一类 Keller-Segel 型流体模型的弱熵解

献给陈恕行教授 80 华诞

陈丽¹, 黄飞敏², 刘玲君^{2*}

1. School of Business Informatics and Mathematics, University of Mannheim, Mannheim 68159, Germany;

2. 中国科学院数学与系统科学研究院, 北京 100190

E-mail: chen@math.uni-mannheim.de, fhuang@amt.ac.cn, liulingjun@amss.ac.cn

收稿日期: 2021-04-10; 接受日期: 2021-08-04; 网络出版日期: 2021-11-09; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11371349 和 11688101) 资助项目

摘要 Keller-Segel 型的流体力学模型属于带自吸引力的 Euler-Poisson 方程组. 类似于抛物情形的 Keller-Segel 方程组, 若总质量 $M > 8\pi$, 本文证明了该模型的弱熵解在有限时间内必爆破. 对于临界质量 $M = 8\pi$ 和次临界质量 $M < 8\pi$ 的情形, 本文得到了相应的弱熵解的先验估计.

关键词 Keller-Segel 型流体模型 爆破 临界质量

MSC (2020) 主题分类 35Q92, 92C17

1 引言

趋化现象描述了生物体在化学刺激下的运动情形. 从微观细菌到最大的哺乳动物, 人们都可以观察到这种现象. 由 Keller 和 Segel^[1,2] 提出的 Keller-Segel 方程组是描述趋化现象的基本模型. 21 世纪初关于生物体临界质量的分析研究吸引了越来越多的专家学者. 人们纷纷投入到不同类型的 Keller-Segel 方程组的研究中, 如文献 [3–10], 其他有意义的工作参见文献 [11–18]. 其中文献 [6] 研究了如下简化的 2 维抛物椭圆型 Keller-Segel 方程组的临界质量情形, 即

$$\begin{cases} \partial_t \rho = \Delta \rho - \nabla \cdot (\rho \nabla \Phi), & x \in \mathbb{R}^2, \quad t > 0, \\ -\Delta \Phi = \rho, \end{cases} \quad (1.1)$$

其中 $\rho(x, t)$ 表示细胞密度, $\Phi(x, t)$ 为产生漂移力的化学引诱剂浓度. 对于超临界质量情形 (即 $M > 8\pi$), 文献 [19] 证明了任意弱解在有限时间内必定爆破. 在爆破时间之后, 解包含 δ 测度. 对于临界和次临界情形, 弱熵解的全局存在性和大时间行为在文献 [5, 6] 中已得到证明. 最近, 文献 [20, 21] 通过相互作用粒子系统的平均场极限, 给出了 Keller-Segel 方程组的一个微观解释. 此外, 与宏观的爆破现象相对应的微观重粒子的质量累积情形依旧未得到解决.

英文引用格式: Chen L, Huang F M, Liu L J. Weak entropy solution for a Keller-Segel type fluid model (in Chinese). Sci Sin Math, 2021, 51: 1983–1992, doi: 10.1360/SSM-2021-0068

本文考虑以 Euler-Poisson 形式表示的方程组, 即

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \nabla \cdot m = 0, & x \in \mathbb{R}^2, \quad t > 0, \\ \partial_t m + \nabla \cdot \left(\frac{m}{\rho} \otimes m \right) + \nabla \rho = \rho \nabla \Phi - m, \\ -\Delta \Phi = \rho, \end{cases} \quad (1.2)$$

其中 m 是流体的动量, 定义 $u = \frac{m}{\rho}$ ($\rho > 0$) 为流体的速度.

对于方程组 (1.2) 的微观理解如下. 首先, 给出一个基于 Newton 第二定律相互作用的 N 粒子系统, 该系统由以下平均场力驱动:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} X_i(t) = V_i(t), & 1 \leq i \leq N, \\ \frac{d}{dt} V_i(t) = \frac{1}{N} \sum_{j=1, j \neq i}^N \nabla \Psi(X_i(t) - X_j(t)) - \frac{1}{\tau} V_i(t), \end{cases} \quad (1.3)$$

其中平均场相互作用力由 2 维的库仑势 $\nabla \Psi(x) = \nabla(-\frac{1}{2\pi} \log |x|) = -\frac{x}{2\pi|x|^2}$ 给出. 通过特征线法, 定义测度

$$f^N(t, x, v) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{X_i(t), V_i(t)}(x, v),$$

其中 $(X_i(t), V_i(t))$ 是方程组 (1.3) 的解. 在分布意义下, 该解形式上满足如下 Vlasov-Poisson 方程:

$$\partial_t f^N + v \cdot \nabla_x f^N + \nabla_v \cdot ((\nabla \Psi * \rho^N - v) f^N) = 0, \quad (1.4)$$

