分量 $\partial_i u_j$ 组合时的正则性判别标准以及研究了各向异性可积性的判别准则. 具体见定理 2.7–2.18, 这些结果都是几乎临界的或拟 Prodi-Serrin 型的. 我们发现下面形式的正则性判别标准是不能利用文献 [29] 中的方法得到的:

$$\int_0^T \| \| \partial_i u_j(\tau) \|_{L_{x_k}^p} \|_{L_{x_i, x_j}^{\alpha}}^{\beta} d\tau < \infty, \quad i, j, k = 1, 2, 3.$$

我们先推广了文献 [24] 中的一个重要不等式来得到结论. 最后, 我们还在 Besov 空间框架下考虑 Navier-Stokes 方程组解的正则性判别的问题.

下面给出在证明上面的诸多结论时所用到的重要不等式. 首先是 $\mathbb{R}^3$ 上的 Sobolev-Ladyzhenskaya 不等式 (参见文献 [35, 36]), 即存在一个正常数 C , 使得对每个 $u \in H^1(\mathbb{R}^3)$ 和 $r \in [2, 6]$, 有

$$\|u\|_{L^r} \leq C \|u\|_{L^2}^{\frac{6-r}{2r}} \|\partial_1 u\|_{L^2}^{\frac{r-2}{2r}} \|\partial_2 u\|_{L^2}^{\frac{r-2}{2r}} \|\partial_3 u\|_{L^2}^{\frac{r-2}{2r}} \leq C \|u\|_{L^2}^{\frac{6-r}{2r}} \|\nabla u\|_{L^2}^{\frac{3(r-2)}{2r}}, \quad (2.10)$$

其中 C 仅依赖于 r . 对方程组 (1.1) 两边作用 $\nabla \operatorname{div}$, 对于其光滑解 $(u; p)$, 有

$$-\Delta(\nabla p) = \sum_{i,j}^3 \partial_i \partial_j (\nabla(u_i u_j)),$$

故有下面的 $\mathbb{R}^3$ 上 Calderon-Zygmund 不等式成立 (参见文献 [37]):

$$\|\nabla p\|_{L^q} \leq C \|\nabla u\|_{L^q}, \quad 1 < q < \infty, \quad (2.11)$$

其中 C 是仅依赖于 q 的正常数, 并且对于压力有另一个估计

$$\|p\|_{L^q} \leq C \|u\|_{L^{2q}}^2, \quad 1 < q < \infty. \quad (2.12)$$

如果 $\operatorname{div} u = 0$, 那么旋度 $\omega = \operatorname{curl} u = \nabla \times u$ 有下面的估计 (参见文献 [19]):

$$C \|\omega\|_{L^q} \leq \|\nabla u\|_{L^q} \leq C(q) \|\omega\|_{L^q}, \quad 1 < q < \infty. \quad (2.13)$$

如果 $\operatorname{div} u = 0$, 则表达式

$$\Delta u = \nabla(\operatorname{div} u) - \nabla \times (\nabla \times u) \quad (2.14)$$

可简化为

$$\Delta u = -\nabla \times (\nabla \times u) = -\nabla \times \omega. \quad (2.15)$$

另一方面, 由于 $\operatorname{div} \omega = 0$, 应用 (2.13), 则有

$$C \|\nabla \times \omega\|_{L^q} \leq \|\nabla \omega\|_{L^q} \leq C(q) \|\nabla \times \omega\|_{L^q}, \quad 1 < q < \infty. \quad (2.16)$$

因此, 由 (2.13) 和 (2.15) 可得

$$C \|\Delta u\|_{L^q} \leq \|\nabla \omega\|_{L^q} \leq C(q) \|\Delta u\|_{L^q}, \quad 1 < q < \infty. \quad (2.17)$$

令 $1 \leq q_i < \infty$, $i = 1, \dots, n$, 则对于所有的 $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 有下面的 Troisi 不等式成立 (参见文献 [36]):

$$\|u\|_{L^s} \leq C \prod_{i=1}^n \|D_i u\|_{L^{q_i}}^{\frac{1}{q_i}}, \quad \sum_{i=1}^n q_i^{-1} > 1 \quad \text{并且} \quad s = \frac{n}{\sum_{i=1}^n q_i^{-1} - 1}. \quad (2.18)$$

接下来具体叙述所得的三维不可压缩 Navier-Stokes 方程组的 Leray-Hopf 弱解的正则性判别准则. 限于篇幅, 我们只给出证明思路, 具体的细节可参见文献 [38–41].

为方便叙述, 我们首先给出一些记号. $\nabla_h = (\partial_{x_1}, \partial_{x_2})$ 表示水平梯度算子, $\Delta_h = \partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2$ 表示水平 Laplace 算子, 而 Δ 和 ∇ 分别表示通常的 Laplace 算子和梯度算子.

2.1 基于一个速度分量的判别标准

本节将叙述基于一个速度分量的正则性判别准则.

定理 2.1 令 $u_0 \in V$, u 是 Navier-Stokes 方程组 (1.1) 的一个 Leray-Hopf 弱解. 假设对于任意的 j 和 k 满足 $1 \leq j, k \leq 3$, 有 $\partial_j u_k \in L^\infty(0, T; L^3(\mathbb{R}^3))$, 则弱解 u 在 $(0, T] \times \mathbb{R}^3$ 是正则的.

定理 2.2 令 u_0 和 u 如定理 2.1 所述, 设 j 和 k 满足 $1 \leq j, k \leq 3$. 若下面两条的任何一条成立:

(i) 对于 $j \neq k$, 假设 u 满足 $\partial_j u_k \in L^\beta(0, T; L^\alpha(\mathbb{R}^3))$, 其中

$$\frac{3}{2\alpha} + \frac{2}{\beta} \leq f(\alpha), \quad \alpha \in (3, \infty), \quad 1 \leq \beta < \infty, \quad f(\alpha) = \frac{\sqrt{103\alpha^2 - 12\alpha + 9} - 9\alpha}{2\alpha}; \quad (2.19)$$

(ii) 对于 $j = k$, 假设 u 满足 $\partial_k u_k \in L^\beta(0, T; L^\alpha(\mathbb{R}^3))$, 其中

$$\frac{3}{2\alpha} + \frac{2}{\beta} \leq g(\alpha), \quad \frac{9}{5} < \alpha < \infty, \quad 1 \leq \beta < \infty, \quad g(\alpha) = \frac{\sqrt{289\alpha^2 - 264\alpha + 144} - 7\alpha}{8\alpha}, \quad (2.20)$$

那么弱解 u 在 $(0, T] \times \mathbb{R}^3$ 上是正则的.

下面是带参数的正则性判别标准:

定理 2.3 令 u 是 Navier-Stokes 方程组 (1.1) 的一个 Leray-Hopf 弱解, 其初值满足 $u_0 \in V \cap L^1(\mathbb{R}^3)$. 假设对于 i 和 j 满足 $1 \leq i, j \leq 3$, 下面两条的任何一条成立:

(i) $i \neq j$, 假设解满足 $\partial_i u_j \in L^{\beta_1}(0, T; L^{\alpha_1}(\mathbb{R}^3))$, $\frac{3}{\alpha_1} + \frac{2}{\beta_1} = 2 - \epsilon$, $\alpha_1 \in [\frac{3}{2-\epsilon}, \frac{3}{3-2\epsilon}]$, $1 \leq \epsilon < 3/2$;

(ii) $i = j$, 假设解满足 $\partial_j u_j \in L^{\beta_2}(0, T; L^{\alpha_2}(\mathbb{R}^3))$, $\frac{3}{\alpha_2} + \frac{2}{\beta_2} = 2 - \epsilon$, $\alpha_2 \in [\frac{3}{2-\epsilon}, \frac{6}{5-4\epsilon}]$, $1/2 \leq \epsilon < 5/4$, 则弱解 u 在 $(0, T] \times \mathbb{R}^3$ 上是正则的.

注 2.4 对于 (i) 的 $\epsilon = 1$ 和 (ii) 的 $\epsilon = 1/2$ 的情形, 我们只要假设 $u_0 \in V$ 就够了. 对于 (ii) 的结果, 我们可以在图 1 画出其对应的图像 (是一条近似直线的曲线), 它是关于 ϵ 连续的. 但是, 我们发现它始终是位于图像中线 “(1)” 的下方. 在该定理的证明过程中, 我们选取一个中间参数 q , 为了方便起见, 我们把它限制在 $1 < q \leq 2$ 上, 这是位于下方的潜在原因. 事实上, 如果选取参数 q 始终大于 2, 则可以得到一个更好的结果, 使其图像始终位于线 “(1)” 的上方, 该结果叙述在下面的定理中.

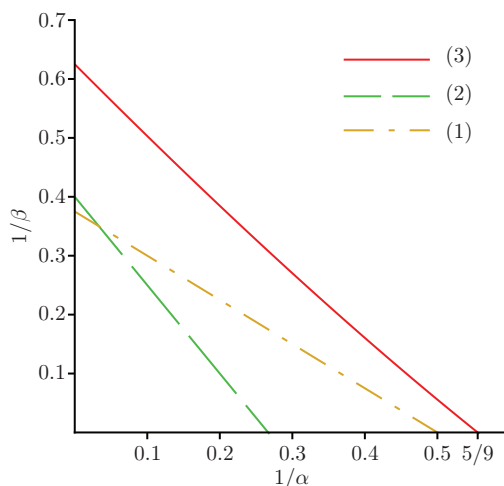


图 1 $j = k$ 的情形. 直线 “(1)” 是文献 [24] 中的结果 (见 (2.5)). 曲线 “(3)” 是我们的结果 (见 (2.20)). 直线 “(2)” 是文献 [18] 中结果 (见 (2.3))

定理 2.5 令 u 是 Navier-Stokes 方程组 (1.1) 的一个 Leray-Hopf 弱解, 其初值满足 $u_0 \in V$. 假设对于 i 和 j 满足 $1 \leq i, j \leq 3$, 下面两条的任何一条成立:

(i) $i \neq j$, 假设解满足 $\partial_i u_j \in L^{\beta_1}(0, T; L^{\alpha_1}(\mathbb{R}^3))$, $\frac{3}{\alpha_1} + \frac{2}{\beta_1} = 2 - \epsilon$, $\alpha_1 \in [\frac{3}{3-2\epsilon}, \frac{3(11-2\epsilon)}{2\epsilon^2-26\epsilon+33}]$, $1 < \epsilon \leq 21/16$;

(ii) $i = j$, 假设解满足 $\partial_j u_j \in L^{\beta_2}(0, T; L^{\alpha_2}(\mathbb{R}^3))$, $\frac{3}{\alpha_2} + \frac{2}{\beta_2} = 2 - \epsilon$, $\alpha_2 \in [\frac{6}{5-4\epsilon}, \frac{18-2\epsilon}{(4\epsilon-3)(\epsilon-5)}]$, $1/2 < \epsilon \leq 3/4$,

那么弱解 u 在 $(0, T] \times \mathbb{R}^3$ 上是正则的.

接下来介绍定理的主要证明思想. 从文献 [24] 结果的证明过程看出, 能量不等式起到了关键的作用. Cao 和 Titi [24] 得到对水平方向的估计为

$$\begin{aligned} & \|\nabla_h u\|_{L^2}^2 + \nu \int_0^t \|\nabla_h \nabla u\|_{L^2}^2 d\tau \\ & \leq \|\nabla_h u(0)\|_{L^2}^2 + C \left[\int_0^t \|u_3\|_{L^2}^{\frac{4(\alpha-1)}{\alpha-2}} \|\partial_1 u_3\|_{L^\alpha}^{\frac{2\alpha}{\alpha-2}} \|\nabla u\|_{L^2}^2 d\tau \right]^{\frac{\alpha-2}{2(\alpha-1)}} \times \left[\int_0^t \|\Delta u\|_{L^2}^2 d\tau \right]^{\frac{\alpha}{2(\alpha-1)}}, \\ & \|\nabla_h u\|_{L^2}^2 + \nu \int_0^t \|\nabla_h \nabla u\|_{L^2}^2 d\tau \leq \|\nabla_h u(0)\|_{L^2}^2 + C \int_0^t \|u_3\|_{L^2}^{\frac{4(\alpha-1)}{\alpha-2}} \|\partial_3 u_3\|_{L^\alpha}^{\frac{2\alpha}{\alpha-2}} \|\nabla u\|_{L^2}^2 d\tau. \end{aligned}$$

在上面的两个公式中, 注意到由能量不等式可有 $u \in L^\infty(0, T; L^2(\mathbb{R}^3))$, 故 $\|u_3\|_2^{\frac{4(\alpha-1)}{\alpha-2}}$ 可以直接放大到某个常数. 我们考虑 $\|u_3\|_q$ ($q > 2$) 的情形, 这也是我们能改进原有结果的关键所在. 令 $r = \frac{(q+1)\alpha-q}{\alpha}$, 我们得到类似的两个估计

$$\begin{aligned} & \|\nabla_h u\|_{L^2}^2 + \nu \int_0^t \|\nabla_h \nabla u\|_{L^2}^2 d\tau \\ & \leq \|\nabla_h u(0)\|_{L^2}^2 + C \left[\int_0^t \|u_3\|_{L^q}^{\frac{2(r-1)}{r-2}} \|\partial_1 u_3\|_{L^\alpha}^{\frac{2}{r-2}} \|\nabla u\|_{L^2}^2 d\tau \right]^{\frac{r-2}{r-1}} \times \left[\int_0^t \|\Delta u\|_{L^2}^2 d\tau \right]^{\frac{1}{r-1}} \end{aligned} \quad (2.21)$$

和

$$\|\nabla_h u\|_{L^2}^2 + \nu \int_0^t \|\nabla_h \nabla u\|_{L^2}^2 d\tau \leq \|\nabla_h u(0)\|_{L^2}^2 + C \int_0^t \|u_3\|_{L^q}^{\frac{2(r-1)}{r-2}} \|\partial_3 u_3\|_{L^\alpha}^{\frac{2}{r-2}} \|\nabla u\|_{L^2}^2 d\tau. \quad (2.22)$$

