准双椭圆三体模型

齐毅^{1*}, 徐世杰²

1. 瑞尔森大学航空航天学院, 多伦多 ON M5B 2K3, 加拿大;

2. 北京航空航天大学宇航学院, 北京 100191

*联系人, E-mail: lushenqi@163.com

收稿日期: 2019-11-19; 接受日期: 2020-03-16; 网络出版日期: 2020-05-13

国家自然科学基金(编号: 11432001)资助项目

摘要 本文我们提出了日地月准双椭圆三体问题(Quasi-Bielliptic Problem, QBEP)模型. 该模型假设月球绕地球的轨道为受太阳引力摄动影响的准椭圆轨道, 而地月质心绕太阳的轨道为严格的椭圆. 此外我们认为日地月三个天体运行在同一轨道平面内. 我们推导了月球准椭圆轨道的一阶展开解析表达式需要满足的微分方程, 并利用我们提出的计算方法, 将微分方程问题转化为线性方程组问题来进行求解. 通过比较数值积分结果, 我们方法的有效性得到了验证. 而后我们详细比较了该解析结果与准双圆模型的差异, 同时讨论了两个基准椭圆轨道偏心率对解析结果的影响.

关键词 限制性四体问题, 准双椭圆模型, 日地月系统

PACS: 45.50.Pk, 95.75.Pq, 96.20.-n

1 引言

深空探测是航天领域的重要分支, 其中经典的流形拼接法是基于圆型限制性三体问题(Circular Restricted Three Body Problem, CRTBP). 在CRTBP下, 我们可以构造出一系列二体问题下不存在的新轨道, 比如平动点附近周期性的Halo轨道、准周期性的Lissajous轨道以及平动点之间的同宿和异宿轨道等. 因此该模型已经被用于ISEE-3, WIND, SOHO, GENESIS, MAP和GAIA等平动点任务以及Hiten, SMRAT-1和GRAIL等地月低能转移任务中. 虽然CRTBP模型的研究

及应用已经取得了丰硕的成果, 但在一些更加复杂的力学环境下, 仅仅考虑两个主天体的引力作用是不够的, 比如典型的地月低能转移问题中, 当航天器距离地月系统较远时, 太阳引力对轨道的影响不可以忽略, 因此原有的地-月-航天器CRTBP模型存在缺陷. 此时我们就有必要引入一个完整的日-地-月-航天器限制性四体模型(Restricted Four-Body Problem, RFBP). 该模型由于太阳引力的加入变为时变系统, 因此CRTBP模型下的不变流形和Jacobi常数等概念都会随之消失. 虽然RFBP模型相较于CRTBP更为复杂, 但现有的研究表明, 如果在地月转移中考虑太阳的引力摄动作用,

引用格式: 齐毅, 徐世杰. 准双椭圆三体模型. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2020, 50: 079502

Qi Y, Xu S J. Quasi-bielliptic three-body problem (in Chinese). Sci Sin-Phys Mech Astron, 2020, 50: 079502, doi: 10.1360/SSPMA-2019-0384

可以明显地减少燃料消耗^[1], 因此如何在这一模型下进行轨道设计成为了航天动力学界新的热点和研究方向.

日地月系统中常见的RFBP模型是双圆模型(Bi-circular Model, BCM). 该模型假设月球绕地球的轨道为圆轨道, 而地月质心绕太阳的轨道也是圆轨道. Castelli讨论了平面拼接CRTBP模型在何种情况下可以近似代替BCM^[2]. Qi等人^[3]利用有限时间Lyapunov指数构造的拉格朗日拟序结构(Lagrangian Coherent Structure, LCS)研究了日地月BCM下的地月低能转移问题. Castellà和Jorba^[4]提出了几种精确计算周期轨道解的数值方法, 然后用这些方法得到了BCM下拉格朗日点附近的2维环面族. Circi^[5]研究了地月椭圆型限制性三体问题(Restricted Elliptic Three-Body Problem, ERTBP)和日地月BCM下地月间穿越轨道的性质, 并分析了偏心率和太阳摄动对Jacobi常数和穿越条件的影响. Qi和Xu在BCM下提出了一系列地月低能转移轨道^[6,7]和日地平动点低能转移轨道^[8,9].

在BCM基础上, Assadian和Pourtakdoust^[10]进一步提出了双椭圆模型(BiElliptic Problem, BEP). 该模型考虑了地月运动和太阳-地月质心运动的偏心率以及黄白交角. 研究表明, CRTBP模型下固定在地月连线上的 L_1 和 L_2 平动点在被复杂的准周期轨道代替, 而且轨道会明显地偏离地月连线. 这些准周期轨道是不稳定的. L_3 的准平动点会发生大的偏移, 其轨迹甚至接近 L_4 和 L_5 平动点. 此外在某些特殊的时间段, 日地月BEP模型下会产生两个新的准平动点.

在BCM的基础上, Andreu^[11]在其博士论文中通过考虑日地月三个主天体的相互作用详细推导了日地月准双圆模型(Quasi Bicircular Problem, QBCP). 该模型认为太阳、地球和月球三个天体的引力相互作用导致地-月轨道和太阳-地月质心轨道都不是严格的圆轨道, 而是在圆轨道的基础上存在扰动. 由于日地月三者运动的周期性, 轨道的扰动也是周期性的, 由此可以将扰动项用傅里叶级数的形式展开. 通过半解析的方法, 我们可以递归地求解傅里叶级数的系数, 从而得到三个主天体运动的准双圆轨道表达式, 进而推导出该引力场中的质点运动的动力学方程. 作者在此模型下, 又研究了平动点附近的周期和准周期轨道, 以及太阳系下月球的Halo轨道等问题. 而后, Andreu在该模型下研究了中心流形^[12]和月球外侧的Halo轨道^[13]等问

题. 从QBCP的准周期Halo轨道出发, Andreu计算得到了时间超过41年的真实地月星历(Real Ephemeris, REMS)下的 L_2 附近的Halo轨道^[14]. 由地月平面CRTBP模型下的80个低能快速周期转移轨道族出发, Leiva和Briozzo^[15]利用解析延拓得到了日地月QBCP下的11条周期轨道和25条周期弧段.