其中

$$\rho^N(t, x) = \int_{\mathbb{R}^2} f^N(t, x, v) dv.$$

形式上取平均场极限 (即 $N \rightarrow \infty$), 若 $f^N(t, x, v)$ 收敛到 $f(t, x, v)$, 则 $f(t, x, v)$ 仍为方程 (1.4) 的解. 因此, 方程 (1.4) 被称为平均场方程. 平均场极限的严格证明参见文献 [22, 23]. 设

$$f(t, x, v) = \rho(t, x) \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{|v - u(t, x)|^2}{2}}, \quad d = 2,$$

其中

$$\rho(t, x) = \int_{\mathbb{R}^2} f(t, x, v) dv, \quad m(t, x) = \int_{\mathbb{R}^2} v f(t, x, v) dv, \quad m = u\rho,$$

则可由平均场方程 (1.4) 推导出方程组 (1.2). 在 (1.2) 中取松弛极限, 可得 $m = \rho \nabla \Phi - \nabla \rho$, 将此式代入 (1.2)₁, 可推导出抛物 - 椭圆型 Keller-Segel 方程组 (1.1).

为了方便, 我们将 (1.2)₃ 记为

$$\Phi(x, t) = \mathbb{G} * \rho(x, t) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \log |x - y| \rho(y, t) dy, \quad (1.5)$$

其中 $\mathbb{G}(x) = -\frac{1}{2\pi} \log |x|$ 是 $-\Delta$ 在 $\mathbb{R}^2$ 中的 Green 函数. 记 $\rho_0(x) := \rho(x, 0)$, $m_0(x) := m(x, 0)$. 假设初始值 $\rho_0(x)$ 和 $m_0(x)$ 满足

$$\rho_0(1 + |x|^2) + \frac{|m_0|^2}{\rho_0}, \quad \rho_0 \log \rho_0 \in L^1(\mathbb{R}^2). \quad (1.6)$$

定义总质量

$$M := \int_{\mathbb{R}^2} \rho(x, t) dx = \int_{\mathbb{R}^2} \rho_0(x) dx. \quad (1.7)$$

在给出弱解定义和本文主要定理之前, 首先重述如下对数 Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式.

引理 1.1 ^[24] 假设 f 是 $L^1(\mathbb{R}^2)$ 中的一个非负函数且 $\int_{\mathbb{R}^2} f dx = M$, 使得 $f \log f$ 和 $f \log(1 + |x|^2)$ 均属于 $L^1(\mathbb{R}^2)$, 则

$$\int_{\mathbb{R}^2} f \log f dx + \frac{2}{M} \iint_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} f(x) f(y) \log |x - y| dx dy \geq -\mathfrak{C}(M), \quad (1.8)$$

其中 $\mathfrak{C}(M) := M(1 + \log \pi - \log M)$.

值得注意的是, 从 (1.2)₃ 可知, $\Phi(x, t)$ 的初始值 $\Phi_0(x)$ 完全由初始密度 $\rho_0(x)$ 决定. 事实上, 当 $t = 0$ 时, 对 (1.2)₃ 两边同时乘以 Φ_0 , 计算得

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla \Phi_0|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^2} \rho_0 \Phi_0 dx = -\frac{1}{2\pi} \iint_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} \rho_0(x) \rho_0(y) \log |x - y| dx dy. \quad (1.9)$$

利用引理 1.1, 有

$$\int_{\mathbb{R}^2} \rho_0 \log \rho_0 dx - \frac{4\pi}{M} \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla \Phi_0|^2 dx \geq -\mathfrak{C}(M). \quad (1.10)$$

因此

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla \Phi_0|^2 dx \leq \frac{M}{4\pi} \left(\mathfrak{C}(M) + \int_{\mathbb{R}^2} \rho_0 \log \rho_0 dx \right). \quad (1.11)$$

注 1.1 初始值 (1.6) 意味着初始总能量 E_0 有限, 其中

$$E_0 := 3 \int_{\mathbb{R}^2} \left(\frac{|m_0|^2}{\rho_0} + 2\rho_0 \log \rho_0 - |\nabla \Phi_0|^2 \right) dx + \int_{\mathbb{R}^2} (\rho_0 |x|^2 + 2x \cdot m_0) dx. \quad (1.12)$$

此外, 系统 (1.2) 有凸的机械熵 - 熵流对, 记为

$$\eta(\rho, m) = \frac{|m|^2}{\rho} + 2\rho \log \rho, \quad q(\rho, m) = \frac{|m|^2 m}{\rho^2} + 2m \log \rho + 2m. \quad (1.13)$$

下面给出带初始值 (1.6) 的 Euler-Poisson 方程组 (1.2) 弱熵解的定义.

