

相对论电子束的哨声不稳定性

李 芳

(中国科学院电子学研究所, 北京)

摘 要

本文根据相对论粒子与电磁波的共振特性, 讨论了相对论电子束的反常回旋共振产生的哨声不稳定性。满足共振条件的粒子在动量空间位于一组双曲线上。对于具有损失锥分布的相对论电子束, 相对论效应的共振特性提高了哨声不稳定性的阈值, 对 $\omega \sim 0.5\Omega_e$ 频段的哨声影响最大。这种作用在背景参数 $\omega_e \sim \Omega_e$ 时最为显著, 并随 ω_e/Ω_e 增大而减小。

空间环境中常存在被加速到相对论能量的粒子束, 特别是电子束。研究相对论电子与高频电磁波的回旋共振并用于解释空间的辐射现象已有很多的工作^[1,2]。除高频电磁波外, 相对论电子还可能与空间等离子体中丰富的频率低于等离子体频率 ω_e 的本征电磁模发生相互作用, 交换能量。本文将具体地讨论相对论电子束激发的哨声不稳定性。

一、基本公式

考虑一个由磁化等离子体和高能电子束组成的体系。对于其频率远大于离子回旋频率的哨声, 可忽略离子的效应, 系统的介电张量可写为:

$$\mathbf{K}(\omega, \mathbf{k}) = \mathbf{I} + \mathbf{Q}^0(\omega, \mathbf{k}) + \mathbf{Q}^R(\omega, \mathbf{k}). \quad (1)$$

$\mathbf{I}$ 是单位张量, $\mathbf{Q}^0$, $\mathbf{Q}^R$ 分别为背景等离子体电子及相对论电子束的贡献。通常的情况下背景等离子体数密度远大于相对论电子数密度, 波的色散关系由背景等离子体决定:

$$|\mathbf{A}_k| = \left| \left(1 - \frac{c^2 k^2}{\omega^2} \right) \mathbf{I} + \frac{c^2}{\omega^2} \mathbf{k} \mathbf{k} + \mathbf{Q}_k^0 \right| = 0, \quad (2)$$

张量的脚标 ' k ' 表示它的厄米部分。当不等式 $|\omega - \Omega_e| \gg k_{\parallel} v_{Te}$, $\Omega_e \gg k_{\perp} v_{Te}$ 满足时 (Ω_e 是电子回旋频率, v_{Te} 是背景等离子体的电子热速度, 平行、垂直均对外磁场而言), 哨声有如下色散关系:

$$n^2 = 1 - \frac{\omega_e^2}{\omega^2} \frac{\left\{ 2(\omega_e^2 - \omega^2) + \Omega_e^2 \sin^2 \theta + \left[\Omega_e^4 \sin^4 \theta + \frac{4\Omega_e^2}{\omega^2} (\omega_e^2 - \omega^2)^2 \cos^2 \theta \right]^{1/2} \right\}}{2\{\omega_e^2 + \Omega_e^2 - \omega_e^2 \Omega_e^2 / \omega^2 \cos^2 \theta\}}, \quad (3)$$

θ 是波矢 $\mathbf{k}$ 与外磁场间的夹角。

取外磁场的方向为 Z 轴的正方向, 介电张量与高能电子有关的部分为^[3]:

$$\mathbf{Q}^R = 2\pi \frac{\omega_R^2}{\omega^2} \int_{-\infty}^{+\infty} du_{\parallel} \int_0^{\infty} du_{\perp} \left\{ \frac{u_{\parallel}}{\gamma} \left(u_{\perp} \frac{\partial}{\partial u_{\parallel}} - u_{\parallel} \frac{\partial}{\partial u_{\perp}} \right) F_R \hat{z} \hat{z} \right. \\ \left. + \omega \left[\frac{\partial}{\partial u_{\perp}} + \frac{k_{\parallel}}{\gamma \omega} \left(u_{\perp} \frac{\partial}{\partial u_{\parallel}} - u_{\parallel} \frac{\partial}{\partial u_{\perp}} \right) F_R \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \frac{\mathbf{T}_l}{\gamma \omega - l \Omega_e - k_{\parallel} u_{\parallel}} \right] \right\}, \quad (4)$$

