第 50 卷 第 3 期 厦门大学学报(自然科学版) Vol. 50 No. 3
2011 年 5 月 Journal of Xiamen University (Natural Science) May 2011

极大 3-限制性边连通图的若干充分条件

郭利涛[1], 徐 兰[2], 郭晓峰[1*]
(1. 厦门大学数学科学学院, 福建 厦门 361005; 2. 昌吉学院数学系, 新疆 昌吉 831102)

摘要: 设 $G=(V,E)$是一个连通图. 如果 $\lambda_3(G)=\xi_3(G)$, 则 G 是 λ_3-最优或者极大 3-限制性边连通的, 其中$\xi_3(G)=\min\{|[X,Y]|: X\subset V, |X|=3, G[X]$连通$\}$. G 的逆度是指$R(G)=\sum_{v\in V}\frac{1}{d(v)}$. 本文主要研究 $R(G)$ 与顶点数 n, 最小度 δ 及ξ_3 的关系, 并由此得到一函数, 用这一函数来限制 $R(G)$, 使 G 是 λ_3-最优的.

关键词: 3-限制性边连通度; λ_3-最优; 逆度
中图分类号: O 157 文献标志码: A 文章编号: 0438-0479(2011)03-0498-03

1 预备知识

本文我们只考虑简单无向连通图. 除非特别说明, 对术语和定义我们参考文献[1]. 设 $G=(V,E)$是一个连通图. 一个点 $v\in V$ 的度 $d(v)$ 就是和 v 相邻的点的数目, $\delta(G)$是 G 的最小度. 对于 $v\in V$, $N(v)$是所有和 v 相邻的点集. 我们将 $G-\{v\}$记做 $G-v$, $\xi(G)=\min\{d(x)+d(y)-2: xy\in E\}$是最小边度.

一个网络经常模拟成一个图 G. 衡量网络容错性的一个经典的参数就是边连通度 $\lambda(G)$. 一般地, $\lambda(G)$越大, 网络越稳定. 我们知道 $\lambda(G)\leqslant\delta(G)$. 如果图 G 满足 $\lambda(G)=\delta(G)$, 则 G 是极大边连通的或 λ-最优. 边连通度没有对图的分支进行限制, 因此限制性边连通度就被提出.

边集 $S\subset E$, 如果 $G-S$ 不连通且 $G-S$ 的每个连通分支至少有 2 个点, 则称 S 是一个限制性边割. 限制性边连通度 $\lambda'(G)$就是 G 的最小限制性边割的基数. Esfahanian 等证明了限制性边割的存在性及限制性边连通度的上界[2].

定理 1[2] G 是至少有 4 个点且不同构于星 $K_{1,n-1}$的连通图, 则限制性边割是存在的, 并且 $\lambda'(G)\leqslant\xi(G)$.

如果 $\lambda'(G)=\xi(G)$, 则称 G 是 λ'-最优的. 边集 $S\subset E$, 如果 $G-S$ 不连通且 $G-S$ 的每个连通分支至少有 3 个点, 则称 S 是一个 3-限制性边割. 3-限制性边连通度 $\lambda_3(G)$就是 G 的最小 3-限制性边割的基数. 如果 3-限制性边割存在, 则称 G 是 λ_3-连通的. 如果 S 是一个 3-限制性边割且$|S|=\lambda_3(G)$, 我们称 S 是一个 λ_3-割. 对于 3-限制性边连通度 $\lambda_3(G)$, 有如下定理.

定理 2[3] 如果 G 是 λ_3-连通的, 则 $\lambda_3(G)\leqslant\xi_3(G)$.

如果 $\lambda_3(G)\leqslant\xi_3(G)$, 则称 G 是 λ_3-最优或者极大 3-限制性边连通的, 其中 $\xi_3(G)=\min\{|[X,Y]|: X\subset V, |X|=3, G[X]$连通$\}$, $G[X]$是由 X 导出的子图, $Y=V-X$, $[X,Y]$是一个端点在 X 中另一个在 Y 中的边集. 如果 G 是围长$g(G)\geqslant 4$ 的图, 那么

$\xi_3(G)=\min\{d(x)+d(y)+d(z)-4: xyz$ 是 G 的一条 2 长路$\}$.

G 是一个没有孤立点的图, 定义逆度 $R(G)=\sum_{v\in V}\frac{1}{d(v)}$, 逆度最早是在文献[4]中提出, 许多学者对它进行了研究[5-7]①②, 给出了 λ'-最优图及 λ_3-最优图的一些充分条件[8-9]. 本文我们将给出 λ_3-最优图的一些充分条件.

2 主要结果

首先, 对于不含三角形图有如下结果.

定理 3 设 G 是 λ_3-连通的不含三角形的 n 阶图,

收稿日期: 2010-04-21
基金项目: 国家自然科学基金项目(10831001, 11026183); 福建省教育厅科研项目(JA10021)
* 通信作者: xfguo@xmu.edu.cn

① Guo Litao, Guo Xiaofeng. The reliability of graphs and inverse degree. Information Science, submitted.

