平面柔顺机构大挠度弹性静力学分析的低维参数化曲率模型

黄勇刚¹, 谢丹^{2*}

1. 重庆工商大学制造装备机构设计与控制重庆市重点实验室, 重庆 400067;

2. 西南大学工程技术学院, 重庆 400715

* E-mail: danxie2017@swu.edu.cn

收稿日期: 2021-03-30; 接受日期: 2021-07-20; 网络版发表日期: 2021-10-08

国家自然科学基金(批准号: 51805448)资助项目

摘要 针对以均质细长弹性梁为柔性构件的平面柔顺机构, 通过采用Bernstein多项式逼近柔性梁弯曲曲率, 提出了一种适用于大挠度强几何非线性弹性静力学分析的低维参数化曲率模型, 并给出了基于高斯积分和牛顿拉弗森迭代的数值求解算法. 该建模方法的特点是直接以柔性梁弯曲应变即曲率为基本未知场函数, 以Bernstein多项式试函数的待定系数为基本未知量, 基于最小总势能原理建立系统的几何非线性静力平衡方程. 因而避免了传统基于位移的建模求解算法通过求导计算弯曲应变能引入的数值误差, 并降低了试函数的光滑性要求, 建模精度高、数值计算收敛速度快且直曲梁通用. 同时所求参数化曲率解与坐标系无关, 具有丰富的几何和力学意义, 既能实现刚体位移和柔体变形的统一建模, 又能高效呈现细长梁大挠度弯曲复杂、丰富的变形信息. 通过多个算例的建模分析, 数值计算结果充分证明了本文方法的有效性和优越性.

关键词 柔顺机构, 几何非线性, Bernstein多项式, 曲率逼近, 参数化模型

1 引言

利用均质细长梁的弹性变形实现运动或力的传递与变换功能的分布柔顺机构(又称柔性机构), 相对刚体机构具有高精度、高可靠性且无摩擦磨损等优势并能实现免装配和免维护, 同时相对集中柔性铰链柔顺机构能实现更大工作行程和工作空间且工作应力小^[1], 近年来在精密定位平台^[2,3]、柔性及仿生机器人^[4-6]、宇航飞行器^[7,8]、微机电系统^[9,10]、机械超材料^[11,12]、

生物医学工程^[13,14]等应用领域受到广泛重视. 对均质细长梁, 线性本构关系下的局部小应变沿梁弧长的积累可形成整体大挠度变形, 对以其为柔性构件的平面柔顺机构进行弹性静力学建模分析, 不仅需要分析机构系统层面如载荷与位移关系、位移与应变能关系、含柔性梁挠曲线的系统平衡构型以及关键点位的线位移与转角等整体特性, 还需要分析柔性梁构件层面的大挠度变形度量和复杂的变形特征, 如转角、曲率与应力、曲率与应力变化率沿梁弧长的变化, 拐点个数

引用格式: 黄勇刚, 谢丹. 平面柔顺机构大挠度弹性静力学分析的低维参数化曲率模型. 中国科学: 技术科学, 2022, 52: 565–584

Huang Y G, Xie D. Curvature-based low-dimensional parametric model for the elastostatics analysis of planar compliant mechanisms under large deflection (in Chinese). Sci Sin Tech, 2022, 52: 565–584, doi: 10.1360/SST-2021-0131

及其位置、曲率极值点及其位置、应力极值点及其位置以及随机构整体变形运动的变化规律等。目前, 对此类柔顺机构进行建模分析仍面临如下三个方面的挑战: 第一是, 大挠度涉及大位移、大转角, 甚至产生含拐点的屈曲, 具有强几何非线性特点, 需要高精度的建模方法体现此类连续体的复杂变形特征; 第二是, 机构中的刚体位移与柔体变形相互耦合。如何对大挠度柔性梁进行低维参数化建模, 实现与传统刚体机构位姿分析类似的刚柔一体化位移描述, 在刚体的位移表示中考虑柔体变形的影响, 以及在柔体的静力变形模型中集成刚体的位姿表示和分析方法, 是实现系统整体弹性静力学特性和柔性构件本身的变形度量及变形特征分析的关键; 第三是, 柔顺机构常采用串联、并联以及混联等复杂阵列结构形式, 且柔体末端的载荷和几何约束方式多样, 并随着系统工作状态而变化, 需要高效率的建模和求解算法分析不同系统位形下的变形响应。

目前, 虽然文献中有较多的方法能够对柔性梁大挠度弯曲的几何非线性问题进行有效求解^[15], 但均不能较好兼顾前述三个挑战。非线性有限元类的几何精确梁模型^[16]、共旋坐标法^[17]、绝对节点坐标法^[18]、等几何分析^[19]以及有限差分法^[20]和打靶法^[21]等常见的数值计算方法能够通过增加单元数或节点数获得高精度, 且具有较好的通用性。在应用于柔顺机构特别是复杂阵列结构的设计分析时, 常涉及构件尺寸参数、初始直曲状态的改变以及刚柔性质的转换, 此类常见的基于离散建模的数值计算方法需要重新划分网格或设置计算节点, 且其求解结果为大量的离散节点数据, 既不方便呈现大挠度梁复杂丰富的变形特征, 也不便于刚体位姿和柔体变形统一建模, 建模及分析计算效率相对较低。椭圆积分法^[1,22]和椭圆函数法^[23]能够获得已知末端载荷状态下细长梁的精确解析表达式, 但其推导过程繁琐, 仅能直接应用于末端载荷和转角已知的情形。应用于柔顺机构分析时需要将柔性梁末端载荷作为基本未知量进行数值迭代求解, 计算效率较低, 亦不便于分析梁弯曲的变形度量和变形特征。而链式算法是一种分段解析法, 此类建模方法将细长梁分割为短梁段, 以分割点的内力作为基本未知量, 并视每段短梁为固结在前一短梁上的悬臂梁。对短梁段采用不同的解析模型, 将形成不同的链式算法, 如基于小挠度悬臂梁解析解的经典链式算法, 基于挠曲线

圆弧近似的常曲率段模型^[24], 基于能体现中等挠度梁非线性特征的梁约束模型^[25,26]的链式算法^[27]等。增加分割段数可以提高链式算法的精度, 但效率较低且较难体现局部精细化的变形特征, 并且对直梁和曲梁需要采用不同的分割计算方案^[28], 通用性不足, 亦不利于与刚体进行集成建模。

不同于前述的离散节点数值解和解析解, 参数化模型法能实现刚柔一体化位姿描述, 便于柔顺机构的设计、分析和优化。参数化模型法的典型代表是多伪刚体模型^[29]。多伪刚体模型根据大挠度梁弯曲的末端轨迹和转角, 将细长梁等效为运动副带弹性元件的多自由度串联刚体机构进行建模和求解, 为非线性特性分析和刚柔统一建模提供了一种强大的参数化手段。多伪刚体模型除了精度较差以及对载荷的适应范围不广外, 最根本的不足是不能描述柔性梁的连续体变形特征和变形度量, 同时模型的通用性不足。为了适应曲梁以及体现具有拐点的弯曲变形, 多伪刚体模型需要采用不同的方案^[30-32]。另一类参数化模型方法则基于对大挠度梁挠曲线或曲率的整体逼近。如动态样条法^[33]采用Bézier曲线逼近梁的挠曲线, 将Bézier曲线控制点坐标作为基本待定参数。动态样条法的实质是一个单元的等几何分析, 其优点在于几何直观性以及数值算法的规范性、通用性, 但需要较多控制点以获得高精度影响计算效率, 且求解结果依赖坐标系。而光滑曲率模型法^[34]采用不高于二次的Legendre多项式基函数的线性组合逼近大挠度梁的弯曲曲率, 二次多项式的三个系数为基本待定参数, 建模精度较高, 通用性和计算效率均较好。其不足是, Legendre多项式次数的提升及计算的规范性和效率不高, 参数的几何和力学意义不明显, 不便于体现大挠度柔性梁复杂、丰富的变形特征。

基于上述对建模方法的挑战和现状的分析, 本文提出一种适用于以均质细长弹性梁为柔性构件的平面柔顺机构大挠度分析的高精度、高计算效率、通用性强并便于刚体和柔体统一建模, 且能高效呈现柔性梁强几何非线性复杂变形特征的低维参数化曲率模型和相应的数值求解算法。具体内容如下: 第二节介绍基于微分几何曲线论基本定理和逼近论Weierstrass第一定理, 采用Bernstein多项式曲率对平面挠曲线进行低维参数化表示的方法, 推导出由曲率参数确定相应挠曲线以及计算弯曲应变能的通用公式, 并给出曲率参数

意义的几何解释和基于曲率参数的挠曲线变形特征分析方法. 第三节应用挠曲线的低维参数化曲率模型, 将细长梁看成一种以曲率参数为关节变量的弹性体运动副, 从而基于平面刚体位姿变换矩阵给出柔顺机构位形统一建模方法. 第四节以曲率参数为基本未知量, 在第二节给出的弯曲应变能计算公式和第三节给出的刚柔一体化位姿建模方法基础上, 基于最小总势能原理, 建立载荷和位移复合约束下平面柔顺机构的几何非线性平衡方程. 第五节介绍基于高斯积分和牛顿拉弗森迭代的非线性平衡方程数值求解算法. 第六节简要讨论算法的误差来源及其估计, 并应用经典算例验证本文方法的精度. 第七节为不同应用场合的数值算例, 以体现本文方法在平面细长梁大挠度弯曲建模以及平面柔顺机构非线性弹性静力学分析中的应用优势.

2 Bernstein多项式曲率与平面挠曲线参数化

采用Bernstein多项式曲率对平面细长梁挠曲线进行参数化有如下优点: (1) 从几何观点来看, 曲率是挠曲线内蕴不变量, 基于曲率的试函数以及求解结果与坐标系无关, 对初始直梁和曲梁均能适用; (2) 从力学观点来看, 曲率是弯曲应变度量, 根据曲率能直接精确计算应变能和应力; 而有限元、等几何分析等基于位移的建模方法, 需要通过求导计算应变能和应力, 引入了数值计算误差; (3) 从计算简便性和直观性来看, Bernstein基函数及多项式有许多独特性质和丰富规范的算法, 几何意义明确, 方便体现大挠度下的弯曲变形特征.

