球面空间凸性理论 (I)

献给吴从炘教授 85 华诞

国起

苏州科技大学数学科学学院, 苏州 215009

E-mail: guoqi@mail.usts.edu.cn

收稿日期: 2020-05-26; 接受日期: 2020-07-07; 网络出版日期: 2020-12-14

国家自然科学基金 (批准号: 11671293 和 12071334) 资助项目

摘要 本文介绍球面空间凸性理论近年来相关的研究进展. 文中详细地介绍球凸集的基本概念和包括球面 Radon 型、Helly 型和 Carathéodory 型组合定理以及 Minkowski 型结构定理等在内的基本性质, 讨论包括球面空间到其子球面或更一般的闭球凸集上的投影等常用算子的基本性质, 汇集整理球面空间或其球凸集类上适宜二元运算存在性等方面的研究进展, 最后分析整理有关球面凸函数的基本概念、判别法和基本性质等方面的研究工作.

关键词 球面凸集 球面凸函数 球面凸分析 球面二元运算 球面投影算子

MSC (2010) 主题分类 52A55, 52A20, 52A35, 52A41

1 引言

线性空间 (特别是 Euclid 空间) 凸性理论, 包括凸分析、凸几何分析和凸优化理论等, 经过近一个世纪的发展已取得巨大的成功, 一方面其自身已形成完整的理论方法体系 (参见文献 [1–3]), 出现了一批深刻的研究成果 (如凸几何分析等方面参见文献 [4–10]); 另一方面又为众多其他数学分支提供了应用基础理论与有力工具 (相关文献不计其数, 参见文献 [11] 可略见一斑). 然而, 与 Euclid 凸性理论几乎同时出现的球面 (一般曲面) 空间凸性理论的发展却相对缓慢, 其主要原因是, 虽然球面具有丰富的几何结构和一定的代数结构, 但却缺少最基础的二元运算和适宜的基本变换, 这导致了很长一段时期内, 球面凸性理论的研究主要采用几何方法, 从而无法全面借用分析学的理论与方法.

近些年来, 或出于解决实际问题的需求, 或出于理论研究的兴趣, 数学工作者开始尝试建立系统球面凸性理论, 包括球面凸分析^[12–17]、一般流形上的凸分析^[18–21]、球面凸几何分析 (例如, 几何不变量方面参见文献 [22–28], 特殊球面凸集方面参见文献 [29–32], 球面凸集覆盖问题方面参见文献 [33, 34], 现代几何分析方面参见文献 [35–37])、球面凸优化理论 (一般理论方面参见文献 [38–43], 最佳场所等

英文引用格式: Guo Q. Convexity theory on spherical spaces (I) (in Chinese). Sci Sin Math, 2020, 50: 1745–1772, doi: 10.1360/SSM-2020-0161

具体问题方面参见文献 [44–50]) 和应用 (如量子力学^[51]、固体力学^[52] 和信号处理^[53, 54]) 等. 这其中理论研究方面主要致力于建立与 Euclid 凸性理论平行的系统基础理论, 而球面凸优化及其应用研究方面则更多地致力于寻求解的算法. 这些研究表明球面 (或一般曲面) 凸性理论是一个非常重要且具有明显应用前景的研究课题.

虽然球面凸性理论的研究已取得了一定的进展, 但系统基础理论的建立远未完成, 相对统一的分析方法尚未形成, 大量非常具有研究价值的问题仍有待解决. 为方便读者了解掌握该研究领域的研究进展与现状, 本文将尝试简单介绍有关球凸集基本性质, 球面空间基本运算与基本变换, 球凸集的组合作与结构性质, 球面空间到子球面的投影, 球面空间到闭球凸集的投影, 球面空间到 Euclid 空间的心射 (gnomonic) 投影, 球面凸函数的概念、判别法与基本性质等方面的基础性研究成果与研究现状. 限于篇幅, 有关球面凸几何分析 (此领域已有一些非常深刻的研究成果) 和球面凸优化及其应用等方面的内容, 以及更一般的流形上的凸性理论研究, 将在下一篇文章中介绍.

本文尽可能地采用统一的分析术语和方法对所述结果进行表述与论证, 并尽可能地进行推广或完善, 所以文中出现的定理、命题等大多是已有结论的推广, 当然一些结论则尚属首次出现. 另外, 尽可能地在一般的封闭球面 (定义见正文) 上进行论述, 而不是仅限于 Euclid 单位球面. 在证明取舍方面, 为方便读者, 基础性结论基本上都予以证明, 而对少数专门性结论, 则仅指明出处.

2 球凸集的基本概念与性质

$\mathbb{R}^n$ 和 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 分别表示 n 维 Euclid 空间及其上的标准内积 (本文中假定 $n \geq 2$),

$$\mathbb{S}^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$$

表示 $\mathbb{R}^n$ 的单位球面, 其中 $\|\cdot\|$ 表示由 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 诱导的 (Euclid) 范数. 本文中, $\mathbb{R}^n$ 既被视作向量空间也被视作仿射空间, 所以, 我们并不刻意区分向量和点的概念. $x, y, u, v, \dots$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 中的向量或点, 特别地, o 表示零向量或原点, $\alpha, \beta, \lambda, \mu, \dots$ 表示实数. $\mathbb{R}, \mathbb{R}^+$ 和 $\mathbb{R}_*^+$ 分别表示实数、非负实数和正实数的全体.