在处理实际的日地月三个主天体的RFBP模型时, 上述简化模型的区别在于如何对日地月三个主天体的运动进行刻画, 其中BCM最为简化, BEP考虑了偏心率和黄白交角却没有考虑三个天体间的相互作用对轨道的影响, QBCP考虑了相互作用却忽略了两个轨道的偏心率. 因此我们认为上述模型都存在着某些缺陷. Hou和Liu^[16]就曾指出BCP模型和BEP模型在处理共线平动点附近的运动时, 由于未考虑太阳引力对月球轨道的影响会造成失真现象. 本文我们将提出日地月准双椭圆模型(Quasi-Bielliptic Problem, QBEP). 该模型既考虑了太阳引力对地月系统的轨道的摄动影响, 同时又将轨道的偏心率考虑在内. 通过推导和数值计算我们将得到该模型的一阶展开解析表达式, 同时我们将对解析结果进行讨论.

2 模型假设

我们假设月球绕地球的轨道为受太阳引力摄动影响的准椭圆轨道, 而地月质心绕太阳的轨道为严格的椭圆. 此外我们忽略黄白交角, 认为日地月三个天体运行在同一轨道平面内. 这里需要说明的是, 理论上地月质心绕太阳的轨道也应该是准椭圆轨道, 但由于地月质量的分散对该轨道的影响很小(与其他大行星摄动量级相当), 因此我们将其轨道近似为严格的椭圆轨道. 图1为日地月系统的概略图, 其中 m_1 , m_2 和 m_3 分别表示地球、月球和太阳的质量. O_{12} 和 O 分别表示地月质心和日地月的总质心的位置. 矢量 $\mathbf{r}$ 和 $\mathbf{R}$ 分别为地球指向月球的矢量和地月质心 O_{12} 指向太阳的矢量. 根据文献^[11], 矢量形式的日地月三体问题动力学方程为

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{r}} &= -G(m_1 + m_2)\frac{\mathbf{r}}{r^3} + Gm_3\left(\frac{\mathbf{r}_{23}^3}{r_{23}^3} - \frac{\mathbf{r}_{13}^3}{r_{13}^3}\right), \\ \ddot{\mathbf{R}} &= -GM\left((1-\mu)\frac{\mathbf{r}_{13}^3}{r_{13}^3} + \mu\frac{\mathbf{r}_{23}^3}{r_{23}^3}\right),\end{aligned}\quad (1)$$

图1 (网络版彩图) QBEP概略图

Figure 1 (Color online) Schematic of the QBEP.

其中 $\mu = m_2 / (m_1 + m_2)$ 为地月系统的质量系数, $M = m_1 + m_2 + m_3$ 为日地月三体的总质量, G 为万有引力系数. 公式(1)中的相对位置矢量关系如下:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{13} &= \mathbf{R} + \mu \mathbf{r}, \\ \mathbf{r}_{23} &= \mathbf{R} - (1 - \mu) \mathbf{r}. \end{aligned}$$

由于我们假设日地月三个天体都运行在同一平面内, 所以式(1)中的矢量 $\mathbf{r}$ 和 $\mathbf{R}$ 可以用复数 z 和 Z 表示, 那么上述动力学方程的复数形式可以表述为

$$\begin{aligned} \ddot{z} &= -G(m_1 + m_2) \frac{z}{r^3} + Gm_3 \left(\frac{Z - (1 - \mu)z}{r_{23}^3} - \frac{Z + \mu z}{r_{13}^3} \right), \\ \ddot{Z} &= -GM \left((1 - \mu) \frac{Z + \mu z}{r_{13}^3} + \mu \frac{Z - (1 - \mu)z}{r_{23}^3} \right), \end{aligned} \quad (2)$$

其中

$$\begin{aligned} r_{13} &= \sqrt{(Z + \mu z)(\bar{Z} + \mu \bar{z})}, \\ r_{23} &= \sqrt{(Z - (1 - \mu)z)(\bar{Z} - (1 - \mu)\bar{z})}. \end{aligned}$$

根据我们对于准双椭圆模型下日地月三个天体轨道的假设,

$$\begin{cases} z \simeq \frac{a_m(1 - e_m^2)}{1 + e_m \cos f_m(t)} \exp(i f_m(t)), \\ Z = \frac{a_s(1 - e_s^2)}{1 + e_s \cos f_s(t)} \exp[i(f_s(t) + f_{s0})], \end{cases} \quad (3)$$

其中, a_m , e_m , f_m 分别表示月球绕地球的椭圆轨道的半长轴、偏心率和真近点角. a_s , e_s , f_s 分别表示地月质心绕太阳的椭圆轨道的半长轴、偏心率和真近点角. 这里设定 $f_m = 0$ 时, 复数 z 在复平面的指向为实数轴正向, 而此时地月质心椭圆轨道的近日点方向与实数轴正向的夹角为 f_{s0} . 由于月球绕地球的椭圆轨道会受到太阳引力摄动的影响, 所以我们认为

$$\begin{cases} z = \frac{a_m(1 - e_m^2)}{1 + e_m \cos f_m(t)} \exp(i f_m(t)) \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k u_k(t) \right] \\ = A \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k u_k(t) \right], \\ Z = \frac{a_s(1 - e_s^2)}{1 + e_s \cos f_s(t)} \exp[i(f_s(t) + f_{s0})] = B, \end{cases} \quad (4)$$

其中

$$\begin{cases} A = \frac{p_m}{1 + e_m \cos f_m(t)} \exp(i f_m(t)), \\ B = \frac{p_s}{1 + e_s \cos f_s(t)} \exp[i(f_s(t) + f_{s0})], \end{cases}$$

称为基准双椭圆, $p_m = a_m(1 - e_m^2)$ 和 $p_s = a_s(1 - e_s^2)$ 为两个椭圆轨道的半通径. 式(4)中的小参数设定为

$$\varepsilon = \frac{p_m}{p_s} \approx \frac{1}{389} = 2.57 \times 10^{-3}.$$

一旦能够得到公式(4)中 $u_k(t)$ 的解析表达式, 我们就能够得到月球绕地球的准双椭圆的具体表达式. 因此本文的重点就是如何求解 $u_k(t)$ 的解析表达式.