2.1 平面挠曲线与Bernstein多项式曲率

根据微分几何曲线论基本定理^[35], 给定实数区间 $[0, L]$ 上的连续可微函数 $k(s)$, 必存在且唯一存在以 s 为弧长的平面曲线 $\mathbf{r}(s)$, 使得 $s \in [0, L]$ 时的相对曲率为 $k(s)$. 为表达相对曲率 $k(s)$ 与平面曲线 $\mathbf{r}(s)$ 的关系和曲线末端相对首端的位姿, 如图1建立平面挠曲线首端和末端连体坐标系: 曲线起点为首端坐标系原点, 起点切向量指向弧长 s 增大方向为 x 轴正向, x 轴逆时针旋转 90° 为 y 轴正向; 曲线终点为末端坐标系原点, 终点切线指向曲线外为 x' 轴正向, x' 轴逆时针旋转 90° 为 y' 轴正向.

图1 平面挠曲线坐标系及微分几何量关系

Figure 1 Relationship between the coordinate system and differential geometry of a planar curve.

图1所示弧长 s 处, 挠曲线坐标和切线转角满足如下微分方程:

$$\begin{cases} \frac{d\theta}{ds} = k(s), \\ \frac{dx}{ds} = \cos\theta, \\ \frac{dy}{ds} = \sin\theta. \end{cases} \quad (1)$$

因此在图1所示坐标系下, 由 $k(s)$ 确定的平面挠曲线 $\mathbf{r}(s)$ 及其切线转角 $\theta(s)$ 可由如下积分形式表示:

$$\theta(s) = \int_0^s k(\sigma) d\sigma, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(s) = \begin{bmatrix} x(s) \\ y(s) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \int_0^s \cos[\theta(\sigma)] d\sigma \\ \int_0^s \sin[\theta(\sigma)] d\sigma \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \int_0^s \cos\left[\int_0^\sigma k(\eta) d\eta\right] d\sigma \\ \int_0^s \sin\left[\int_0^\sigma k(\eta) d\eta\right] d\sigma \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (3)$$

式中, $\sigma \in [0, s]$, $s \in [0, L]$.

根据逼近论Weierstrass第一定理^[36], 曲率函数 $k(s)$ 可由多项式逼近. 本文采用具有非负性、单位分解性、递推性、对称性等多种独特性质的Bernstein基函数^[37]线性组合而成的多项式逼近曲率函数 $k(s)$. Bernstein多项式具有端点插值性、凸包性、变差缩减性等优良性质, 以及简洁高效的求导、求积和升阶等标准算法^[37], 特别是其系数还有如后所述的独特几何意义.

采用 n 次($n+1$ 阶)Bernstein多项式逼近细长梁挠曲线的曲率时, $k(s)$ 具有如下形式:

$$k(\mathbf{q}, s) = \sum_{i=0}^n q_i B_{i,n}(t) = \mathbf{B}^T \mathbf{q}, \quad (4)$$

式中, $t=s/L \in [0, 1]$ 是挠曲线弧长归一化参数. $\mathbf{B}=[B_{0,n}(t), B_{1,n}(t), \dots, B_{n,n}(t)]^T$ 是 $n+1$ 个 n 次Bernstein基函数组成的列阵, 其元素一般形式为

$$B_{i,n}(t) = C_n^i (1-t)^{n-i} t^i, \quad (5)$$

式中, C 是组合数符号,

$$C_n^i = \frac{n!}{i!(n-i)!}, C_n^0 = C_n^n = 1. \quad (6)$$

而 $\mathbf{q}=[q_0, q_1, \dots, q_n]^T$ 是 $n+1$ 个具有曲率量纲的系数列阵, 可看成是梁弯曲变形的自由度或广义坐标, 构成 $n+1$ 维曲率参数空间. 该曲率参数空间中的任意点 $\mathbf{q}$ 通过式(4)对应一 n 次Bernstein多项式曲率, 从而由式(3)确定一条平面挠曲线, 对应细长梁弯曲的某个平衡位形. 由此, 柔性梁具有无穷多自由度的连续体变形就可采用有限维的 $n+1$ 个曲率参数近似. 显然, Bernstein多项式的次数越高, 其对曲率函数的逼近就越精确, 但待定曲率参数多, 曲率参数空间维数高, 模型复杂, 计算效率低. 对细长梁只受末端载荷或末端位移控制的情形, 后续研究结果表明, 仅需采用不高于3次(4曲率参数)的Bernstein多项式, 即使用低维参数化曲率模型就可获得对大挠度变形的高精度逼近, 同时模型复杂度、计算量均较小.

2.2 平面挠曲线的曲率参数表示

如果已知或由本文后续方法求得 $n+1$ 个曲率参数 $\mathbf{q}=[q_0, q_1, \dots, q_n]^T$, 则可根据式(4), (2)和(3)确定柔性梁弯曲的曲率、转角以及挠曲线方程.

将式(4)代入式(2), 并根据Bernstein基函数的积分公式^[37],

$$\int_0^t B_{i,n}(t) dt = \frac{1}{n+1} \sum_{j=i+1}^{n+1} B_{j,n+1}(t), \quad (7)$$

可得弯曲的转角计算公式:

$$\theta(\mathbf{q}, s) = \frac{L}{n+1} \sum_{i=0}^n \sum_{j=i+1}^{n+1} q_i B_{j,n+1}\left(\frac{s}{L}\right). \quad (8)$$

由式(3)和上式可得挠曲线积分形式的坐标方程:

$$\begin{cases} x(\mathbf{q}, s) = \int_0^s \cos\left[\frac{L}{n+1} \sum_{i=0}^n \sum_{j=i+1}^{n+1} q_i B_{j,n+1}\left(\frac{\sigma}{L}\right)\right] d\sigma, \\ y(\mathbf{q}, s) = \int_0^s \sin\left[\frac{L}{n+1} \sum_{i=0}^n \sum_{j=i+1}^{n+1} q_i B_{j,n+1}\left(\frac{\sigma}{L}\right)\right] d\sigma. \end{cases} \quad (9)$$

将 $s=L$ 代入式(8), 可得挠曲线末端转角与曲率参数有如下简单关系:

$$\theta(\mathbf{q}, L) = \frac{L}{n+1} \sum_{i=0}^n q_i. \quad (10)$$

将 $s=L$ 代入式(9), 可得挠曲线末端位置 $x(\mathbf{q}, L)$ 和 $y(\mathbf{q}, L)$.

2.3 曲率参数化下的平面大挠度梁应变能及无量纲广义刚度矩阵

设均质细长梁的长度、弹性模量、截面惯性矩分别为 L, E, I , 并设梁的初始无应力曲率参数列阵为 $\mathbf{q}_0$, 则梁弯曲到曲率参数为 $\mathbf{q}$ 状态下的应变能为

$$U(\mathbf{q}) = \frac{1}{2} EI \int_0^L [k(\mathbf{q}, s) - k(\mathbf{q}_0, s)]^2 ds. \quad (11)$$

将式(4)代入上式并写成矩阵形式可得

$$U(\mathbf{q}) = \frac{1}{2} EIL(\mathbf{q} - \mathbf{q}_0)^T \mathbf{K}(\mathbf{q} - \mathbf{q}_0), \quad (12)$$

$\mathbf{K} = \int_0^1 \mathbf{B} \mathbf{B}^T dt$ 可称为无量纲广义刚度矩阵, 对 n 次Bernstein多项式对应的 $n+1$ 维曲率模型, 矩阵元素有如下通用计算公式:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{ij} &= \int_0^1 B_{i-1,n}(t) B_{j-1,n}(t) dt \\ &= \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{C_n^{i-1} C_n^{j-1}}{C_{2n}^{i+j-2}}, i, j = 1, 2, \dots, n+1. \end{aligned} \quad (13)$$

根据Bernstein基函数的非负性、单位分解性和对称性等性质, 易证明无量纲广义刚度矩阵 $\mathbf{K}$ 具有如下特殊性质: (1) 所有元素均为正值常数; (2) $n+1$ 维参数化曲率模型对应的矩阵每一行元素之和为 $1/(n+1)$, 每一列元素之和亦为 $1/(n+1)$, 所有元素之和为1; (3) 矩阵不仅关于主对角线元素对称, 还关于副对角线元素对称.

2.4 曲率参数意义的几何解释

对 n 次Bernstein多项式曲率函数本身而言, 以弧长 s 为横坐标, $k(\mathbf{q}, s)$ 为纵坐标绘制曲线, 则其可写成如下形式:

$$\begin{bmatrix} s \\ k(\mathbf{q}, s) \end{bmatrix} = \sum_{i=0}^n \mathbf{P}_i B_{i,n} \left(\frac{s}{L} \right), \quad (14)$$

其是一条以

$$\mathbf{P}_i = \left[\frac{iL}{n}, q_i \right]^T, i = 0, 1, \dots, n \quad (15)$$

为控制点的 n 次Bézier曲线^[37]. 控制点以挠曲线长 L 的 n 段均匀分割位置为横坐标, 曲率参数为纵坐标.

由于Bernstein多项式曲率函数曲线是如式(14)的特殊Bézier曲线, 曲率参数就通过式(15)直接确定了该Bézier曲线的控制点, 这就是曲率参数的直观几何意义. 因此, 柔性梁无穷多自由度的弯曲变形将通过本文的曲率参数化方法映射为有限个曲率曲线控制点的上下运动.