给定 $u \in \mathbb{S}^{n-1}, \alpha \in \mathbb{R}$, 形如

$$H_{u,\alpha} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle u, x \rangle = \alpha\}$$

的集合称为一个超平面; 形如 $H_{u,\alpha}^+$ (相应地, $\overline{H}_{u,\alpha}^+ := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle u, x \rangle > \alpha\}$ (相应地, $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle u, x \rangle \geq \alpha\}$) 的集合称为一个开 (闭) 半空间. 当 $\alpha = 0$ 时, 我们分别用 H_u, H_u^+ 和 $\overline{H}_u^+$ 简记 $H_{u,0}, H_{u,0}^+$ 和 $\overline{H}_{u,0}^+$. 一个非空集合 $C \subset \mathbb{R}^n$ 称为凸集, 若 $x, y \in C, \lambda \in (0, 1)$ 蕴涵 $\lambda x + (1 - \lambda)y \in C$. 显然, 超平面和半空间都是凸集. 一个非空集合 $K \subset \mathbb{R}^n$ 称为锥, 若

$$\mathbb{R}^+ K := \{tx \mid x \in K, t \in \mathbb{R}^+\} = K;$$

称为凸锥, 若 K 还是凸的. 若 C 是一个凸集, 则 $\text{int}C, \text{ri}C, \text{bd}C, \text{rbd}C$ 和 $\text{cl}C$ 分别表示 C 的内部、相对内部、边界、相对边界和闭包. 对非空 $E \subset \mathbb{R}^n$, $\text{co}E, \overline{\text{co}}E, \text{cone}E$ 和 $\overline{\text{cone}}E$ 分别表示 E 的凸包、闭凸包、 E 生成的凸锥和闭凸锥 (即包含 E 的最小凸锥和最小闭凸锥); $\text{lin}E$ 表示 E 生成的线性子空间, 特别地, 当 $E = \{x\}$ 为单点集时, 用 $\langle x \rangle$ 简记 $\text{lin}E$.

自此, 若无特别说明, 本文所言集合均假定为非空集合.

2.1 球面空间的球凸集

关于典型球面空间 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上的球凸集, 历史上出现过各种不同版本的定义: 集合 $C \subset \mathbb{S}^{n-1}$ 称为强凸的, 若 C 不含对点 (一对 $x, -x \in \mathbb{S}^{n-1}$ 称为对点), 且 $x, y \in C$ 蕴涵连接 x 和 y 的短圆弧含于 C (参见文献 [55, 56]); 称为弱凸的, 若 $x, y \in C$ 蕴涵连接 x 和 y 的短圆弧或一个半圆含于 C (参见文献 [55, 56]); 称为 Robinson 凸的, 若非对点的 $x, y \in C$ 蕴涵连接 x 和 y 的短圆弧含于 C (参见文献 [55, 56]); 称为 Horn 凸的, 若非对点的 $x, y \in C$ 蕴涵连接 x 和 y 的短圆弧或长圆弧含于 C (参见文献 [57]). 容易看出, 强凸性蕴涵弱凸性, 弱凸性蕴涵 Robinson 凸性, Robinson 凸性蕴涵 Horn 凸性, 而且所有蕴涵关系为真蕴涵. 近年来, 比较通用的是文献 [13, 38] 中采用的定义: 集合 $C \subset \mathbb{S}^{n-1}$ 称为球凸的, 若锥 $\mathbb{R}^+ C := \{tx \mid x \in C, t \in \mathbb{R}^+\}$ 是凸的. 此定义与前述定义都不等价. 文献 [58] 首次以纯分析形式给出了强凸性的一个等价定义 (见下文), 文献 [59] 则在一般的球面上给出了类似于强凸性的定义 (见下文). 本文将采用分析方法研究处理一般球面上类似于文献 [13, 38] 中定义的凸性.

设 $\Phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ 为连续函数. 若 Φ 满足: (i) $\Phi(x) = 0$ 当且仅当 $x = o$; (ii) $\Phi(tx) = t\Phi(x)$ 关于任意的 $x \in \mathbb{R}^n$ 和 $t \in \mathbb{R}_*^+$ 成立, 则称 Φ 为一个球面生成函数. 相应地, $\mathbb{S}_\Phi = \mathbb{S}_\Phi^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \Phi(x) = 1\}$ 称为 Φ -球面. 显然, $\mathbb{S}_{\|\cdot\|} = \mathbb{S}^{n-1}$. 若 Φ 是凸 (严格凸, 对称) 的, 则称 $\mathbb{S}_\Phi$ 是凸 (严格凸, 对称) 的.

类似于 $\mathbb{S}^{n-1}$ 的情形, 形如 $\overline{H}_u^+ \cap \mathbb{S}_\Phi$ (相应地, $H_u^+ \cap \mathbb{S}_\Phi$) 的集合称为一个闭 (开) 半 Φ -球面; 形如 $V \cap \mathbb{S}_\Phi$ 的集合称为一个 k - Φ -球面, 其中 V 为 $\mathbb{R}^n$ 的一个 $k+1$ 维子空间 ($0 \leq k \leq n-1$). 通常 $(n-2)$ - Φ -球面和 1 - Φ -球面被分别称为 Φ -超圆和 Φ -大圆. 当 $\Phi = \|\cdot\|$ 时, 上述定义与 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上传统的定义一致. 形如 $\overline{H}_{u,\alpha}^+ \cap \mathbb{S}_\Phi$ (其中 $\alpha > 0$) 的非空集合称为一个 Φ -球冠.

给定球面生成函数 Φ , Φ -径向投影映射 $\rho_\Phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{S}_\Phi \cup \{o\}$ 是给出分析形式球面凸性定义的关键工具, 其定义是

$$\rho_\Phi(x) = \begin{cases} \frac{x}{\Phi(x)}, & x \neq o, \\ o, & x = o, \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Φ -径向投影映射满足: (i) $\rho_\Phi \circ \rho_\Phi = \rho_\Phi$, 其中 “ $\circ$ ” 表示算子复合运算; (ii) $\rho_\Phi(tx) = \rho_\Phi(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}_*^+$; (iii) $\rho_\Phi(x) = x$ 当且仅当 $x \in \mathbb{S}_\Phi$ 或 $x = o$. 现在可以定义 $\mathbb{R}^n$ 上的 Φ -加法 “ $+_\Phi$ ”: 对任意的 $x, y \in \mathbb{R}^n$, 规定 $x +_\Phi y := \rho_\Phi(x + y)$. 容易验证, “ $+_\Phi$ ” 满足交换律, 但不满足结合律. 利用 ρ_Φ 也可定义 $\mathbb{R}^n$ 上的 Φ -凸组合运算: 设 $x_1, x_2, \dots, x_k \in \mathbb{R}^n$, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in [0, 1]$ 且 $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$, 则

$$(\Phi) \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i := \rho_\Phi \left(\sum_{i=1}^k \lambda_i x_i \right)$$

称为 $x_1, x_2, \dots, x_k$ 的一个 Φ -凸组合 (参见文献 [59]). 当 $k = 2$ 时, 常用 $\lambda x_1 +_\Phi (1 - \lambda)x_2$ 代替 $(\Phi)(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2)$; 当 $\Phi(\cdot) = \|\cdot\|$ 时, 常用 s 代替 $\|\cdot\|$, 例如, 用 ρ_s 代替 $\rho_{\|\cdot\|}$, 以及 $(s) \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i$ 代替 $(\|\cdot\|) \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i$ 等.