定义 1.1 (弱熵解) 若可测函数组 (ρ, m, Φ) 满足下列方程组:

$$\begin{cases} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^2} (\rho \psi_t + m \cdot \nabla \psi) dx dt + \int_{\mathbb{R}^2} \rho_0(x) \psi(x, 0) dx = 0, \\ \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^2} \left[m \psi_t + \left(\frac{m}{\rho} \otimes m \right) : \nabla \psi + \rho \nabla \psi - m \psi + \rho \nabla \Phi \psi \right] dx dt + \int_{\mathbb{R}^2} m_0(x) \psi(x, 0) dx = 0, \\ \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^2} \nabla \Phi \cdot \nabla \psi + \rho \psi dx dt = 0, \\ \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^2} \left(\eta \phi_t + q \cdot \nabla \phi - \frac{|m|^2}{\rho} \phi + m \cdot \nabla \Phi \phi \right) dx dt + \int_{\mathbb{R}^2} \eta(x, 0) \phi(x, 0) dx \geq 0, \end{cases} \quad (1.14)$$

其中 $\psi, \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2 \times [0, +\infty))$, ψ 为任意检验函数, ϕ 为任意非负检验函数, 则称 (ρ, m, Φ) 为 Cauchy 问题 (1.2) 和 (1.6) 的弱熵解.

因为 (1.2) 是带自吸引力的高维双曲守恒律方程组, 所以解可能在有限时间内产生奇异即形成激波. 众所周知, 高维双曲守恒律方程组弱熵解的存在性是一个具有挑战性的数学难题. 本文尽力将文献 [6] 的工作推广到方程组 (1.2) 中并同时给出弱熵解的先验估计. 对于任意时间 $T > 0$, 设问题 (1.2) 和 (1.6) 的弱熵解 $(\rho, m, \Phi)(x, t)$ 满足

$$\rho(1 + |x|^2) + \frac{|m|^2}{\rho}, \quad \rho \log \rho \in C(0, T; L^1(\mathbb{R}^2)). \quad (1.15)$$

则有如下主要结论:

定理 1.1 (超临界质量) 设总质量 $M > 8\pi$, $(\rho, m, \Phi)(x, t)$ 为问题 (1.2) 和 (1.6) 的弱熵解, 满足 (1.7)、(1.15) 和下述边界条件:

$$(|x|^2 \rho, m, \Phi)(x, t) \rightarrow (0, 0, 0), \quad |x| \rightarrow \infty. \quad (1.16)$$

若存在常数 $C > 0$ 使得

$$\int_{\mathbb{R}^2} \rho(x, t) \log \rho(x, t) dx \leq C t^\alpha, \quad 0 < \alpha < 1, \quad (1.17)$$

则弱熵解 (ρ, m, Φ) 在有限时间内爆破, 即

$$\exists T^* > 0, \quad \text{s.t.} \quad \int_{\mathbb{R}^2} |x|^2 \rho(x, T^*) dx = 0. \quad (1.18)$$

注 1.2 因为在次临界质量情形下, 密度 ρ 关于时间 t 一致有界, 因此增长条件 (1.17) 是合理的. 抛物型方程组 (1.1) 是 (1.2) 的时间松弛版本, 当物理熵和势能均趋向无限时, 爆破发生. 因此, 若物理熵随时间超过线性增长, 即条件 (1.17) 不成立, 则在有限时间内解的二阶矩可能不会消失.

注 1.3 弱熵解满足质量守恒. 对于超临界质量情形, 由 (1.18), 我们猜测解在 $t = T^*$ 处具有与 Keller-Segel 方程组 (1.1) 类似的 δ 测度形式.

定理 1.2 (临界和次临界质量) 设 (ρ, m, Φ) 为满足 (1.7)、(1.15) 和 (1.16) 的问题 (1.2) 和 (1.6) 的任意弱熵解, 则

(i) 若 $M = 8\pi$ (临界质量), 对于任意时间 $T > 0$, 成立

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{2} |x|^2 \rho(x, T) dx + \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|m(x, T)|^2}{\rho(x, T)} dx + \iint_{\mathbb{R}^2 \times [0, T]} \frac{2|m|^2}{\rho} dx dt \leq C_1(M) + E_0; \quad (1.19)$$

(ii) 若 $M < 8\pi$ (次临界质量), 对于任意时间 $T > 0$, 成立

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{|m(x, T)|^2}{\rho(x, T)} dx + \iint_{\mathbb{R}^2 \times [0, T]} \frac{2|m|^2}{\rho} dx dt \leq C_2(M)(1 + \log(10 + T) + E_0), \quad (1.20)$$

$$C_3(M) - E_0 - C_4(M) \log(10 + T) \leq \int_{\mathbb{R}^2} \rho(x, T) \log \rho(x, T) dx \leq C_5(M), \quad (1.21)$$

$$\int_{\mathbb{R}^2} |x|^2 \rho(x, T) dx \leq C_6(M)(1 + T + E_0), \quad (1.22)$$

其中 E_0 是初始总能量, $C_i(M)$ ($i = 1, \dots, 6$) 是仅与总质量 M 有关而不依赖于时间 T 的正常数.