此时, 由于没有 $u_3 \in L^\infty(0, T; L^q(\mathbb{R}^3))$, 因此, 我们必须对 u_3 有一个估计. 首先给出对 $\partial_i u_j$ ($i \neq j$) 提条件时的估计, 详见下面的引理:

引理 2.6 令 q, α 和 σ 满足 $\frac{1}{\sigma} + \frac{q-2}{q} + \frac{1}{3\alpha} = 1$, 其中 $3 \leq \alpha < \infty$, $1 < \sigma \leq \frac{9}{8}$, $q \geq 2$, 则有估计

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_3\|_{L^q}^2 \leq C \|\nabla u\|_{L^2}^{\frac{8}{3}-s} \|\partial_1 u_3\|_{L^\alpha}^{1/3}, \quad \text{其中 } s = \frac{3-2\sigma}{\sigma}. \quad (2.23)$$

证明 对方程组 (1.1) 的 u_3 分量的方程两边同乘 $|u_3|^{q-2} u_3$, $q \geq 2$, 再关于 x 积分, 然后利用 Hölder 不等式、能量不等式、(2.11) 以及 Troisi 不等式 (2.18) 来估计, 即

$$\begin{aligned} \frac{1}{q} \frac{d}{dt} \|u_3\|_{L^q}^q + C(q)\nu \|\nabla |u_3|^{\frac{q}{2}}\|_{L^2}^2 &= - \int_{\mathbb{R}^3} \partial_3 p |u_3|^{q-2} u_3 dx \\ &\leq \|\partial_3 p\|_{L^\sigma} \|u_3\|_{L^q}^{q-2} \|u_3\|_{L^{3\alpha}} \leq C \|\nabla u\|_{L^\sigma} \|u\|_{L^\sigma} \|u_3\|_{L^q}^{q-2} \|u_3\|_{L^{3\alpha}} \\ &\leq C \|\nabla u\|_{L^2} \|u\|_{L^{\frac{2\sigma}{2-\sigma}}} \|u_3\|_{L^q}^{q-2} \|\partial_1 u_3\|_{L^\alpha}^{1/3} \|\partial_2 u_3\|_{L^2}^{1/3} \|\partial_3 u_3\|_{L^2}^{1/3} \\ &\leq C \|\nabla u\|_{L^2} \|u\|_{L^2}^s \|\nabla u\|_{L^2}^{1-s} \|u_3\|_{L^q}^{q-2} \|\partial_1 u_3\|_{L^\alpha}^{1/3} \|\nabla u\|_{L^2}^{2/3} \end{aligned}$$

$$= C \|u\|_{L^2}^s \|\nabla u\|_{L^2}^{\frac{8}{3}-s} \|u_3\|_{L^q}^{q-2} \|\partial_1 u_3\|_{L^\alpha}^{1/3}.$$

结合引理条件和上面的估计可得 (2.23). $\square$

对于 $\partial_j u_j$ 提条件时的 u_3 估计则可直接利用方程得到, 以 $\partial_3 u_3$ 为例, 同引理 2.6 方法, 有

$$\begin{aligned} \frac{1}{q} \frac{d}{dt} \|u_3\|_{L^q}^q + C(q) \nu \|\nabla |u_3|^{\frac{q}{2}}\|_{L^2}^2 &= - \int_{\mathbb{R}^3} \partial_3 p |u_3|^{q-2} u_3 dx \\ &\leq C \int_{\mathbb{R}^3} |p| |u_3|^{q-2} |\partial_3 u_3| dx \leq C \|p\|_{L^\mu} \|u_3\|_{L^q}^{q-2} \|\partial_3 u_3\|_{L^\alpha} \\ &\leq C \|u\|_{L^{2\mu}}^2 \|u_3\|_{L^q}^{q-2} \|\partial_3 u_3\|_{L^\alpha} \\ &\leq C \|u\|_{L^2}^{\frac{3-\mu}{\mu}} \|\nabla u\|_{L^2}^{\frac{3(\mu-1)}{\mu}} \|u_3\|_{L^q}^{q-2} \|\partial_3 u_3\|_{L^\alpha}, \end{aligned} \quad (2.24)$$

其中 $\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\alpha} + \frac{q-2}{q} = 1$, $1 < \mu < 3$. 上面的不等式蕴含

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_3\|_{L^q}^2 \leq C \|u\|_{L^2}^{\frac{3-\mu}{\mu}} \|\nabla u\|_{L^2}^{\frac{3(\mu-1)}{\mu}} \|\partial_3 u_3\|_{L^\alpha}. \quad (2.25)$$

定理 2.1 的结果是在其条件下, 通过对时间 $[0, T]$ 分成有限段小的区间来实现, 在该定理的证明过程中取 $q = 2$. 而接下来的几个定理是对定理给定的 α 和 β 或者 α_i 、 β_i 和 ϵ 来给出 u_3 估计中所要求满足的参数, 例如, 对于定理 2.2(i), 我们取

$$\frac{1}{\sigma} = \frac{(7 - \frac{3}{\alpha}) + \sqrt{\frac{9}{\alpha^2} - \frac{12}{\alpha} + 103}}{18}, \quad q = \frac{6\alpha\sigma}{3\alpha + \sigma}, \quad s = \frac{3 - 2\sigma}{\sigma}, \quad r = \frac{6(\alpha - 1)\sigma}{3\alpha + \sigma} + 1;$$

对于定理 2.2(ii), 取

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1 - \frac{12}{\alpha} + \sqrt{\frac{144}{\alpha^2} - \frac{264}{\alpha} + 289}}{24}, \quad q = \frac{2\alpha\mu}{\alpha + \mu}, \quad r = \frac{2\mu\alpha - \mu + \alpha}{\alpha + \mu}.$$

后面两个定理的证明中参数的取法可参见文献 [39], 我们不一一列出. 有了这些准备后, 我们可以利用文献 [24] 的证明方法证明定理 2.5, 参见文献 [38, 39].

2.2 基于两个或多个速度分量的判别标准

正如前面所述, 基于一个分量的正则性标准是不满足 Prodi-Serrin 型条件的. 因此, 考虑多个分量组合的正则性标准是自然的. 下面叙述本节的主要结果并给出大概的证明思路, 具体的细节可参见文献 [39].

定理 2.7 令 u 是 Navier-Stokes 方程组 (1.1) 的一个 Leray-Hopf 弱解, 其初值满足 $u_0 \in V$. 假设

$$u_3 \in L^{\beta_1}(0, T; L^{\alpha_1}(\mathbb{R}^3)) \text{ 满足 } \frac{3}{\alpha_1} + \frac{2}{\beta_1} \leq 1, \quad \alpha_1 \in (3, \infty], \quad (2.26)$$

并且下面的两个条件之一成立:

$$(i) \quad \partial_3 u_2, \partial_3 u_3 \in L^{\beta_2}(0, T; L^{\alpha_2}(\mathbb{R}^3)) \text{ 满足 } \frac{3}{\alpha_2} + \frac{2}{\beta_2} \leq 2, \quad \alpha_2 \in [2, 3]; \quad (2.27)$$

$$(ii) \quad \partial_3 u_1, \partial_3 u_3 \in L^{\beta_2}(0, T; L^{\alpha_2}(\mathbb{R}^3)) \text{ 满足 } \frac{3}{\alpha_2} + \frac{2}{\beta_2} \leq 2, \quad \alpha_2 \in [2, 3], \quad (2.28)$$

则弱解 u 在 $(0, T] \times \mathbb{R}^3$ 上是正则的.

为证明该定理, 我们充分利用不可压缩性质. 对于 $i = 1$ 或者 $i = 2$, 关键点是得到了下面的估计:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla u\|_{L^2}^2 + \nu \|\Delta u\|_{L^2}^2 &\leq C \int_{\mathbb{R}^3} |\partial_3 u_i| |\nabla u|^2 dx + C \int_{\mathbb{R}^3} |u_3| |\nabla u| |\nabla^2 u| dx \\ &\quad + C \int_{\mathbb{R}^3} |\partial_3 u_i| |\nabla^2 u| |u| dx + C \int_{\mathbb{R}^3} |\partial_3 u_3| |\nabla^2 u| |u| dx. \end{aligned} \quad (2.29)$$

定理 2.8 令 u 是 Navier-Stokes 方程组 (1.1) 的一个 Leray-Hopf 弱解. 假设对于 i 和 j 满足 $1 \leq i \leq 3$ 和 $1 \leq j \leq 2$, u 满足下面的任何一条:

(i) $i \neq j$ 情形, 令 $u_0 \in V \cap L^q(\mathbb{R}^3)$, 其中 $1 < q \leq 2$, 解 u 满足

$$u_3 \in L^{\beta_1}(0, T; L^{\alpha_1}(\mathbb{R}^3)) \text{ 满足 } \frac{3}{\alpha_1} + \frac{2}{\beta_1} \leq 1, \quad \alpha_1 \in (3, \infty], \quad (2.30)$$

$$\partial_i u_j \in L^{\beta_2}(0, T; L^{\alpha_2}(\mathbb{R}^3)), \quad (2.31)$$

其中 $\frac{3}{\alpha_2} + \frac{2}{\beta_2} \leq \frac{3-q}{\alpha_2} + q - 1$, $\alpha_2 \in (\frac{q}{q-1}, \infty]$;

(ii) $i = j$ 情形, 令 $u_0 \in V$, u_3 满足条件 (2.30), 并且

$$\partial_j u_j \in L^{\beta_3}(0, T; L^{\alpha_3}(\mathbb{R}^3)), \quad (2.32)$$

其中 $\frac{3}{2\alpha_3} + \frac{2}{\beta_3} \leq f(\alpha_3)$, $\alpha_3 \in (\frac{9}{5}, \infty]$, $f(\alpha_3) = \frac{\sqrt{24\alpha_3^2 - 24\alpha_3 + 9} - 2\alpha_3}{2\alpha_3}$, 那么弱解 u 在 $(0, T] \times \mathbb{R}^3$ 上是正则的.

同样, 利用不可压缩性质, 有

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla u\|_{L^2}^2 + \nu \|\Delta u\|_{L^2}^2 \leq C \int_{\mathbb{R}^3} |u_3| |\nabla u| |\nabla^2 u| dx + C \int_{\mathbb{R}^3} |u_i| |\nabla u| |\nabla^2 u| dx,$$

其中 $i = 1$ 或者 $i = 2$. 以 $i = 2$ 为例, 当对 u_3 提出临界的条件时, 我们对 u_2 进行不同情形的处理. 当对 $\partial_i u_2$ ($i = 1$ 或者 $i = 3$) 提条件时, 分 $q = 2$ 和 $1 < q < 2$ 两种情形讨论. 对于 $q = 2$, 我们应用类似于 (2.22) 的估计, 在那里 q 取 2. 对于 $1 < q < 2$, 我们先证明 $u_2 \in L^\infty(0, T; L^q(\mathbb{R}^3))$, $1 < q < 2$. 首先考虑 $1 < q \leq 3/2$ 时, 利用 Gagliardo-Nirenberg 和 Hölder 不等式以及能量不等式, 有

$$\begin{aligned} \frac{1}{q} \frac{d}{dt} \|u_2\|_{L^q}^q + C(q)\nu \|\nabla |u_2|^{\frac{q}{2}}\|_{L^2}^2 &= - \int_{\mathbb{R}^3} \partial_2 p |u_2|^{q-1} \text{sgn}(u_2) dx \\ &\leq C \|\nabla p\|_{L^q} \|u_2\|_{L^q}^{q-1} \leq C \|\nabla u\|_{L^q} \|u\|_{L^q} \|u_2\|_{L^q}^{q-1} \\ &\leq C \|\nabla u\|_{L^2} \|u\|_{L^{\frac{2q}{2-q}}} \|u_2\|_{L^q}^{q-1} \leq C \|\nabla u\|_{L^2} \|u\|_{L^{\frac{2q}{2-q}}}^{\frac{3-2q}{q}} \|\nabla u\|_{L^2}^{\frac{3q-3}{q}} \|u_2\|_{L^q}^{q-1} \\ &= C \|u\|_{L^{\frac{2q}{2-q}}}^{\frac{3-2q}{q}} \|\nabla u\|_{L^2}^{\frac{4q-3}{q}} \|u_2\|_{L^q}^{q-1}, \end{aligned} \quad (2.33)$$

从而得到 u_2 的有界性, 最后利用 $u_2 \in L^\infty(0, T; L^2(\mathbb{R}^3))$ 和插值不等式得到 u_2 的界. 剩下的可类似于第 2.1 小节的证明过程来得到. 最后当对 $\partial_2 u_2$ 提条件时, 我们同样可用该条件先得到 $u_2 \in L^\infty(0, T; L^q(\mathbb{R}^3))$, $q \geq 2$ (同 (2.24)) 来完成证明.

推论 2.9 令 $u_0 \in V$, u 是 Navier-Stokes 方程组 (1.1) 的一个 Leray-Hopf 弱解. 假设对于 i 和 j 满足 $1 \leq i \leq 3$ 和 $1 \leq j \leq 2$, u 满足下面的任一条:

(i) $i \neq j$ 情形, u_3 满足条件 (2.30) 且 $\partial_i u_j \in L^{\beta_2}(0, T; L^{\alpha_2}(\mathbb{R}^3))$, $\frac{3}{\alpha_2} + \frac{2}{\beta_2} \leq 1$, $\alpha_2 \in (2, \infty]$;

(ii) $i = j$ 情形, u_3 满足条件 (2.30) 且 $\partial_j u_j \in L^{\beta_3}(0, T; L^{\alpha_3}(\mathbb{R}^3))$, $\frac{3}{\alpha_3} + \frac{2}{\beta_3} \leq \frac{3}{2}$, $\alpha_3 \in [2, 6]$,

那么弱解 u 在 $(0, T] \times \mathbb{R}^3$ 上是正则的.

下面的定理描述将 u_3 换成速度梯度的一个分量的结果, 我们改进了文献 [19] 中的结论.