若 $u \in \mathbb{S}_\Phi$, 则 $\rho_\Phi(-u)$ 称为 u 的对点, 记作 u^o . 容易看出, v 是 u 的对点的充要条件是, 存在 $t \in \mathbb{R}_*^+$, 使得 $v = -tu$. 显然, $(u^o)^o = u$, 故 u 和 u^o 常简称为 (一对) 对点. 对 $u, v \in \mathbb{S}_\Phi$, 记 $[u, v]_\Phi := \{\lambda u +_\Phi (1 - \lambda)v \mid \lambda \in [0, 1]\}$. 当 $v \neq u^o$ 时, 易知 $[u, v]_\Phi \subset \mathbb{S}_\Phi$, 称为连接 u 和 v 的短 Φ -圆弧, 而 $[u, u^o]_\Phi = \{u, o, u^o\}$. 显然, 当 $\Phi = \|\cdot\|$ 时, 这里的短 Φ -圆弧就是 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上通常的短圆弧.

下面的定义是文献 [59] 中相应概念的推广.

定义 2.1 设 Φ 为一个球面生成函数, $\mathbb{S}_\Phi$ 为相应的 Φ -球面. 集合 $C \subset \mathbb{S}_\Phi$ 称为 Φ -凸的, 若对任意 $u, v \in C$, $\lambda \in [0, 1]$, $\lambda u +_\Phi (1 - \lambda)v \in C$ 或 $\lambda u +_\Phi (1 - \lambda)v = o$ 成立. 若 C 又是闭集, 则称 C 为闭 Φ -凸的. 不含对点的 Φ -凸集, 称为真 Φ -凸集. 闭 Φ -凸集的全体记作 $\mathcal{K}(\mathbb{S}_\Phi)$, 真闭 Φ -凸集的全体记作 $\mathcal{K}^p(\mathbb{S}_\Phi)$.

注 2.1 (i) 容易验证, 存在 $0 < \lambda < 1$ 使得 $\lambda u +_\Phi (1 - \lambda)v = o$ 成立的充要条件是 $v = u^\circ$.

(ii) 容易看出, 真 $\|\cdot\|$ -凸集就是 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上的强凸集. 下面的命题 2.1 将表明 $\|\cdot\|$ -凸性与文献 [13, 38] 所定义凸性一致.

(iii) 任意给定 Φ , 若 $\bar{\rho}_s$ 表示 $\|\cdot\|$ -径向映射在 $\mathbb{S}_\Phi$ 上的限制, 则 $\bar{\rho}_s$ 是 $\mathbb{S}_\Phi$ 到 $\mathbb{S}^{n-1}$ 的一个双射. 命题 2.1 也将表明 $C \subset \mathbb{S}_\Phi$ 为 Φ -凸集的充要条件是 $\bar{\rho}_s(C) \subset \mathbb{S}^{n-1}$ 为 $\|\cdot\|$ -凸集.

(iv) 所有的半 Φ -球面和 k - Φ -球面都是 Φ -凸的, 且其中的 0- Φ -球面 (即由对点组成的两点集) 是仅有的不连通 Φ -凸集.

(v) 容易验证, 对任意指标集 J , 若 C_j ($j \in J$) 为 Φ -凸集, 则非空交集 $\bigcap_{j \in J} C_j$ 仍为 Φ -凸集; 若 C 为 (真) Φ -凸集, 则其对点集 $C^{\text{op}} := \{u^\circ \mid u \in C\}$ 也是 (真) Φ -凸集.

2.2 Φ -凸集基本性质

首先, 下面的命题揭示了 Φ -凸集与 Euclid 空间凸锥的关系.

命题 2.1 若 $\mathbb{S}_\Phi$ 为 Φ -球面, 则下列结论等价:

- (i) $C \subset \mathbb{S}_\Phi$ 为 Φ -凸集当且仅当 $\mathbb{R}^+C \subset \mathbb{R}^n$ 为凸锥;
- (ii) $C \subset \mathbb{S}_\Phi$ 为真 Φ -凸集当且仅当 $\mathbb{R}^+C \subset \mathbb{R}^n$ 为有顶点凸锥, 即 $\mathbb{R}^+C$ 为凸锥且 $\mathbb{R}^+C \cap (-\mathbb{R}^+C) = \{o\}$.

证明 首先注意, 对任意 $C \subset \mathbb{S}_\Phi$, $\mathbb{R}^+C \subset \mathbb{R}^n$ 自然为锥, 且 $C = \rho_\Phi(\mathbb{R}^+C)$.

(i) 设 C 是 Φ -凸的. 对任意 $x, y \in \mathbb{R}^+C$, 存在 $u, v \in C$, $s, t \in \mathbb{R}^+$, 使得 $x = su$, $y = tv$. 这样, 若 $x + y = o$, 则 $x + y \in \mathbb{R}^+C$; 若 $x + y \neq o$, 则 $\rho_\Phi(\frac{s}{s+t}u + \frac{t}{s+t}v) \in C$, 从而,

$$x + y = \Phi(x + y)\rho_\Phi(x + y) = \Phi(x + y)\rho_\Phi(su + tv) = \Phi(x + y)\rho_\Phi\left(\frac{s}{s+t}u + \frac{t}{s+t}v\right) \in \mathbb{R}^+C.$$

于是, $\mathbb{R}^+C$ 为凸锥. 反之, 设 $\mathbb{R}^+C$ 为凸锥. 对任意的 $u, v \in C$, $\lambda \in [0, 1]$, 首先有 $\lambda u + (1 - \lambda)v \in \mathbb{R}^+C$. 若 $\lambda u + (1 - \lambda)v = o$, 则 $\lambda u +_\Phi (1 - \lambda)v = o$; 若 $\lambda u + (1 - \lambda)v \neq o$, 则 $\lambda u + (1 - \lambda)v \in \mathbb{R}_*^+C$, 于是, $\lambda u +_\Phi (1 - \lambda)v \in C$. 因此, C 为 Φ -凸集.