注 1.4 定理 1.2 是关于弱熵解的先验估计. 这些估计也许对临界和次临界情形弱熵解的存在性和稳定性有帮助.

本文余下内容的结构安排如下. 第 2 节从弱熵解的固有性质和熵不等式 (1.14)₄ 出发, 给出一些关键的能量不等式. 第 3 节研究超临界质量的爆破现象. 第 4 节得到了临界和次临界情形下解的一些先验估计.

2 能量不等式

受文献 [6] 的启发, 我们有以下引理:

引理 2.1 设 (ρ, m, Φ) 是问题 (1.2) 和 (1.6) 的任意弱熵解, 满足 (1.7)、(1.15) 和 (1.16), 则成立

$$\int_{\mathbb{R}^2} (|x|^2 \rho_t + 2x \cdot m_t) dx = 4M \left(1 - \frac{M}{8\pi}\right) + \int_{\mathbb{R}^2} \frac{2|m|^2}{\rho} dx. \quad (2.1)$$

证明 由 (1.2)₂, 可得

$$m = \rho \nabla \Phi - \nabla \rho - \partial_t m - \nabla \cdot \left(\frac{m}{\rho} \otimes m \right). \quad (2.2)$$

作运算 $\nabla \cdot (2.2)$ 并将运算后的结果代入 (1.2)₁ 中, 可得

$$\partial_t \rho = \Delta \rho - \nabla \cdot (\rho \nabla \Phi) + \nabla \cdot \left[\partial_t m + \nabla \cdot \left(\frac{m}{\rho} \otimes m \right) \right]. \quad (2.3)$$

设 $\varphi_\varepsilon(|x|)$ 是带紧支集的光滑函数, 当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时, 它能很好地趋近 $|x|^2$, 即

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varphi_\varepsilon(|x|) = |x|^2, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \nabla \varphi_\varepsilon(|x|) = 2x, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Delta \varphi_\varepsilon(|x|) = 4. \quad (2.4)$$

由于 $\Delta \varphi_\varepsilon$ 有界且 $\nabla \varphi_\varepsilon(x)$ Lipschitz 连续, 因此利用定义 1.1 得

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^2} \varphi_\varepsilon \rho dx = \int_{\mathbb{R}^2} \Delta \varphi_\varepsilon \rho dx + \int_{\mathbb{R}^2} \nabla \varphi_\varepsilon \cdot (\rho \nabla \Phi) dx - \int_{\mathbb{R}^2} \nabla \varphi_\varepsilon \cdot \left[m_t + \nabla \cdot \left(\frac{m}{\rho} \otimes m \right) \right] dx. \quad (2.5)$$

由 (1.5) 的对称性, 可得

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} \nabla \varphi_\varepsilon \cdot (\rho \nabla \Phi) dx &= -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} \nabla \varphi_\varepsilon(x) \cdot \nabla \log |x-y| \rho(x, t) \rho(y, t) dx dy \\ &= -\frac{1}{4\pi} \iint_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} \frac{(\nabla \varphi_\varepsilon(x) - \nabla \varphi_\varepsilon(y)) \cdot (x-y)}{|x-y|^2} \rho(x, t) \rho(y, t) dx dy. \end{aligned} \quad (2.6)$$

因此

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^2} (\varphi_\varepsilon \rho + \nabla \varphi_\varepsilon \cdot m) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \Delta \varphi_\varepsilon \rho dx - \frac{1}{4\pi} \iint_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} \frac{(\nabla \varphi_\varepsilon(x) - \nabla \varphi_\varepsilon(y)) \cdot (x-y)}{|x-y|^2} \rho(x, t) \rho(y, t) dx dy \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^2} \nabla \varphi_\varepsilon \cdot \nabla \cdot \left(\frac{m}{\rho} \otimes m \right) dx. \end{aligned} \quad (2.7)$$

令 $\varepsilon \rightarrow 0$, 则有

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^2} (|x|^2 \rho + 2x \cdot m) dx + \int_{\mathbb{R}^2} 2x \cdot \nabla \cdot \left(\frac{m}{\rho} \otimes m \right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} 4\rho dx - \frac{1}{4\pi} \iint_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} 2\rho(x, t) \rho(y, t) dx dy \\ &= 4M \left(1 - \frac{M}{8\pi}\right). \end{aligned} \quad (2.8)$$