而式(8)对应的挠曲线转角函数可改写为

$$\theta(\mathbf{q}, s) = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{L}{n+1} \left(\sum_{j=0}^{i-1} q_j \right) B_{i,n+1} \left(\frac{s}{L} \right). \quad (16)$$

令 $q_{-1}=0$, 则转角函数曲线为如下形式的 $n+1$ 次Bézier曲线:

$$\begin{bmatrix} s \\ \theta(\mathbf{q}, s) \end{bmatrix} = \sum_{i=0}^{n+1} \mathbf{Q}_i B_{i,n+1} \left(\frac{s}{L} \right). \quad (17)$$

控制点为

$$\mathbf{Q}_i = \left[\frac{iL}{n+1}, \frac{L}{n+1} \sum_{j=-1}^{i-1} q_j \right]^T, i = 0, 1, \dots, n+1. \quad (18)$$

式(4)对弧长求导, 可得挠曲线曲率对弧长的变化率为

$$\frac{dk(\mathbf{q}, s)}{ds} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{n(q_{i+1} - q_i)}{L} B_{i,n-1} \left(\frac{s}{L} \right). \quad (19)$$

其是如下形式的 $n-1$ 次Bézier曲线:

$$\begin{bmatrix} s \\ \frac{dk(\mathbf{q}, s)}{ds} \end{bmatrix} = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{R}_i B_{i,n-1} \left(\frac{s}{L} \right). \quad (20)$$

控制点为

$$\mathbf{R}_i = \left[\frac{iL}{n-1}, \frac{n(q_{i+1} - q_i)}{L} \right]^T, i = 0, 1, \dots, n-1. \quad (21)$$

由上可见, 曲率参数、曲率参数的一阶差分、曲率参数累积和分别确定了曲率、曲率变化率和转角曲线的Bézier控制点. 除了能够通过曲率参数绘制大挠度弯曲的曲率、曲率变化率以及转角曲线外, 利用Bé-

zier曲线的丰富几何性质, 还能够直观高效地获得大挠度弯曲复杂而丰富的变形度量和变形特征信息. 如根据端点插值性, 可直接获得挠曲线端点的曲率(对应弯矩和应力)、曲率变化率以及转角等变形度量; 根据凸包性, 可直接确定变形度量的上下界, 如曲率、曲率变化率、转角变动范围; 根据变差缩减性, 能根据曲率参数的正负性快速判断拐点的可能个数及大致位置以及挠曲线弯曲走向. 通过求解相应Bernstein多项式的零点, 可确定挠曲线变形度量的极值、最值及对应位置, 以及精确的拐点位置和个数.

2.5 四参数三次Bernstein多项式曲率模型示例

以4维曲率模型为例, 曲率参数及Bernstein基函数列阵如下:

$$\begin{cases} \mathbf{q} = [q_0, q_1, q_2, q_3]^T, \\ \mathbf{B} = [(1-t)^3, 3(1-t)^2t, 3(1-t)t^2, t^3]^T. \end{cases} \quad (22)$$

相应的3次Bernstein多项式曲率函数为

$$k(\mathbf{q}, s) = \mathbf{B}^T \mathbf{q} = q_0(1-t)^3 + 3q_1(1-t)^2t + 3q_2(1-t)t^2 + q_3t^3. \quad (23)$$

设 $L=1$ m, 曲率参数 $\mathbf{q}=[2, 6, -6, -2]^T$, 则曲率、曲率变化率和转角曲线及其Bézier控制点分别如图2(a)~(c)所示. 除曲率参数均相等对应圆弧的常曲率情形外, 式(9)很难获得显式积分结果, 挠曲线点坐标需要采用数值积分方法计算. 图3为采用16点高斯积分计算所得以上曲率参数对应的挠曲线.

根据曲率参数的几何意义以及Bézier曲线的相关性质, 容易由图2(a)~(c)获得图3挠曲线大量的弯曲特征信息, 如拐点个数及位置、曲率极值点及位置、转角极值点及位置、曲率范围、曲率变化率范围、转角范围等信息. 另外, de Casteljau算法^[37]是计算和绘制图2所示曲线的稳定可靠的标准算法.

而由式(13), 四参数三次Bernstein多项式曲率模型对应的无量纲广义刚度矩阵如下:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \frac{1}{7} & \frac{1}{14} & \frac{1}{35} & \frac{1}{140} \\ \frac{1}{14} & \frac{3}{35} & \frac{9}{140} & \frac{1}{35} \\ \frac{1}{35} & \frac{9}{140} & \frac{3}{35} & \frac{1}{14} \\ \frac{1}{140} & \frac{1}{35} & \frac{1}{14} & \frac{1}{7} \end{bmatrix}. \quad (24)$$

图 2 (网络版彩图) (a) 曲率曲线及其控制点; (b) 曲率变化率曲线及其控制点; (c) 转角曲线及其控制点

Figure 2 (Color online) (a) Curvature and its control points; (b) rate of curvature and its control points; (c) rotation angle and its control points.

图 3 (网络版彩图) 挠曲线及其拐点和曲率极值点

Figure 3 (Color online) A deflection curve and its inflection and maximum curvature.

在已知材料、截面尺寸和无应力初始曲率参数下, 弯曲应变能极易由式(12)计算. 梁上所有位置的应力、应变及内力矩亦可依据曲率函数按照相应的材料力学公式简单计算即可得出.

由上可见, 基于Bernstein多项式建立平面挠曲线的参数化曲率模型, 弯曲应变能计算精确简便, 且能

高效呈现细长梁大挠度弯曲复杂、丰富的变形度量和变形特征信息.

3 基于曲率参数的位姿表示和雅可比及海塞矩阵

将柔性梁视为以曲率参数为关节变量的弹性体运动副, 则刚体位姿与柔体变形可进行统一建模. 曲率参数已知时, 刚柔统一位姿建模可对系统整体位形进行全面解析, 从而确定各刚性构件位姿以及关键点位移, 并能系统分析柔性构件变形度量和变形特征信息. 当曲率参数作为基本未知量时, 刚柔统一位姿建模能提供系统受载位置的位姿矩阵、雅可比矩阵和海塞矩阵表达式, 或为系统平衡提供几何约束方程.

3.1 以曲率参数为广义坐标的平面位姿变换矩阵

如图4所示, 编号为 i 的构件是细长弹性梁, 其首末端分别与编号为 $i-1$ 和 $i+1$ 的刚性构件固接, 建立与图1相同的柔性梁连体坐标系. 则末端坐标系 i 在首端坐标系 $i-1$ 下的位姿矩阵为

图 4 由细长梁连接的两刚体相对位姿

Figure 4 The relative position and orientation of two rigid bodies connected by a slender beam.

$$\mathbf{T}_i^{i-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta_i(\mathbf{q}_i, L_i) & -\sin\theta_i(\mathbf{q}_i, L_i) & x_i(\mathbf{q}_i, L_i) \\ \sin\theta_i(\mathbf{q}_i, L_i) & \cos\theta_i(\mathbf{q}_i, L_i) & y_i(\mathbf{q}_i, L_i) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (25)$$

x_i, y_i, θ_i 分别为柔性梁末端相对首端的位移和转角。

设柔性梁长、Bernstein 多项式曲率次数和曲率参数列阵分别为 $L_i, n_i, \mathbf{q}_i$, 则根据式(9)和(10), 有如下计算公式:

$$\theta_i(\mathbf{q}_i, L_i) = \frac{L_i}{n_i + 1} \sum_{j=0}^{n_i} q_{ij}, \quad (26-1)$$

$$x_i(\mathbf{q}_i, L_i) = \int_0^{L_i} \cos \left[\sum_{j=0}^{n_i} \sum_{k=j+1}^{n_i+1} q_{ij} B_{k, n_i+1} \left(\frac{s}{L_i} \right) \right] ds, \quad (26-2)$$

$$y_i(\mathbf{q}_i, L_i) = \int_0^{L_i} \sin \left[\sum_{j=0}^{n_i} \sum_{k=j+1}^{n_i+1} q_{ij} B_{k, n_i+1} \left(\frac{s}{L_i} \right) \right] ds. \quad (26-3)$$

以图2的曲率参数为例, 易得柔性梁首末端的位姿变换矩阵为

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.7822 \\ 0 & 1 & 0.5374 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

由上可见, 将柔性梁视为弹性体平面运动副, 曲率参数 $\mathbf{q}$ 作为广义关节变量, 式(25)的位姿变换矩阵与平面刚体复合运动的位姿变换矩阵一致, 从而为平面柔顺机构的位形描述奠定了基础。

在式(25)柔性梁首末端位姿变换矩阵基础上, 采用串联刚体机构系统位姿建模方法, 可以建立平面串联柔顺机构的位姿变换矩阵。如图4建立附着在各构

件首端和末端的局部坐标系, 坐标系0固结在机架上, 视为参考坐标系。则含 n 个可动刚体和柔体的平面串联系统末端在参考坐标系下的位姿矩阵为

$$\mathbf{T}_n^0 = \prod_{i=1}^n \mathbf{T}_i^{i-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta(\mathbf{q}) & -\sin\theta(\mathbf{q}) & x(\mathbf{q}) \\ \sin\theta(\mathbf{q}) & \cos\theta(\mathbf{q}) & y(\mathbf{q}) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (27)$$

式中, $\mathbf{q}$ 是所有柔性梁的曲率参数组成的列阵。

$$\mathbf{T}_i^{i-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i & x_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i & y_i \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (28)$$

是一般的平面位姿变换矩阵。柔性梁按式(25)计算, 刚体转动和平动按经典的平面位姿变换矩阵计算。

由上述方法建立的位姿变换矩阵, 可以用来确定所有构件相对参考系的位姿。如果第 i 构件为柔性梁, 则其挠曲线在参考系中的方程由下式计算:

$$\begin{bmatrix} x_{i0} \\ y_{i0} \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{T}_{i-1}^0 \begin{bmatrix} x_i(\mathbf{q}_i, s) \\ y_i(\mathbf{q}_i, s) \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (29)$$

其中, $\mathbf{q}_i$ 是第 i 柔性梁曲率参数列阵, $x_i(\mathbf{q}_i, s)$ 和 $y_i(\mathbf{q}_i, s)$ 通过式(9)计算。

由上可见, 曲率参数不仅能体现柔性梁的连续变形特性, 还能实现柔体变形与刚体位姿的统一建模。

3.2 雅可比矩阵与海塞矩阵

在获得末端坐标系位姿矩阵基础上, 可方便推导出末端坐标系位姿对曲率广义坐标的雅可比矩阵和海塞矩阵。由式(27), 末端坐标系原点在参考坐标系下的齐次坐标为

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \prod_{i=1}^n \mathbf{T}_i^{i-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (30)$$