(ii) 参见文献 [59] 中相应结论的证明. □

注 2.2 (i) 由命题 2.1(i) 可知, $\|\cdot\|$ -凸集是文献 [13, 38] 所定义的球凸集.

(ii) 容易验证, 对任意 $C \subset \mathbb{S}_\Phi$, $\mathbb{R}^+C = \mathbb{R}^+(\bar{\rho}_s(C))$, 所以命题 2.1 表明, $C \subset \mathbb{S}_\Phi$ 为 (真) Φ -凸集当且仅当 $\bar{\rho}_s(C)$ 为 (真) $\|\cdot\|$ -凸集.

(iii) 容易验证, 当 $C \subset \mathbb{S}_\Phi$ 为 Φ -凸集时, $\text{cone}C = \mathbb{R}^+C$; C 为闭 Φ -凸集当且仅当 $\overline{\text{cone}C} = \text{cone}C$.

给定 Φ -凸集 C , 由命题 2.1, 自然地分别称 $\text{bd}C := \text{bd}(\text{cone}C) \cap \mathbb{S}_\Phi$, $\text{rbd}C := \text{rbd}(\text{cone}C) \cap \mathbb{S}_\Phi$, $\text{int}C := \text{int}(\text{cone}C) \cap \mathbb{S}_\Phi$, $\text{ri}C := \text{ri}(\text{cone}C) \cap \mathbb{S}_\Phi$, $\text{cl}C := \text{cl}(\text{cone}C) \cap \mathbb{S}_\Phi$ 为 C 的边界、相对边界、内部、相对内部和闭包. 利用命题 2.1 容易证明, 若 C 是 Φ -凸的, 则 $\text{ri}C$ 和 $\text{cl}C$ 也是 Φ -凸的.

命题 2.2 设 $\mathbb{S}_\Phi$ 为 Φ -球面. 若 $C \subsetneq \mathbb{S}_\Phi$ 为 Φ -凸集, 则存在 $u \in \mathbb{S}^{n-1}$, 使得 $C \subset \overline{H}_u^+ \cap \mathbb{S}_\Phi$, 即 C 含于某个闭半 Φ -球面; 若 C 为真闭 Φ -凸集, 则存在 $u \in \mathbb{S}^{n-1}$, $\alpha \in \mathbb{R}_*^+$, 使得 $C \subset \overline{H}_{u,\alpha}^+ \cap \mathbb{S}_\Phi$, 即 C 含于某个 Φ -球冠.

证明 第一个结论由命题 2.1 可得. 第二个结论可参见文献 [59] 中的证明 (当 $\Phi = \|\cdot\|$ 时, 也可参见文献 [28, 29] 中的证明). $\square$

定理 2.1 若 $C \subset \mathbb{S}_\Phi$ 为 Φ -凸集, 则对任意 $k \geq 1$, $u_1, u_2, \dots, u_k \in C$ 和满足 $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ 的 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in [0, 1]$, 有 $(\Phi) \sum_{i=1}^k \lambda_i u_i \in C$ 或 $(\Phi) \sum_{i=1}^k \lambda_i u_i = o$. 特别地, 若 C 为真 Φ -凸集, 则对上述 u_i, λ_i ($1 \leq i \leq k$), $(\Phi) \sum_{i=1}^k \lambda_i u_i \in C$ 恒成立.

证明 当 $k = 1$ 时, 结论是平凡的; 当 $k = 2$ 时, 由 Φ -凸集的定义即得. 假设对于 $k - 1$ ($k \geq 3$) 结论成立. 那么对任意 $u_1, u_2, \dots, u_k \in C$ 和满足 $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ 的 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in [0, 1]$ (不妨设 $\lambda_i > 0$), 若 $(\Phi) \sum_{i=1}^k \lambda_i u_i \neq o$, 则

$$(\Phi) \sum_{i=1}^k \lambda_i u_i = \rho_\Phi \left(\sum_{i=1}^k \lambda_i u_i \right) = \rho_\Phi \left(\sum_{i=1}^{k-1} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_k} u_i + \frac{\lambda_k}{1-\lambda_k} u_k \right) = \rho_\Phi \left(w + \frac{\lambda_k}{1-\lambda_k} u_k \right),$$

其中 $w = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_k} u_i$. 若 $w = o$, 则

$$(\Phi) \sum_{i=1}^k \lambda_i u_i = \rho_\Phi \left(\frac{\lambda_k}{1-\lambda_k} u_k \right) = u_k \in C;$$

若 $w \neq o$, 则由 ρ_Φ 的性质可得

$$\begin{aligned} (\Phi) \sum_{i=1}^k \lambda_i u_i &= \rho_\Phi \left(\frac{w}{\Phi(w)} + \frac{\lambda_k}{\Phi(w)(1-\lambda_k)} u_k \right) \\ &= \rho_\Phi \left(\frac{w\Phi(w)(1-\lambda_k)}{\Phi(w)} + \lambda_k u_k \right) \\ &= \rho_\Phi \left(\frac{\Phi(w)(1-\lambda_k)}{\Phi(w)(1-\lambda_k) + \lambda_k} \frac{w}{\Phi(w)} + \frac{\lambda_k}{\Phi(w)(1-\lambda_k) + \lambda_k} u_k \right) \\ &= \frac{\Phi(w)(1-\lambda_k)}{\Phi(z)(1-\lambda_k) + \lambda_k} \frac{w}{\Phi(w)} + \frac{\lambda_k}{\Phi(w)(1-\lambda_k) + \lambda_k} x_k \in C, \end{aligned}$$

这里用到了 $\frac{w}{\Phi(w)} = (\Phi) \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_k} u_i \in C$ (归纳假设) 和 $\frac{\Phi(w)(1-\lambda_k)}{\Phi(z)(1-\lambda_k) + \lambda_k} + \frac{\lambda_k}{\Phi(w)(1-\lambda_k) + \lambda_k} = 1$. 于是, 对任意的 k , 结论成立.