定理 2.10 令 u 是 Navier-Stokes 方程组 (1.1) 的一个 Leray-Hopf 弱解, 其初值满足 $u_0 \in V$. 假设 $\partial_3 u_i \in L^{\beta_1}(0, T; L^{\alpha_1}(\mathbb{R}^3))$, $\frac{3}{\alpha_1} + \frac{2}{\beta_1} \leq 2$, $\alpha_1 \in [2, 3]$, $i = 1$ 或者 $i = 2$, $\partial_3 u_3 \in L^{\beta_2}(0, T; L^{\alpha_2}(\mathbb{R}^3))$, $\frac{3}{2\alpha_2} + \frac{2}{\beta_2} \leq f(\alpha_2)$, $\alpha_2 \in [2, 3]$, $f(\alpha_2) = \frac{\sqrt{24\alpha_2^2 - 24\alpha_2 + 9} - 2\alpha_2}{2\alpha_2}$, 那么弱解 u 在 $(0, T] \times \mathbb{R}^3$ 上是正则的.

从 (2.29) 出发, 我们看到可以有对于 $\partial_3 u_i$ ($i = 1, 2$) 的临界条件. 对于 $\partial_3 u_3$ 的条件, 我们只需要估计 $\int_{\mathbb{R}^3} |u_3| |\nabla u| |\nabla^2 u| dx$, 而这项的处理同上面定理中叙述, 从而我们可以得到该定理的证明.

推论 2.11 令 u 是 Navier-Stokes 方程组 (1.1) 的一个 Leray-Hopf 弱解, 其初值满足 $u_0 \in V$. 假设 $\partial_3 u_i \in L^{\beta_1}(0, T; L^{\alpha_1}(\mathbb{R}^3))$, $\frac{3}{\alpha_1} + \frac{2}{\beta_1} \leq 2$, $\alpha_1 \in [2, 3]$, $i = 1$ 或者 $i = 2$, $\partial_3 u_3 \in L^{\beta_2}(0, T; L^{\alpha_2}(\mathbb{R}^3))$, $\frac{3}{\alpha_2} + \frac{2}{\beta_2} \leq \frac{3}{2}$, $\alpha_2 \in [2, 3]$, 那么弱解 u 在 $(0, T] \times \mathbb{R}^3$ 上是正则的.

2.3 各向异性可积性的判别标准

本节的主要结果如下:

定理 2.12 令 u 是 Navier-Stokes 方程组 (1.1) 的一个 Leray-Hopf 弱解, 其初值满足 $u_0 \in V$. 假设下面的任何一条成立:

(i) $\partial_3 u_3$ 满足

$$\partial_3 u_3 \in L^\infty([0, T]; L_{x_1, x_2}^\beta(L_{x_3}^\alpha)), \quad (2.34)$$

其中 α 和 β 满足 $1 \leq \alpha \leq \beta$, $2 < \beta \leq +\infty$;

(ii) u_3 和 $\partial_3 u_3$ 满足

$$u_3 \in L^\infty(0, T; L^3(\mathbb{R}^3)) \quad \text{并且} \quad \partial_3 u_3 \in L^\infty([0, T]; L_{x_1, x_2}^\beta(L_{x_3}^\alpha)), \quad (2.35)$$

其中 α 和 β 满足 $\frac{1}{\alpha} + \frac{2}{\beta} < 2$, $1 < \alpha \leq \beta$, $\frac{3}{2} < \beta \leq 2$,

那么弱解 u 在 $(0, T] \times \mathbb{R}^3$ 上是正则的.

注 2.13 我们知道现在所得到的关于 $\partial_3 u_3$ 的正则性准则与 Prodi-Serrin 条件

$$\partial_3 u_3 \in L^t(0, T; L^s(\mathbb{R}^3)), \quad \frac{2}{t} + \frac{3}{s} = 2, \quad s \in \left[\frac{3}{2}, \infty\right)$$

存在一定的距离. 定理 2.12(i) 的目的是减少此距离, 我们看到该结果是几乎临界的, 其 (α, β) 所表示的范围是在图 2 中的区域“(1)”. 另外, 条件 (2.34) 给出了水平分量与竖直分量的不同可积性. 如果取 $\alpha = 1$ 和 $\beta \rightarrow 2^+$, 则该极限是直线 $1/\alpha + 2/\beta = 2$ 的一个点 (见图 2). 当 $\alpha = \beta > 2$ 时, (2.34) 变为 $\partial_3 u_3 \in L^\infty(0, T; L^\alpha(\mathbb{R}^3))$, $\alpha > 2$, 这是文献 [24] 中蕴含的端点正则性标准 (虽然文献 [24] 中没有明确给出, 但我们可以用其方法得到). 最后, 我们回顾定理 2.1 的结果: $\partial_j u_k \in L^\infty(0, T; L^3(\mathbb{R}^3))$ 可知, 定理 2.12(i) 也是定理 2.1 在 $j = k$ 时的一个改进结论.

注 2.14 对于 u 的端点的 Prodi-Serrin 条件在文献 [12] 中得到. 定理 2.12(ii) 说明, 当对 u_3 也提出端点的 Prodi-Serrin 条件时, 我们需要额外加一个条件才能保证解正则, 例如, 这里加 $\partial_3 u_3$ 的条件. 因此, 这个结论给出了 u_3 与 u 端点 Prodi-Serrin 条件的一个比较. 定理 2.12(ii) 中 (α, β) 的范围如图 2 中区域“(2)”所示, 且当 $\frac{3}{2} < \beta \leq 2$ 时, 可见直线 $1/\alpha + 2/\beta = 2$ 是区域 (α, β) 的一个极限.

定理 2.15 令 $u_0 \in V$, u 是 Navier-Stokes 方程组 (1.1) 的一个 Leray-Hopf 弱解. 假设

$$1 < \alpha < +\infty, \quad \max \left\{ \frac{11\alpha - 12}{3(\alpha - 1)}, 3 \right\} < s \leq \frac{11\alpha - 10}{3(\alpha - 1)}, \quad (2.36)$$

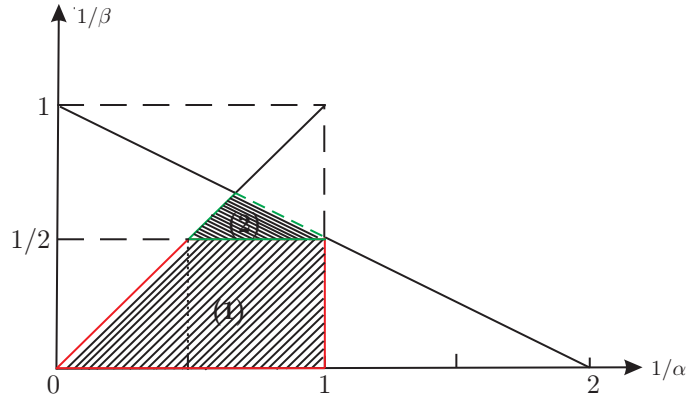


图 2 区域 (α, β) . “(1)” 表示定理 2.12(i) 中的 (α, β) 区域; “(2)” 表示定理 2.12(ii) 中的 (α, β) 区域

并且 u 满足 $u_3 \in L^\infty(0, T; L^s(\mathbb{R}^3))$, $\int_0^T \|\partial_3 u_3(\tau)\|_{L_{x_3}^\alpha}^p \|L_{x_1, x_2}^\beta\|_{L_{x_3}^\alpha}^p d\tau < \infty$, 其中 $\beta = \frac{2\alpha}{(11\alpha-10)-3s(\alpha-1)}$, $p = \frac{2\alpha}{3(\alpha-1)(s-3)}$, 那么弱解 u 在 $(0, T] \times \mathbb{R}^3$ 上是正则的.

注 2.16 我们注意到定理 2.15 中的 α, β 和 p 满足 $1/\alpha + 2/\beta + 2/p = 2$, 这意味着当 $s > 3$ 时, 我们可得到 $\partial_3 u_3$ 的临界条件.

下面给出当 u_3 和 $\partial_3 u_3$ 都带有时间可积性时的正则性标准.

定理 2.17 令 $u_0 \in V$, u 是 Navier-Stokes 方程组 (1.1) 的一个 Leray-Hopf 弱解. 假设 u 满足

$$u_3 \in L^q(0, T; L^s(\mathbb{R}^3)), \quad \partial_3 u_3 \in L^p(0, T; L_{x_1, x_2}^\beta(L_{x_3}^\alpha)), \quad (2.37)$$

其中 s, q, α, β 和 p 满足

$$\frac{3}{s} + \frac{2}{q} < 1, \quad \frac{1}{\alpha} + \frac{2}{\beta} + \frac{2}{p} = 2, \quad \frac{3}{2} < \beta < 2, \quad \frac{\beta}{2\beta-2} < \alpha \leq \beta, \quad \frac{11\alpha\beta - 10\beta - 2\alpha}{3(\alpha-1)\beta} \leq s \leq \infty, \quad (2.38)$$

那么弱解 u 在 $(0, T] \times \mathbb{R}^3$ 上是正则的.

定理 2.18 令 $u_0 \in V$, u 是 Navier-Stokes 方程组 (1.1) 的一个 Leray-Hopf 弱解. 假设 u 满足

$$u_3 \in L^q(0, T; L^s(\mathbb{R}^3)), \quad \partial_3 u_3 \in L^p(0, T; L_{x_1, x_2}^\beta(L_{x_3}^\alpha)), \quad (2.39)$$

其中 s, q, α, β 和 p 满足

$$\frac{3}{s} + \frac{2}{q} = 1; \quad \frac{1}{\alpha} + \frac{2}{\beta} + \frac{2}{p} < 2, \quad \frac{3}{2} \leq \beta \leq 2, \quad \frac{\beta}{2\beta-2} < \alpha \leq \beta, \quad 3 \leq s \leq \frac{9\alpha\beta - 6\beta - 6\alpha}{(\alpha-1)\beta}, \quad (2.40)$$

那么弱解 u 在 $(0, T] \times \mathbb{R}^3$ 上是正则的.

注 2.19 如引言中所述, 文献 [28] 中的结果是

$$u_3 \in L^\gamma(0, T; \dot{H}^\sigma(\mathbb{R}^3)), \quad \gamma \in (4, 6). \quad (2.41)$$

u_3 的导数阶数是 $\sigma = \frac{1}{2} + \frac{2}{\gamma} \in (\frac{5}{6}, 1)$, 且由 Sobolev 嵌入 $\dot{H}^{\frac{1}{2} + \frac{2}{\gamma}}(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^\eta(\mathbb{R}^3)$ 可知 $\eta = \frac{3\gamma}{\gamma-2}$ 满足 $\eta \in [\frac{9}{2}, 6]$. 我们发现定理 2.17 或定理 2.18 与 (2.41) 之间存在着有趣的联系. 在定理 2.17 中, $\partial_3 u_3$ 的条件是临界的, 且 p 的范围 $p \in [4, \infty]$ 比 (2.41) 中 γ 的范围 $\gamma \in [4, 6]$ 大. 由嵌入关系 $L^\gamma(0, T; \dot{H}^\sigma(\mathbb{R}^3)) \hookrightarrow L^\gamma(0, T; L^\eta(\mathbb{R}^3))$ 易知, 条件 (2.37) 比 (2.41) 弱. 我们看到 u_3 的条件 (2.37) 是几乎临界的, 并且 (s, q) 的范围比 (2.41) 中 (γ, η) 的范围大, 特别是 q 范围是扩大到 $[3, \infty]$, 因为对于任何 $\epsilon > 0$, 存在 α

和 β 满足 (2.38) 使得 $0 < \frac{11\alpha\beta-10\beta-2\alpha}{3(\alpha-1)\beta} - 3 < \epsilon$. 定理 2.18 给出了关于 u_3 正则性标准的另一个描述, 我们看到 u_3 的条件是临界的, 而且 $\partial_3 u_3$ 的条件是几乎临界的, 并且其相应的范围也得到拓展. 最后, 我们指出定理 2.17 和 2.18 也是文献 [27] 结论的一种推广, 在文献 [27] 中仅考虑了定理 2.17 和 2.18 在 $\alpha = \beta$ 时的特殊情形.

本节所叙述的结果是基于 Cao 和 Titi^[24] 的方法的改进而得到, 我们证明了下面的关键引理:

引理 2.20 令 $1 \leq \alpha, \beta, s, a, t \leq \infty$, $2 < r \leq \infty$, $0 \leq \theta \leq 1$, $\frac{1}{a} + \frac{1}{t} = \frac{\beta-1}{\beta}$, $\frac{1}{(r-1)\alpha} + \frac{\theta}{\alpha} = \frac{1-\theta}{s(\alpha-1)}$, 则有

$$\left| \int_{\mathbb{R}^3} \phi f g dx_1 dx_2 dx_3 \right| \leq C \| \partial_3 \phi \|_{L_{x_3}^\alpha}^{\frac{1}{r}} \| \partial_3 \phi \|_{L_{x_1, x_2}^\beta}^{\frac{\theta(r-1)}{r}} \| \phi \|_{L_{x_3}^s}^{\frac{(1-\theta)(r-1)}{r}} \| f \|_{L^2}^{\frac{r-2}{r}} \| \partial_1 f \|_{L^2}^{\frac{1}{r}} \| \partial_2 f \|_{L^2}^{\frac{1}{r}} \| g \|_{L^2}.$$

利用该引理, 我们同样先对水平方向进行估计, 在此过程中一个关键的地方就是选取适当的参数. 例如, 对于定理 2.12(i), 取 $s = 2$, $r = \frac{\beta(3\alpha-2)}{\alpha(\beta+1)-\beta}$, $\theta = \frac{\beta-\alpha}{2\alpha\beta-\alpha-\beta}$, $a = \frac{\alpha\beta+\alpha-\beta}{\alpha\beta-\beta}$, $t = \frac{\beta(\alpha\beta+\alpha-\beta)}{\beta-\alpha}$. 对于定理 2.12(ii), 取 $s = 3$, $r = \frac{\beta(4\alpha-3)}{\alpha(\beta+1)-\beta}$, $\theta = \frac{\beta-\alpha}{3\alpha\beta-\alpha-2\beta}$, $a = \frac{\alpha\beta+\alpha-\beta}{\alpha\beta-\beta}$, $t = \frac{\beta(\alpha\beta+\alpha-\beta)}{\beta-\alpha}$. 然后利用这些参数和第 2 节所述的方法完成定理的证明. 对于其他的几个定理, 我们也可以用同样的方法实现, 这里不再一一列举, 详细的证明参见文献 [41].