3 模型推导

本节我们来推导 $u_k(t)$ 的解析表达式需要满足的微分方程. 将公式(4)带入到动力学方程(2)中进行计算, 其中根据开普勒第二定律, 两个真近点角需要满足如下条件:

$$\begin{cases} \dot{f}_m(t) = \sqrt{\frac{G(m_1 + m_2)}{p_m^3}} (1 + e_m \cos f_m)^2, \\ \dot{f}_s(t) = \sqrt{\frac{G(m_1 + m_2 + m_3)}{p_s^3}} (1 + e_s \cos f_s)^2. \end{cases}$$

为了简化计算, 我们使用参数归一化: $G = 1$, $m_1 + m_2 = 1$, $p_m = a_m(1 - e_m^2) = 1$. 太阳的归一化质量为 $m_s = m_3 / (m_1 + m_2)$. 那么可以得到

$$\begin{cases} \dot{f}_m(t) = (1 + e_m \cos f_m)^2, \\ \dot{f}_s(t) = \sqrt{(1 + m_s) / p_s^3} (1 + e_s \cos f_s)^2. \end{cases} \quad (5)$$

将归一化参数和公式(4)和(5)带入到动力学方程(2)中, 经过计算简化, 得到小参数的 m 次幂 ε^m 的系数 $u_m(t)$ 需要满足如下微分方程式:

$$A\ddot{u}_m + 2A\dot{u}_m + \frac{3}{2}\ddot{A}u_m + \frac{3}{2}\ddot{A}\bar{u}_m = \ddot{A}(k.t)_1 + \frac{m_s B}{|B|^3}(k.t)_2, \quad (6)$$

其中 $k.t$ 表示可以由前面 u_k , $k < m$ 计算得到的已知项, $(k.t)_1$ 和 $(k.t)_2$ 为两个不同的已知项. 限于文章篇幅, 公式(6)的具体推导过程就不在此列出. 接下来我们关注如何求解微分方程(6).

为了进一步简化方程(6), 设 $g(f_m) = 1 + e_m \cos f_m$, 则可以得到如下关系式:

$$\begin{aligned} \dot{f}_m(t) &= g^2, \\ g'(f_m) &= -e_m \sin f_m, \\ g''(f_m) &= -e_m \cos f_m, \\ A &= e^{if_m} / g(f_m), \\ \dot{A} &= (ig - g')gA, \\ \ddot{A} &= -(g + g'')g^3 A = -g^3 A, \end{aligned} \quad (7)$$

其中, 上述公式中的撇号(')表示对括号内自变量求导.

利用关系式(7), 方程(6)简化为

$$\begin{aligned} \ddot{u}_m + 2(ig - g')g\dot{u}_m - \frac{3}{2}g^3 u_m - \frac{3}{2}g^3 \bar{u}_m \\ = -g^3(k.t)_1 + \frac{m_s B}{A|B|^3}(k.t)_2. \end{aligned} \quad (8)$$

方程(8)中的已知项 $(k.t)_1$ 和 $(k.t)_2$ 随着 m 的增加会逐渐复杂, 因此这里我们优先解决 $u_m(t)$ 的前几项的结果, 特别地, 易得 $u_0 = 1$. 而当 $m=1$ 时, 微分方程(8)有如下形式:

$$\begin{aligned} \ddot{u}_1 + 2(ig - g')g\dot{u}_1 - \frac{3}{2}g^3(u_1 + \bar{u}_1) &= \frac{m_s B}{A|B|^3} \left(\frac{1}{2}h + \frac{3}{2}\bar{h} \right) \\ &= \frac{m_s}{p_s^2} (1 + e_s \cos f_s)^3 \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\bar{h} \right), \end{aligned} \quad (9)$$

其中

$$h = \frac{1 + e_s \cos f_s}{1 + e_m \cos f_m} \exp(i(f_m - f_s - f_{s0}))$$

表征太阳引力对月球椭圆轨道长度伸缩和相位的影响.

4 一阶展开解析表达式求解方法

本节我们来具体研究如何求解微分方程(9)的解析解, 即月球准椭圆轨道的一阶展开解析表达式 $u_1(t)$.

我们假设 $u_1 = x + iy$, 同时为了表示方便, 使用如下符号代替: $\alpha = f_m$, $\alpha = f_s$, $a = e_m = 0.0424933$, $b = e_s = 0.016735663$,

$$p = m_s/p_2^2 = 2.140834622, \quad q = \sqrt{(1 + m_s)/p_s^3} = 0.073904645.$$

根据公式(5), 可以得到

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= (1 + a \cos \alpha)^2, \\ \dot{\beta} &= q(1 + b \cos \beta)^2, \\ \ddot{\alpha} &= -2a \sin \alpha (1 + a \cos \alpha)^3, \\ \ddot{\beta} &= -2q^2 b \sin \beta (1 + b \cos \beta)^3. \end{aligned} \quad (10)$$

如果只求到 ε 的1次项, 即

$$\begin{aligned} z &= A(1 + u_1 \varepsilon + u_2 \varepsilon^2 + u_3 \varepsilon^3 + \dots) \\ &\approx A(1 + u_1 \varepsilon) \\ &= A[1 + (x + iy)\varepsilon], \end{aligned} \quad (11)$$

其中根据微分方程(9), x 和 y 应满足如下条件:

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2(1 + a \cos \alpha)^2 \dot{y} + 2a \sin \alpha (1 + a \cos \alpha) \dot{x} \\ \quad - 3(1 + a \cos \alpha)^3 x \\ = p(1 + b \cos \beta)^3 [3 \cos^2(\beta - \alpha + f_{s0}) - 1], \\ \ddot{y} + 2(1 + a \cos \alpha)^2 \dot{x} + 2a \sin \alpha (1 + a \cos \alpha) \dot{y} \\ = p(1 + b \cos \beta)^3 [3 \cos(\beta - \alpha + f_{s0}) \sin(\beta - \alpha + f_{s0})]. \end{cases} \quad (12)$$

观察上式, 我们推测 x 和 y 的解析表达式可以有如下形式:

$$\begin{cases} x = \sum_{i,j,k,l \geq 0} A_{i,j,k,l} \cos^i \alpha \sin^j \alpha \cos^k \beta \sin^l \beta, \\ y = \sum_{i,j,k,l \geq 0} B_{i,j,k,l} \cos^i \alpha \sin^j \alpha \cos^k \beta \sin^l \beta, \end{cases} \quad (13)$$

其中要求指标 $i, j, k, l \geq 0$ 是为了保证 x 和 y 是周期有界函数.

那么根据公式(10), 我们可以得到

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (1 + a \cos \alpha)^2 \dot{x}_\alpha + q(1 + b \cos \beta)^2 \dot{x}_\beta, \\ \dot{y} &= (1 + a \cos \alpha)^2 \dot{y}_\alpha + q(1 + b \cos \beta)^2 \dot{y}_\beta, \\ \ddot{x} &= (1 + a \cos \alpha)^4 \ddot{x}_{\alpha\alpha} + q^2(1 + b \cos \beta)^4 \ddot{x}_{\beta\beta} \\ &\quad - 2a \sin \alpha (1 + a \cos \alpha)^3 \dot{x}_\alpha \\ &\quad - 2q^2 b \sin \beta (1 + b \cos \beta)^3 \dot{x}_\beta \\ &\quad + 2q(1 + a \cos \alpha)^2(1 + b \cos \beta)^2 \dot{x}_{\alpha\beta}, \\ \ddot{y} &= (1 + a \cos \alpha)^4 \ddot{y}_{\alpha\alpha} + q^2(1 + b \cos \beta)^4 \ddot{y}_{\beta\beta} \\ &\quad - 2a \sin \alpha (1 + a \cos \alpha)^3 \dot{y}_\alpha \\ &\quad - 2q^2 b \sin \beta (1 + b \cos \beta)^3 \dot{y}_\beta \\ &\quad + 2q(1 + a \cos \alpha)^2(1 + b \cos \beta)^2 \dot{y}_{\alpha\beta}, \end{aligned} \quad (14)$$

式中的下角标 α 和 β 表示对变量 α 和 β 的偏导数. 将公式(14)代入微分方程(12), 可以得到

$$\begin{cases} (1 + a\cos\alpha)^4(x_{\alpha\alpha} - 2y_{\alpha}) + q^2(1 + b\cos\beta)^4x_{\beta\beta} \\ - 2q^2b\sin\beta(1 + b\cos\beta)^3x_{\beta} \\ + 2q(1 + a\cos\alpha)^2(1 + b\cos\beta)^2(x_{\alpha\beta} - y_{\beta}) \\ + 2qasina(1 + a\cos\alpha)(1 + b\cos\beta)^2x_{\beta} \\ - 3(1 + a\cos\alpha)^3x \\ = p(1 + b\cos\beta)^3[3\cos^2(\beta - \alpha + f_{s0}) - 1], \\ (1 + a\cos\alpha)^4(y_{\alpha\alpha} + 2x_{\alpha}) + q^2(1 + b\cos\beta)^4y_{\beta\beta} \\ - 2q^2b\sin\beta(1 + b\cos\beta)^3y_{\beta} \\ + 2q(1 + a\cos\alpha)^2(1 + b\cos\beta)^2(y_{\alpha\beta} + x_{\beta}) \\ + 2qasina(1 + a\cos\alpha)(1 + b\cos\beta)^2y_{\beta} \\ = p(1 + b\cos\beta)^3[3\cos(\beta - \alpha + f_{s0})\sin(\beta - \alpha + f_{s0})]. \end{cases} \quad (15)$$

根据假定的 x 和 y 的解析表达式(13), x 和 y 对变量 α 和 β 的一阶和二阶偏导数也具有式(13)的形式. 具体来说, 如果 x 和 y 的解析表达式为式(13), 那么 x 和 y 对变量 α 和 β 的一阶和二阶偏导数中 $\cos^i\alpha\sin^j\alpha\cos^k\beta\sin^l\beta$ 项的系数见表1.

将表1中的结果带入到方程(15)中, 可以得到

$$\mathbf{D}(a, b, q) \begin{bmatrix} A_{i,j,k,l} \\ B_{i,j,k,l} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{i,j,k,l}^{(1)} \\ C_{i,j,k,l}^{(2)} \end{bmatrix}, \quad (16)$$

其中, $\mathbf{D}(a, b, q)$ 是通过方程(15)左侧得到的包含参数 a ,

b , q 的矩阵. 方程(15)的右侧两项也可以表示为

$\sum_{i,j,k,l \geq 0} C_{i,j,k,l} \cos^i\alpha \sin^j\alpha \cos^k\beta \sin^l\beta$ 的形式, 方程(16)中 $C_{i,j,k,l}^{(1)}$ 和 $C_{i,j,k,l}^{(2)}$ 是方程组(15)中第一和第二个方程右侧的系数. 需要说明的是系数 $A_{i,j,k,l}$ 和 $B_{i,j,k,l}$ 以及 $C_{i,j,k,l}^{(1)}$ 和 $C_{i,j,k,l}^{(2)}$ 是按指标 i, j, k, l 的某种顺序排列的列向量, 而且要求方程(16)两侧的排列顺序是一致的. 通过求解线性方程组(16)就可以得到 x 和 y 的解析表达式(13)中的系数 $A_{i,j,k,l}$ 和 $B_{i,j,k,l}$.