当 C 为真 Φ -凸集时, 由上面归纳证明过程可知, 对任意 k , 有 $(\Phi) \sum_{i=1}^k \lambda_i u_i \neq o$. $\square$

2.3 球凸包及相关性质

类似于 Euclid 空间中的凸包运算, 可以定义球面空间子集的球凸包. 文献 [58, 59] 之前, 球凸包概念大多以外定义形式给出: 设 $S \subset \mathbb{S}^{n-1}$, 包含 S 的最小 $\|\cdot\|$ -凸集, 即 $\bigcap \{C \subset \mathbb{S}^{n-1} \mid C \supset S \text{ 为 } \|\cdot\| \text{-凸集}\}$, 称为 S 的球凸包; 包含 S 的最小闭 $\|\cdot\|$ -凸集, 即 $\bigcap \{C \subset \mathbb{S}^{n-1} \mid C \supset S \text{ 为闭 } \|\cdot\| \text{-凸集}\}$, 称为 S 的闭球凸包. 借助于 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上球凸组合运算和一般 $\mathbb{S}_\Phi$ 上 Φ -凸组合运算的引进, 文献 [58, 59] 先后在 $\mathbb{S}^{n-1}$ 和一般的 $\mathbb{S}_\Phi$ 上, 对含于开半 Φ -球面的子集给出了分析形式的球凸包定义. 这里, 利用 Φ -凸组合运算给出任意子集的球凸包的定义.

定义 2.2 设 $S \subset \mathbb{S}_\Phi$, 则集合

$$\text{co}_\Phi S := \left\{ (\Phi) \sum_{i=1}^k \lambda_i u_i \mid u_i \in S, \lambda_i \in [0, 1], 1 \leq i \leq k, \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1, \sum_{i=1}^k \lambda_i u_i \neq o, k = 1, 2, \dots \right\}$$

称为 S 的 Φ -凸包 (或球凸包). 集合 $\overline{\text{co}}_\Phi S := \text{cl}(\text{co}_\Phi S)$ 称为 S 的闭 Φ -凸包 (或闭球凸包).

注 2.3 (i) 容易验证, 对任意 $S \subset \mathbb{S}_\Phi$, $\text{co}_\Phi S$ 是 Φ -凸的, 所以, S 为 Φ -凸集当且仅当 $S = \text{co}_\Phi S$.
 (ii) 对非对点的 $u, v \in \mathbb{S}_\Phi$, $\text{co}_\Phi\{u, v\} = [u, v]_\Phi$, 而 $\text{co}_\Phi\{u, u^o\} = \{u, u^o\}$.

下面命题进一步说明定义 2.2 是合理的.

命题 2.3 对任意的 $S \subset \mathbb{S}_\Phi$, 有

$$\begin{aligned}\text{co}_\Phi S &= \bigcap \{C \subset \mathbb{S}_\Phi \mid C \supset S \text{ 为 } \Phi\text{-凸集}\}, \\ \overline{\text{co}}_\Phi S &= \bigcap \{C \subset \mathbb{S}_\Phi \mid C \supset S \text{ 为闭 } \Phi\text{-凸集}\}.\end{aligned}$$

证明 由于两个等式的证明几乎相同, 所以只证第一个等式, 并记等式右边的集合为 D . 由于 $\text{co}_\Phi S$ 是 Φ -凸的, 并且 $\text{co}_\Phi S \supset S$, 所以 $\text{co}_\Phi S \supset D$. 反之, 设

$$u = (\Phi) \sum_{i=1}^k \lambda_i u_i \in \text{co}_\Phi S,$$

其中 $u_i \in S$, $\lambda_i \in [0, 1]$, $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$. 因为对任意包含 S 的 Φ -凸集 C , 显然有 $u_i \in C$, $1 \leq i \leq k$, 所以, 由定理 2.1 知, $u \in C$, 于是 $u \in D$. 这样 $\text{co}_\Phi S \subset D$. $\square$

读者容易验证, Φ -凸包也具有如下的等价描述.

命题 2.4 对任意的 $S \subset \mathbb{S}_\Phi$, 有

$$\text{co}_\Phi S = \text{cone} S \cap \mathbb{S}_\Phi = \rho_\Phi(\text{cone} S \setminus \{o\}).$$

由命题 2.4 可知, $\text{co}_\Phi S$ 为真凸集当且仅当 $o \notin \text{co} S$.

下面讨论球凸集的组合性质, 寻求 Euclid 空间中著名的 Radon 型、Helly 型和 Carathéodory 型定理在球面空间的表现形式. 关于球凸集的 Helly 型定理的研究开始于 20 世纪初, 针对各种不同定义的球凸集, 先后出现了很多研究结果 (参见文献 [32, 56, 57, 60–63]); 但由于“球面凸组合运算”的缺失, 相应的 Radon 型和 Carathéodory 型定理直至文献 [59] 才出现. 这里, 采用文献 [59] 的处理方式, 从 Radon 型定理开始.

定理 2.2 (Radon 型定理) 设 S_Φ 是一个 Φ -球面, 集合 $S \subset \mathbb{S}_\Phi$ 包含至少 $n+1$ 个点, 且 $o \notin \text{co} S$. 那么存在 $S_1, S_2 \subset S$, 使得 $S_1 \cup S_2 = S$, $S_1 \cap S_2 = \emptyset$, 但 $\text{co}_\Phi S_1 \cap \text{co}_\Phi S_2 \neq \emptyset$.