$$\mathbf{T}_l(u_{\perp}, u_{\parallel}) = \begin{pmatrix} \left(\frac{l^2 \Omega_e^2}{k_{\perp}^2} \right) J_l^2(\xi) & -i \left(\frac{l \Omega_e}{k_{\perp}} \right) u_{\perp} J_l(\xi) J'_l(\xi) & \left(\frac{l \Omega_e}{k_{\perp}} \right) u_{\parallel} J_l^2(\xi) \\ i \left(\frac{l \Omega_e}{k_{\perp}} \right) u_{\perp} J_l(\xi) J'_l(\xi) & u_{\perp}^2 J_l'^2(\xi) & i u_{\perp} u_{\parallel} J_l(\xi) J'_l(\xi) \\ \left(\frac{l \Omega_e}{k_{\perp}} \right) u_{\parallel} J_l^2(\xi) & -i u_{\perp} u_{\parallel} J_l(\xi) J'_l(\xi) & u_{\parallel}^2 J_l'^2(\xi) \end{pmatrix}.$$

式中 F_R 是高能电子分布函数, $\omega_R = \left(\frac{4\pi n_R e^2}{m_0} \right)$ (n_R 是相对论电子数密度, m_0, e 是电子的静止质量和电荷值), $\gamma = \left(1 + \frac{u^2}{c^2} \right)^{1/2}$, 动量变量 $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{P}}{m_0}$, $\xi = \frac{k_{\perp} u_{\perp}}{\Omega_e}$, J_l, J'_l 是 l 阶贝塞尔函数及其一阶导数. 这里只关心 $\mathbf{Q}^R$ 的反厄米部分, 它决定了波的增长率^[4]:

$$\omega_i = \frac{\omega}{16\pi} \frac{\mathbf{E}^* \cdot \mathbf{Q}_A^R \cdot \mathbf{E}}{W}, \quad (5)$$

$\mathbf{E}$ 是波的电场扰动, 波能密度 $W = \frac{1}{16\pi} \mathbf{E}^* \cdot (\partial / \partial \omega) (\omega \mathbf{\Lambda}_k) \cdot \mathbf{E}$. 吕保维教授严格地讨论了相对论情况下积分(4)中的数学问题^[9]. 将(4)式的有关部份代入(5)式可得: 波的增长率:

$$\omega_i = \frac{\pi}{8} \frac{|\mathbf{E}_x|^2}{W} \frac{\omega_R^2}{\omega^2} \int_{-\infty}^{+\infty} du_{\parallel} \int_0^{\infty} du_{\perp} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \omega \left[\frac{\partial}{\partial u_{\perp}} + \frac{k_{\parallel}}{\gamma \omega} \left(u_{\perp} \frac{\partial}{\partial u_{\parallel}} - u_{\parallel} \frac{\partial}{\partial u_{\perp}} \right) F_R \right. \\ \left. \pi \delta(\gamma \omega - l \Omega_e - k_{\parallel} u_{\parallel}) \left\{ \frac{l^2 \Omega_e^2}{k_{\perp}^2} J_l^2(\xi) + \frac{D^2}{(n^2 - S)^2} u_{\perp}^2 J_l'^2(\xi) + \frac{n^2 \cdot \cos^2 \theta \sin^2 \theta}{(n^2 \cdot \sin^2 \theta - 1)} u_{\parallel}^2 J_l^2(\xi) \right. \right. \\ \left. + \frac{2D}{n^2 - S} \frac{l \Omega_e}{k_{\perp}} J_l(\xi) J'_l(\xi) + \frac{2n^2 \cos \theta \sin \theta l \Omega_e}{n^2 \sin^2 \theta - P} \frac{1}{k_{\parallel}} u_{\parallel} J_l^2(\xi) \right. \\ \left. + \frac{2D}{n^2 - S} \cdot \frac{n^2 \cos \theta \sin \theta}{n^2 \cdot \sin^2 \theta - P} u_{\parallel} u_{\perp} J_l(\xi) J'_l(\xi) \right\}. \quad (6)$$

式中 n 是波的折射率, 已由(3)式给出, $S = 1 + \frac{\omega_c^2}{\Omega_e^2 - \omega^2}$, $D = \frac{\omega_c^2 \Omega_e}{\omega(\Omega_e^2 - \omega^2)}$, $P = 1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}$.