这里需要指出的是, 本文只研究了QBEP一阶解析展开式的系数, 所以该形式并非完备的QBEP. 本文得到的准双椭圆模型形式误差有两个来源: 数值方法的计算误差和模型忽略的高阶项. 数值计算的误差主要体现在公式(16)的求解, 而高阶项误差主要是由于 ε^m , $m > 1$ 的贡献没有考虑(大约为 $\varepsilon^2 = 6.5091 \times 10^{-6}$).

5 结果展示

根据上一节的求解方法, 本节我们介绍月球准椭圆轨道一阶展开解析表达式的数值结果.

在线性方程组(16)的求解中, 理论上指标 $i, j, k, l \geq 0$ 是无界的, 但在具体数值计算中, 必须要求指标 i, j, k, l 是有范围的. 此外还需要说明的是即使指标 i, j, k, l 是有界的, 但由于正弦和余弦函数可以相互转化, 所以方程(13)右侧两项的指标 i, j, k, l 范围不是唯一的, 这里

表1 x 和 y 的一阶和二阶偏导数中 $\cos^i\alpha\sin^j\alpha\cos^k\beta\sin^l\beta$ 项的系数

Table 1 Coefficients of the term $\cos^i\alpha\sin^j\alpha\cos^k\beta\sin^l\beta$ in 1- and 2-order partial derivatives of x and y

偏导数	$\cos^i\alpha\sin^j\alpha\cos^k\beta\sin^l\beta$ 项的系数
x_{α}	$-(i+1)A_{i+1,j-1,k,l} + (j+1)A_{i-1,j+1,k,l}$
x_{β}	$-(k+1)A_{i,j,k+1,l-1} + (l+1)A_{i,j+1,k-1,l+1}$
$x_{\alpha\beta}$	$(i+1)(k+1)A_{i+1,j-1,k+1,l-1} - (i+1)(l+1)A_{i+1,j-1,k-1,l+1} - (j+1)(k+1)A_{i-1,j+1,k+1,l-1} + (j+1)(l+1)A_{i-1,j+1,k-1,l+1}$
$x_{\alpha\alpha}$	$(i+1)(i+2)A_{i+2,j-2,k,l} - (2ij+i+j)A_{i,j,k,l} + (j+1)(j+2)A_{i-2,j+2,k,l}$
$x_{\beta\beta}$	$(k+1)(k+2)A_{i,j,k+2,l-2} - (2kl+k+l)A_{i,j,k,l} + (l+1)(l+2)A_{i,j,k-2,l+2}$
y_{α}	$-(i+1)B_{i+1,j-1,k,l} + (j+1)B_{i-1,j+1,k,l}$
y_{β}	$-(k+1)B_{i,j,k+1,l-1} + (l+1)B_{i,j+1,k-1,l+1}$
$y_{\alpha\beta}$	$(i+1)(k+1)B_{i+1,j-1,k+1,l-1} - (i+1)(l+1)B_{i+1,j-1,k-1,l+1} - (j+1)(k+1)B_{i-1,j+1,k+1,l-1} + (j+1)(l+1)B_{i-1,j+1,k-1,l+1}$
$y_{\alpha\alpha}$	$(i+1)(i+2)B_{i+2,j-2,k,l} - (2ij+i+j)B_{i,j,k,l} + (j+1)(j+2)B_{i-2,j+2,k,l}$
$y_{\beta\beta}$	$(k+1)(k+2)B_{i,j,k+2,l-2} - (2kl+k+l)B_{i,j,k,l} + (l+1)(l+2)B_{i,j,k-2,l+2}$

我们取其中一组表示. 经过计算, 方程(15)右侧两项的指标范围为 $0 \leq i \leq 2, 0 \leq j \leq 2, 0 \leq k \leq 3$ 和 $0 \leq l \leq 3$. 因此, 要求 $A_{i,j,k,l}$ 和 $B_{i,j,k,l}$ 的指标也应满足这一范围. 根据文献[10], 我们可以计算得到 $f_{s0} = (\omega_e + \Omega_e) - (\omega_m + \Omega_m) = 10.158^\circ$, 其中 ω_e 和 Ω_e 分别表示地月质心绕太阳的椭圆轨道的近日点幅角和升交点赤经, ω_m 和 Ω_m 分别表示月球椭圆轨道的近地点幅角和升交点赤经.

由上一节给定的 a, b, p, q 值以及上面的 f_{s0} , 我们可以通过求解方程(16)得到 $A_{i,j,k,l}$ 和 $B_{i,j,k,l}$ 的结果. 理论上根据指标集, $A_{i,j,k,l}$ 和 $B_{i,j,k,l}$ 的结果应是两个四维数组, 这里为了展示方便, 我们将 $A_{i,j,k,l}$ 和 $B_{i,j,k,l}$ 按照某种顺序排列, 得到两个一维向量. 具体的顺序是按照指标 i, j, k, l 的函数, $3^0 i + 3^1 j + 4^2 k + 4^3 l$, 从小到大排列. 上面提到 $A_{i,j,k,l}$ 和 $B_{i,j,k,l}$ 的指标范围为 $0 \leq i \leq 2, 0 \leq j \leq 2, 0 \leq k \leq 3$ 和 $0 \leq l \leq 3$, 所以 $A_{i,j,k,l}$ 和 $B_{i,j,k,l}$ 各有 $3 \times 3 \times 4 \times 4 = 144$ 个元素. 按照上面提到的顺序排列, $A_{i,j,k,l}$ 和 $B_{i,j,k,l}$ 的计算结果见图2中的实线. 同时为了比较 QBEP 与 QBCP 的差异, 我们令 $a=b=0$, 就可以计算得到 QBCP 下 $A_{i,j,k,l}$ 和 $B_{i,j,k,l}$ 的结果, 该结果在图2中用虚线表示. 经验证, 由方程(16)计算得到的 QBCP 下 $A_{i,j,k,l}$ 和 $B_{i,j,k,l}$ 的结果与文献[11]中的一阶展开解析表达式相一致, 从而说明了该方法的有效性. 通过图2, 我们发现在 QBEP 与 QBCP 两个模型中, $A_{i,j,k,l}$ 和 $B_{i,j,k,l}$ 较大值(即图2中较大幅值的突起)的分布是相同的, 但与 QBCP 相比, QBEP 的 $A_{i,j,k,l}$ 和 $B_{i,j,k,l}$ 分布更分散, 具体表现为图2中, QBEP 曲线有更多的小尖点. 这些小尖点是由于两个基准轨道的偏心率导致的.