另外, 直接计算可得

$$\int_{\mathbb{R}^2} 2x \cdot \nabla \cdot \left(\frac{m}{\rho} \otimes m \right) dx = -2 \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|m|^2}{\rho} dx. \quad (2.9)$$

将 (2.9) 代入 (2.8), 有

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^2} (|x|^2 \rho + 2x \cdot m) dx = 4M \left(1 - \frac{M}{8\pi} \right) + \int_{\mathbb{R}^2} \frac{2|m|^2}{\rho} dx. \quad (2.10)$$

引理 2.1 证毕. $\square$

由引理 2.1 和熵不等式 (1.14)₃, 有如下引理:

引理 2.2 设 (ρ, m, Φ) 是问题 (1.2) 和 (1.6) 的任意弱熵解, 满足 (1.7)、(1.15) 和 (1.16), 则对于任意时间 $T > 0$, 成立

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{2} |x|^2 \rho(x, T) dx &\leq 4M \left(1 - \frac{M}{8\pi} \right) T + \int_{\mathbb{R}^2} \frac{2|m(x, T)|^2}{\rho(x, T)} dx \\ &\quad + \iint_{\mathbb{R}^2 \times [0, T]} \frac{2|m|^2}{\rho} dx dt + \int_{\mathbb{R}^2} (\rho_0 |x|^2 + 2x \cdot m_0) dx \end{aligned} \quad (2.11)$$

和

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|m(x, T)|^2}{\rho(x, T)} dx &+ \iint_{\mathbb{R}^2 \times [0, T]} \frac{2|m|^2}{\rho} dx dt + 2 \left(1 - \frac{M}{8\pi} \right) \int_{\mathbb{R}^2} \rho(x, T) \log \rho(x, T) dx \\ &\leq \frac{M}{4\pi} \mathfrak{C}(M) + \int_{\mathbb{R}^2} \left(\frac{|m_0|^2}{\rho_0} + 2\rho_0 \log \rho_0 - |\nabla \Phi_0|^2 \right) dx, \end{aligned} \quad (2.12)$$

其中 $\mathfrak{C}(M)$ 是引理 1.1 中定义的常数.

注 2.1 估计 (2.12) 意味着对于次临界情形, 在某个时间内动能和物理熵 $\int_{\mathbb{R}^2} \rho \log \rho dx$ 一致有界; 而在超临界情形下, 动能由物理熵控制.

引理 2.2 的证明 对 (2.1) 关于时间 t 在 $[0, T]$ 上积分, 有

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} (|x|^2 \rho(x, T) + 2x \cdot m(x, T)) dx \\ = 4M \left(1 - \frac{M}{8\pi} \right) T + \iint_{\mathbb{R}^2 \times [0, T]} \frac{2|m|^2}{\rho} dx dt + \int_{\mathbb{R}^2} (\rho_0 |x|^2 + 2x \cdot m_0) dx, \end{aligned} \quad (2.13)$$

再由 Cauchy 不等式

$$\int_{\mathbb{R}^2} |2x \cdot m| dx \leq \int_{\mathbb{R}^2} \left(\frac{1}{2} |x|^2 \rho + \frac{2|m|^2}{\rho} \right) dx, \quad (2.14)$$

可直接推导出估计 (2.11). 下一步证明 (2.12). 注意到不等式 (1.14)₄ 等价于分布意义下的如下不等式:

$$\partial_t \eta + \nabla \cdot q \leq 2m \cdot \nabla \Phi - \frac{2|m|^2}{\rho}, \quad (2.15)$$

即

$$\int_{\mathbb{R}^2} (\partial_t \eta + \nabla \cdot q) dx = \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^2} \left(\frac{|m|^2}{\rho} + 2\rho \log \rho \right) dx$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_{\mathbb{R}^2} \left(2m \cdot \nabla \Phi - \frac{2|m|^2}{\rho} \right) dx \\
&= \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla \Phi|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^2} \frac{2|m|^2}{\rho} dx.
\end{aligned} \tag{2.16}$$

对 (2.16) 关于时间 t 在 $[0, T]$ 上积分, 得

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^2} \frac{|m(x, T)|^2}{\rho(x, T)} + \iint_{\mathbb{R}^2 \times [0, T]} \frac{2|m|^2}{\rho} dx dt + \int_{\mathbb{R}^2} (2\rho(x, T) \log \rho(x, T) - |\nabla \Phi(x, T)|^2) dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^2} \left(\frac{|m_0|^2}{\rho_0} + 2\rho_0 \log \rho_0 - |\nabla \Phi_0|^2 \right) dx.
\end{aligned} \tag{2.17}$$