(6)式中 δ 函数余量为零, 即为共振条件:

$$\gamma \omega - k_{\parallel} u_{\parallel} - l \Omega_e = 0. \quad (7)$$

$l = 0$ 表示契伦柯夫共振, $l \neq 0$ 表示迴旋共振称 $l < 0$ 为反常迴旋共振. 不同于非相对论的情况, 相对论条件下的共振条件不仅与粒子的平行动量有关, 也与粒子的垂直动量有关. (7)式可写为:

$$(n^2 \cos^2 \theta - 1) \left[\frac{u_{\parallel}^2}{c^2} + \frac{l \Omega_e}{\omega} \frac{n \cos \theta}{n^2 \cos^2 \theta - 1} \right] - \frac{u_{\perp}^2}{c^2} = \frac{l^2 \Omega_e^2}{\omega^2} \frac{1}{n^2 \cos^2 \theta - 1} + 1. \quad (8)$$

Freund 等人讨论的相对论电子对寻常波和快非寻常波的激发对应于 $n^2 \cos^2 \theta < 1$ 的情

况^[2], 此时共振条件(8)表示动量空间的一系列椭圆。本文讨论的哨声波满足 $n^2 \cos^2 \theta > 1$, 此时(8)式表示的是动量空间的双曲线(图 1)。由图可见, 在相对论情况下粒子和波的共振作用不是发生在平行动量的一个点上, 而是发生在 $u > u_1$ 的一个区域内。本文考虑波矢 $k_{\parallel}$ 的方向与电子束的方向一致, 因此只关心 l 为负值所对应的反常迴旋共振。

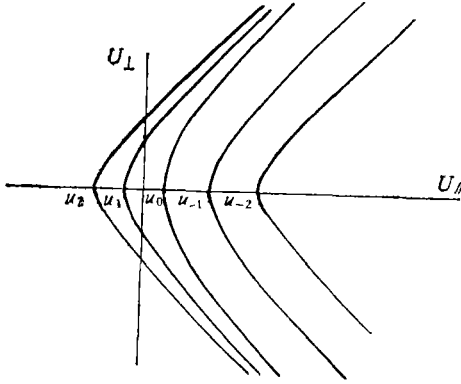


图 1 动量空间的共振双曲线

Fig. 1 Resonant hyperbolas in momentum space

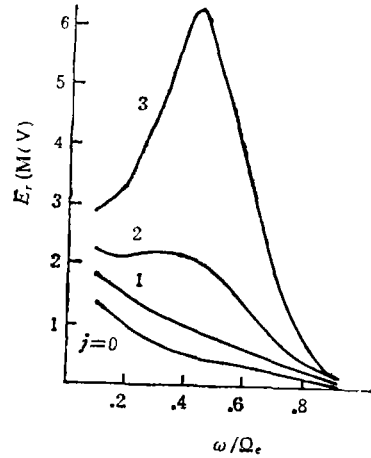


图 2 不稳定性的激发域值随波频率的变化
($\omega_e/\Omega_e = 1.2$)

Fig. 2 Variation of instability threshold with wave frequency

二、对不稳定性的分析

下面通过对一个实际的电子束: 在非均匀磁场中形成的具有损失锥分布的相对论电子束的分析说明相对论效应对不稳定阈值的影响。将考虑的分布函数写作 $F_R = f_{\perp} \cdot f_{\parallel}$ 。在自然界和实验室存在这样的电子束, 它们在平行方向具有很宽的能量谱, 如被外电场加速, 被称为“逃逸电子”的高能电子束。其分布函数的平行分量可写为^[6]:

$$f_{\parallel} = \begin{cases} 1/u_{\max}, & 0 < u_{\parallel} < u_{\max}; \\ 0, & u_{\parallel} > u_{\max}. \end{cases} \quad (9)$$

$E_m = [(1 + u_{\max}^2/c^2)^{1/2} - 1]m_0c^2$ 称为电子束最大能量。分布函数的垂直分量可用下面函数描述:

$$f_{\perp} = (\pi\alpha_{\perp})^{-1} \frac{1}{j!} \left(\frac{u_{\perp}}{\alpha_{\perp}} \right)^{2j} \exp(-u_{\perp}^2/\alpha_{\perp}^2), \quad (10)$$

$j = 0, 1, 2, 3, \dots$ 。此函数在 $v_{\perp} = j^{1/2}\alpha_{\perp}$ 处具有峰值, 其半宽度 $\delta v_{\perp} = \alpha_{\perp}/(4j)^{1/2}$, $j = 0$ 对应麦克斯韦分布。此处取 $\alpha_{\perp} = u_{\max}$ 。