数值结果表明 QBCP 中 $A_{i,j,k,l}$ 和 $B_{i,j,k,l}$ 的绝对值大于 10^{-7} 的项分别为10个和9个, 而 QBEP 下则都为105个, 所以 QBEP 下月球轨道的一阶展开解析表达式会更复杂. 限于篇幅, 这里我们就不将其一一列出. 从 QBEP 一阶展开解析表达式的参数个数不难看出, 相较于双圆模型 BCM 和双椭圆模型 BEP, 我们得到的准双椭圆 QBEP 模型的复杂性会明显地增加. 如果直接调用 QBEP 模型进行数值积分(比如地月低能转移轨道设计), 其大量系数会导致计算量极大增加进而削弱其实用价值. 但另一方面, 由于该模型可以帮助我们得到地月轨道更加精确的解析结果, 而且解析结果是由周期函数组成的, 所以可以利用该模型对诸如平动点轨道之类的周期和准周期轨道进行更加精确的分析, 甚至得到这些轨道的解析结果. 这样在设计这类轨道时就

图2 (网络版彩图) (a) $A_{i,j,k,l}$ 和 (b) $B_{i,j,k,l}$ 的结果, 其中实线为 QBEP 结果, 虚线为 QBCP 结果

Figure 2 (Color online) Results of (a) $A_{i,j,k,l}$ and (b) $B_{i,j,k,l}$, where solid lines denote results of the QBEP, and dashed lines denote results of the QBCP.

可以直接调用它们在 QBEP 模型下的结果, 所以该模型具有实用价值.

假设 $t=0$ 时, $\alpha=\beta=0$, 则根据式(13)以及计算得到的 $A_{i,j,k,l}$ 和 $B_{i,j,k,l}$ 结果, 我们可以得到式(13)中 x 和 y 随时间 t 的变化曲线. 图3展示了20个地月周期内, x 和 y 随时间 t 的变化曲线, 其中我们将地月平均周期(约为27.0569 d)设为单位时间(time unit, TU). 从图中可以看到, x 和 y 是随时间 t 的周期函数.

6 讨论

首先我们将解析结果与日地月三体问题的数值积分结果进行比较. 根据动力学方程(1), 我们令 $\mathbf{r}=(x_m, y_m)^T$, $\mathbf{R}=(x_s, y_s)^T$, 则月球绕地球运动以及地月质心绕太阳运动的动力学方程有如下形式:

$$\begin{aligned}\ddot{x}_m &= -\frac{x_m}{r^3} + m_s \left(\frac{x_s - (1-\mu)x_m}{r_{23}^3} - \frac{x_s + \mu x_m}{r_{13}^3} \right), \\ \ddot{y}_m &= -\frac{y_m}{r^3} + m_s \left(\frac{y_s - (1-\mu)y_m}{r_{23}^3} - \frac{y_s + \mu y_m}{r_{13}^3} \right), \\ \ddot{x}_s &= -(1+m_s) \left(\mu \frac{x_s - (1-\mu)x_m}{r_{23}^3} + (1-\mu) \frac{x_s + \mu x_m}{r_{13}^3} \right), \\ \ddot{y}_s &= -(1+m_s) \left(\mu \frac{y_s - (1-\mu)y_m}{r_{23}^3} + (1-\mu) \frac{y_s + \mu y_m}{r_{13}^3} \right).\end{aligned}\quad (17)$$

利用动力学方程(17), 我们可以通过数值积分得

图3 (网络版彩图) (a) x 和(b) y 随时间 t 的变化曲线
Figure 3 (Color online) Curves of (a) x and (b) y versus time t .

到月球轨道的位置坐标 (x_m, y_m) . 另一方面根据式(11)我们有 $z = x_m + iy_m \approx A[1 + (x + iy)\varepsilon]$, 从而也可以得到月球轨道的一阶展开解析结果. 通过比较两种方法的结果, 我们可以对上面得到的解析结果进行评估. 图4展示了 x_m , y_m 和地月距离 $r = \sqrt{x_m^2 + y_m^2}$ 随时间 t 的变化曲线, 其中实线表示一阶展开解析结果, 虚线表示直接数值积分的结果. 这里同样假设 $t=0$ 时, $\alpha=\beta=0$. 从图中可以发现, 数值积分和解析表达式得到的 x_m 和 y_m 结果非常相近, 两者曲线几乎重合, 由此证明了一阶解析结果可以用于近似表示月球的准椭圆轨道. 同时我

图4 (网络版彩图) (a) x_m , (b) y_m 和(c)地月距离 r 随时间 t 的变化曲线, 其中实线表示一阶展开解析结果, 虚线表示直接数值积分的结果

Figure 4 (Color online) Curves of (a) x_m , (b) y_m and (c) Earth-Moon distance r versus time t , where solid lines denote results of the 1-order analytic expansion, and dashed lines denote results of numerical integration.

们也注意到, 两种方法得到的地月距离 r 随时间的变化曲线存在一些差异, 特别是随着时间的增大, 两者的差异, 包括幅值和相位, 都逐渐明显. 我们认为这是由于解析结果忽略了小参数 ε 的大于1次的项, 而高阶项的影响会在数值积分的结果中得到体现, 所以随着时间变化, 数值积分结果与一阶解析结果的差异逐渐增大.