上式对第 j 柔性梁的第 k 曲率广义坐标求偏导数可得雅可比矩阵元素计算公式如下:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x(\mathbf{q})}{\partial q_{jk}} \\ \frac{\partial y(\mathbf{q})}{\partial q_{jk}} \\ 0 \end{bmatrix} = \left(\prod_{i=1}^{j-1} \mathbf{T}_i^{i-1} \right) \frac{\partial \mathbf{T}_j^{j-1}}{\partial q_{jk}} \left(\prod_{i=j+1}^n \mathbf{T}_i^{i-1} \right) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (31)$$

$$\frac{\partial \mathbf{T}_j^{j-1}}{\partial q_{jk}} = \begin{bmatrix} -\frac{L_j}{n_j+1} \sin \theta_j & -\frac{L_j}{n_j+1} \cos \theta_j & \frac{\partial x_j}{\partial q_{jk}} \\ \frac{L_j}{n_j+1} \cos \theta_j & -\frac{L_j}{n_j+1} \sin \theta_j & \frac{\partial y_j}{\partial q_{jk}} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (32)$$

式中各符号意义及计算同式(25)和(26)。

末端转角是所有构件转角的叠加, 由式(10)可得

$$\frac{\partial \theta(\mathbf{q})}{\partial q_{jk}} = \frac{L_j}{n_j+1}. \quad (33)$$

类似的可推导出海塞矩阵元素的计算公式如下:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 x(\mathbf{q})}{\partial q_{jk} \partial q_{jl}} \\ \frac{\partial^2 y(\mathbf{q})}{\partial q_{jk} \partial q_{jl}} \\ 0 \end{bmatrix} = \left(\prod_{i=1}^{j-1} \mathbf{T}_i^{i-1} \right) \frac{\partial^2 \mathbf{T}_j^{j-1}}{\partial q_{jk} \partial q_{jl}} \left(\prod_{i=j+1}^n \mathbf{T}_i^{i-1} \right) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (34)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{T}_j^{j-1}}{\partial q_{jk} \partial q_{jl}} = \begin{bmatrix} -\left(\frac{L_j}{n_j+1}\right)^2 \cos \theta_j & \left(\frac{L_j}{n_j+1}\right)^2 \sin \theta_j & \frac{\partial^2 x_j}{\partial q_{jk} \partial q_{jl}} \\ -\left(\frac{L_j}{n_j+1}\right)^2 \sin \theta_j & -\left(\frac{L_j}{n_j+1}\right)^2 \cos \theta_j & \frac{\partial^2 y_j}{\partial q_{jk} \partial q_{jl}} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (35)$$

对末端转角, 由式(33)可得

$$\frac{\partial^2 \theta(\mathbf{q})}{\partial q_{jk} \partial q_{jl}} = 0. \quad (36)$$

4 平面柔顺机构几何非线性静力平衡方程

以曲率参数为基本未知量, Bernstein多项式曲率为试函数, 基于最小总势能原理, 可以建立以均质细长梁为柔性构件的平面柔顺机构大挠度下的几何非线性静力平衡方程. 此种建模方法有如下突出优势: (1) 基于曲率的试函数光滑性要求低, 相应的挠曲线将具有高两阶的光滑性, 相对相同阶次的位移试函数, 计算精度和收敛速度均能显著提高; 且可降低高次多项式数值不稳定和病态的风险; (2) 求解结果是与坐标系无关的参数化曲率解, 除方便体现柔性梁大挠度弯曲复杂而丰富的变形特征和系统整体位形外, 通过积分的平滑作用, 还可避免高频振荡位移解; (3) 采用不同阶次的Bernstein多项式试函数, 建模和求解算法统一规范, 便于编制通用计算代码。

对一般的平面柔顺机构, 除可能受到载荷驱动外, 还可能受到几何边界约束. 几何边界约束包括位移约束和闭链系统的几何封闭。

设系统有 n 个柔性梁构件, 外载荷列阵 $\mathbf{F}=[\mathbf{F}_x, \mathbf{F}_y, \mathbf{M}_z]^T$, 对应未知位移列阵 $\mathbf{d}(\mathbf{q})=[x_F(\mathbf{q}), y_F(\mathbf{q}), \theta_F(\mathbf{q})]^T$, 则系统总势能泛函为

$$\Pi = \sum_{i=1}^n U_i(\mathbf{q}_i) - \mathbf{d}(\mathbf{q})^T \mathbf{F}, \quad (37)$$

式中, $\mathbf{q}$ 是由各柔性梁曲率参数列阵 $\mathbf{q}_i$ 汇集而成的系统总体曲率参数列阵. 单个柔性梁的应变能 $U_i(\mathbf{q}_i)$ 按式(12)计算, 位移列阵 $\mathbf{d}(\mathbf{q})$ 由式(27)计算。

设系统另一处还受位移约束, 位移参数为 $[x_0, y_0, \theta_0]^T$, 则相应的几何约束方程为

$$\boldsymbol{\psi}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\psi}_x(\mathbf{q}) \\ \boldsymbol{\psi}_y(\mathbf{q}) \\ \boldsymbol{\psi}_\theta(\mathbf{q}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(\mathbf{q}) - x_0 \\ y(\mathbf{q}) - y_0 \\ \theta(\mathbf{q}) - \theta_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (38)$$

对闭链系统, 可视为由串联开链的末端封闭而成. 因此, 由式(27)可得闭链系统的几何封闭方程如下:

$$\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi}_x(\mathbf{q}) \\ \boldsymbol{\Phi}_y(\mathbf{q}) \\ \boldsymbol{\Phi}_\theta(\mathbf{q}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (39)$$

根据最小总势能原理, 系统平衡的必要条件是在式(38)和(39)的约束下式(37)的势能泛函取得最小。

引入拉格朗日乘子列阵 $\boldsymbol{\lambda}_\psi=[\boldsymbol{\lambda}_{\psi_x}, \boldsymbol{\lambda}_{\psi_y}, \boldsymbol{\lambda}_{\psi_\theta}]^T$ 和 $\boldsymbol{\lambda}_\Phi=[\boldsymbol{\lambda}_{\Phi_x}, \boldsymbol{\lambda}_{\Phi_y}, \boldsymbol{\lambda}_{\Phi_\theta}]^T$, 以上约束优化问题可转化为如下无约束优化问题:

$$\min : \Pi_\lambda = \Pi - \boldsymbol{\psi}(\mathbf{q})^T \boldsymbol{\lambda}_\psi - \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{q})^T \boldsymbol{\lambda}_\Phi, \quad (40)$$

上式取得最小的必要条件为

$$\frac{\partial \Pi_\lambda}{\partial \mathbf{q}} = 0, \quad (41-1)$$

$$\frac{\partial \Pi_\lambda}{\partial \boldsymbol{\lambda}_\psi} = 0, \quad (41-2)$$

$$\frac{\partial \Pi_\lambda}{\partial \boldsymbol{\lambda}_\Phi} = 0. \quad (41-3)$$

即系统达到平衡的条件为

$$\begin{cases} \mathbf{K}_e(\mathbf{q} - \mathbf{q}_0) - \mathbf{J}_d(\mathbf{q})^T \mathbf{F} - \mathbf{J}_\psi(\mathbf{q})^T \boldsymbol{\lambda}_\psi \\ - \mathbf{J}_\Phi(\mathbf{q})^T \boldsymbol{\lambda}_\Phi = \mathbf{0}, \\ \boldsymbol{\psi}(\mathbf{q}) = \mathbf{0}, \\ \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{q}) = \mathbf{0}, \end{cases} \quad (42)$$

式中, $\mathbf{K}_e$ 是对应各柔性梁曲率参数列阵 $\mathbf{q}_i$ 组集而成的系统总体刚度矩阵, $\mathbf{q}_c$ 是对应 $\mathbf{q}$ 的系统初始无应力曲率参数列阵, $\mathbf{J}_d(\mathbf{q})$ 是载荷作用点雅可比矩阵, $\mathbf{J}_\psi(\mathbf{q})$ 是位移约束方程(38)的雅可比矩阵, $\mathbf{J}_\phi(\mathbf{q})$ 是闭链系统几何封闭方程(39)的雅可比矩阵. 雅可比矩阵元素均按3.2节方法计算.

式(42)是以曲率参数 $\mathbf{q}$ 为基本未知量, 拉格朗日乘子 λ_ψ 和 λ_ϕ 为辅助未知量的系统平衡方程组. 其中第一方程是以曲率参数为广义坐标的广义力平衡条件, 第一项为广义弹性恢复力, 第二项为外载荷对应的广义力, 第三项为实现相应位移所需的广义驱动力, 第四项为闭链系统几何封闭处的广义约束反力. 因此, 拉格朗日乘子 λ_ψ 的物理意义是实现位移所需的牵引力, λ_ϕ 的物理意义是几何封闭处的约束反力. 由于以上平衡方程未作小挠度假设, 且包含柔性梁的初始曲率, 因此其可用来分析含直梁和曲梁的平面柔顺机构的大挠度静力变形.

5 基于高斯积分和牛顿拉弗森迭代的数值求解方法

5.1 基于高斯积分的计算方案

平衡方程组(42)中的几何约束方程及雅可比矩阵, 涉及式(9)形式的积分和其对曲率参数的偏导数, 一般情形下很难获得显式表达, 需要采用数值积分方法进行计算. 本文采用计算量较少而精度较高的高斯积分方案.

设 σ_k 和 Δ_k 是 $[-1, 1]$ 区间的高斯积分点和权系数, 通过参数变换, 高斯积分点对应弧长 $s_k = s(\sigma_k + 1)/2$. 采用 m 点高斯积分, 则式(9)有如下近似计算公式:

$$\begin{cases} x(\mathbf{q}, s) = \frac{s}{2} \cdot \sum_{k=1}^m \Delta_k \cos \theta(\mathbf{q}, s_k), \\ y(\mathbf{q}, s) = \frac{s}{2} \cdot \sum_{k=1}^m \Delta_k \sin \theta(\mathbf{q}, s_k), \end{cases} \quad (43)$$

其中,

$$\theta(\mathbf{q}, s_k) = \frac{L}{n+1} \sum_{i=0}^n \sum_{j=i+1}^{n+1} q B_{j,n+1} \left(\frac{s_k}{L} \right). \quad (44)$$

根据以上的高斯积分公式, 雅可比矩阵中的相关元素可做如下计算:

$$\begin{cases} \frac{\partial x(\mathbf{q}, s)}{\partial q_i} = -\frac{s}{2} \sum_{k=1}^m \Delta_k \cdot \frac{\partial \theta(\mathbf{q}, s_k)}{\partial q_i} \cdot \sin \theta(\mathbf{q}, s_k), \\ \frac{\partial y(\mathbf{q}, s)}{\partial q_i} = \frac{s}{2} \sum_{k=1}^m \Delta_k \cdot \frac{\partial \theta(\mathbf{q}, s_k)}{\partial q_i} \cdot \cos \theta(\mathbf{q}, s_k), \end{cases} \quad (45)$$

其中,

$$\frac{\partial \theta(\mathbf{q}, s_k)}{\partial q_i} = \frac{L}{n+1} \sum_{j=i+1}^{n+1} B_{j,n+1} \left(\frac{s_k}{L} \right). \quad (46)$$

通过以上高斯积分方案, 含不可显式积分的平衡方程组(42)将转化为非线性代数方程组.