2.4 Besov 框架下的判别标准

在介绍 Besov 框架下的结论之前, 我们先给出几个在证明中常用的不等式. 对于 $1 \leq q < p < \infty$ 和 $\alpha > 0$, 存在常数 C 使得

$$\|f\|_{L^p} \leq C \|f\|_{\dot{B}_{\infty, \infty}^{-\alpha}}^{1-\theta} \|f\|_{\dot{B}_{q, q}^{\beta}}^{\theta}, \quad \beta = \alpha \left(\frac{p}{q} - 1 \right), \quad \theta = \frac{q}{p}. \quad (2.42)$$

特别地, 若取 $\beta = 1, q = 2, p = 4$, 则 $\alpha = 1$ 且

$$\|f\|_{L^4} \leq C \|f\|_{\dot{B}_{\infty, \infty}^{-1/2}}^{1/2} \|f\|_{\dot{H}^1}^{1/2}. \quad (2.43)$$

取适当的 β, q, p 和 α 时也可得

$$\|f\|_{L^6} \leq C \|f\|_{\dot{B}_{\infty, \infty}^{-1/2}}^{2/3} \|f\|_{\dot{H}^1}^{1/3}, \quad \|f\|_{L^3} \leq C \|f\|_{\dot{B}_{\infty, \infty}^{-2}}^{1/3} \|f\|_{\dot{H}^1}^{2/3}. \quad (2.44)$$

令 s_1 和 s_2 满足 $s_1 < s_2$, $\theta \in (0, 1)$, 则存在常数 C 使得对任何的 $(p, r) \in [1, \infty]^2$ 和 $f \in \dot{B}_{p, r}^{s_1} \cap \dot{B}_{p, r}^{s_2}$, 有

$$\|f\|_{\dot{B}_{p, r}^{\theta s_1 + (1-\theta)s_2}} \leq C \|f\|_{\dot{B}_{p, r}^{s_1}}^{\theta} \|f\|_{\dot{B}_{p, r}^{s_2}}^{(1-\theta)}. \quad (2.45)$$

限于篇幅, 我们同样只给出下面结论大概的证明思路, 其具体的细节过程可参见文献 [40].

定理 2.21 令 u 是 Navier-Stokes 方程组 (1.1) 的一个 Leray-Hopf 弱解, 其初值满足 $u_0 \in V$. 假设下面的任何一条成立:

(i) Leray-Hopf 弱解 u 满足 $\nabla_h u \in L^{\frac{8}{3}}(0, T; \dot{B}_{\infty, \infty}^{-1}(\mathbb{R}^3))$;

(ii) u 满足 $\nabla u_3 \in L^{\frac{8}{5-2s}}(0, T; \dot{B}_{\infty, \infty}^{-s}(\mathbb{R}^3))$, $0 < s < 1$,

那么弱解 u 在 $(0, T] \times \mathbb{R}^3$ 上是正则的.

沿用上面的证明思想, 这里也先得到对水平方向的估计, 利用 (2.43) 可得

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla_h u\|_{L^2}^2 + \nu \|\nabla_h \nabla u\|_{L^2}^2 \leq C \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u| |\nabla_h u|^2 dx \leq \|\nabla_h u\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^{-1}}^2 \|\nabla u\|_{L^2}^2 + \frac{\nu}{2} \|\nabla_h \nabla u\|_{L^2}^2.$$

然后利用下面的估计可以完成定理 2.21(i) 的证明:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla u\|_{L^2}^2 + \nu \|\Delta u\|_{L^2}^2 \leq C \|\nabla_h u\|_{L^2} \|\nabla u\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \|\nabla_h \nabla u\|_{L^2} \|\Delta u\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}. \quad (2.46)$$

推论 2.22 令 u 是 Navier-Stokes 方程组 (1.1) 的一个 Leray-Hopf 弱解, 其初值满足 $u_0 \in V$. 如果 u 满足 $u \in L^{\frac{8}{3}}(0, T; \dot{B}_{\infty,\infty}^0(\mathbb{R}^3))$; 或者 $u_3 \in L^{\frac{8}{5-2s}}(0, T; \dot{B}_{\infty,\infty}^{-s+1}(\mathbb{R}^3))$, $0 < s < 1$, 那么弱解 u 在 $(0, T] \times \mathbb{R}^3$ 上是正则的.

在 Lebesgue 框架下, 基于 ∇u_3 的正则性标准得到了广泛的研究. 注意到嵌入关系

$$L^p(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow \dot{B}_{r,q}^{\frac{3}{p}-\frac{3}{r}}(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow \dot{B}_{\infty,\infty}^{-\frac{3}{p}}(\mathbb{R}^3), \quad (2.47)$$

其中 $2 \leq p < r, q \leq \infty$. 一个自然的想法是把这些结果推广到 Besov 框架下. 下面是一个关于 $\partial_1 u_3$ 、 $\partial_2 u_3$ 和 $\partial_3 u_3$ 的各向异性的正则性标准.

定理 2.23 令 u_0 和 u 如定理 2.21 所述. 假设 u 满足

$$\partial_3 u_i \in L^2(0, T; \dot{B}_{\infty,\infty}^{-1}(\mathbb{R}^3)), \quad i = 1, 2, \quad \partial_3 u_3 \in L^{\frac{4}{-5s+2}}(0, T; \dot{B}_{\infty,\infty}^{-s}(\mathbb{R}^3)), \quad 0 < s < \frac{2}{5}, \quad (2.48)$$

那么弱解 u 在 $(0, T] \times \mathbb{R}^3$ 上是正则的.

最后给出一个只是基于 $\partial_3 u_3$ 、在 Besov 框架下的正则性标准.

定理 2.24 令 u_0 和 u 如定理 2.21 所述. 假设 u 满足

$$\partial_3 u_3 \in L^{\frac{24}{-29s+8}}(0, T; \dot{B}_{\infty,\infty}^{-s}(\mathbb{R}^3)), \quad 0 < s < \frac{8}{29}, \quad (2.49)$$

那么弱解 u 在 $(0, T] \times \mathbb{R}^3$ 上是正则的.

对于定理 2.23, 我们注意到

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\omega\|_{L^2}^2 + \nu \|\nabla \omega\|_{L^2}^2 \leq C \int_{\mathbb{R}^3} |\partial_3 u_2|^2 |\nabla u| dx + C \int_{\mathbb{R}^3} |\partial_3 u_1|^2 |\nabla u| dx + C \int_{\mathbb{R}^3} |u_3| |\nabla u| |\Delta u| dx.$$

应用 (2.43), 可以得到 $\partial_3 u_1$ 和 $\partial_3 u_2$ 的临界条件, 对于 u_3 , 我们采用定理 2.2(ii) 的方法, 最后结合 (2.13) 得到定理结论. 而定理 2.24 的证明是完全类似于定理 2.2(ii), 我们省略具体细节, 详细证明可参见文献 [40].

3 轴对称的 Navier-Stokes 方程组

首先给出轴对称解的定义. 如果方程组 (1.1) 的解 $(\mathbf{u}, p)$ 满足

$$\mathbf{u}(t, x) = u^r(t, r, x_3) \mathbf{e}_r + u^\theta(t, r, x_3) \mathbf{e}_\theta + u^3(t, r, x_3) \mathbf{e}_3, \quad p(t, x) = \Pi(t, r, x_3), \quad (3.1)$$

则称 $\mathbf{u}$ 是轴对称的, 其中 $\mathbf{e}_r = (\frac{x_1}{r}, \frac{x_2}{r}, 0)$, $\mathbf{e}_\theta = (-\frac{x_2}{r}, \frac{x_1}{r}, 0)$, $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$, $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. 另外可以定义 $\frac{\tilde{D}}{Dt} = \partial_t + u^r \partial_r + u^3 \partial_3$, $\mathbf{b} = u^r \mathbf{e}_r + u^3 \mathbf{e}_3$. 这样, 我们把 (3.1) 代入到方程组 (1.1), 就可以得到轴对

称方程组

$$\begin{cases} \frac{\tilde{D}}{Dt} u^r - \left(\partial_r^2 + \partial_3^2 + \frac{1}{r} \partial_r - \frac{1}{r^2} \right) u^r - \frac{(u^\theta)^2}{r} + \partial_r \Pi = 0, \\ \frac{\tilde{D}}{Dt} u^\theta - \left(\partial_r^2 + \partial_3^2 + \frac{1}{r} \partial_r - \frac{1}{r^2} \right) u^\theta + \frac{u^\theta u^r}{r} = 0, \\ \frac{\tilde{D}}{Dt} u^3 - \left(\partial_r^2 + \partial_3^2 + \frac{1}{r} \partial_r \right) u^3 + \partial_3 \Pi = 0, \\ \partial_r u^r + \frac{1}{r} u^r + \partial_3 u^3 = 0, \\ (u^r, u^\theta, u^3) |_{t=0} = (u_0^r, u_0^\theta, u_0^3). \end{cases} \quad (3.2)$$

同理, 我们可以考虑旋量 $\omega = \nabla \times \mathbf{u}$. 我们容易发现, ω 同样是轴对称的, 并且有

$$\omega = \nabla \times \mathbf{u} = \omega^r \mathbf{e}_r + \omega^\theta \mathbf{e}_\theta + \omega^3 \mathbf{e}_3,$$

其中 $\omega^r = -\partial_3 u^\theta$, $\omega^\theta = \partial_3 u^r - \partial_r u^3$, $\omega^3 = \partial_r u^\theta + \frac{u^\theta}{r}$. 故类似地可以得到关于 ω 的轴对称方程组

$$\begin{cases} \frac{\tilde{D}}{Dt} \omega^r - \left(\partial_r^2 + \partial_3^2 + \frac{1}{r} \partial_r - \frac{1}{r^2} \right) \omega^r - (\omega^r \partial_r + \omega^3 \partial_3) u^r = 0, \\ \frac{\tilde{D}}{Dt} \omega^\theta - \left(\partial_r^2 + \partial_3^2 + \frac{1}{r} \partial_r - \frac{1}{r^2} \right) \omega^\theta - \frac{2u^\theta \partial_3 u^\theta}{r} - \frac{u^r \omega^\theta}{r} = 0, \\ \frac{\tilde{D}}{Dt} \omega^3 - \left(\partial_r^2 + \partial_3^2 + \frac{1}{r} \partial_r \right) \omega^3 - (\omega^r \partial_r + \omega^3 \partial_3) u^3 = 0, \\ (\omega^r, \omega^\theta, \omega^3) |_{t=0} = (\omega_0^r, \omega_0^\theta, \omega_0^3). \end{cases} \quad (3.3)$$

另外, 从方程组 (3.2) 和 (3.3) 可以导出两个重要的结构方程. 事实上, 可以看到关于 $(\Theta, \Gamma) = (ru^\theta, \frac{\omega^\theta}{r})$ 的方程组

$$\begin{cases} \left(\partial_t + \mathbf{b} \cdot \nabla - \Delta + \frac{2}{r} \partial_r \right) \Theta = 0, \\ \left(\partial_t + \mathbf{b} \cdot \nabla - \Delta - \frac{2}{r} \partial_r \right) \Gamma - \partial_3 \left(\frac{u^\theta}{r} \right)^2 = 0. \end{cases} \quad (3.4)$$

这是我们研究三维轴对称 Navier-Stokes 方程组的关键方程组. 特别地, 由 (3.4)₁ 可以得到, 对任意的 $t \geq 0$, 有

$$\|ru^\theta(t)\|_{L^q} \leq \|ru_0^\theta\|_{L^q}, \quad 1 \leq q \leq \infty. \quad (3.5)$$

我们称 u^θ 为旋涡 (swirl). 若 $u^\theta = 0$, 则称方程组 (1.1) 的解是无旋涡的 (without swirl). 当初值是无旋涡时, 即 $u_0^\theta = 0$, Ukhovskii 和 Iudovich^[42], Ladyženskaja^[43] 和 Leonardi 等^[44] 分别给出了整体适定性的结论. 事实上, 对于轴对称的初值 $\mathbf{u}_0$, 我们可以期待方程组 (1.1) 有轴对称的解. 特别地, 若初值 $u_0^\theta = 0$, 由 (3.5), 我们可以不妨假设 $u^\theta = 0$. 另外, 注意到方程 (3.4)₂, 我们可以得到, 对任意的 $t \geq 0$, 不等式

$$\|\Gamma(t)\|_{L^2}^2 \leq \|\Gamma_0\|_{L^2}^2 \quad (3.6)$$

成立. 接下来只需直接利用方程 (3.3)₂, 我们就可以得到关于 ω^θ 的 $L^2(\mathbb{R}^3)$ 估计,

$$\frac{1}{2} \|\omega^\theta\|_{L^2}^2 + \|\nabla \omega^\theta\|_{L^2}^2 + \left\| \frac{\omega^\theta}{r} \right\|_{L^2}^2 \leq \|u^r\|_{L^3} \|\Gamma\|_{L^2} \|\nabla \omega^\theta\|_{L^6} \leq C \|\mathbf{u}\|_{L^2} \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2} \|\Gamma\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2} \|\nabla \omega^\theta\|_{L^2}^2.$$

所以容易看到, 存在常数 $C = C(\mathbf{u}_0)$, 对任意的时间 $T > 0$, 有

$$\sup_{t \leq T} \|\omega(t)\|_{L^2}^2 = \sup_{t \leq T} \|\omega^\theta(t)\|_{L^2}^2 \leq C + CT,$$

即解在 $[0, \infty)$ 上存在. 所以易证系统 (3.2) 是整体适定的.

在本文中, 我们考虑的是非平凡情形的适定性, 即 $u^\theta \neq 0$. 轴对称系统 (1.1) 在非平凡情形的整体适定性最近十多年来受到持续的关注. 首先介绍下关于轴对称方程组的适定性的一些研究结果.