另一方面, 在 (1.2)₃ 两边同时乘以 Φ , 计算得

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla \Phi(x, T)|^2 dx &= \int_{\mathbb{R}^2} \rho(x, T) \Phi(x, T) dx \\
&= -\frac{1}{2\pi} \iint_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} \rho(x, T) \rho(y, T) \log |x - y| dx dy.
\end{aligned} \tag{2.18}$$

将此式结合引理 1.1, 有

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^2} [2\rho(x, T) \log \rho(x, T) - |\nabla \Phi(x, T)|^2] dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} 2\rho(x, T) \log \rho(x, T) dx + \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} \rho(x, T) \rho(y, T) \log |x - y| dx dy \\
&= \frac{M}{4\pi} \left(\int_{\mathbb{R}^2} \rho(x, T) \log \rho(x, T) dx + \frac{2}{M} \iint_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} \rho(x, T) \rho(y, T) \log |x - y| dx dy \right) \\
&\quad + 2 \left(1 - \frac{M}{8\pi} \right) \int_{\mathbb{R}^2} \rho(x, T) \log \rho(x, T) dx \\
&\geq 2 \left(1 - \frac{M}{8\pi} \right) \int_{\mathbb{R}^2} \rho(x, T) \log \rho(x, T) dx - \frac{M}{4\pi} \mathfrak{C}(M)
\end{aligned} \tag{2.19}$$

成立. 由 (2.17) 和 (2.19) 可得到不等式 (2.12). 引理 2.2 证毕. $\square$

3 超临界质量

本节致力于分析超临界质量情形, 即 $M > 8\pi$. 此时, $\frac{M}{4\pi} - 2 > 0$.

定理 1.1 的证明 由假设条件 (1.17) 和不等式 (2.12), 有

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^2} \frac{|m(x, T)|^2}{\rho(x, T)} dx + \iint_{\mathbb{R}^2 \times [0, T]} \frac{2|m|^2}{\rho} dx dt \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^2} \left(\frac{|m_0|^2}{\rho_0} + 2\rho_0 \log \rho_0 - |\nabla \Phi_0|^2 \right) dx + \left(\frac{M}{4\pi} - 2 \right) \int_{\mathbb{R}^2} \rho(x, T) \log \rho(x, T) dx + \frac{M}{4\pi} \mathfrak{C}(M) \\
&\leq \frac{M}{4\pi} \mathfrak{C}(M) + C \left(\frac{M}{4\pi} - 2 \right) T^\alpha + \int_{\mathbb{R}^2} \left(\frac{|m_0|^2}{\rho_0} + 2\rho_0 \log \rho_0 - |\nabla \Phi_0|^2 \right) dx,
\end{aligned} \tag{3.1}$$

其中 $0 < \alpha < 1$. 根据引理 2.2, 令 (2.11) + (2.12) $\times 2$, 可得

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{2} |x|^2 \rho(x, T) dx + \iint_{\mathbb{R}^2 \times [0, T]} \frac{2|m|^2}{\rho} dx dt + 4 \left(1 - \frac{M}{8\pi} \right) \int_{\mathbb{R}^2} \rho(x, T) \log \rho(x, T) dx$$

$$\begin{aligned} &\leq 4M \left(1 - \frac{M}{8\pi}\right) T + \frac{M}{2\pi} \mathfrak{C}(M) + \int_{\mathbb{R}^2} \rho_0 |x|^2 + 2x \cdot m_0 dx \\ &\quad + 2 \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|m_0|^2}{\rho_0} + 2\rho_0 \log \rho_0 - |\nabla \Phi_0|^2 dx. \end{aligned} \quad (3.2)$$

将 (3.1) 代入 (3.2) 中, 成立

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{2} |x|^2 \rho(x, T) dx \leq 4M \left(1 - \frac{M}{8\pi}\right) T + C \left(\frac{M}{8\pi} - 1\right) T^\alpha + \tilde{C}_1(M) + E_0, \quad (3.3)$$

其中 E_0 是初始总能量, $\tilde{C}_1(M) > 0$ 是仅依赖于 M 的常数.