考虑平行传播的哨声, $k_{\perp} = 0$ 。将分布函数(9)、(10)式代入(6)式并作积分, 可得下面增长率表示式

$$\omega_i = \frac{\pi\omega}{2} \frac{\omega_R^2}{\omega^2} \frac{\Omega_e}{k_{\parallel} u_{\max}} \frac{(1+A)^2 + A^2}{G} \left\{ j! - \left[Y^{i+1} + \sum_{i=0}^{j-1} P_i Y^{i-i} + j! \right] e^{-Y} \right\}. \quad (11)$$

式中

$$A = \frac{D}{n^2 - S}, G = \left\{ \left[1 + \frac{\omega_c^2 Q_c^2}{(Q_c^2 - \omega^2)^2} (1 + A^2) + \frac{Q_c \omega_c^2 (Q_c^2 + \omega^2)}{\omega (Q_c^2 - \omega^2)^2} \right] \right\},$$

$$P_j = \frac{j!}{(j-i)!}, Y = \frac{u_{rm}^2}{\alpha_{\perp}^2},$$

u_{rm} 是 $u_{\parallel} = u_{\max}$ 时由共振条件决定的电子垂直动量:

$$\frac{u_{rm}^2}{c^2} = n^2 \frac{u_{\max}^2}{c^2} + 2n \frac{Q_c}{\omega} \frac{u_{\max}}{c} + \left(\frac{Q_c^2}{\omega^2} - 1 \right). \quad (12)$$

令 $\omega_i = 0$, 由(11)式可解出相对论电子束的参量 $u_{\max}$, 对应的电子束最大能量 E_T 称为不稳定性的阈值. 图 2 是不稳定性的阈值 E_T 随波的频率变化的数值计算结果. 图中 4 条曲线分别对应 $j = 0, 1, 2, 3$. 由图中曲线可见对于具有损失锥分布的相对论电子束 ($j = 1, 2, 3$), 其不稳定性的激发阈值均高于 $j = 0$ 对应的麦克斯韦分布的相应值. 如前所述相对论效应使波和粒子的共振作用发生在平行动量 $u_{\parallel} > u_i$ 的一个区域, 对本文所讨论的具有损失锥分布的相对论电子束, 这种共振现象导致哨声不稳定性阈值的增大.

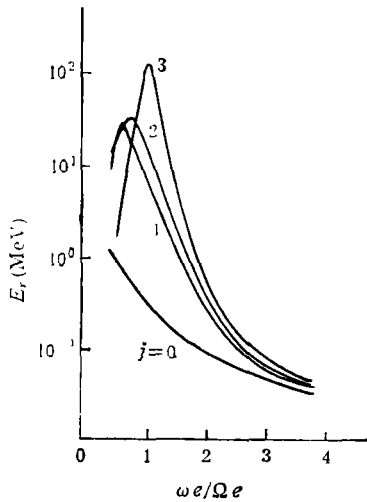


图 3 不稳定性的激发域值随背景等离子体参数 ω_e/Q_e 的变化 ($\omega = 0.5Q_e$)
Fig. 3 Variation of instability threshold with the parameter ω_e/Q_e of back ground plasma

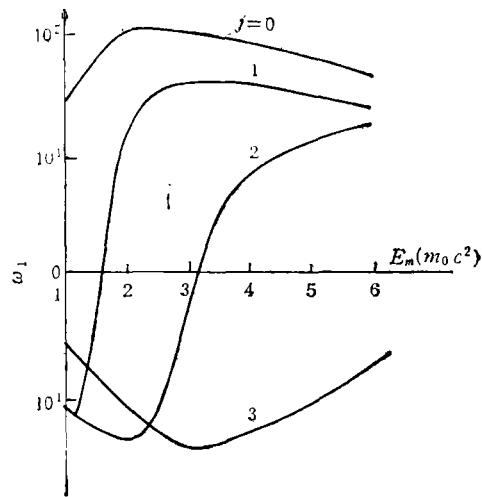


图 4 增长率随相对论电子束最大能量的变化 ($\omega = 0.5Q_e, \omega_e/Q_e = 1.4, m_0 c^2 = 0.511 \text{ MeV}$)
Fig. 4 Variation of growth rate with maximum energy of electronic beam