Chae 和 Lee^[45] 说明了, 若 $\omega^\theta \in L^p((0, T), L^q(\mathbb{R}^3))$, $\frac{2}{p} + \frac{3}{q} \leq 2$, $\frac{3}{2} < q < \infty$, 则弱解在 $(0, T] \times \mathbb{R}^3$ 上是正则的. Chen 和 Zhang^[46] 考虑了端点 $q = \infty$ 的情形, 即若把条件替换成 $\omega^\theta \in L^1((0, T); \dot{B}_{\infty, \infty}^0)$, 结论依然成立. 另外, Neustupa 和 Pokorný^[47]、Kreml 和 Pokorný^[48] 和 Kubica 等^[49] 讨论了关于 u^r 和 u^θ 分量的 Prodi-Serrin 条件. 特别地, Kubica 等^[49] 证明了, 如果 $ru_0^\theta \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$, 且 $r^d(u^r)^\perp \in L^p((0, T), L^q(\mathbb{R}^3))$, 那么系统 (1.1) 的轴对称解在 $(0, T] \times \mathbb{R}^3$ 上光滑, 其中 (d, p, q) 满足 $(d, p, q) \in \{(-1, 1) \times (1, \infty) \times (\frac{3}{2}, \infty), \frac{2}{p} + \frac{3}{q} \leq 1 - d\}$, 或 $\{(-1, 1) \times \{\infty\} \times (\frac{3}{2}, \infty], \frac{3}{q} < 1 - d\}$, 或 $\{-1\} \times (1, \infty) \times (\frac{3}{2}, \infty), \frac{2}{p} + \frac{3}{q} \leq 2\}$.

另外, Kubica 等^[49] 也证明了, 若 $ru_0^\theta \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$, u^θ 分量满足正则型条件 $r^d u^\theta \in L^p((0, T), L^q(\mathbb{R}^3))$, 则 (1.1) 的轴对称解在 $(0, T] \times \mathbb{R}^3$ 上光滑, 其中 $(d, p, q) \in \{[0, \frac{q-4}{2q}] \times (4, \infty] \times (2, \infty], \frac{2}{p} + \frac{3}{q} < 1 - d\}$, 或 $\{[0, \frac{5}{6}] \times \{\infty\} \times \{\infty\}\}$. 我们看到文献 [49] 中关于 u^θ 分量的 Prodi-Serrin 条件并不是保持标尺度变换不变的, 即 $\frac{2}{p} + \frac{3}{q} = 1 - d$. 但文献 [50] 中找到了一个特殊的临界 Prodi-Serrin 条件: 若 $u^\theta \in L^4((0, T), L^6(\mathbb{R}^3))$, 则弱解 u 在 $(0, T] \times \mathbb{R}^3$ 上是正则的. 这就表明, 临界条件下的正则性准则极大可能是可行的. 幸运的是, 我们的确找到了这样的 Prodi-Serrin 条件, 得到如下定理:

定理 3.1 设 $\mathbf{u}_0 \in H^2(\mathbb{R}^3)$ 且 $\operatorname{div} \mathbf{u}_0 = 0$, 令 $\mathbf{u}$ 是系统 (1.1) 的轴对称弱解. 若

$$r^d u^\theta \in L^p((0, T), L^q(\mathbb{R}^3)), \quad \text{且} \quad \frac{2}{p} + \frac{3}{q} \leq 1 - d, \quad 0 \leq d < 1, \quad \frac{3}{1-d} < q \leq \infty, \quad \frac{2}{1-d} \leq p \leq \infty, \quad (3.7)$$

或者

$$r^d u^\theta \in L^\infty(0, T; L^{\frac{3}{1-d}}(\mathbb{R}^3)), \quad \text{存在 } \alpha > 0 \text{ 和充分小 } \varepsilon > 0 \text{ 使得 } \|r^d u^\theta 1_{r \leq \alpha}\|_{L^\infty(0, T; L^{\frac{3}{1-d}}(\mathbb{R}^3))} \leq \varepsilon,$$

则解 $\mathbf{u}$ 在 $(0, T] \times \mathbb{R}^3$ 上是正则的.

现在来简述主要想法, 具体的定理证明可参见文献 [51]. 注意到, 若 $u^\theta \neq 0$, 则估计 (3.6) 不是直接成立的. 但是, 我们发现关于 $(\Phi, \Gamma) = (\frac{\omega^r}{r}, \frac{\omega^\theta}{r})$ 的方程组

$$\begin{cases} \partial_t \Phi + (\mathbf{b} \cdot \nabla) \Phi - \left(\Delta + \frac{2}{r} \partial_r \right) \Phi - (\omega^r \partial_r + \omega^3 \partial_3) \frac{u^r}{r} = 0, \\ \partial_t \Gamma + (\mathbf{b} \cdot \nabla) \Gamma - \left(\Delta + \frac{2}{r} \partial_r \right) \Gamma + 2 \frac{u^\theta}{r} \Phi = 0 \end{cases} \quad (3.8)$$

具有重要的结构. 事实上, 我们有

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \Phi^2 + \frac{1}{2} (\mathbf{b} \cdot \nabla) \Phi^2 + \left(\Delta + \frac{2}{r} \partial_r \right) \Phi \cdot \Phi = (\omega^r \partial_r + \omega^3 \partial_3) \frac{u^r}{r} \Phi, \\ \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \Gamma^2 + \frac{1}{2} (\mathbf{b} \cdot \nabla) \Gamma^2 + \left(\Delta + \frac{2}{r} \partial_r \right) \Gamma \cdot \Gamma = -2 \frac{u^\theta}{r} \Gamma \Phi. \end{cases} \quad (3.9)$$

Hou 和 Li^[52] 引入了一个一维方程来一次逼近 Navier-Stokes 方程组. 我们后来发现文献 [52] 中系统就是 (3.9) 中取 $r = 0$ 的逼近. 特别地, 在其逼近方程组^[52] 中, 右端两项之和等于 0. 当然本文中仅讨

论三维情形下的结果. 把 (3.9) 在 $\mathbb{R}^3$ 上积分, 并且两式相加, 我们不难得到

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|\Phi\|_{L^2}^2 + \|\Gamma\|_{L^2}^2) + \|\tilde{\nabla}\Phi\|_{L^2}^2 + \|\tilde{\nabla}\Gamma\|_{L^2}^2 \leq \int_{\mathbb{R}^3} u^\theta \left(\partial_r \frac{u^r}{r} \partial_3 \Phi - \partial_3 \frac{u^r}{r} \partial_r \Phi \right) - 2 \frac{u^\theta}{r} \Gamma \Phi dx, \quad (3.10)$$

其中 $\tilde{\nabla} = (\partial_r, \partial_3)$. 我们可以证明, 若 $k = 1$ 或 $k = 2$, $1 < q < \infty$, 则 $\|\tilde{\nabla}^k \frac{u^r}{r}\|_{L^q}$ 能被 $\|\tilde{\nabla}^{k-1} \Gamma\|_{L^q}$ 控制. 然后利用 Sobolev-Hardy 不等式, 我们就能证明在 (3.7) 条件下, 存在常数 C , 使得

$$\|\Gamma(t)\|_{L^2}^2 + \|\Phi(t)\|_{L^2}^2 \leq C, \quad \text{对任意的 } 0 \leq t < T, \quad (3.11)$$

即我们可以证明 (1.1) 的弱解在 $(0, T] \times \mathbb{R}^3$ 上是正则的. 关键点是, 基于条件 (3.7), 系统 (3.8) 关于 (Φ, Γ) 几乎是一个线性系统. 这个方法的应用贯穿文献 [51] 整篇文章.

另外, 在前人的基础上, 我们整理并归纳了大部分我们所了解的正则性准则, 其内容可以概括成这样一条线:

$$\begin{aligned} & r^d u^r \in L_T^{p,q} \\ & \Downarrow \\ & \nabla u \in L_T^{\infty,2} \Leftarrow \omega^\theta \in L_T^{p,q} \Leftarrow \frac{u^\theta}{r} \in L_T^{4,4} \Leftrightarrow \Gamma \in L_T^{\infty,2} \Leftarrow r^d u^\theta \in L_T^{p,q} \Leftarrow r^d u^3 \in L_T^{p,q}. \\ & \Uparrow \\ & \omega^3 \in L_T^{p,q}, \text{ 且 } ru_0^\theta \in L^\infty(\mathbb{R}^3). \end{aligned} \quad (3.12)$$

这里记 $L_T^{p,q}$ 为空间 $L^p((0, T), L^q(\mathbb{R}^3))$, 且对于上式中的 $B \Leftarrow A$, 简单来讲, 我们可以认为, 若条件 A 成立, 则条件 B 也成立, 即意味着可以用正则性准则 B 来诱导出正则性准则 A . 另外具体的 Prodi-Serrin 条件为

$$\begin{aligned} & \omega^\theta \in L_T^{p,q}, \quad \frac{2}{p} + \frac{3}{q} \leq 2, \quad \frac{3}{2} < q \leq \infty, \quad 1 \leq p \leq \infty, \\ & r^d u^\theta \in L_T^{p,q}, \quad \frac{2}{p} + \frac{3}{q} \leq 1-d, \quad 0 \leq d < 1, \quad \frac{3}{2(1-d)} < q \leq \infty, \quad \frac{2}{1-d} \leq p \leq \infty, \\ & r^d u^r \in L_T^{p,q}, \quad \frac{2}{p} + \frac{3}{q} \leq 1-d, \quad -1 \leq d < 1, \quad \frac{3}{2(1-d)} < q \leq \infty, \quad \frac{2}{1-d} \leq p \leq \infty, \\ & r^d u^3 \in L_T^{p,q}, \quad \frac{2}{p} + \frac{3}{q} \leq 1-d, \quad 0 \leq d < 1, \quad \frac{3}{2(1-d)} < q \leq \infty, \quad \frac{2}{1-d} \leq p \leq \infty, \\ & \omega^3 \in L_T^{p,q}, \quad \frac{2}{p} + \frac{3}{q} \leq 2, \quad \frac{3}{2} < q < \infty, \quad 1 < p \leq \infty. \end{aligned}$$

当然, 推导出正则性条件 $\Gamma \in L_T^{\infty,2}$ 的过程并不是唯一的. (3.12) 仅给出了一个比较简单清晰的方式, 并且使我们能对轴对称方程组的解的 Prodi-Serrin 条件有个大致的印象.

注 3.2 由 (3.5), 我们看到关于 u^θ 存在极大值估计

$$\|ru^\theta(t)\|_{L^\infty} \leq \|ru_0^\theta\|_{L^\infty}, \quad \text{对任意的 } t \geq 0.$$

但遗憾的是, 由于 Hardy 不等式在二维时是不成立的, 我们注意到在关于 u^θ 的 Prodi-Serrin 条件 (3.7) 中, d 是不能取 1 的.

另外, 由文献 [6, 7] 知, 轴对称 Navier-Stokes 方程组 (1.1) 的适当弱解的奇性都在对称轴 x_3 轴上. 利用这个性质, Chen 等^[53, 54] 和 Koch 等^[55] 用不同方法证明了, 如果 $\mathbf{u}$ 满足

$$r|\mathbf{u}| \leq C < \infty, \quad (t, x) \in (0, T) \times \mathbb{R}^3, \quad (3.13)$$

则 (1.1) 的适当弱解在 $(0, T] \times \mathbb{R}^3$ 上是光滑的. 另外, 若 (3.13) 局部成立, Seregin 和 Šverák^[56] 讨论了其部分正则性 (local regularity) 的结论. 文献 [57, 58] 在 $ru_0^\theta \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$ 条件下, 得到了估计 $|\mathbf{b}| \leq \frac{C|\ln r|^{\frac{1}{2}}}{r^2}$, $0 \leq r \leq \frac{1}{2}$. 另外, Lei 和 Zhang^[59] 得到了在 $ru_0^\theta \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$ 且 $\mathbf{b} \in L^\infty((0, T), \text{BMO}^{-1})$ 条件下的正则性结论. 利用这个结论, 我们可以把条件 (3.13) 减弱到 $r|u^r| + r|u^3| \leq C$.

令 (3.7) 中 $p = q = \infty$, 我们得到正则性准则

$$ru^\theta \leq Cr^{1-d}, \quad \text{对任意给定的 } 0 \leq d < 1. \quad (3.14)$$

故人们转而去寻找含有对数函数的临界 Prodi-Serrin 条件, 即存在常数 $C, \alpha > 0$, 使得对任意的 $t \geq 0$, $ru^\theta \leq C|\ln r|^{-\alpha}$. Lei 和 Zhang^[60] 给出了 $\alpha = 2$ 情形的回答. 假设初值 $\mathbf{u}_0 \in H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$ 且 $ru_0^\theta \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$, $\mathbf{u}$ 是初值 $\mathbf{u}_0$ 对应 Navier-Stokes 方程组 (1.1) 的轴对称局部强解, 若存在正常数 $C_* > 0$ 和常数 $\delta_0 \in (0, \frac{1}{2})$, 使得对任意的 $t \geq 0$, 解满足

$$|ru^\theta| \leq C_*|\ln r|^{-2}, \quad r \leq \delta_0, \quad (3.15)$$

则解 $\mathbf{u}$ 整体适定. 另外, Wei^[61] 把系数 α 改进到了 $\frac{3}{2}$, 即若把条件 (3.15) 替换为

$$|ru^\theta| \leq |\ln r|^{-\frac{3}{2}}, \quad r \leq \delta_0, \quad (3.16)$$

则 $\mathbf{u}$ 同样整体适定.

另外考虑一个由 (1.1) 导出的简化方程组

$$\begin{cases} \partial_t u_1 - \nu \left(\Delta + \frac{2}{r} \partial_r \right) u_1 = 2\partial_3 \psi_1 u_1, \\ \partial_t \omega_1 - \nu \left(\Delta + \frac{2}{r} \partial_r \right) \omega_1 = \partial_3 u_1^2, \\ - \left(\Delta + \frac{2}{r} \partial_r \right) \psi_1 = \omega_1, \end{cases} \quad (3.17)$$

其中 $\nu \geq 0$ 且 $u_1 = \frac{u^\theta}{r}$, $\omega_1 = \frac{\omega^\theta}{r}$, $\psi_1 = \frac{\psi}{r}$, 这里 ψ 是势函数. 文献 [62–69] 说明了方程 (3.17) 的解与轴对称的三维 Navier-Stokes 方程 (1.1) 的解在各方面性质上有很大相似.