另外, 在前述高斯积分计算的基础上, 海塞矩阵相关元素有如下计算公式:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 x(\mathbf{q}, s)}{\partial q_i \partial q_j} = -\frac{s}{2} \cdot \sum_{k=1}^m \left(\Delta_k \cdot \frac{\partial \theta(\mathbf{q}, s_k)}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \theta(\mathbf{q}, s_k)}{\partial q_j} \cdot \cos \theta(\mathbf{q}, s_k) \right), \\ \frac{\partial^2 y(\mathbf{q}, s)}{\partial q_i \partial q_j} = -\frac{s}{2} \cdot \sum_{k=1}^m \left(\Delta_k \cdot \frac{\partial \theta(\mathbf{q}, s_k)}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \theta(\mathbf{q}, s_k)}{\partial q_j} \cdot \sin \theta(\mathbf{q}, s_k) \right). \end{cases} \quad (47)$$

以上计算方案中, 涉及积分点转角的正弦、余弦函数值, 以及对曲率参数的偏导数值和Bernstein基函数值, 均仅需计算一次, 可重复应用在各式的计算中, 从而大大减少计算量.

5.2 牛顿拉弗森迭代格式

基于上节的高斯积分方案, 平衡方程组(42)成为以曲率参数列阵 $\mathbf{q}$ 和拉格朗日乘子列阵 λ_ψ , λ_ϕ 为未知数的非线性代数方程组. 选取一组初值 $\mathbf{X}^{(0)} = [\mathbf{q}^{(0)}, \lambda_\psi^{(0)}, \lambda_\phi^{(0)}]^T$, 可通过牛顿拉弗森迭代法进行求解. 迭代格式为

$$\mathbf{X}^{(i+1)} = \mathbf{X}^{(i)} - [\nabla \mathbf{f}(\mathbf{X}^{(i)})]^{-1} \mathbf{f}(\mathbf{X}^{(i)}), \quad (48)$$

其中, $\mathbf{f}(\mathbf{X}^{(i)})$ 是第 i 次迭代时平衡方程组的残值.

$$\mathbf{f}(\mathbf{X}^{(i)}) = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_e(\mathbf{q}^{(i)} - \mathbf{q}_c) - \mathbf{J}_d(\mathbf{q}^{(i)})^T \mathbf{F} \dots \\ -\mathbf{J}_\psi(\mathbf{q}^{(i)})^T \lambda_\psi^{(i)} - \mathbf{J}_\phi(\mathbf{q}^{(i)})^T \lambda_\phi^{(i)} \\ \psi(\mathbf{q}^{(i)}) \\ \Phi(\mathbf{q}^{(i)}) \end{bmatrix}. \quad (49)$$

而 $\nabla \mathbf{f}(\mathbf{X}^{(i)})$ 是第 i 次迭代时平衡方程组的雅可比矩阵:

$$\nabla \mathbf{f}(\mathbf{X}^{(i)}) = \begin{bmatrix} \mathbf{J}(\mathbf{q}^{(i)}) & \mathbf{J}_\psi(\mathbf{q}^{(i)})^T & \mathbf{J}_\phi(\mathbf{q}^{(i)})^T \\ \mathbf{J}_\psi(\mathbf{q}^{(i)}) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{J}_\phi(\mathbf{q}^{(i)}) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (50)$$

$\mathbf{J}(\mathbf{q}^{(i)})$ 是式(42)方程组中第一个方程即静力平衡方程的雅可比矩阵, 有如下计算公式:

$$\begin{aligned} \mathbf{J}(\mathbf{q}^{(i)}) = & \mathbf{K}_e - \sum_{\substack{\alpha=\psi, \phi \\ \beta=x, y}} \mathbf{H}_{\alpha\beta}(\mathbf{q}^{(i)})^T \lambda_{\alpha\beta}^{(i)} \\ & - \sum_{\gamma=x, y} \mathbf{H}_{d\gamma}(\mathbf{q}^{(i)})^T \mathbf{F}_\gamma, \end{aligned} \quad (51)$$

式中, $\mathbf{H}_{\alpha\beta}(\mathbf{q}^{(i)})$ 是几何约束方程的海塞矩阵, $\mathbf{H}_{d\gamma}(\mathbf{q}^{(i)})$ 是力作用点的海塞矩阵, 可应用式(47)按式(34)和(35)计算。

迭代过程可选择相邻计算结果的误差以及式(49)平衡方程组残差和迭代次数作为终止条件。例如设定如下条件之一为迭代终止条件:

$$\begin{cases} \|\mathbf{X}^{(i+1)} - \mathbf{X}^{(i)}\| \leq 10^{-6}, \\ \|\mathbf{f}(\mathbf{X}^{(i+1)})\| \leq 10^{-6}, \\ i > 100. \end{cases} \quad (52)$$

6 误差分析

本文提出的曲率参数化建模与求解算法的误差主要包括如下的建模理论误差和数值计算误差。

6.1 建模理论误差与精确解再现性

建模理论误差可分为系统的力学模型误差和计算模型误差。力学模型误差的来源是忽略了柔性梁的剪切和拉压。对长细比大于10的均质细长梁, 理论和实践表明剪切的影响可以忽略不计。而柔顺机构主要利用弯曲变形产生运动, 在大多数应用场合, 拉压的影响亦微弱到可以忽略不计。

计算模型误差是试函数与真实变形场函数的差异。本文基于曲率试函数和最小总势能原理建立的求解模型, 其本质是里兹法, 收敛性以及精确解再现性有坚实的理论基础。只要试函数的次数足够高就能按任意精度逼近或再现真实解。

与传统基于位移试函数的里兹法相比, 在多项式次数相同的情形下基于曲率的计算精度将高两阶。例如对细长悬臂直梁末端只受弯矩载荷 $\mathbf{M}_z$ 的情形, 由式(33)和(42), 平衡方程简化为

$$EIL\mathbf{K}\mathbf{q} - \left[\frac{L}{n+1} \quad \cdots \quad \frac{L}{n+1} \right]^T \mathbf{M}_z = \mathbf{0}, \quad (53)$$

上式有精确解

$$\mathbf{q} = \left[\frac{\mathbf{M}_z}{EI} \quad \cdots \quad \frac{\mathbf{M}_z}{EI} \right]^T. \quad (54)$$

根据Bernstein基函数的单位分解性, 曲率参数全相等的情形多项式退化为常数, 即只需常数项就能获得精确解。而根据式(8)和(9), 挠曲线(圆弧)及其转角方程均能获得显式表达式。

对悬臂直梁末端受横向载荷 $\mathbf{F}_y$ 的小挠度情形, 即 $|\theta(\mathbf{q}, s)|_{\max} \leq 5^\circ$, 利用小转角下的三角函数近似公式 $\sin\theta(\mathbf{q}, s) \approx \theta(\mathbf{q}, s)$ 和 $\cos\theta(\mathbf{q}, s) \approx 1$, 只需要两个曲率参数的一次Bernstein多项式试函数即可得

$$\mathbf{q} = \left[\frac{\mathbf{F}_y L}{EI} \quad 0 \right]^T. \quad (55)$$

将其代入式(8)和(9)可得与理论解一致的挠曲线方程(三次多项式)和末端转角及挠度。根据曲率参数的几何意义, 式(55)的值分别对应悬臂梁根部和末端曲率, 这与根据受力分析得出的根部弯矩和末端弯矩对应。

6.2 数值计算误差

数值计算误差包括数值积分误差和非线性代数方程组的迭代求解误差。基于牛顿拉弗森迭代法的计算精度, 可以通过式(52)人为设定。

对数值积分误差, 由于 m 点高斯积分对不高于 $2m-1$ 次多项式的被积函数精确成立, 式(43)能够精确计算式(9)正弦和余弦函数泰勒级数展开至 $2m-1$ 次多项式的积分值。根据拉格朗日型余项公式, 由式(43)计算挠曲线上点坐标的误差有如下保守估计:

$$\begin{cases} |R_m[x(\mathbf{q}, s)]| < \frac{s}{(2m)!} |\theta(\mathbf{q}, \eta)|_{\max}^{2m}, \\ |R_m[y(\mathbf{q}, s)]| < \frac{s}{(2m+1)!} |\theta(\mathbf{q}, \eta)|_{\max}^{2m+1}. \end{cases} \quad (56)$$

由式(45)计算雅可比矩阵元素的误差有如下保守

估计:

$$\begin{cases} \left| R_m \left[\frac{\partial x(\mathbf{q}, s)}{\partial q_i} \right] \right| < \frac{1}{(2m-1)!} \frac{sL}{n+1} |\theta(\mathbf{q}, \eta)|_{\max}^{2m-1}, \\ \left| R_m \left[\frac{\partial y(\mathbf{q}, s)}{\partial q_i} \right] \right| < \frac{1}{(2m)!} \frac{sL}{n+1} |\theta(\mathbf{q}, \eta)|_{\max}^{2m}. \end{cases} \quad (57)$$

由式(47)计算海塞矩阵元素的误差有如下保守估计:

$$\begin{cases} \left| R_m \left[\frac{\partial^2 x(\mathbf{q}, s)}{\partial q_i \partial q_j} \right] \right| < \frac{sL^2}{(2m-2)!(n+1)^2} |\theta(\mathbf{q}, \eta)|_{\max}^{2m-2}, \\ \left| R_m \left[\frac{\partial^2 y(\mathbf{q}, s)}{\partial q_i \partial q_j} \right] \right| < \frac{sL^2}{(2m-1)!(n+1)^2} |\theta(\mathbf{q}, \eta)|_{\max}^{2m-1}. \end{cases} \quad (58)$$