证明 由于 $S \cup \{o\}$ 包含至少 $n+2$ 个点, 所以, 由 Euclid 空间上的经典 Radon 型定理知, 存在 $S_1, S_2 \subset S_\Phi$, 使得 $S_1 \cup S_2 = S_\Phi$, $S_1 \cap (S_2 \cup \{o\}) = \emptyset$ (自然地, $S_1 \cap S_2 = \emptyset$), 但 $\text{co} S_1 \cap \text{co}(S_2 \cup \{o\}) \neq \emptyset$. 这样, 因为 $o \notin \text{co} S_1$, 首先有 $S_2 \neq \emptyset$, $\text{co} S_1 \cap \text{co} S_2 \neq \emptyset$. 再由命题 2.4 知, $\text{co}_\Phi S_1 = \text{cone}(\text{co} S_1) \cap \mathbb{S}_\Phi$, $\text{co}_\Phi S_2 = \text{cone}(\text{co} S_2) \cap \mathbb{S}_\Phi = \text{cone}(\text{co}(S_2 \cup \{o\})) \cap \mathbb{S}_\Phi$. 于是,

$$\text{co}_\Phi S_1 \cap \text{co}_\Phi S_2 = \text{cone}(\text{co} S_1) \cap \text{cone}(\text{co}(S_2 \cup \{o\})) \cap \mathbb{S}_\Phi \supset \text{cone}(\text{co} S_1 \cap \text{co} S_2) \cap \mathbb{S}_\Phi \neq \emptyset.$$

证毕. $\square$

注 2.4 (i) 定理 2.2 中的 $n+1$ 不可减小, $o \notin \text{co} S$ 不可去: 在 $\mathbb{R}^3$ 上, 取 $\Phi = \|\cdot\|$, 然后分别考虑 $\mathbb{S}^2$ 的子集 $S = \{e_1, e_2, e_3\}$ 和 $T = \{\pm e_1, \pm e_2\}$, 其中 $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$.

(ii) 虽然关于上面的 T 满足定理 2.2 条件的 S_1 和 S_2 不存在, 但仍存在值得注意的现象, 例如, 若取 $S_1 := \{\pm e_1\}$, $S_2 := \{\pm e_2\}$, 那么存在连接 e_1 和 $-e_1$ 的半圆弧 L , 使得 $L \cap \text{co}_\Phi S_2 \neq \emptyset$ (注意 $\text{co}_\Phi S_1 = S_1 \subsetneq L$). 这样, 我们提出如下问题:

问题 2.1 关于 $\mathbb{S}_\Phi$ 一般子集的 Radon 型定理的表现形式是什么?

利用定理 2.2, 可以得到关于真球凸集的 Helly 型定理.

定理 2.3 (Helly 型定理) 设 S_Φ 是一个 Φ -球面, $C_1, C_2, \dots, C_m \subset S_\Phi$ ($m \geq n+1$) 是一族真 Φ -凸集. 若

$$\begin{aligned} C_{i_1} \cap C_{i_2} \cap \dots \cap C_{i_n} &\neq \emptyset, \quad \forall \{i_1, i_2, \dots, i_n\} \subset \{1, 2, \dots, m\}, \\ C_{j_1} \cup C_{j_2} \cup \dots \cup C_{j_{n+1}} &\neq S_\Phi, \quad \forall \{j_1, j_2, \dots, j_{n+1}\} \subset \{1, 2, \dots, m\}, \end{aligned}$$

那么 $\bigcap_{i=1}^m C_i \neq \emptyset$.

注 2.5 与 Euclid 空间情形一样, 集族的有限性不可去; 而任意 $n+1$ 个集合的并不等于全集的条件是“强制性”的: 若 $u \in \bigcap_{i=1}^m C_i$, 则必有 $u^o \notin \bigcup_{i=1}^m C_i$.

我们先证明一个弱于定理 2.3 的结论.

引理 2.1 设 S_Φ 是一个 Φ -球面, $C_1, C_2, \dots, C_m \subset S_\Phi$ ($m \geq n+1$) 是一族真 Φ -凸集. 若对任意的 $\{i_1, i_2, \dots, i_{n+1}\} \subset \{1, 2, \dots, m\}$, $C_{i_1} \cap C_{i_2} \cap \dots \cap C_{i_{n+1}} \neq \emptyset$, 则 $\bigcap_{i=1}^m C_i \neq \emptyset$.

证明 当 $m = n+1$ 时, 结论自然成立. 设引理结论关于 $m (\geq n+1)$ 成立. 那么对满足引理条件的真 Φ -凸集 $C_1, C_2, \dots, C_{m+1} \subset S_\Phi$, 由归纳假设, 得到 m 个 (非空的) 真 Φ -凸集

$$C_{(i)} := C_1 \cap \dots \cap \check{C}_i \cap \dots \cap C_{m+1}, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

其中 $\check{C}_i$ 表示在 $\bigcap_{j=1}^{m+1} C_j$ 中未出现 C_i . 现在对每个 $1 \leq i \leq m$, 选取一个 $u_i \in C_{(i)}$ (注意对所有 i , $u_i \in C_{m+1}$). 若存在 $i \neq j$, 使得 $u_i = u_j$, 那么结论已得证. 故设 $u_1, u_2, \dots, u_m$ 互不相同, 这样, 由定理 2.2 (注意, 由 $\{u_i\}_{i=1}^m \subset C_{m+1}$ 可知, $o \notin \text{co}\{u_i\}_{i=1}^m$), 存在 (若需要可调整角标) $S_1 := \{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ 和 $S_2 := \{u_{k+1}, u_{k+2}, \dots, u_m\}$, 使得 $\text{co}_\Phi S_1 \cap \text{co}_\Phi S_2 \neq \emptyset$. 容易看出, 对任意的 $u^* \in \text{co}_\Phi S_1 \cap \text{co}_\Phi S_2$, 有 $u^* \in \bigcap_{i=1}^{m+1} C_i$. $\square$

定理 2.3 的证明 由引理 2.1, 只需对 $m = n+1$ 进行证明. 设 $C_1, C_2, \dots, C_{n+1} \subset S_\Phi$ 为满足定理 2.3 条件的真 Φ -凸集. 对每个 $1 \leq i \leq n$, 选取 $u_i \in C_1 \cap \dots \cap \check{C}_i \cap \dots \cap C_{n+1}$, 那么所有 u_i 含于 C_{n+1} , 从而, $o \notin \text{co}_\Phi \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$. 这样, 若存在 $i \neq j$, 满足 $u_i = u_j$, 那么结论得证. 故现设所有 u_i 互不相等.

记 $H := \text{lin}\{u_i\}_{i=1}^n$. 若 $\dim H < n$, 应用引理 2.1 于 Φ -球 $H \cap S_\Phi$ 中的真凸集族 $\{C_1 \cap H, C_2 \cap H, \dots, C_{n+1} \cap H\}$, 可得 $x^* \in \bigcap_{i=1}^{n+1} C_i$.