文献 [50] 讨论了 u_0^θ 在不同类型小初值的情形下解的整体适定性. Hou 等^[70] 说明了在各向异性的初值条件下解的整体适定性. 利用估计 (3.10) 和连续性方法, 我们也讨论了方程组 (1.1) 的解关于漩涡 u^θ 的小初值整体解, 得到如下的定理, 证明参见文献 [51].

定理 3.3 设轴对称初值 $\mathbf{u}_0 \in H^2(\mathbb{R}^3)$ 且 $\text{div} \mathbf{u}_0 = 0$, 初始旋转速度 u^θ 满足如下小性条件:

$$\|r^d u_0^\theta\|_{\frac{3}{1-d}} \exp(\mathcal{A}) \leq \frac{1}{2C_0}, \quad (3.18)$$

其中 $0 \leq d < 1$, $\mathcal{A} = C_2 \|\mathbf{u}_0\|_2^2 (\|\omega_0^\theta\|_2^2 + C_1 (\|\frac{\omega_0^\theta}{r}\|_2 + \|\partial_3 \frac{u_0^\theta}{r}\|_2)^{\frac{4}{3}} \|\mathbf{u}_0\|_2^2)$, C_0 、 C_1 和 C_2 是正常数, 则系统 (1.1) 存在唯一的整体解 $\mathbf{u} \in C(\mathbb{R}^+; H^2(\mathbb{R}^3)) \cap L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^+; \dot{H}^3(\mathbb{R}^3))$.

3.1 轴对称的非均质 Navier-Stokes 方程组

考虑非均质 Navier-Stokes 方程组

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0, & (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3, \\ \partial_t(\rho \mathbf{u}) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) - \Delta \mathbf{u} + \nabla \Pi = \mathbf{0}, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \\ (\rho, \mathbf{u})|_{t=0} = (\rho_0, \mathbf{u}_0), \end{cases} \quad (3.19)$$

其中 ρ 、 $\mathbf{u} = (u^1, u^2, u^3)$ 和 Π 分别代表密度、速度和压力项. Lions^[30] 和 Simon^[71] 给出了上述系统整体弱解的存在性. 另外, 许多不同类型的适定性结果不断地被人们发现和证明. 例如, 如果 ρ 非真空, 且在区域有界的情形下, Ladyženskaja 和 Solonnikov^[72] 给出了系统 (3.19) 的初边值问题的唯一性结论. 在全空间 $\mathbb{R}^d$ 情形下, Dachin^[73,74] 建立了系统 (3.19) 关于小初值的整体适定性结果. 在初值 $\mathbf{u}_0 \in H^1(\mathbb{R}^3)$ 条件下, Abidi 等^[75] 和 Paicu 等^[76] 给出了 (3.19) 的解的适定性结果. 具体来说, 若设存在常数 $m, M > 0$, 使得

$$m \leq \rho_0 \leq M, \quad \nabla \cdot \mathbf{u}_0 = 0, \quad \mathbf{u}_0 \in H^1(\mathbb{R}^3),$$

则方程组 (3.19) 的解 ρ 和 $\mathbf{u}$ 局部适定, 并且满足

$$\rho \in L^\infty([0, T], \mathbb{R}^3), \quad \mathbf{u} \in \mathcal{C}([0, T], H^1(\mathbb{R}^3)), \quad \text{且} \quad \nabla \mathbf{u} \in L^2((0, T), H^1(\mathbb{R}^3)). \quad (3.20)$$

我们在文献 [77] 中考虑方程组 (3.19) 的轴对称解. 同样可以定义, 如果 $(\rho, \mathbf{u}, \Pi)$ 满足

$$\rho(t, x) = \rho(t, r, x_3), \quad \Pi(t, x) = \Pi(t, r, x_3), \quad \mathbf{u}(t, x) = u^r(t, r, x_3)\mathbf{e}_r + u^\theta(t, r, x_3)\mathbf{e}_\theta + u^3(t, r, x_3)\mathbf{e}_3,$$

则称方程组 (3.19) 的解 $(\rho, \mathbf{u})$ 轴对称, 其中

$$\mathbf{e}_r = \left(\frac{x_1}{r}, \frac{x_2}{r}, 0 \right), \quad \mathbf{e}_\theta = \left(-\frac{x_2}{r}, \frac{x_1}{r}, 0 \right), \quad \mathbf{e}_3 = (0, 0, 1), \quad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$$

我们可以得到方程组 (3.19) 的轴对称系统

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho = 0, \\ \rho \partial_t u^r + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla u^r - \left(\Delta - \frac{1}{r^2} \right) u^r - \rho \frac{(u^\theta)^2}{r} + \partial_r \Pi = 0, \\ \rho \partial_t u^\theta + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla u^\theta - \left(\Delta - \frac{1}{r^2} \right) u^\theta + \rho \frac{u^\theta u^r}{r} = 0, \\ \rho \partial_t u^3 + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla u^3 - \Delta u^3 + \partial_3 \Pi = 0, \\ \partial_r u^r + \frac{1}{r} u^r + \partial_3 u^3 = 0, \\ (u^r, u^\theta, u^3)|_{t=0} = (u_0^r, u_0^\theta, u_0^3). \end{cases} \quad (3.21)$$

关于旋量 ω 的轴对称方程组为

$$\begin{cases} \partial_t \omega^r + \mathbf{u} \cdot \nabla \omega^r + \partial_3 \left(\frac{1}{\rho} \left(\Delta - \frac{1}{r^2} \right) u^\theta \right) - (\omega^r \partial_r + \omega^3 \partial_3) u^r = 0, \\ \partial_t \omega^\theta + \mathbf{u} \cdot \nabla \omega^\theta - \partial_3 \left(\frac{1}{\rho} \left(\left(\Delta - \frac{1}{r^2} \right) u^r - \partial_r \Pi \right) \right) + \partial_r \left(\frac{1}{\rho} (\Delta u^3 - \partial_3 \Pi) \right) \\ - \frac{2u^\theta \partial_3 u^\theta}{r} - \frac{u^r \omega^\theta}{r} = 0, \\ \partial_t \omega^3 + \mathbf{u} \cdot \nabla \omega^3 - \left(\partial_r + \frac{1}{r} \right) \left(\frac{1}{\rho} \left(\Delta - \frac{1}{r^2} \right) u^\theta \right) - (\omega^r \partial_r + \omega^3 \partial_3) u^3 = 0, \\ (\omega^r, \omega^\theta, \omega^3) |_{t=0} = (\omega_0^r, \omega_0^\theta, \omega_0^3). \end{cases} \quad (3.22)$$

令 $a_0 = \frac{1}{\rho_0} - 1$. 若初值 $\mathbf{u}_0$ 无旋涡, 即 $u_0^\theta = 0$, 且假设 $\|\frac{a_0}{r}\|_{L^\infty}$ 充分小, Abidi 和 Zhang^[78] 证明了轴对称解整体适定. 我们在此基础上, 引入 (Φ, Γ) 的方程组, 并且我们的结果推广到了 $u_0^\theta \neq 0$ 的情形, 得到如下定理:

定理 3.4 设初值 $(\rho_0, \mathbf{u}_0)$ 是轴对称的, $a_0 = \frac{1}{\rho_0} - 1 \in L^2 \cap L^\infty$ 且 $\frac{a_0}{r} \in L^\infty$, $\mathbf{u}_0 \in H^1$, $\Gamma_0, \Phi_0 \in L^2$, $0 < m \leq \rho_0 \leq M$, 其中 m 和 M 是正常数. 若初值 (a_0, u_0^θ) 满足小性条件,

$$\|u_0^\theta\|_{L^3} + \left\| \frac{a_0}{r} \right\|_{L^\infty} \|\mathbf{u}_0\|_{L^2}^2 \leq \eta_1, \quad \left\| \frac{a_0}{r} \right\|_{L^\infty}^2 (\|(u_0^\theta)^2\|_{L^2}^2 + \|\nabla \mathbf{u}_0\|_{L^2}^2) \leq \eta_1 (\|\Gamma_0\|_{L^2}^2 + \|\Phi_0\|_{L^2}^2), \quad (3.23)$$

其中 $\eta_1 = \frac{1}{2C} \exp(-C\|\mathbf{u}_0\|_2^3(\|\Gamma_0\|_2 + \|\Phi_0\|_2))$, 则系统 (3.19) 存在唯一的整体强解 $\mathbf{u}$.

下面简要介绍我们的想法. 首先, 我们可以像均质的 Navier-Stokes 方程组 (1.1) 一样得到关于 u^θ 的守恒估计

$$\|ru^\theta(t)\|_{L^q} \leq C\|ru_0^\theta\|_{L^q}, \quad 1 \leq q \leq \infty. \quad (3.24)$$

另外, 由 (3.22), 可以导出关于 (Φ, Γ) 的方程组

$$\begin{cases} \partial_t \Phi + \mathbf{u} \cdot \nabla \Phi + \frac{1}{r} \partial_3 \left(\frac{1}{\rho} \left(\Delta - \frac{1}{r^2} \right) u^\theta \right) - (\omega^r \partial_r + \omega^3 \partial_3) \frac{u^r}{r} = 0, \\ \partial_t \Gamma + \mathbf{u} \cdot \nabla \Gamma - \frac{1}{r} \partial_3 \left(\frac{1}{\rho} \left(\left(\Delta - \frac{1}{r^2} \right) u^r - \partial_r \Pi \right) \right) + \frac{1}{r} \partial_r \left(\frac{1}{\rho} (\Delta u^3 - \partial_3 \Pi) \right) + 2 \frac{u^\theta}{r} \Phi = 0. \end{cases} \quad (3.25)$$

但是, 当 $\rho \neq 1$ 时, 方程组 (3.25) 变得很复杂. 即使是无旋涡的情形下, 我们也不能得到像 (3.6) 这么简单的估计. 一种想法是把密度 ρ 和旋涡 u^θ 分别看成是在 1 和 0 附近的小扰动. 并且与上一节证明均质的轴对称 Navier-Stokes 方程组的整体适定想法类似 (参见文献 [51]), 利用 (Φ, Γ) 的方程组和连续性方法来说明整体适定性.

在实际证明过程中, 需要估计对流项 $\|\mathbf{b} \cdot \nabla u^r\|_{L^2}$ 和 $\|\mathbf{b} \cdot \nabla u^3\|_{L^2}$, 使得我们能控制 $\|\nabla \mathbf{u}\|_{L_T^{\infty,2}}$. 文献 [78] 给出了一个可行的方法来估计对流项, 使得最后 $\|\nabla \mathbf{u}\|_{L_T^{\infty,2}}$ 能被 $\|\Gamma\|_{L_T^{\infty,2}}$ 控制. 我们改进了这个估计, 使得最后的结果更加清晰:

$$\begin{aligned} & \|\nabla \mathbf{u}\|_{L_T^{\infty,2}}^2 + \|u_t^r\|_{L_T^{2,2}}^2 + \|u_t^3\|_{L_T^{2,2}}^2 + \|\nabla \Pi\|_{L_T^{2,2}}^2 + \|\Delta \mathbf{u}\|_{L_T^{2,2}}^2 \\ & \leq C(\|(u_0^\theta)^2\|_{L^2}^2 + \|\nabla \mathbf{u}_0\|_{L^2}^2 + \|\mathbf{u}_0\|_{L^2}^4 \|\Gamma\|_{L_T^{\infty,2}}^2) \exp(C\|\mathbf{u}_0\|_{L^2}^3 \|\Gamma\|_{L_T^{\infty,2}}). \end{aligned} \quad (3.26)$$

另外, 我们知道对于 Navier-Stokes 方程组来讲, 存在使得方程组的解保持不变的标尺度变换

$$\mathbf{u}_\lambda(t, x) = \lambda \mathbf{u}(\lambda^2 t, \lambda x), \quad \rho_\lambda(t, x) = \rho(\lambda^2 t, \lambda x), \quad \Pi_\lambda(t, x) = \lambda^2 \Pi(\lambda^2 t, \lambda x).$$

而我们看到小性条件 (3.23) 也是关于尺度变换不变的.

更进一步地, Abidi 和 Zhang^[78] 说明了, 若初值 $\mathbf{u}_0 \in L^1(\mathbb{R}^3)$, 则方程组 (3.19) 的整体解有衰减估计,

$$\|\mathbf{u}(t)\|_{L^2}^2 + \langle t \rangle \|\nabla \mathbf{u}(t)\|_{L^2}^2 + t \langle t \rangle \|(\mathbf{u}_t, \Delta \mathbf{u})(t)\|_{L^2}^2 \leq C \langle t \rangle^{-\frac{3}{2}}, \quad (3.27)$$

其中 $\langle t \rangle = \sqrt{1+t^2}$.

这个结论适用于一般的 Navier-Stokes 方程组. 但我们发现, 对于轴对称方程组来说, 方程组 (3.19) 的整体解关于分量 u^θ 有更好的衰减估计. 我们的结果表明, 如果 $\mathbf{u}_0 \in L^1$ 且 $ru_0^\theta \in L^1 \cap L^2$, 那么,

$$\|ru^\theta(t)\|_{L^2}^2 \leq C \langle t \rangle^{-\frac{3}{2}}, \quad \|u^\theta(t)\|_{L^2}^2 + \langle t \rangle \|\nabla(u^\theta \mathbf{e}_\theta)(t)\|_{L^2}^2 + t \langle t \rangle (\|u_t^\theta(t)\|_{L^2}^2 + \|\Delta(u^\theta \mathbf{e}_\theta)(t)\|_{L^2}^2) \leq C \langle t \rangle^{-\frac{5}{2}}.$$

4 超耗散广义 Navier-Stokes 方程组

众所周知, 当初值相对黏性系数 ν 充分小时, 三维不可压缩 Navier-Stokes 系统 (1.1) 存在唯一的整体解, 参见文献 [2, 4, 5]. 若要对大初值得到整体适定性结论, 人们尝试研究如下超耗散广义 Navier-Stokes 方程组:

$$\partial_t u + (u \cdot \nabla)u + \nabla P = D^2 u, \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad d \geq 3, \quad (4.1)$$

$$\nabla \cdot u = 0, \quad (4.2)$$

$$u(0, x) = u_0(x), \quad (4.3)$$

其中, Fourier 乘子 D 的象征是 $N: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^+$. Tao^[79] 指出 Navier-Stokes 系统的整体正则性问题的困难主要是, 相对于能量 $E(u(t)) := \int_{\mathbb{R}^d} |u(t, x)|^2 dx$, Navier-Stokes 系统是超临界的. 众所周知, 当 $N(\xi) := |\xi|^\alpha$, $\alpha > \frac{d+2}{4}$ (或 $\alpha = \frac{d+2}{4}$) 时, 超耗散 Navier-Stokes 方程是次临界 (或临界) 的, 具有整体正则解, 参见文献 [80] 等. 进一步, Tao^[79] 在更弱的条件 $N(\xi) \geq |\xi|^{(d+2)/4}/f(|\xi|)$ (非递减函数 $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, $\int_1^\infty \frac{ds}{sf^4(s)} = +\infty$) 下, 证明了正则解的整体存在性. 对于 $1 \leq \alpha < \frac{d+2}{4}$ 的情形, 只有很少的研究结果, 参见文献 [80]. 这些结果说明, 对于大初值的系统, 若黏性系数 ν 充分大或黏性项具有更高阶导数, 就可以保证存在唯一的整体正则解.