以上误差估计中, m 为高斯积分点数, n 为采用的 Bernstein 多项式的次数, $|\theta(\mathbf{q}, \eta)|_{\max}$ 是以弧度度量的挠曲线最大转角的绝对值。

因为海塞矩阵只在牛顿拉弗森迭代中使用, 仅影响迭代求解过程中相关量的计算精度, 从而影响迭代收敛速度, 并不影响平衡方程组的精度。而雅可比矩阵元素和挠曲线点坐标的计算将影响求解精度, 其误差估计可为高斯积分点数的选择提供参考。当挠曲线转角大时, 应选择较多的积分点数, 以保证精度; 反之在保证精度的情况下可以选择较少的积分点数, 以提高计算效率。例如在应用三参数二次 Bernstein 多项式曲率模型时, 采用 5 点高斯积分, 最大转角不超过 $\pm 90^\circ$ 时, 式(43)误差小于 $2.52 \times 10^{-5} L$, 式(45)误差小于 $4.01 \times 10^{-5} L^2$ 。采用 4 点高斯积分, 最大转角不超过 $\pm 60^\circ$ 时, 式(43)误差小于 $3.59 \times 10^{-5} L$, 式(45)误差小于 $6.85 \times 10^{-5} L^2$ 。

6.3 悬臂直梁末端横向载荷作用下大挠度计算精度验证

悬臂直梁末端横向载荷作用下的大挠度分析, 由于能够通过椭圆积分获得封闭形式的解析解^[1], 从而计算出具体数值, 常作为对比和检验各类建模和数值计算方法精度的经典算例。

对悬臂梁建立如图1所示坐标系, 末端受 y 轴方向的横向力为 P 。为了统一梁的长度 L 、弹性模量 E 、截面惯性矩 I 、横向力 P 对变形的影响, 定义无量纲载荷指标为

$$f = \frac{PL^2}{2EI}, \quad (59)$$

并将挠曲线弧长坐标、挠曲线上点坐标以及曲率参数做如下归一化和无量纲化处理:

$$\begin{aligned} \frac{s}{L} \rightarrow s \in [0, 1], \quad \frac{x(s)}{L} \rightarrow x(s) \in [0, 1], \\ \frac{y(s)}{L} \rightarrow y(s) \in [0, 1], \quad L\mathbf{q} \rightarrow \mathbf{q}. \end{aligned} \quad (60)$$

则平衡方程矩阵形式如下:

$$\mathbf{K}\mathbf{q} - f \left[\frac{\partial y(\mathbf{q}, 1)}{\partial \mathbf{q}} \right]^T = \mathbf{0}, \quad (61)$$

式中, 刚度矩阵 $\mathbf{K}$ 的元素由式(13)根据所采用的求解模型的维数, 即所采用的待求曲率参数个数确定, 而末端横向位移对曲率参数的偏导数即雅可比矩阵元素根据采用的高斯积分点数由式(45)计算。

如采用 3 参数曲率模型, 则可展开写成

$$\begin{bmatrix} 1/5 & 1/10 & 1/30 \\ 1/10 & 2/15 & 1/10 \\ 1/30 & 1/10 & 1/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} - f \begin{bmatrix} \frac{\partial y(\mathbf{q}, 1)}{\partial q_0} \\ \frac{\partial y(\mathbf{q}, 1)}{\partial q_1} \\ \frac{\partial y(\mathbf{q}, 1)}{\partial q_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (62)$$

对 $0 \leq f \leq 5$ 的载荷指标, 均分为 20 个载荷步, 采用 3 参数曲率模型和 5 点高斯积分求解, 首个载荷迭代初值 $\mathbf{q} = [0, 0, 0]^T$, 后续载荷迭代初值采用前一个载荷的求解结果, 所得挠曲线及其末端轨迹如图5所示。图5中还绘制有根据椭圆积分求得的挠曲线和末端轨迹, 两种方法所得结果基本完全重合, 很难区分。

为了比较求解模型维数和高斯积分点数对计算精

图5 (网络版彩图) 挠曲线及末端轨迹

Figure 5 (Color online) A deflection curve and its tip trajectory.

度的影响, 对三参数和四参数曲率模型分别采用4点和5点高斯积分进行了数值计算, 并与椭圆积分求解结果对比, 末端点 x 坐标、 y 坐标、转角的相对误差百分比曲线分别如图6(a)~(c). 由分析结果可见, 采用3曲率参数5点高斯积分, 末端的位置坐标和转角与椭圆积分分解的相对误差都小于0.15%, 已具有相当高的精度. 而采用4曲率参数5点高斯积分进行求解, 与椭圆积分分解的相对误差接近0, 可认为求解模型已逼近精确解. 由上可见, 本文所提出的低维参数化曲率模型具有高的建模精度和数值计算精度. 以上各种曲率参数和积分点数的情形, 求解平衡方程所需迭代步数均不超过5次.

7 应用和算例

式(42)平衡方程适用于同时受载荷控制、位移输入控制的开链和闭链系统, 应用于不同的情形时将会简化. 对悬臂梁或串联柔顺机构, 如果仅受外载荷, 则只需式(42)中的第一方程即广义力平衡条件; 如果仅受位移输入控制, 则只需式(42)中的第一方程和第二方程, 即只有广义力平衡条件和位移约束条件. 只有

应用于既受外载荷驱动又受位移输入控制的闭链系统, 才需式(42)中的所有方程.

7.1 单根曲梁的大挠度变形分析

图7所示为两端均固定的矩形截面半圆拱^[28], 半径50 mm, 截面宽16 mm, 截面厚0.1 mm, 弹性模量 $E=207$ GPa. 梁中点受水平位移输入控制, 由初始位置向左缓慢移动70 mm, 即中点几何约束方程为

$$\psi(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} x(\mathbf{q}, \frac{50\pi}{2}) - 50 - d \\ y(\mathbf{q}, \frac{50\pi}{2}) - 50 \\ \theta(\mathbf{q}, \frac{50\pi}{2}) - \frac{\pi}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, 0 \leq d \leq 70. \quad (63)$$

对圆弧梁, 初始曲率参数均等于圆弧半径的倒数, 即 $q_{ci}=1/50$. 对一般曲梁, 可根据最小二乘原理计算得出初始无应力曲率参数. 如果初始曲率参数个数少于计算模型的维数, 则需应用Bézier曲线的升阶公式^[37]计算出与求解模型维数一致的初始曲率参数.

根据对称性, 将半圆拱在中点处断开, 只分析下半部分四分之一圆弧梁, 式(42)平衡方程简化为

图6 (网络版彩图) (a) 末端 x 坐标相对误差百分比曲线; (b) 末端 y 坐标相对误差百分比曲线; (c) 末端转角相对误差百分比曲线

Figure 6 (Color online) (a) Relative error of tip x position; (b) relative error of tip y position; (c) relative error of tip rotation angle.

图 7 (网络版彩图)中点位移控制半圆拱

Figure 7 (Color online) Semicircular arch under midpoint displacement.

$$\begin{cases} EIL\mathbf{K}(\mathbf{q}-\mathbf{q}_c)-\mathbf{J}_\psi(\mathbf{q})^T\boldsymbol{\lambda}_\psi=\mathbf{0}, \\ \boldsymbol{\psi}(\mathbf{q})=\mathbf{0}. \end{cases} \quad (64)$$

为了减少高斯积分引入的误差, 本例均采用16点高斯积分, 分别用4、5、6参数模型求解平衡方程(64), 所得水平驱动力随变形位移的变化曲线如图8, 由此结

图 8 (网络版彩图)驱动力与变形位移关系曲线

Figure 8 (Color online) The force-deflection relationship.

果可以看出, 4、5、6参数模型求解结果已经收敛, 且与参考文献[28]结果相符.

根据求解20个位移步所得曲率参数化解绘制的曲率曲线、转角曲线和挠曲线(含拐点标志)分别如图9(a)~(c). 由以上三类曲线对比分析可以看出, 刚开始变形时, 四分之一圆弧梁挠曲线上无拐点, 随后在靠近末端位置(对半圆拱则是中点附近)出现一个拐点, 很快又在靠近固定支点位置出现另一拐点. 例如位移为

图 9 (网络版彩图)四分之一圆弧梁的各种曲线. (a) 变形曲率曲线; (b) 变形转角曲线; (c) 挠曲线和拐点.

Figure 9 (Color online) (a) Curvature of a quarter circle beam; (b) rotation angle of a quarter circle beam; (c) deflection and inflections of a quarter circle beam.

50 mm时根据对称性绘制的整体半圆拱挠曲线如图10所示, 其上有对称的4个拐点。

在一台1.7 GHz英特尔i5处理器、8G内存的笔记本电脑中, 采用4参数模型16点高斯积分, 求解20个位移步的平衡方程用时不多于1 s, 包括以100个离散点绘制相应曲线总用时不超过4 s。以上结果表明, 低维参数化曲率模型能够高精度地对细长直梁和曲梁进行大挠度分析, 并便于呈现变形特征信息。

7.2 含柔性梁的曲柄摇杆机构特性分析

图11所示曲柄摇杆机构, A, B 为转动副, C 为固定连接. 机架 $L_{AD}=0.707$ m, 刚性曲柄 $L_{AB}=0.293$ m, 刚性连杆 $L_{BC}=1$ m. 矩形截面柔性摇杆 $L_{CD}=1$ m, 截面厚度10 mm, 宽度5 mm, 弹性模量 $E=1.4$ GPa. 曲柄角位移 θ_1 为驱动控制参数, 记柔性摇杆弯曲的曲率参数列阵为 $\mathbf{q}$.