② Guo Litao, Qin Chengfu, Guo Xiaofeng. Sufficient conditions for graphs to be super edge connected in terms of inverse degree. International Journal of Computer Mathematics, submitted.

$S=[X,Y]$ 是一个 λ_3-割($|X|\leqslant|Y|$)且对任意的路 $xyz\in G[X]$ 及 $u\in N(x)\cap N(z)\cap X-y$, 均有 $|N(u)\cap Y|\geqslant 2$, 如果 $n\leqslant 4\delta+1$, 则 G 是 λ_3-最优的.

证明　假设 $\lambda_3(G)<\xi_3(G)$. $S=[X,Y]$ 是一个 λ_3-割且 $3\leqslant|X|\leqslant|Y|$, X 中的至少和 $[X,Y]$ 的一条边关联的点集记为 X_1, $X_0=X-X_1$.

情形 **1**　$X_0=\varnothing$.

因此 X 中的每个点至少和 $[X,Y]$ 的一条边关联. 选取一条路 $xyz\in G[X]$, 我们有

$$\begin{aligned}\xi_3(G)\leqslant\ & d(x)+d(y)+d(z)-4\leqslant\\ & |N(x)\backslash\{y\}|+|N(y)\backslash\{x,z\}|+\\ & |N(z)\backslash\{y\}|=|(N(x)\cap X)\backslash\{y\}|+\\ & |N(x)\cap Y|+|(N(y)\cap X)\backslash\{x,z\}|+\\ & |N(y)\cap Y|+|(N(z)\cap X)\backslash\{y\}|+\\ & |N(z)\cap Y|\leqslant\\ & |[\{x,y,z\},Y]|+|(N(y)\cap X)\backslash\{x,z\}|+\\ & |(N(x)\cap X)\backslash N(z)|+|(N(z)\cap X)\backslash\\ & N(x)|+2|(N(x)\cap N(z)\cap X)\backslash\{y\}|\leqslant\\ & |[\{x,y,z\},Y]|+|[X\backslash\{x,y,z\},Y]|=\\ & |[X,Y]|=\lambda_3(G).\end{aligned}$$

这样, 我们得到矛盾.

情形 **2**　$X_0\neq\varnothing$.

情形 **2.1**　$G[X_0]$ 是独立集. 设 $x\in X_0$, $y,z\in X_1$, $xyz\in G[X]$ 是一条路, 则 $N(x)\subseteq X_1$. 类似于情形 1, 也可以得到矛盾.

情形 **2.2**　选取一条边 $xy\in G[X_0]$, $xyz\in G[X]$ 是一条路. 因此 $N(x)\subseteq X$, $N(y)\subseteq X$, 又 G 不含三角形, 我们有

$$\begin{aligned}|X|=\ & |X_1|+|X_0|\geqslant|N(x)\cup N(y)\cup N(z)-\\ & \{x,y,z\}|+3\geqslant\min\{d(x)-1,d(z)-1\}+\\ & d(y)-1+3\geqslant 2\delta+1,\ (N(x)\cap N(y)=\varnothing),\end{aligned}$$

因此, $|Y|\geqslant|X|\geqslant 2\delta+1$, 所以 $n\geqslant 4\delta+2$, 矛盾.

类似于定理 3 的证明, 我们得到如下引理.

引理 1　设 G 是 λ_3-连通的围长大于等于 5 的图. 如果 $\lambda_3(G)<\xi_3(G)$, 则存在一个 λ_3-割 $S=[X,Y]$, $X,Y\subset V(G)$, $X\cup Y=V(G)$, 使得 $|X|,|Y|\geqslant\xi_3+3$.

推论 1　设 G 是 λ_3-连通的围长大于等于 5 的图. 如果 $n\leqslant 2\xi_3+5$, 则 G 是 λ_3-最优的.

引理 2[6]

(i) 设 $a_1,\cdots,a_p,A$ 为正实数且有 $\sum_{i=1}^{p}a_i\leqslant A$, 则 $\sum_{i=1}^{p}(1/a_i)\geqslant p^2/A$.

(ii) 另外, 如果 $a_1,\cdots,a_p,A$ 是正整数, a,b 是整数满足 $A=ap+b$, $0\leqslant b\leqslant p$. 那么 $\sum_{i=1}^{p}(1/a_i)\geqslant(p-b)/a+b/(a+1)$. 等式成立的充要条件是 $p-b$ 个 a_i 等于 a 且其余的 a_i 等于 $a+1$.

(iii) 设 $f(x)$ 是在区间 $[L,R]$ 的连续凸函数, 并且 $l,r\in[L,R]$, $l+r=L+R$, 则 $f(L)+f(R)\geqslant f(l)+f(r)$.

定理 4　设 G 是 λ_3-连通的围长大于等于 5 的图, 如果

$$R(G)\leqslant 2+\frac{1}{\delta}-\frac{\xi_3-1}{(3\delta-1)(3\delta-2)}+\frac{n-3\delta-\xi_3+2}{(n-3\delta+1)(n-3\delta)},$$

则 G 是 λ_3-最优的.