在研究地球物理学中, 有一类各向异性的不可压缩 Navier-Stokes 方程组 (参见文献 [81])

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \nu_h \Delta_h u - \nu_3 \partial_{x_3}^2 u + (u \cdot \nabla)u + \nabla p = 0, \\ \nabla \cdot u = 0, \\ u(x, 0) = u_0, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^3 \times (0, T), \end{cases} \quad (4.4)$$

其中 $\nu_h > 0$, $\nu_3 \geq 0$, 这里 ν_3 可以取零. Chemin 等^[81] 证明了, 当初值相对水平黏性系数 ν_h 充分小时, 此各向异性系统 (4.4) 具有整体正则解. 文献 [82] 证明了, 当 $u_0 \in B_p^{-1+\frac{2}{p}, \frac{1}{2}}$, $p \geq 2$, 并且

$$[u_0]_{E_T^p} := \|u_0\|_{B_p^{-1+\frac{2}{p}, \frac{1}{2}}} + \|u_F \cdot \nabla u_F\|_{L_T^1(B^{0, \frac{1}{2}})} \leq c\nu_h,$$

其中 $\|f\|_{L_T^1(B^{0, \frac{1}{2}})} := \int_0^T \sum_{j \in \mathbb{Z}} 2^{\frac{j}{2}} \|\Delta_j^v f\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} dt$, $u_F := e^{\nu_h t \Delta_h + \nu_3 t \partial_3^2} u_{0hh}$, $u_{0hh} := \sum_{k \geq l-1} \Delta_k^h \Delta_l^v u_0$, 此各向异性系统 (4.4) 具有整体适定性. 后来, 文献 [83] 考虑了一类大初值,

$$C\nu_h^{-1} \|u_0^h\|_{B^{0, \frac{1}{2}}} \exp\{C\nu_h^{-8} \|u_0^3\|_{B^{0, \frac{1}{2}}}^8 + 1\} \leq 1,$$

即初始垂直速度可以很大的, 则各向异性系统 (4.4) 具有整体正则解. 这里 $B^{0, \frac{1}{2}}$ 是各向异性的 Besov 空间, 其中垂直方向具有 $\frac{1}{2}$ 阶可导性. 换言之, 对于大初值的系统, 若水平黏性系数 ν_h 充分大, 就可以保证存在唯一的整体正则解. 自然就会产生一个问题, 如果水平黏性项具有更高阶导数, 也应该可以保证系统存在唯一的整体正则解. 所以, 我们研究了如下类各向异性的超耗散广义 Navier-Stokes 方程组:

$$\begin{cases} \partial_t u + u \cdot \nabla u + \nu_h D_h^{2\alpha} u + \nu_3 D_3^{2\beta} u + \nabla \Pi = 0, \\ \operatorname{div} u = 0, \\ u|_{t=0} = u_0, \end{cases} \quad (4.5)$$

其中 $D_h^{2\alpha}$ 和 $D_3^{2\beta}$ 是两个 Fourier 乘子, 其象征分别是 $h(\xi_h) = |\xi_h|^{2\alpha}$ 和 $m(\xi) = |\xi_3|^{2\beta}$, $\xi_h \in \mathbb{R}^2$, $\xi_3 \in \mathbb{R}$. 这个系统的解也具有保持不变的标尺度变换:

$$u_\lambda^h(t, x) = \lambda^{2-\frac{1}{\alpha}} u^h(\lambda^2 t, \lambda^{\frac{1}{\alpha}} x_h, \lambda^{\frac{1}{\beta}} x_3), \quad u_\lambda^3(t, x) = \lambda^{2-\frac{1}{\beta}} u^3(\lambda^2 t, \lambda^{\frac{1}{\alpha}} x_h, \lambda^{\frac{1}{\beta}} x_3).$$

那么, 其 L^2 范数是

$$\|u_\lambda^h(t, x)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} = \lambda^{2-\frac{2}{\alpha}-\frac{1}{2\beta}} \|u^h(t, x)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}, \quad \|u_\lambda^3(t, x)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} = \lambda^{2-\frac{1}{\alpha}-\frac{3}{2\beta}} \|u^3(t, x)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}.$$

若希望 u^h 的 L^2 能力具有临界性质, 则要求 $2 - \frac{2}{\alpha} - \frac{1}{2\beta} = 0$. 类似地, 对于 u^3 , 则要求 $2 - \frac{1}{\alpha} - \frac{3}{2\beta} = 0$. 这就要求 $\alpha = \beta = \frac{5}{4}$, 也就是文献 [80] 中的结果. 如果 $\beta = 1$, 则 $(\alpha, \beta) = (\frac{4}{3}, 1)$ 对于水平速度 u_h 而言是临界的, $(\alpha, \beta) = (2, 1)$ 对于垂直速度 u_3 而言是临界的.

在文献 [84] 中, 通过不可压缩条件 $\operatorname{div}_h u^h = -\partial_3 u^3$ 和能量估计方法, 我们证明了在 $(\alpha, \beta) = (\frac{3}{2}, 1)$ 的情形下, 系统 (4.5) 存在唯一的整体正则解.

定理 4.1 设 $s > \frac{1}{2}$, $\alpha \geq \frac{3}{2}$, $\beta = 1$, $u_0 \in H^{0,s}(\mathbb{R}^3)$ 且 $\operatorname{div} u_0 = 0$, 则系统 (4.5) 存在唯一的整体解, 并且对于任意 $T > 0$, 解满足 $u \in C([0, T]; H^{0,s})$, $\nabla_h^\alpha u \in L^2(0, T; H^{0,s})$, $\partial_3 u \in L^2(0, T; H^{0,s})$.

注 4.2 这里, $(\alpha, \beta) = (\frac{3}{2}, 1)$ 对于垂直速度 u_3 而言是超临界的, 对于水平速度 u_h 而言是次临界的. 系统有如下的能量等式:

$$\|u(t)\|_{L^2}^2 + 2\nu_h \int_0^t \|D_h^\alpha u\|_{L^2}^2 d\tau + 2\nu_3 \int_0^t \|\partial_3 u\|_{L^2}^2 d\tau = \|u_0\|_{L^2}^2. \quad (4.6)$$

定理中函数空间 $H^{0,s}$ 的范数定义为 $\|f\|_{H^{0,s}}^2 = \int (1 + |\xi_3|^{2s}) |\hat{f}|^2 d\xi$, 参见文献 [81].

基于文献 [84] 中的方法, 我们还可以得到如下更好的结果.

定理 4.3 设 $\alpha \geq \frac{4}{3}$, $\beta = 1$, $u_0 \in H^{0,1}(\mathbb{R}^3)$ 且 $\operatorname{div} u_0 = 0$, 则系统 (4.5) 存在唯一的整体解, 并且对于任意 $T > 0$, 解满足 $u \in C([0, T]; H^{0,1})$, $\nabla_h^\alpha u \in L^2(0, T; H^{0,1})$, $\partial_3 u \in L^2(0, T; H^{0,1})$.

注 4.4 这里 $(\alpha, \beta) = (\frac{4}{3}, 1)$ 对于垂直速度 u_3 而言是超临界的, 对于水平速度 u_h 而言是临界的.

其证明方法主要是利用能量估计, 我们简要介绍 $\alpha = \frac{4}{3}$ 情形的证明. 系统 (4.5) 有如下能量等式:

$$\|u(t)\|_{L^2}^2 + 2\nu_h \int_0^t \|D_h^{\frac{4}{3}} u\|_{L^2}^2 d\tau + 2\nu_3 \int_0^t \|\partial_3 u\|_{L^2}^2 d\tau = \|u_0\|_{L^2}^2 \quad (4.7)$$

和

$$\|\partial_3 u(t)\|_{L^2}^2 + 2\nu_h \int_0^t \|D_h^{\frac{4}{3}} \partial_3 u\|_{L^2}^2 d\tau + 2\nu_3 \int_0^t \|\partial_3^2 u\|_{L^2}^2 d\tau = \|\partial_3 u_0\|_{L^2}^2 - 2 \int_0^t \sum_{i,j=1}^3 \partial_3 u_i \partial_i u_j \partial_3 u_j dx d\tau. \quad (4.8)$$

在非线性项的估计中, 要充分利用水平区域的超耗散性, $h(\xi_h) = |\xi_h|^{\frac{3}{2}}$. 具体来讲, 对于对流项, 我们分解为

$$\int_0^t \sum_{i,j=1}^3 \partial_3 u_i \partial_i u_j \partial_3 u_j dx d\tau = \int_0^t \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^3 \partial_3 u_i \partial_i u_j \partial_3 u_j dx d\tau - \int_0^t \sum_{j=1}^3 (\partial_1 u_1 + \partial_2 u_2) \partial_3 u_j \partial_3 u_j dx d\tau.$$

其关键点是利用不可压缩条件, $\partial_3 u^3 = -\operatorname{div}_h u^h$, 把一部分 ∂_3 转换为 div_h 进行处理. 利用 Hölder 不等式和 Sobolev 不等式, 我们可以估计如下:

$$\begin{aligned} \left| 2 \int_0^t \sum_{i,j=1}^3 \partial_3 u_i \partial_i u_j \partial_3 u_j dx d\tau \right| &\leq C \int_0^t \|\partial_3 u\|_{L_{x_h}^6(L_{x_3}^4)} \|\partial_h u\|_{L_{x_h}^3(L_{x_3}^4)} \|\partial_3 u\|_{L^2} d\tau \\ &\leq C \int_0^t \|D_h^{\frac{4}{3}} \partial_3 u\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \|\partial_3 u\|_{L^2}^{\frac{1}{4}} \|\partial_3^2 u\|_{L^2}^{\frac{1}{4}} \|D_h^{\frac{4}{3}} u\|_{L^2}^{\frac{3}{4}} \|D_h^{\frac{4}{3}} \partial_3 u\|_{L^2}^{\frac{1}{4}} \|\partial_3 u\|_{L^2} d\tau \\ &\leq \nu_h \int_0^t \|D_h^{\frac{4}{3}} \partial_3 u\|_{L^2}^2 d\tau + \nu_3 \int_0^t \|\partial_3^2 u\|_{L^2}^2 d\tau \\ &\quad + C \int_0^t (\|D_h^{\frac{4}{3}} u\|_{L^2}^2 + t \|\partial_3 u\|_{L^2}^2) \|\partial_3 u\|_{L^2}^2 d\tau. \end{aligned} \quad (4.9)$$

由 (4.7)–(4.9), 利用 Gronwall 不等式, 可以得到先验估计

$$\|\partial_3 u(t)\|_{L^2}^2 + \nu_h \int_0^t \|D_h^{\frac{4}{3}} \partial_3 u\|_{L^2}^2 d\tau + \nu_3 \int_0^t \|\partial_3^2 u\|_{L^2}^2 d\tau \leq \|\partial_3 u_0\|_{L^2}^2 \exp\{C\|u_0\|_{L^2}^2\}.$$

利用文献 [84] 中的类似证明, 易得定理 4.3 的结论.