该机构可视为柔性摇杆 DC 和刚性连杆 CB 串联组合末端, 与曲柄 AB 通过转动副封闭而成. 其实是串联系统 DCB 末端 B 点受以 A 为圆心、半径为 L_{AB} 的圆轨迹控制. 几何约束方程为

$$\Phi(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} x_C(\mathbf{q}) + L_{BC} \cos\left(\frac{L_{CD}}{n+1} \sum_{i=0}^n q_i + \frac{3\pi}{4}\right) \\ -L_{AB} \cos\theta_1 \\ y_C(\mathbf{q}) + L_{BC} \sin\left(\frac{L_{CD}}{n+1} \sum_{i=0}^n q_i + \frac{3\pi}{4}\right) \\ -L_{AB} \sin\theta_1 - L_{AD} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (65)$$

图10 (网络版彩图)位移50 mm时的半圆拱挠曲线和拐点
Figure 10 (Color online) Deflection and inflections under 50 mm stroke.

图11 含柔性构件的曲柄摇杆机构
Figure 11 Crank rocker mechanism with flexible parts.

假设机构运动速度较小, 忽略自重和惯性力以及运动副中摩擦力, 机构的平衡方程为

$$\begin{cases} EIL\mathbf{K}\mathbf{q} - \mathbf{J}_\phi(\mathbf{q})^T \boldsymbol{\lambda}_\phi = \mathbf{0}, \\ \Phi(\mathbf{q}) = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (66)$$

以上即是以曲率参数 $\mathbf{q}$ 为基本未知量, 拉格朗日乘子 $\boldsymbol{\lambda}_\phi$ 为辅助未知量的系统平衡方程. 其中, $\boldsymbol{\lambda}_\phi = [\boldsymbol{\lambda}_{\phi x}, \boldsymbol{\lambda}_{\phi y}]^T$, 对应刚性曲柄通过转动副 B 对刚性连杆所施加的 x 和 y 向约束反力.

初始位形时, $\theta_1=0^\circ$, $\theta_2=-45^\circ$, $\mathbf{q}=\mathbf{0}$, $\boldsymbol{\lambda}_\phi=\mathbf{0}$. 以曲柄 AB 逆时针转动一周为驱动, 采用3参数曲率模型和4点高斯积分求解以上方程, 可得摇杆曲率参数 $\mathbf{q}$ 和运动副 B 中约束反力 $\boldsymbol{\lambda}_\phi$ 随曲柄转角的变化曲线, 分别如图12和13所示.

由机构几何封闭条件, 连杆 BC 相对曲柄 AB 的转角为

$$\theta_2 = \frac{L_{CD}}{n+1} \sum_{i=0}^n q_i - \theta_1 - \frac{\pi}{4}. \quad (67)$$

由此, θ_1 , θ_2 和 $\mathbf{q}$ 作为广义坐标就完全确定了机构含柔性摇杆挠曲线的整体位形. 例如, 曲柄转角 θ_1 为 45° 和 250° 时, θ_2 分别为 -86.083° 和 -252.896° , 对应 $\mathbf{q}$ 分别为 $[1.4289, 0.0725, -1.2963]^T$ 和 $[0.8226, 0.9630, 0.4190]^T$, 机构的整体位形对应图14(a)和(b). 图中同时显示了由曲率参数解计算得到的柔性摇杆弯矩图(缩

图 12 (网络版彩图)曲率参数解

Figure 12 (Color online) Curvature solution vs crank angle.

小3倍显示). 由图可知, θ_1 为45°时柔性摇杆存在一个拐点, 250°时无拐点.

由曲率参数按式(12)计算所得系统应变能变化曲线如图15(a).

由曲柄的平衡条件, 驱动力矩按式(68)计算, 由此可得如图15(b)所示曲线:

$$M_d = \lambda_{\phi_y} L_{AB} \cos \theta_1 - \lambda_{\phi_x} L_{AB} \sin \theta_1. \quad (68)$$

图15(a)和(b)曲线与参考文献[22]基于椭圆积分和有限元法的结果一致, 亦与参考文献[27]基于链式梁约束模型的结果一致. 在一台1.7 GHz英特尔i5处理器、8G内存的笔记本电脑中, 本文求解平衡方程组并计算和绘制机构应变能、曲柄平衡力矩曲线, 十次计算用时平均不超过0.5 s, 利用文献[27]公开的代码平均用时1.5 s. 另外, 包括绘制含柔顺摇杆挠曲线(50个坐标点)的机构36个位形图本文用时不超过3 s.

图 14 (网络版彩图)机构构型和摇杆弯矩图. (a) $\theta_1=45^\circ$; (b) $\theta_1=250^\circ$ Figure 14 (Color online) Equilibrium configuration and the resultant moment. (a) $\theta_1=45^\circ$; (b) $\theta_1=250^\circ$.

图 13 (网络版彩图)运动副B中约束反力

Figure 13 (Color online) Reaction forces vs crank angle.

7.3 考虑拉压影响的直线运动柔性机构分析

以细长梁为柔性构件的平行四边形直线运动单元及其阵列组合结构在精密定位平台以及精密夹持器中已得到较多研究和应用^[1,3,14,25,26]. 文献[26]在梁的横向位移与梁长之比不大于10%的中小挠度假设下, 应用梁约束模型^[25]通过较繁琐的公式推导, 获得了如图16(a)所示的对称系统在输出平台A6A7受集中力载荷下的解析模型, 分析了支链中刚性构件长度对系统刚度特性的影响. 图16(a)中, A1, A11, B1和B11是柔性梁与机架固定点, 系统共有8个细长柔性梁构件(细线), 5个可动刚体构件(粗线). 该系统可看成由A闭合回路(左回路)和B闭合回路(右回路)通过刚体A6A7和B6B7固连而成. 将A11和B11作为闭合回路封闭点, 由第三节串联系统位姿建模方法, 可建立A11, B11和A6/B6共三处几何封闭约束方程.

图 15 (网络版彩图) (a) 机构应变能变化曲线; (b) 驱动力矩变化曲线

Figure 15 (Color online) (a) Strain energy vs crank angle; (b) input torque vs crank angle.

图 16 (网络版彩图) 直线运动柔性机构及其左右回路(a)和内外回路(b)划分

Figure 16 (Color online) Flexible mechanism. (a) Left and right loop; (b) inner and outer loop.

事实上, 该系统仅考虑柔性梁的弯曲变形不能获得收敛解, 必须附加拉压变形的影响. 这是由于该系统还可看成如图16(b)所示由A1A5B5B1构成的外回路与A11A8B8B11构成的内回路通过刚性构件固接A6A7而成. 内外回路独立时拉压影响可完全忽略不计, 在水平力作用下中间刚体A5B5和A8B8各自独立水平运动, 但会产生微小的垂直方向的反向运动, 导致A6A7间距离变小. 当通过刚性构件固接内外回路时, 这个微小的距离变化必须通过柔性梁的拉压变形补偿.

由于系统的对称性以及工作行程内弯曲导致的挠曲线转角一般不超过 $\pm 20^\circ$, 柔性梁的拉压应变可看成处处相等. 因此, 引入一个拉压应变参数 ε , 式(12)表示的单根梁的应变能可改写成如下形式:

$$U(\mathbf{q}, \varepsilon) = \frac{1}{2} L \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \varepsilon \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} EI \mathbf{K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & EA \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \varepsilon \end{bmatrix}. \quad (69)$$

考虑拉压导致的伸缩影响, 式(9)表示的挠曲线坐标计算公式改写为如下形式:

$$\begin{cases} x(\mathbf{q}, \varepsilon, s) = \int_0^s (1 + \varepsilon) \\ \cos \left[\frac{L}{n+1} \sum_{i=0}^n \sum_{j=i+1}^{n+1} q_j B_{j,n+1} \left(\frac{\sigma}{L} \right) \right] d\sigma, \\ y(\mathbf{q}, \varepsilon, s) = \int_0^s (1 + \varepsilon) \\ \sin \left[\frac{L}{n+1} \sum_{i=0}^n \sum_{j=i+1}^{n+1} q_j B_{j,n+1} \left(\frac{\sigma}{L} \right) \right] d\sigma. \end{cases} \quad (70)$$

后续的位姿建模及雅可比和海塞矩阵计算均引入拉压应变参数, 可建立与式(42)形式一致的系统平衡

方程. 由于此类直线运动机构工作范围较小, 柔性梁的横向位移与梁长之比一般不超过20%, 因此采用两参数曲率模型附加一拉压应变参数进行求解. 模型总体规模为含16个待求曲率参数、8个待求拉压应变参数和9个待约束反力共33个方程的非线性代数方程组.

令支链(A1A4))长为 L , 定义无量纲归一化载荷 $f=PL^2/EI$ 、位移 $x=X/L$ 、柔性梁细长比 $t=T/L$ 、柔性梁长度对支链长度比 $b=B/L$. 其中, X 是实际的位移值, T 是梁的厚度, B 是梁的实际长度. 通过分析可得不同 b 和 t 参数时的水平载荷与水平位移关系曲线, 如图17所示. 该结果与文献[26]一致.

$b=0.5$ 时, 如图16(a)的柔顺机构退化为图18所示柔

图 17 (网络版彩图)不同 b 和 t 参数下的载荷位移关系曲线
Figure 17 (Color online) Load vs displacement under different b and t .

图 18 (网络版彩图)简化的直线运动机构
Figure 18 (Color online) Simplified flexible mechanism.

顺机构. 取柔性梁实际厚度 $T=0.75$ mm、宽度 $H=10$ mm、长度 $L=45$ mm、内环跨距 $G1G2=19.75$ mm、外环跨距 $A1A2=54.25$ mm、材料弹性模量 $E=70$ GPa. 用本文方法求得中间刚体水平载荷相对水平位移的关系曲线如图19, 不同垂直载荷作用下中间刚体水平位移引发的垂直方向位移量如图20. 以上求解所得1.2 mm位移内的结果与文献[26]一致, 并能体现大于1.2 mm直至达到材料屈服强度的较大挠度下的系统特性. 水平位移3 mm时, 受100 N垂直方向集中力的系统变形状态如图21.

8 结论及展望

(1) 区别于以位移为基本未知量的建模方法, 提出了一种基于应变(弯曲曲率、拉压应变)逼近的平面大

图 19 (网络版彩图)水平载荷与位移关系曲线
Figure 19 (Color online) Horizontal load vs horizontal displacement.

图 20 (网络版彩图)不同垂直载荷下水平位移和垂直位移关系曲线
Figure 20 (Color online) Horizontal vs vertical displacement.