若 $\dim H = n$, 那么 $\text{co}\{o, u_1, \dots, u_n\}$ 是 n -维单形. 记 $A_i = \{u_1, \dots, \check{u}_i, \dots, u_n\}$, $1 \leq i \leq n$, 那么 $\text{lin} A_i$ 为过原点的超平面. 现选择 $v_i \in S^{n-1}$, 使得 $\text{lin} A_i = H_{v_i}$ 且 $u_i \in H_{v_i}^+$. 这样 $\{u_1, u_2, \dots, u_n\} \subset \bigcap_{i=1}^n \overline{H_{v_i}^+}$.

现选取 $u_{n+1} \in \bigcap_{i=1}^n C_i$, 并断言存在 $1 \leq i_0 \leq n$ 使得 $u_{n+1} \in H_{v_{i_0}}^+$: 若不然, 则 $u_{n+1} \in \bigcap_{i=1}^n \overline{H_{v_i}^-}$. 但由于对任意 $1 \leq i \leq n$, $u_{n+1} \notin H_{v_i}$ (否则, 将得到矛盾 $u_{n+1} \in (\text{co}_\Phi A_i)^{\text{op}} \subset C_i^{\text{op}}$). 因此, $u_{n+1} \in \bigcap_{i=1}^n H_{v_i}^-$, 这样 $u_{n+1} \in (\text{intco}_\Phi \{u_i\}_{i=1}^n)^{\text{op}}$ 或者 $u_{n+1}^o \in \text{intco}_\Phi \{u_i\}_{i=1}^n$. 于是对连接 u_{n+1} 和 u_{n+1}^o 的任意半圆 L , 存在 $1 \leq j \leq n$, 使得 $L \cap \text{co}_\Phi A_j = w_j$ ($w_j \neq u_{n+1}, u_{n+1}^o$), 并由此知 $L = \text{co}_\Phi \{u_{n+1}^o, w_j\} \cup \text{co}_\Phi \{w_j, u_{n+1}\}$. 又由于 $u_{n+1}^o \in \text{intco}_\Phi \{u_i\}_{i=1}^n \subset C_{n+1}$, $u_{n+1} \in C_j$, $w_j \in C_{n+1} \cap \text{co}_\Phi A_j \subset C_{n+1} \cap C_j$, 所以, $L \subset C_j \cup C_{n+1}$. 再由 L 的任意性可知 $S_\Phi = \bigcup_{i=1}^{n+1} C_i$, 与定理假设矛盾.

应用定理 2.2 于集合 $\{u_i\}_{i=1}^{n+1}$, 并采用与引理 2.1 证明类似的方法, 即可找到 $u^* \in \bigcap_{i=1}^{n+1} C_i$. $\square$

注意到闭 Φ -凸集是紧集, 我们重新得到文献 [62] 中的下列结论 (文献 [62] 只考虑了 S^{n-1} 中的球凸集).

推论 2.1 设 $\mathbb{S}_\Phi$ 为 Φ -球面, $\{C_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{K}^p(\mathbb{S}_\Phi)$ (不必为有限集族). 若对任意 $\{i_k\}_{k=1}^n, \{j_k\}_{k=1}^{n+1} \subset I$, 有 $\bigcap_{k=1}^n C_{i_k} \neq \emptyset, \bigcup_{k=1}^{n+1} C_{j_k} \neq \mathbb{S}_\Phi$, 那么 $\bigcap_{i \in I} C_i \neq \emptyset$.

下面给出球面空间上的 Carathéodory 型定理.

定理 2.4 (Carathéodory 型定理) 设 $\mathbb{S}_\Phi$ 为 Φ -球面, $S \subset \mathbb{S}_\Phi$ 满足 $o \notin \text{co} S$, 那么对任意 $u \in \text{co}_\Phi S$, 存在 $u_1, u_2, \dots, u_n \in S_\Phi, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in [0, 1]$ 且满足 $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, 使得 $u = (\Phi) \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i$.

证明 设 $u \in \text{co}_\Phi S$, 那么存在 $u'_1, u'_2, \dots, u'_m \in S, \lambda'_1, \lambda'_2, \dots, \lambda'_m \in [0, 1]$ 且 $\sum_{i=1}^m \lambda'_i = 1$, 使得 $u = (\Phi) \sum_{i=1}^m \lambda'_i u'_i$. 若 $m \leq n$, 结论自然成立. 所以假设 $m > n$.

既然 $\text{co}\{u'_i\}_{i=1}^m$ 是紧的, $o \notin \text{co}\{u'_i\}_{i=1}^m$, 由分离定理知, 存在超平面 $H_{v,\alpha}$ ($\alpha > 0$) 使得 $\text{co}\{u'_i\}_{i=1}^m \subset H_{v,\alpha}^+$. 记 $S^* := \text{cone}\{u'_i\}_{i=1}^m \cap H_{v,\alpha}$, 那么 S^* 是一个多面体, 即

$$S^* = \text{co}\{x_i = t_i u'_i \mid t_i > 0 \text{ 满足 } t_i u'_i \in H_{v,\alpha}, 1 \leq i \leq m\} =: P.$$

事实上, $P \subset S^*$ 为显然 (S^* 是凸的并且所有 $x_i \in S^*$). 反之, 设 $x \in S^*$, 那么 $\langle v, x \rangle = \alpha$ 并且存在非负 s_i , 使得 $x = \sum_{i=1}^m s_i u'_i$ ($= \sum_{i=1}^m \frac{s_i}{t_i} x_i$). 于是, 由 $\alpha = \langle v, x \rangle = \sum_{i=1}^m \frac{s_i}{t_i} \langle v, x_i \rangle = \alpha \sum_{i=1}^m \frac{s_i}{t_i}$, 得 $\sum_{i=1}^m \frac{s_i}{t_i} = 1$ 和 $x = \sum_{i=1}^m \frac{s_i}{t_i} x_i \in P$.