图 3 是不稳定性激发阈值 E_T 随背景等离子体参数 ω_e/Q_e 的变化, 可以看出在 $\omega_e \sim Q_e$ 时, 相对论效应的影响最大. 具有损失锥分布的电子束 ($j = 1, 2, 3$) 相对于麦克斯韦分布的电子束 ($j = 0$) 不稳定性的激发阈值有很大增加. 随 ω_e/Q_e 增大, 相对论效应的这种影响变得不明显. 图 4 是波的增长率随相对论电子束最大能量 E_m 的变化. 计算中 E_m 所取的范围大于 $j = 0$ 对应的不稳定性激发阈值, 因此相应的增长率为正值; 而对于具有损失锥分布的电子束 ($j = 1, 2, 3$), 由于不稳定性激发阈值增大, 计算结果中

增长率出现了负值。计算中取相对论电子束数密度 $n_R = 1\text{cm}^{-3}$, 其它参量已在图中说明。

三、结论和讨论

本文讨论了相对论电子束对哨声不稳定性的激发。相对论电子与哨声波的共振点分布在动量空间的一组双曲线上。由于相对论效应改变了粒子的共振区域, 因此不稳定性具有不同于非相对论情况的一些特点。

对于能量 $E \sim \text{MeV}$ 具有损失锥分布的相对论电子束, 相对论效应使反常迴旋共振产生的哨声不稳定性的阈值增大。这种影响对 $\omega \sim 0.5\Omega_e$ 频段的哨声作用最大 ($E_m > E_T$ 时, 此频段一般具有最大增长率), 并在背景等离子体参数满足 $\omega_e \sim \Omega_e$ 时作用最显著。

综合本文的结果和 Freund 等人对于相对论电子束对高频电磁波激发的讨论, 可得以下结论: 对于 $n^2 \cos^2 \theta > 1$ 和 $n^2 \cos^2 \theta < 1$ 两种不同类型的波, 相对论粒子在其动量空间具有两种不同的共振形态; 由于这种共振形态不同的影响, 使“准直度”较高的相对论电子束易于激发哨声不稳定性(相对性能量阈值较低), 而有一定“发散度”的相对论电子束易于激发高频电磁不稳定性。在日地空间的某些区域磁场随空间位置有很大变化(如在地球极区), 相对论粒子在其间运动满足磁矩守恒, 因此在不同的空间区域电子束具有不同的分布函数。在分析这种区域的等离子体波不稳定性时上面结论是一个值得考虑的因素。

作者感谢吕保维教授在本工作中给予的关心和帮助。

参 考 文 献

- [1] Carr T. D. and S. Gulkis, *Rev. Astron. Astrophys.*, Vol. 7, p. 577, 1969.
- [2] Freund, H. P., H. K. Wong, C. S. Wu and M. J. Xu, *Phys. Fluids*, Vol. 26, p. 2263, 1983.
- [3] Baldwin, D. E., I. B. Bernstein and M. P. H. Weenink, *Advances in Plasma Physics* (Ed. by A. Simon and W. B. Thompson, Wiley, New York), Vol. 3, p. 32, 1969.
- [4] Stix, T. T. H., *The Theory of Plasma waves* (Mc-Graw-Hill Book Company), Chap. 3, 1962.
- [5] 吕保维, 中国科学, 第9卷, 第1000页, 1987.
- [6] Lee, L. C., C. S. Wu, H. P. Freund, D. Dillenburg and J. Goedert, *J. Plasma Phys.*, Vol. 22, p. 277, 1978.
- [7] Dory, R. A., G. E. Guest and E. G. Harris, *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 14, p. 131, 1965.

INSTABILITY OF WHISTLER WAVES PRODUCED BY RELATIVISTIC ELECTRON BEAM

Li Fang

(Institute of Electronic, Academia Sinica, Beijing)

Abstract

According the characters of resonance of relativistic particles with electromagnetic waves, the instability of whistler waves produced by relativistic electron beam is studied. The resonant points in momentum space of particles lie in a series of hyperbolas. For a electron beam of lose-cone distribution this resonant phenomenon makes a rising of the threshold of the instability. This rising is effective in frequency band of $\omega \sim 0.5\Omega_e$ and in case $\omega_e \sim \Omega_e$, and it decreases with the increasing of the parameter ω_e/ω_e .