图 21 (网络版彩图)水平位移3 mm受100 N垂直载荷下的变形状态

Figure 21 (Color online) Equilibrium configuration under 3 mm horizontal stroke and 100 N vertical load.

挠度细长梁计算模型. 以应变为基本未知量, 弹性势能及应力计算极为简单且精确, 同时相应的位移解将具有高两阶的光滑性, 建模精度和计算效率得到显著提高, 且可直接应用于初始曲梁.

(2) 采用Bernstein多项式形式的试函数, 参数化曲率解与坐标系无关并具有良好的几何意义, 既方便体现大挠度强几何非线性下细长梁复杂丰富的变形度和变形特征, 又能实现刚体和柔体位姿统一建模, 且建模和求解算法规范统一, 易于编制通用计算代码, 为平面柔顺机构的大挠度分析开辟了一条新的途径.

(3) 基于最小总势能原理建立平衡条件, 相较牛顿力学的建模方法平衡方程组规模小, 既避免了复杂的内力分析, 又提高了求解效率, 通过编程能够实现系统平衡方程组的自动组装和求解, 对复杂系统的建模分析具有显著优势.

参考文献

- Howell L L, Olsen B M, Magleby S P. Handbook of Compliant Mechanisms. New York: Wiley, 2013
- Yu J J, Bi S S, Pei X, et al. Flexure Design: Analysis and Synthesis of Compliant Mechanism (in Chinese). Beijing: Higher Education Press, 2018 [于靖军, 毕树生, 裴旭, 等. 柔性设计—柔性机构的分析与综合. 北京: 高等教育出版社, 2018]
- Bai Y D, Chen X, Yang Z J. Design of rigid motion and elastic deformation parallel driven based macro-micro compounded positioning stage (in Chinese). *Sci Sin Tech*, 2019, 49: 669–680 [白有盾, 陈新, 杨志军. 刚柔分级并联驱动宏微复合运动平台设计. 中国科学: 技术科学, 2019, 49: 669–680]
- Ding H, Yang X, Zheng N, et al. Tri-Co Robot: A Chinese robotic research initiative for enhanced robot interaction capabilities. *Natl Sci Rev*, 2018, 5: 799–801
- Shintake J, Caccuciolo V, Floreano D, et al. Soft robotic grippers. *Adv Mater*, 2018, 30: 1707035
- Ijspeert A J. Biorobotics: Using robots to emulate and investigate agile locomotion. *Science*, 2014, 6206: 196–203
- Liu C, Ye Z S, Hu H Y. An efficient parallel algorithm for flexible multibody systems based on domain decomposition method (in Chinese). *Sci Sin Phys Mech Astron*, 2017, 47: 104603 [刘钺, 叶子晟, 胡海岩. 基于区域分解的柔性多体系统高效并行算法. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2017, 47: 104603]
- Yang Y, Lu B Z, Li X M, et al. Investigation of 2-DOF compliant translational parallel mechanism and applied in the docking device (in Chinese). *J Mech Eng*, 2019, 55: 114–122 [杨毅, 鹿碧洲, 李小毛, 等. 一种2自由度柔顺移动并联机构研究及其在对接装置上应用. 机械工程学报, 2019, 55: 114–122]
- Ghosh A, Corves B. Introduction to Micromechanisms and Microactuators. New Delhi: Springer, 2015
- Wu G, Xu J, Ng E J, et al. MEMS resonators for frequency reference and timing applications. *J Microelectromech Syst*, 2020, 29: 1137–1166
- Chen Y. Review on kinematic metamaterials (in Chinese). *J Mech Eng*, 2020, 56: 2–13 [陈焱. 基于机构运动的大变形超材料. 机械工程学报, 2020, 56: 2–13]
- Surjadi J U, Gao L, Du H, et al. Mechanical metamaterials and their engineering applications. *Adv Eng Mater*, 2019, 21: 1800864
- Wang P, Xu Q S. Design and testing of a flexure-based constant-force stage for biological cell micromanipulation. *IEEE T Autom Sci Eng* 2018, 15: 1114–1126
- Garcés-Schröder M, Leester-Schädel M, Schulz M, et al. Micro-gripper: A new concept for a monolithic single-cell manipulation device. *Sensor*

- Actuat A-phys, 2015, 236: 130–139
- 15 Ling M, Howell L L, Cao J, et al. Kinetostatic and dynamic modeling of flexure-based compliant mechanisms: A survey. [Appl Mech Rev](#), 2020, 72: 030802
 - 16 Meier C, Popp A, Wall W A. Geometrically exact finite element formulations for slender beams: Kirchhoff–Love theory versus Simo–Reissner theory. [Arch Computat Methods Eng](#), 2019, 26: 163–243
 - 17 Le T N, Battini J M, Hjiat M. A consistent 3D corotational beam element for nonlinear dynamic analysis of flexible structures. [Comput Methods Appl Mech Eng](#), 2014, 269: 538–565
 - 18 Shabana A A, Desai C J, Grossi E, et al. Generalization of the strain-split method and evaluation of the nonlinear ANCF finite elements. *Acta Mech*, 2020, 231: 1365–1376
 - 19 Borković A, Kovačević S, Radenković G, et al. Rotation-free isogeometric analysis of an arbitrarily curved plane Bernoulli–Euler beam. [Comput Methods Appl Mech Eng](#), 2018, 334: 238–267
 - 20 Chen W, Zhang X, Li H, et al. Nonlinear analysis and optimal design of a novel piezoelectric-driven compliant microgripper. [Mechanism Machine Theor](#), 2017, 118: 32–52
 - 21 Henning S, Lin S, Grser P, et al. Non-linear analytical modeling of planar compliant mechanisms. *Mech Mach Theory*, 2021, 155: 104067
 - 22 Zhang A, Chen G. A comprehensive elliptic integral solution to the large deflection problems of thin beams in compliant mechanisms. *J Mech Robot*, 2013, 5: 420–431
 - 23 Batista M. Analytical treatment of equilibrium configurations of cantilever under terminal loads using Jacobi elliptical functions. [Int J Solids Struct](#), 2014, 51: 2308–2326
 - 24 Campanile L F, Hasse A. A simple and effective solution of the elastica problem. [Proc Institution Mech Engineers Part C-J Mech Eng Sci](#), 2008, 222: 2513–2516
 - 25 Awtar S, Slocum A H, Sevinçer E. Characteristics of beam-based flexure modules. [J Mech Des](#), 2007, 129: 625–639
 - 26 Hao G, He X, Awtar S. Design and analytical model of a compact flexure mechanism for translational motion. [Mechanism Machine Theor](#), 2019, 142: 103593
 - 27 Ma F, Chen G. Modeling large planar deflections of flexible beams in compliant mechanisms using chained beam constraint model. *J Mech Robot*, 2016, 8: 1–30
 - 28 Chen G, Ma F, Hao G, et al. Modeling large deflections of initially curved beams in compliant mechanisms using chained beam constraint model. [J Mech Robot](#), 2019, 11: 011002
 - 29 Su H J. A pseudo-rigid-body 3R model for determining large deflection of cantilever beams subject to tip loads. *J Mech Robot*, 2009, 1: 1–9
 - 30 Venkiteswaran V K, Su H J. Pseudo-rigid-body models for circular beams under combined tip loads. [Mechanism Machine Theor](#), 2016, 106: 80–93
 - 31 Yu Y Q, Zhu S K. 5R pseudo-rigid-body model for inflection beams in compliant mechanisms. [Mechanism Machine Theor](#), 2017, 116: 501–512
 - 32 Xu H, Gan J, Zhang X. A generalized pseudo-rigid-body PPRR model for both straight and circular beams in compliant mechanisms. [Mechanism Machine Theor](#), 2020, 154: 104054
 - 33 Valentini P P, Pennestri E. Elasto-kinematic comparison of flexure hinges undergoing large displacement. [Mechanism Machine Theor](#), 2017, 110: 50–60
 - 34 Odhner L U, Dollar A M. The smooth curvature model: An efficient representation of Euler–Bernoulli flexures as robot joints. [IEEE Trans Robot](#), 2012, 28: 761–772
 - 35 Chen W H. Differential Geometry (in Chinese). Beijing: Peking University Press, 2006 [陈维桓. 微分几何. 北京: 北京大学出版社, 2006]
 - 36 Wang R H. Numerical Approximation (in Chinese). Beijing: Higher Education Press, 1999 [王仁宏. 数值逼近. 北京: 高等教育出版社, 1999]
 - 37 Farouki R T. The Bernstein polynomial basis: A centennial retrospective. [Comput Aided Geometric Des](#), 2012, 29: 379–419

Curvature-based low-dimensional parametric model for the elastostatics analysis of planar compliant mechanisms under large deflection

HUANG YongGang¹ & XIE Dan²

¹ Chongqing Municipal Key Laboratory of Mechanism Design and Control for Manufacturing Equipment, Chongqing Technology and Business University, Chongqing 400067, China;

² College of Engineering and Technology, Southwest University, Chongqing 400715, China

Based on the approximation of the bending curvature by Bernstein polynomials, a novel parametric model suitable for large deflection analysis is proposed for studying planar compliant mechanisms with uniform slender beam members. The numerical formulation is also presented based on Gaussian quadrature and Newton-Raphson iterations. By considering the bending curvature and coefficients of the Bernstein polynomial as the deformation field and unknown parameters, respectively, the equilibrium equations of the compliant mechanisms with geometric nonlinearity were established based on the principle of the minimum total potential energy. Further, the proposed method effectively avoided the numerical error introduced by using the deformation displacement to derive and calculate strain energy and greatly reduced the smoothness requirement of the trial function. Hence, the novel model possesses the benefits of high modeling accuracy, fast convergence speed in the numerical calculation, and versatility for application to straight and initially curved beams. Meanwhile, the parameterized curvature solutions have great geometric and mechanical significance that allows not only to realize the unified kinematic modeling of rigid and flexible bodies but also to efficiently present the complex and rich deformation information of slender beams under large deflections. The improved performance of the developed models was demonstrated through some classic numerical examples.

compliant mechanisms, geometrical nonlinearity, Bernstein polynomials, curvature approximation, parametric model

doi: [10.1360/SST-2021-0131](https://doi.org/10.1360/SST-2021-0131)