由于 $0 < \alpha < 1$ 且 $M > 8\pi$, 则存在有限时间 $T^* > 0$ 使得当 $T > T^*$ ($T = T^*$) 时, (3.3) 的右端为负 (零). 而对于任意时间 $T > 0$, (3.3) 的左端总是非负的. 因此得到矛盾. 所以对于超临界质量情形不存在满足条件 (1.15) 和 (1.17) 的全局弱熵解, 且在有限时间内弱熵解 (ρ, m, Φ) 爆破. $\square$

4 临界和次临界质量

因为 (1.2) 的长时间渐近行为 (松弛极限) 形式上由 Keller-Segel 方程组 (1.1) 决定, 所以在临界和次临界质量情形时, 我们期待方程组 (1.2) 有全局弱熵解. 文献 [6] 利用著名的 Aubin-Lions 引理证明了 Keller-Segel 方程组 (1.1) 弱熵解的全局存在性. 在该方法中, 关于 $\rho |\nabla \log \rho|^2$ 的导数估计发挥了关键作用. 然而, 因为方程组 (1.2) 本质上是双曲守恒律方程组且可能有激波出现, 很难得到相应的导数估计, 所以 Aubin-Lions 引理的方法不一定适合研究方程组 (1.2) 弱熵解的全局存在性. 尽管如此, 我们还是可以通过引理 2.2 得到临界和次临界情形的一些先验估计. 我们期待这些估计对于研究方程组 (1.2) 全局弱熵解的存在性有帮助.

定理 1.2 的证明 • 临界质量, 即 $M = 8\pi$.

当 $M = 8\pi$ 时, 由 (2.11) 和 (2.12) 可立即推导出 (1.19).

• 次临界质量, 即 $M < 8\pi$. 首先给出 $\int_{\mathbb{R}^2} \rho(x, T) \log \rho(x, T) dx$ 的下界估计. 令 $\mu(x) = \frac{1}{\pi(10+T)} e^{-\frac{|x|^2}{10+T}}$ 且 $d\nu(x) = \mu(x) dx$, 则 $\int_{\mathbb{R}^2} \mu(x) dx = 1$ 且 $\int_{\mathbb{R}^2} d\nu(x) = 1$. 因为 $\rho \log \rho$ 是凸函数, 所以由 Jensen 不等式可得

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^2} \rho(x, T) \log \rho(x, T) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} [\rho(x, T) \log \rho(x, T) + \rho(x, T) \log e^{\frac{|x|^2}{10+T}}] dx - \frac{1}{10+T} \int_{\mathbb{R}^2} |x|^2 \rho(x, T) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \rho(x, T) \log \left(\frac{\rho(x, T)}{\mu} \right) dx - \int_{\mathbb{R}^2} \rho \log [\pi(10+T)] dx - \frac{1}{10+T} \int_{\mathbb{R}^2} |x|^2 \rho(x, T) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\rho(x, T)}{\mu} \log \left(\frac{\rho(x, T)}{\mu} \right) d\nu - M \log [\pi(10+T)] - \frac{1}{10+T} \int_{\mathbb{R}^2} |x|^2 \rho(x, T) dx \\ &\geq \left(\int_{\mathbb{R}^2} \frac{\rho(x, T)}{\mu} d\nu \right) \log \left(\int_{\mathbb{R}^2} \frac{\rho(x, T)}{\mu} d\nu \right) - M \log [\pi(10+T)] - \frac{1}{10+T} \int_{\mathbb{R}^2} |x|^2 \rho(x, T) dx \\ &= M \log M - M \log [\pi(10+T)] - \frac{1}{10+T} \int_{\mathbb{R}^2} |x|^2 \rho(x, T) dx. \end{aligned} \quad (4.1)$$

当 $M < 8\pi$ 时, $1 - \frac{M}{8\pi} > 0$. 将 (4.1) 代入 (2.12) 推导出

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{|m(x, T)|^2}{\rho(x, T)} dx + \iint_{\mathbb{R}^2 \times [0, T]} \frac{2|m|^2}{\rho} dx dt$$

$$\leq \tilde{C}_2(M) + M \log(10 + T) + \frac{1}{10 + T} \int_{\mathbb{R}^2} |x|^2 \rho(x, T) dx, \quad (4.2)$$

其中 $\tilde{C}_2(M) > 0$ 仅依赖于 M 和初始值. 结合 (2.11) 可得 (1.22), 这表明 $\int_{\mathbb{R}^2} |x|^2 \rho(x, T) dx$ 的上界由 $1 + T$ 控制. 接着再利用一次 (4.2), 可推导出 (1.20). 另外由 $1 - \frac{M}{8\pi} > 0$ 可知, $\int_{\mathbb{R}^2} \rho \log \rho dx$ 的上界可直接由 (2.12) 推导出, 而从 (4.1) 和 (1.22) 中, 我们得到了它的下界估计, 从而得到不等式 (1.21). 定理 1.2 证毕. $\square$