上一节我们比较了QBEP和QBCP模型下一阶展开解析式中 $A_{i,j,k,l}$ 和 $B_{i,j,k,l}$ 的结果差异(见图2). 这里进一步比较两者在近似月球轨道方面的差异. 图5展示了QBEP和QBCP下 r 随时间 t 的变化曲线, 其中实线表示一阶展开解析结果, 虚线表示直接数值积分的结果, 蓝色为QBEP的结果, 红色为QBCP结果. 从图5可以看到, QBCP下的地月距离 r 的振幅明显小于QBEP的结果, 这一结果是符合预期的, 因为虽然太阳引力摄动会对月球轨道产生扰动, 但其运动主要还是依照其基准轨道运行, 在QBCP中该基准为圆轨道, 而QBEP下为椭圆轨道. 由于QBEP下的基准轨道的地月距离振幅本身就比QBCP的基准大, 所以图5的结果也是符合预期的. 图5还说明, 除了振幅, 两种模型下的曲线相位还存在差异. 图中QBEP的曲线波动频率主要是由月球轨道基准椭圆轨道的频率决定的, 所以其波动的周期基本与地月平均轨道周期1 TU(约27.0569 d)一致. 而QBCP下月球轨道半径的变化曲线的波动频率主要反映的是太阳引力对月球轨道的摄动影响. 由于QBEP和QBCP两者最主要的不同就是, QBEP下基准轨道的两个偏心率 e_m 和 e_s 均不为0, 因此我们认为偏心率会对结果有明显的影响, 不可忽略, 因此与QBCP相比, QBEP模型更加接近实际轨道的运行规律.

图5 (网络版彩图) QBEP和QBCP下 r 随时间 t 的变化曲线, 其中实线表示一阶展开解析结果, 虚线表示直接数值积分的结果, 蓝色为QBEP的结果, 红色为QBCP结果

Figure 5 (Color online) Curves of r of the QBEP and the QBCP versus time t , where solid lines denote results of the 1-order analytic expansion, and dashed lines denote results of numerical integration. Results of the QBEP are displayed by the blue color, and results of the QBCP are displayed by the red color.

接下来将QBEP的结果与星历模型下的结果进行比较. 图6是QBEP和星历模型下地月距离 r 随时间 t 的变化曲线, 其中蓝线表示一阶展开解析结果, 红线表示星历模型下的结果. 星历模型数据是由美国喷气推进实验室(Jet Propulsion Laboratory, JPL)提供的星历模型数据包DE430得到的^[17]. 时间 $t = 0$ 对应的是UTC时间2019年9月27日19:00. 从图中我们可以看到起始的5个地月周期内QBEP的解析结果与星历模型下真实的地月距离有相似的波动曲线, 但随着时间增加, 两者在振幅和相位上的差异逐渐增加. 因此我们认为QBEP模型与真实的星历模型还是存在明显的差异, 特别是我们可以看到真实的地月距离的起伏变化更为复杂.

最后分析QBEP中参数对解析结果的影响. 通过上面的分析可知偏心率 e_m 和 e_s 对结果有明显的影响, 所以这里我们主要对 e_m 和 e_s 进行讨论. 假设除了 e_m 和 e_s 外, 其他参数, 如 p , q 和 f_{s0} , 与第3节中的设定一样保持不变, 则对于给定的一组 (e_s, e_m) , 可以用第3节介绍的方法得到对应的 $A_{i,j,k,l}$ 和 $B_{i,j,k,l}$ 结果. 按照第3节介绍的顺序, 我们可以将 $A_{i,j,k,l}$ 和 $B_{i,j,k,l}$ 分别排列为两个列向量, 这里用 $\mathbf{A}_{i,j,k,l}$ 和 $\mathbf{B}_{i,j,k,l}$ 表示. 显然 $\mathbf{A}_{i,j,k,l}$ 和 $\mathbf{B}_{i,j,k,l}$ 是关于 e_m 和 e_s 的函数. 特别地, 我们将 $e_m = e_s = 0$, 即QBEP的 $\mathbf{A}_{i,j,k,l}$ 和 $\mathbf{B}_{i,j,k,l}$ 结果用 $\mathbf{A}_{i,j,k,l}^0$ 和 $\mathbf{B}_{i,j,k,l}^0$ 表示, 那么相对于QBEP, e_m 和 e_s 对解析结果的影响可以用下面两个指标进行衡量:

$$\begin{aligned}\Delta_A(e_s, e_m) &= \|\mathbf{A}_{i,j,k,l}(e_s, e_m) - \mathbf{A}_{i,j,k,l}^0\|, \\ \Delta_B(e_s, e_m) &= \|\mathbf{B}_{i,j,k,l}(e_s, e_m) - \mathbf{B}_{i,j,k,l}^0\|.\end{aligned}\quad (18)$$

图6 (网络版彩图) QBEP和星历模型下 r 随时间 t 的变化曲线, 其中蓝线表示QBEP一阶展开解析结果, 红线表示星历模型的结果

Figure 6 (Color online) Curves of r of the QBEP and the ephemeris model versus time t , where the blue line denotes the result of 1-order analytic expansion of the QBEP, and the red line denotes the result of the ephemeris model.

图7是 e_m 和 e_s 对解析结果的影响分布图, 其中 e_m 和 e_s 的最大值分别是实际基准椭圆轨道的结果, 即0.0424933和0.016735663. 从图中不难发现, e_s 对结果的影响明显要比 e_m 大. 这一结果说明了在研究月球准椭圆轨道时, 将地月质心绕太阳的轨道设定为椭圆轨道是必要的. 同时需要指出的是图7的结果并没有否定地月偏心率的重要性, 因为从图5中看到, QBEP下地月距离随时间的波动(即图5中蓝线)的基础是月球的基准椭圆轨道, 而没有考虑月球轨道偏心率的结果(即图5中红线)与准双椭圆模型的结果有明显的差异.

7 结论

本文我们提出了日地月准双椭圆三体模型QBEP. 该模型假设月球绕地球的轨道为受太阳引力摄动影响的准椭圆轨道, 而地月质心绕太阳的轨道为严格的椭圆. 此外我们认为日地月三个天体运行在同一轨道平面内. 我们推导了月球准椭圆轨道的一阶展开解析表达式需要满足的微分方程, 并利用我们提出的计算方法, 将微分方程问题转化为线性方程组问题进行

图7 (网络版彩图) (a) e_m 和(b) e_s 对解析结果的影响分布图
Figure 7 (Color online) Influences of (a) e_m and (b) e_s on the analytical results.