证明　设 G 不是 λ_3-最优的, 则 $\lambda_3(G)<\xi_3(G)$. 由引理 1, 存在一个 λ_3-割 $S=[X,Y]$, 使得 $|X|,|Y|\geqslant\xi_3+3\geqslant 3\delta-1$, 即 $3\delta-1\leqslant|X|,|Y|\leqslant n-3\delta+1$.

因此, 我们有 $\sum_{y\in Y}d(y)<|Y|(|Y|-1)+\lambda_3$. 根据引理 2(ii), 我们有

$$\sum_{y\in Y}\frac{1}{d(y)}>\frac{|Y|-\lambda_3}{|Y|-1}+\frac{\lambda_3}{|Y|}=1+\frac{1}{|Y|-1}-\frac{\lambda_3}{|Y|(|Y|-1)}.$$

G 有一个最小度为 δ 的点 v, 不妨假设 $v\in X$. 那么

$$\sum_{x\in X-v}d(v)<(|X|-1)^2+\lambda_3.$$

根据引理 2(ii), 我们有

$$\sum_{x\in X}\frac{1}{d(x)}>\frac{1}{\delta}+\frac{|X|-1-\lambda_3}{|X|-1}+\frac{\lambda_3}{|X|}=1+\frac{1}{\delta}-\frac{\lambda_3}{|X|(|X|-1)}.$$

因为 $1/(|Y|-1)\geqslant 1/(n-3\delta)$, 则

$$R(G)>2+\frac{1}{\delta}+\frac{1}{n-3\delta}-\frac{\lambda_3}{|Y|(|Y|-1)}-\frac{\lambda_3}{|X|(|X|-1)}.$$

考虑函数 $g(t)=\dfrac{1}{t(t-1)}$. 容易验证 $g''(t)>0$ $(t>1)$, 因此 g 是凸函数. 又 $|X|,|Y|\geqslant 3\delta-1$, $|X|+|Y|=n$. 根据引理 2(iii), 我们有

$$\frac{1}{|X|(|X|-1)}+\frac{1}{|Y|(|Y|-1)}\leqslant\frac{1}{(3\delta-1)(3\delta-2)}+\frac{1}{(n-3\delta+1)(n-3\delta)}.$$

又由于 $\lambda_3\leqslant\xi_3-1$, 则

$$R(G) > 2 + \frac{1}{\delta} + \frac{1}{n-3\delta} - \frac{\xi_3 - 1}{(3\delta-1)(3\delta-2)} - \frac{\xi_3 - 1}{(n-3\delta+1)(n-3\delta)} = 2 + \frac{1}{\delta} - \frac{\xi_3 - 1}{(3\delta-1)(3\delta-2)} + \frac{n-3\delta-\xi_3+2}{(n-3\delta+1)(n-3\delta)},$$

矛盾.

参考文献:

[1] Bondy J A, Murty U S R. Graph theory and its application [M]. USA: Academic Press, 1976.

[2] Esfahanian A H, Hakimi S L. On computing a conditional edge-connectivity of a graph[J]. Information Processing Letters, 1988, 27: 195-199.

[3] Meng J X, Ji Y H. On a kind of restricted edge connectivity of graphs[J]. Discrete Applied Math, 2002, 117: 183-193.

[4] Fajtlowicz S. On conjectures of Graffiti, III[J]. Congressus Numerantium, 1988, 66: 23-32.

[5] Dankelmann P, Swart H C, van den Berg P. Diameter and inverse degree[J]. Discrete Math, 2008, 308: 670-673.

[6] Dankelmann P, Hellwig A, Volkmann L. Inverse degree and edge-connectivity[J]. Discrete Math, 2009, 309: 2943-2947.

[7] Guo L T, Guo X F. Sufficient conditions for graphs to be super restricted edge connected[J]. 数学研究, 2010, 43(3): 242-248.

[8] Guo L T, Meng J X. Sufficient conditions for λ_3-optimality of triangle-free graphs[J]. 运筹学学报, 2008, 12: 25-31.

[9] Zhang Z. Sufficient conditions for restricted-edge-connectivity to be optimal[J]. Discrete Math, 2007, 307: 2891-2899.

Sufficient Conditions for Graphs to Be Maximally 3-restricted Edge Connected

GUO Li-tao[1], XU Lan[2], GUO Xiao-feng[1*]

(1. School of Mathematical Sciences, Xiamen University, Xiamen 361005, China;

2. Department of Mathematics, Changji College, Changji 831102, China)

Abstract: Let $G=(V,E)$ be a connected graph. A graph G is called λ_3-optimal, if $\lambda_3(G)$, where $\xi_3(G)=\min\{|[X,Y]|: X\subset V, |X|=3, G[X]$ is connected$\}$. In this paper, we study the relation between $R(G)$ and vertex number n, minimum degree δ, ξ_3, and obtain a function. If $R(G)$ is not more than the function, then G is λ_3-optimal.

Key words: 3-restricted edge connectivity; λ_3-optimal; inverse degree