参考文献

- 1 Tao T. Finite time blowup for an averaged three-dimensional Navier-Stokes equation. J Amer Math Soc, 2016, 29: 601–674
- 2 Fujita H, Kato T. On the Navier-Stokes initial value problem, I. Arch Ration Mech Anal, 1964, 16: 269–315
- 3 Temam R. Navier-Stokes Equations: Theory and Numerical Analysis. Studies in Mathematics and its Applications, vol. 2. Amsterdam-New York-Oxford: North-Holland Publishing, 1977
- 4 Cannone M, Meyer Y, Planchon F. Solutions autosimilaires des équations de Navier-Stokes. Séminaire Équ Dériv Partielles, 1994, 8: 1–10
- 5 Koch H, Tataru D. Well-posedness for the Navier-Stokes equations. Adv Math, 2001, 157: 22–35
- 6 Caffarelli L, Kohn R, Nirenberg L. Partial regularity of suitable weak solutions of the Navier-Stokes equations. Comm Pure Appl Math, 1982, 35: 771–831
- 7 Lin F. A new proof of the Caffarelli-Kohn-Nirenberg theorem. Comm Pure Appl Math, 1998, 51: 241–257
- 8 Leray J. Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace. Acta Math, 1934, 63: 193–248
- 9 Hopf E. Über die Anfangswertaufgabe für die hydrodynamischen Grundgleichungen. Math Nachr, 1950, 4: 213–231
- 10 Prodi G. Un teorema di unicità per le equazioni di Navier-Stokes. Ann Mat Pura Appl (4), 1959, 48: 173–182
- 11 Serrin J. The initial value problems for the Navier-Stokes equations. In: Nonlinear Problem. Madison: University of Wisconsin Press, 1963, 51–60
- 12 Escauriaza L, Seregin G, Šverák V. Backward uniqueness for parabolic equations. Arch Ration Mech Anal, 2003, 169: 147–157
- 13 Beirão da Veiga H. A new regularity class for the Navier-Stokes equations in $\mathbb{R}^n$. Chin Ann Math Ser B, 1995, 16: 407–412
- 14 Neustupa J, Novotny A, Penel P. An interior regularity of a weak solution to the Navier-Stokes equations in dependence on one component of velocity. In: Topics in Mathematical Fluid Mechanics. Quaderni di Matematica. Caserta: Seconda Università di Napoli, 2002, 163–183

- 15 Zhou Y. A new regularity criterion for weak solutions to the Navier-Stokes equations. *J Math Pures Appl* (9), 2005, 84: 1496–1514
- 16 Kukavica I, Ziane M. One component regularity for the Navier-Stokes equations. *Nonlinearity*, 2006, 19: 453–469
- 17 Cao C, Titi E S. Regularity criteria for the three-dimensional Navier-Stokes equations. *Indiana Univ Math J*, 2008, 57: 2643–2661
- 18 Zhou Y, Pokorný M. On the regularity of the solutions of the Navier-Stokes equations via one velocity component. *Nonlinearity*, 2010, 23: 1097–1107
- 19 Penel P, Pokorný M. Some new regularity criteria for the Navier-Stokes equations containing gradient of the velocity. *Appl Math*, 2004, 49: 483–493
- 20 Kukavica I, Ziane M. Navier-Stokes equations with regularity in one direction. *J Math Phys*, 2007, 48: 065203
- 21 Cao C. Sufficient conditions for the regularity to the 3D Navier-Stokes equations. *Discrete Contin Dyn Syst*, 2010, 26: 1141–1151
- 22 Pokorný M. On the result of He concerning the smoothness of solutions to the Navier-Stokes equations. *Electron J Differential Equations*, 2003, 11: 1–8
- 23 Zhou Y, Pokorný M. On a regularity criterion for the Navier-Stokes equations involving gradient of one velocity component. *J Math Phys*, 2009, 50: 123514
- 24 Cao C, Titi E S. Global regularity criterion for the 3D Navier-Stokes equations involving one entry of the velocity gradient tensor. *Arch Ration Mech Anal*, 2011, 202: 919–932
- 25 Pokorný M, Penel P. Improvement of some anisotropic regularity criteria for the Navier-Stokes equations. *Discrete Contin Dyn Syst*, 2013, 6: 1401–1407
- 26 Zhang Z, Yao Z, Lu M, et al. Some Serrin-type regularity criteria for weak solutions to the Navier-Stokes equations. *J Math Phys*, 2011, 52: 053103
- 27 Zhang Z J. A Serrin-type regularity criterion for the Navier-Stokes equations via one velocity component. *Commun Pure Appl Anal*, 2013, 12: 117–124
- 28 Chemin J Y, Zhang P. On the critical one component regularity for 3-D Navier-Stokes systems. *Ann Sci Éc Norm Supér* (4), 2016, 49: 131–167
- 29 Zheng X. A regularity criterion for the tridimensional Navier-Stokes equations in term of one velocity component. *J Differential Equations*, 2014, 256: 283–309
- 30 Lions P L. Mathematical topics in fluid mechanics, vol. 1. Incompressible Models. New York: The Clarendon Press; Oxford University Press, 1996
- 31 Chae D, Lee J. Regularity criterion in terms of pressure for the Navier-Stokes equations. *Nonlinear Anal*, 2001, 46: 727–735
- 32 Lemarié-Rieusset P G. Recent Developments in the Navier-Stokes Problem. London: Chapman and Hall, 2002
- 33 Seregin G, Šverák V. Navier-Stokes equations with lower bounds on the pressure. *Arch Ration Mech Anal*, 2002, 163: 65–86
- 34 Zhou Y. On regularity criteria in terms of pressure for the Navier-Stokes equations in $\mathbb{R}^3$. *Proc Amer Math Soc*, 2006, 134: 149–156
- 35 Ladyzhenskaya O A. The Boundary Value Problems of Mathematical Physics. Berlin: Springer, 1985
- 36 Galdi G P. An Introduction to the Mathematical Theory of the Navier-Stokes Equations, vols. I; II. New York: Springer, 1994
- 37 Stein E M. Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions. Princeton: Princeton University Press, 1970
- 38 Fang D, Qian C. The regularity criterion for 3D Navier-Stokes equations involving one velocity gradient component. *Nonlinear Anal*, 2013, 78: 86–103
- 39 Fang D Y, Qian C Y. Some new regularity criteria for the 3D Navier-Stokes equations. *ArXiv:1212.2335*, 2012
- 40 Fang D Y, Qian C Y. Regularity criterion for 3D Navier-Stokes equations in Besov spaces. *Commun Pure Appl Anal*, 2014, 2: 585–603
- 41 Fang D Y, Qian C Y. Several almost critical regularity conditions based on one component of the solutions for 3D N-S equations. *ArXiv:1312.7378*, 2013
- 42 Ukhovskii M R, Iudovich V I. Axially symmetric flows of ideal and viscous fluids filling the whole space. *J Appl Math Mech*, 1968, 32: 52–62
- 43 Ladyženskaja O A. Unique global solvability of the three-dimensional Cauchy problem for the Navier-Stokes equations

- in the presence of axial symmetry. *Zap Nauchn Sem Leningrad Otdel Mat Inst Steklov (LOMI)*, 1968, 7: 155–177
- 44 Leonardi S, Málek J, Nečas J, et al. On axially symmetric flows in $\mathbb{R}^3$. *Z Anal Anwend*, 1999, 18: 639–649
 - 45 Chae D, Lee J. On the regularity of the axisymmetric solutions of the Navier-Stokes equations. *Math Z*, 2002, 239: 645–671
 - 46 Chen Q, Zhang Z. Regularity criterion of axisymmetric weak solutions to the 3D Navier-Stokes equations. *J Math Anal Appl*, 2007, 331: 1384–1395
 - 47 Neustupa J, Pokorný M. Axisymmetric flow of Navier-Stokes fluid in the whole space with non-zero angular velocity component. *Math Bohem*, 2001, 126: 469–481
 - 48 Kreml O, Pokorný M. A regularity criterion for the angular velocity component in axisymmetric Navier-Stokes equations. *Electron J Differential Equations*, 2007, 2007: 1–10
 - 49 Kubica A, Pokorný M, Zajaczkowski W. Remarks on regularity criteria for axially symmetric weak solutions to the Navier-Stokes equations. *Math Meth Appl Sci*, 2012, 35: 360–371
 - 50 Zhang P, Zhang T. Global axisymmetric solutions to three-dimensional Navier-Stokes system. *Int Math Res Not IMRN*, 2014, 2014: 610–642
 - 51 Chen H, Fang D Y, Zhang T. Regularity of 3D axisymmetric Navier-Stokes equations. *Discrete Contin Dyn Syst*, 2017, 37: 1923–1939
 - 52 Hou T Y, Li C. Dynamic stability of the three-dimensional axisymmetric Navier-Stokes equations with swirl. *Comm Pure Appl Math*, 2008, 61: 661–697
 - 53 Chen C C, Strain R M, Yau H T, et al. Lower bound on the blow-up rate of the axisymmetric Navier-Stokes equations. *Int Math Res Not IMRN*, 2008, 2008: rnn016
 - 54 Chen C C, Strain R M, Tsai T P, et al. Lower bounds on the blow-up rate of the axisymmetric Navier-Stokes equations, II. *Comm Partial Differential Equations*, 2009, 34: 203–232
 - 55 Koch G, Nadirashvili N, Seregin G A, et al. Liouville theorems for the Navier-Stokes equations and applications. *Acta Math*, 2009, 203: 83–105
 - 56 Seregin G, Šverák V. On type I singularities of the local axi-symmetric solutions of the Navier-Stokes equations. *Comm Partial Differential Equations*, 2009, 34: 171–201
 - 57 Jennifer B L, Zhang Q S. A priori bounds for the vorticity of axially symmetric solutions to the Navier-Stokes equations. *Adv Differential Equations*, 2010, 15: 531–560
 - 58 Lei Z, Navas E A, Zhang Q S. A priori bound on the velocity in axially symmetric Navier-Stokes equations. *Comm Math Phys*, 2016, 341: 289–307
 - 59 Lei Z, Zhang Q S. A Liouville theorem for the axially-symmetric Navier-Stokes equations. *J Funct Anal*, 2011, 261: 2323–2345
 - 60 Lei Z, Zhang Q. Criticality of the axially symmetric Navier-Stokes equations. *Pacific J Math*, 2017, 289: 169–187
 - 61 Wei D. Regularity criterion to the axially symmetric Navier-Stokes equations. *J Math Anal Appl*, 2016, 435: 402–413
 - 62 Hou T Y, Lei Z. On the stabilizing effect of convection in three-dimensional incompressible flows. *Comm Pure Appl Math*, 2009, 62: 501–564
 - 63 Hou T Y. Blow-up or no blow-up? A unified computational and analytic approach to 3D incompressible Euler and Navier-Stokes equations. *Acta Numer*, 2009, 18: 277–346
 - 64 Hou T Y, Lei Z. On the partial regularity of a 3D model of Navier-Stokes equations. *Comm Math Phys*, 2009, 287: 589–612
 - 65 Hou T Y, Li C, Shi Z, et al. On singularity formation of a nonlinear nonlocal system. *Arch Ration Mech Anal*, 2011, 199: 117–144
 - 66 Hou T Y, Shi Z, Wang S. On singularity formation of a 3D model for incompressible Navier-Stokes equations. *Adv Math*, 2012, 230: 607–641
 - 67 Hou T Y, Lei Z, Luo G, et al. On finite time singularity and global regularity of an axisymmetric model for the 3D Euler equations. *Arch Ration Mech Anal*, 2014, 212: 683–706
 - 68 Luo G, Hou T Y. Toward the finite-time blowup of the 3D axisymmetric Euler equations: A numerical investigation. *Multiscale Model Simul*, 2014, 12: 1722–1776
 - 69 Hou T Y, Liu P. Self-similar singularity of a 1D model for the 3D axisymmetric Euler equations. *Math Sci*, 2015, 2: 5
 - 70 Hou T Y, Lei Z, Li C. Global regularity of the 3D axi-symmetric Navier-Stokes equations with anisotropic data. *Comm Partial Differential Equations*, 2008, 33: 1622–1637
 - 71 Simon J. Nonhomogeneous viscous incompressible fluids: Existence of velocity, density, and pressure. *SIAM J Math*

- Anal, 1990, 21: 1093–1117
- 72 Ladyženskaja O A, Solonnikov V A. The unique solvability of an initial-boundary value problem for viscous incompressible inhomogeneous fluids. Boundary value problems of mathematical physics, and related questions of the theory of functions. Zap Nauchn Sem Leningrad Otdel Mat Inst Steklov (LOMI), 1975, 52: 52–109; 218–219
 - 73 Danchin R. Local and global well-posedness results for flows of inhomogeneous viscous fluids. Adv Differential Equations, 2004, 9: 353–386
 - 74 Danchin R, Mucha P B. A Lagrangian approach for the incompressible Navier-Stokes equations with variable density. Comm Pure Appl Math, 2012, 65: 1458–1480
 - 75 Abidi H, Gui G, Zhang P. On the wellposedness of three-dimensional inhomogeneous Navier-Stokes equations in the critical spaces. Arch Ration Mech Anal, 2012, 204: 189–230
 - 76 Paicu M, Zhang P, Zhang Z. Global unique solvability of inhomogeneous Navier-Stokes equations with bounded density. Comm Partial Differential Equations, 2013, 38: 1208–1234
 - 77 Chen H, Fang D, Zhang T. Global axisymmetric solutions of 3D inhomogeneous incompressible Navier-Stokes systems with nonzero swirl. Arch Ration Mech Anal, 2017, 223: 817–843
 - 78 Abidi H, Zhang P. Global smooth axisymmetric solutions of 3-D inhomogeneous incompressible Navier-Stokes system. Calc Var Partial Differential Equations, 2015, 54: 3251–3276
 - 79 Tao T. Global regularity for a logarithmically supercritical hyperdissipative Navier-Stokes equation. Anal PDE, 2009, 2: 361–366
 - 80 Katz N H, Pavlović N. A cheap Caffarelli-Kohn-Nirenberg inequality for the Navier-Stokes equation with hyperdissipation. Geom Funct Anal, 2002, 12: 355–379
 - 81 Chemin J Y, Desjardins B, Gallagher I, et al. Mathematical Geophysics: An Introduction to Rotating Fluids and the Navier-Stokes Equations. Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications, vol. 32. Oxford: The Clarendon Press; Oxford University Press, 2006
 - 82 Zhang T, Fang D. Global wellposed problem for the 3-D incompressible anisotropic Navier-Stokes equations. J Math Pures Appl (9), 2008, 90: 413–449
 - 83 Zhang T. Global wellposed problem for the 3-D incompressible anisotropic Navier-Stokes equations in an anisotropic space. Comm Math Phys, 2009, 287: 211–224
 - 84 Fang D, Han B. Global solution for the generalized anisotropic Navier-Stokes equations with large data. Math Model Anal, 2015, 20: 205–231

Some problems on the regularity of solutions for the 3D Navier-Stokes equations

Daoyuan Fang & Ting Zhang

Abstract In this paper, we review some recent work on the Cauchy problem of the three-dimensional incompressible Navier-Stokes equations in recent years. It is well known that the three-dimensional incompressible Navier-Stokes system has the global Leray-Hopf weak solutions. When the weak solution satisfies the Prodi-Serrin condition, the solution is regular. We obtain some new results in the regularity conditions. Especially, for axisymmetric system, when the rotation speed is zero, it is well known that the system is globally well-posed. We find a new conserved quantity, and obtain some new advances in the regularity conditions of axisymmetric solutions with nonzero swirl, also get the global well-posedness results with the small initial rotating speed. Furthermore, we also get the similar result for the inhomogeneous system. In the end, we consider the global well-posedness of a class of generalized Navier-Stokes systems with the higher order horizontal viscosity $D_h^{2\alpha}$, $\alpha \geq \frac{4}{3}$.

Keywords incompressible Navier-Stokes equations, regularity conditions, global well-posedness

MSC(2010) 35Q30, 76D03, 76D05

doi: 10.1360/N012017-00046