求解.

数值计算结果表明QBEP与QBCP两个模型的一阶展开解析式中较大的非零系数的分布基本相同, 但与QBCP相比, QBEP的结果分布更分散, 这是由两个基准轨道的偏心率导致的, 所以QBEP下月球轨道的一阶展开解析表达式会更复杂. 数值积分结果和解析表达式结果的比较证明了一阶解析结果可以用于近似表示月球的准椭圆轨道, 但随着时间的增大, 两者的差异, 包括幅值和相位, 会逐渐增加. 我们认为这是由于忽略的高阶项影响会随时间逐渐在数值积分的结果中

得到体现. QBEP与QBCP数值结果的比较说明QBEP模型相比于QBCP更加接近实际轨道运行规律, 但与真实的星历模型结果相比还是存在明显的差距. 此外我们发现地月质心绕太阳的椭圆轨道偏心率变化对解析结果的影响明显要比月球轨道基准椭圆偏心率大. 这一结果说明了在研究月球准椭圆轨道时, 将地月质心绕太阳的轨道设定为椭圆轨道是必要的. 最后, 本文只研究了日地月QBEP模型下三个主天体的运动规律, 而基于QBEP模型的引力场中的质点运动问题将是未来研究的方向.

参考文献

- 1 Belbruno E A, Miller J K. Sun-perturbed Earth-to-moon transfers with ballistic capture. *J Guidance Control Dyn*, 1993, 16: 770–775
- 2 Castelli R. Regions of prevalence in the coupled restricted three-body problems approximation. *Commun Nonlinear Sci Numer Simul*, 2012, 17: 804–816
- 3 Qi R, Xu S J, Zhang Y, et al. Earth-to-Moon low energy transfer using time-dependent invariant manifolds. In: AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conference. Minneapolis, 2012. 4431
- 4 Castellà E, Jorba À. On the vertical families of two-dimensional tori near the triangular points of the bicircular problem. *Celest Mech Dyn Astron*, 1999, 76: 35–54
- 5 Circi C. Properties of transit trajectory in the restricted three and four-body problem. *Adv Space Res*, 2012, 49: 1506–1519
- 6 Qi Y, Xu S. Earth-Moon transfer with near-optimal lunar capture in the restricted four-body problem. *Aerospace Sci Tech*, 2016, 55: 282–291
- 7 Qi Y, Xu S. Optimal earth-moon transfers using lunar gravity assist in the restricted four-body problem. *Acta Astronaut*, 2017, 134: 106–120
- 8 Qi Y, Xu S, Qi R. Transfer from Earth to libration point orbit using lunar gravity assist. *Acta Astronaut*, 2017, 133: 145–157
- 9 Qi Y, Xu S, Qi R. Lunar flyby transfers between libration point orbits. *Mon Not R Astron Soc*, 2017, 468: 2265–2282
- 10 Assadian N, Pourtakdoust S H. On the quasi-equilibria of the BiElliptic four-body problem with non-coplanar motion of primaries. *Acta Astronaut*, 2010, 66: 45–58
- 11 Andreu M A. The Quasi-bicircular Problem. Dissertation for Doctoral Degree. Barcelona: University of Barcelona, 1998
- 12 Andreu M A. Dynamics in the center manifold around L2 in the quasi-bicircular problem. *Celest Mech Dyn Astron*, 2002, 84: 105–133
- 13 Andreu M A, Simo C. Translunar Halo orbits in the quasi-bicircular problem. In: Steves B A, Roy A E, eds. *The Dynamics of Small Bodies in the Solar System*. Springer: Dordrecht, 1999. 309–314
- 14 Andreu M A. Preliminary study on the translunar Halo orbits of the real Earth-Moon system. *Celest Mech Dyn Astron*, 2003, 86: 107–130
- 15 Leiva A M, Briozzo C B. Extension of fast periodic transfer orbits from the Earth-Moon RTBP to the Sun-Earth-Moon Quasi-Bicircular Problem. *Celest Mech Dyn Astron*, 2008, 101: 225–245
- 16 Hou X Y, Liu L. On quasi-periodic motions around the collinear libration points in the real Earth-Moon system. *Celest Mech Dyn Astron*, 2011, 110: 71–98
- 17 Folkner W M, Williams J G, Boggs D H, et al. The planetary and lunar ephemerides de430 and de431. *Interplanet Network Prog Rep*, 2014, 196: 1–81

Quasi-bielliptic three-body problem

QI Yi^{1*} & XU ShiJie²

¹ *Department of Aerospace Engineering, Ryerson University, Toronto ON M5B 2K3, Canada;*

² *School of Astronautics, Beihang University, Beijing 100191, China*

In this paper, we first proposed the Quasi-Bielliptic Problem (QBEP) in the Sun-Earth-Moon three-body problem. In this model, we assume that the Moon revolves around the Earth in a quasi-elliptic orbit perturbed by the solar gravity, whereas the orbit of the Earth-Moon barycenter around the Sun has been known to be strictly elliptic. In addition, we assumed that these three celestial bodies move in the same orbital plane. The differential equations for the first-order analytical expansion of the lunar quasi-elliptic orbit were derived. Using a computational approach, these differential equations were transformed into a system of linear equations and then solved numerically. The validity of our semi-analytical result was testified by comparing with the results of numerical integration. The differences between analytical results of the QBEP and the QBEP have been discussed in detail. The influences of these two eccentricities on analytical results were also investigated.

restricted four-body problem, Quasi-Bielliptic Problem, Sun-Earth-Moon system

PACS: 45.50.Pk, 95.75.Pq, 96.20.-n

doi: [10.1360/SSPMA-2019-0384](https://doi.org/10.1360/SSPMA-2019-0384)