参考文献

- 1 Keller E F, Segel L A. Initiation of slime mold aggregation viewed as an instability. *J Theoret Biol*, 1970, 26: 399–415
- 2 Keller E F, Segel L A. Model for chemotaxis. *J Theoret Biol*, 1971, 30: 225–234
- 3 Arumugam G, Tyagi J. Keller-Segel chemotaxis models: A review. *Acta Appl Math*, 2021, 171: 6
- 4 Bian S, Chen L, Latos E A. Nonlocal nonlinear reaction preventing blow-up in supercritical case of chemotaxis system. *Nonlinear Anal*, 2018, 176: 178–191
- 5 Blanchet A, Carrillo J A, Masmoudi N. Infinite time aggregation for the critical Patlak-Keller-Segel model in $\mathbb{R}^2$. *Comm Pure Appl Math*, 2008, 61: 1449–1481
- 6 Blanchet A, Dolbeault J, Perthame B. Two-dimensional Keller-Segel model: Optimal critical mass and qualitative properties of the solutions. *Electron J Differential Equations*, 2006, 44: 1–33
- 7 Carrillo J A, Chen L, Liu J G, et al. A note on the subcritical two dimensional Keller-Segel system. *Acta Appl Math*, 2012, 119: 43–55
- 8 Chen L, Liu J G, Wang J H. Multidimensional degenerate Keller-Segel system with critical diffusion exponent $2n/(n+2)$. *SIAM J Math Anal*, 2012, 44: 1077–1102
- 9 Chen L, Wang J H. Exact criterion for global existence and blow-up to a degenerate Keller-Segel system. *Doc Math*, 2014, 19: 103–120
- 10 Chen L, Siedentop H. Blow-up of solutions to the Patlak-Keller-Segel equation in dimension $\nu \geq 2$. *Appl Math Lett*, 2017, 74: 102–107
- 11 Jäger W, Luckhaus S. On explosions of solutions to a system of partial differential equations modelling chemotaxis. *Trans Amer Math Soc*, 1992, 329: 819–824
- 12 Luckhaus S, Sugiyama Y. Large time behavior of solutions in super-critical cases to degenerate Keller-Segel systems. *M2AN Math Model Numer Anal*, 2006, 40: 597–621
- 13 Nagai T. Global existence and blowup of solutions to a chemotaxis system. *Nonlinear Anal*, 2001, 47: 777–787
- 14 Senba T, Suzuki T. Weak solutions to a parabolic-elliptic system of chemotaxis. *J Funct Anal*, 2002, 191: 17–51
- 15 Sugiyama Y. Global existence in sub-critical cases and finite time blow-up in super-critical cases to degenerate Keller-Segel systems. *Differential Integral Equations*, 2006, 19: 841–876
- 16 Tello J I, Winkler M. Reduction of critical mass in a chemotaxis system by external application of a chemoattractant. *Ann Sc Norm Super Pisa Cl Sci (5)*, 2013, 12: 833–862
- 17 Tello J I, Winkler M. A chemotaxis system with logistic source. *Comm Partial Differential Equations*, 2007, 32: 849–877
- 18 Wang J, Chen L, Hong L. Parabolic elliptic type Keller-Segel system on the whole space case. *Discrete Contin Dyn Syst*, 2016, 36: 1061–1084
- 19 Dolbeault J, Perthame B. Optimal critical mass in the two dimensional Keller-Segel model in $\mathbb{R}^2$. *C R Math Acad Sci Paris*, 2004, 339: 611–616
- 20 Garcia A C, Pickl P. Microscopic derivation of the Keller-Segel equation in the sub-critical regime. *arXiv:1703.04376*, 2017
- 21 Huang H, Liu J G. Error estimate of a random particle blob method for the Keller-Segel equation. *Math Comp*, 2017, 86: 2719–2744
- 22 Jabin P E, Wang Z. Mean field limit and propagation of chaos for Vlasov systems with bounded forces. *J Funct Anal*, 2016, 271: 3588–3627
- 23 Lazarovici D, Pickl P. A mean field limit for the Vlasov-Poisson system. *Arch Ration Mech Anal*, 2017, 225: 1201–1231

- 24 Beckner W. Sharp Sobolev inequalities on the sphere and the Moser-Trudinger inequality. Ann of Math (2), 1993, 138: 213–242

Weak entropy solution for a Keller-Segel type fluid model

Li Chen, Feimin Huang & Lingjun Liu

Abstract In this paper, we consider a Keller-Segel type fluid model, which is a kind of Euler-Poisson system with a self-gravitational force. We show that similar to the parabolic case, there is a critical mass 8π such that if the initial total mass M is supercritical, i.e., $M > 8\pi$, then any weak entropy solution with the same mass M must blow up in finite time. The *a priori* estimates of weak entropy solutions for critical mass $M = 8\pi$ and subcritical mass $M < 8\pi$ are also obtained.

Keywords Keller-Segel type fluid model, blow-up, critical mass

MSC(2020) 35Q92, 92C17

doi: 10.1360/SSM-2021-0068