既然 $\dim H_{u,\alpha} = n - 1$, 由经典的 Carathéodory 定理和关于紧凸集的 Minkowski 结构定理知, 对满足 $u = \rho_\Phi(x^*)$ 的唯一 $x^* \in S^*$, 存在 $x_j = t_j u_j$ 和满足 $\sum_{j=1}^n \mu_j = 1$ 的 $\mu_j \in [0, 1]$, 其中 $u_j \in \{u'_i\}_{i=1}^m, 1 \leq j \leq n$, 使得 $x^* = \sum_{j=1}^n \mu_j x_j = \sum_{j=1}^n \mu_j t_j u_j$. 这样, 由 ρ_Φ 的性质 (记 $\lambda_j := \frac{\mu_j t_j}{\sum_{i=1}^n \mu_i t_i}$) 可得

$$u = \rho(x^*) = \rho\left(\sum_{j=1}^n \mu_j t_j u_j\right) = \rho\left(\sum_{j=1}^n \lambda_j u_j\right) = (\Phi) \sum_{j=1}^n \lambda_j u_j.$$

证毕. □

2.4 球凸集的结构性质

类似于 Euclid 凸集, 闭球凸集也具有良好整体结构性质. 例如, 非全集的闭球凸集可以表示为一族闭半球面的交集 (参见文献 [13, 27, 29, 32, 38]). 这里主要介绍有关真闭凸集的结构表示定理 (参见文献 [59]). 首先, 将文献 [59] 中给出的关于真 Φ -凸集端点定义推广至任意闭 Φ -凸集.

定义 2.3 设 $\mathbb{S}_\Phi$ 为 Φ -球面, $C \in \mathcal{K}(\mathbb{S}_\Phi)$. $u \in C$ 称为 C 的一个 Φ -端点 (或球端点), 若 $u_1, u_2 \in C, u = \frac{1}{2}u_1 +_\Phi \frac{1}{2}u_2$ 蕴涵 $u_1 = u_2 = u$ 或 u_1 (相应地, u_2) $= u, u_2$ (相应地, u_1) $= u^\circ$. C 的 Φ -端点集全体记为 $\text{ext}_\Phi C$.

注 2.6 容易验证, Φ -端点必为相对边界点; 定义中的 “ $u = \frac{1}{2}u_1 +_\Phi \frac{1}{2}u_2$ ” 可换为 “对某个 $0 < \lambda < 1$, 有 $u = \lambda u_1 +_\Phi (1 - \lambda)u_2$ ”.

下面的结论揭示了球端点与 Euclid 空间凸锥的端射线或端直线之间的关系 (文献 [59] 只考虑了真闭球面的情形).

命题 2.5 设 $\mathbb{S}_\Phi$ 为 Φ -球面, $C \in \mathcal{K}(\mathbb{S}_\Phi)$, 那么 $u \in C$ 为 Φ -端点当且仅当存在 $\text{cone} C$ 的端射线或端直线 L , 使得 $u \in L \cap C$.

证明 首先由注 2.2(iii) 可知 $\text{cone} C$ 为闭凸锥. 现在, 若 $u_1, u_2 \in C$ 满足 $u = \frac{1}{2}u_1 +_\Phi \frac{1}{2}u_2$, 则

$$\frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{2}u_2 = \Phi\left(\frac{u_1 + u_2}{2}\right)u \in L.$$

因为 L 是端射线或端直线, 所以 $u_1, u_2 \in L$, 进而 $u_1, u_2 \in L \cap C$. 当 L 为端射线时, 自然有 $u_1 = u_2 = u$ (因 $L \cap C$ 为单点集); 当 L 为端直线时, 记 $L = L^+ \cup L^-$, 其中 $L^+ := \{tu \mid t \geq 0\}$, $L^- := \{tu^\circ \mid t \geq 0\}$. 那么首先 $u_1, u_2 \in L^-$ 不成立 (否则将有 $u = \frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{2}u_2 \in L^-$). 若 $u_1, u_2 \in L^+$, 则 $u_1 = u_2 = u$ 显然成立; 若 (不失一般性) $u_1 \in L^+, u_2 \in L^-$, 那么自然有 $u_1 = u, u_2 = u^\circ$. 从而, 无论 L 是端射线还是端直线, u 都是 Φ -端点.

反之, 设 u 为 C 的一个 Φ -端点, 记 $L := \{tu \mid t \in \mathbb{R}^+\}$ (当 $u^\circ \notin C$ 时) 或 $\{tu \mid t \in \mathbb{R}\}$ (当 $u^\circ \in C$ 时). 下面证 L 为端射线或端直线.

设有 $x_1 = t_1 u_1, x_2 = t_2 u_2 \in \text{cone} C$, 其中 $u_1, u_2 \in C, t_1, t_2 \in \mathbb{R}^+$, 使得

$$y := \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 \in L.$$

先考虑 $y = o$ 的情形, 并不妨设 $x_1 \neq o, x_2 \neq o$ (既然 $x_1 = x_2 = o \in L$ 为显然), 从而 $u_2 = -\frac{t_1}{t_2}u_1 = u_1^\circ$. 现断言此时必有 $u = u_1$ 或 $u = u_1^\circ$ (从而 $u^\circ \in C$): 若不然, 由 $[u_1, u]_\Phi \cup [u, u_1^\circ]_\Phi \subset C$ 即可推出 u 不是 Φ -端点. 这样, L 为端直线, (不妨设 $u = u_1$) $x_1 = t_1 u, x_2 = t_2 u^\circ \in L$.

再考虑 $y \neq o$ 的情形, 并不妨设 $x_1 \neq o, x_2 \neq o$ (否则, 自然有 $x_1, x_2 \in L$). 由 ρ_Φ 的性质可得

$$\begin{aligned} u &= \rho_\Phi(y) = \rho_\Phi(x_1 + x_2) \\ &= \rho_\Phi\left(\frac{\Phi(x_1)}{\Phi(x_1) + \Phi(x_2)} \frac{x_1}{\Phi(x_1)} + \frac{\Phi(x_2)}{\Phi(x_1) + \Phi(x_2)} \frac{x_2}{\Phi(x_2)}\right) \\ &= \frac{\Phi(x_1)}{\Phi(x_1) + \Phi(x_2)} \frac{x_1}{\Phi(x_1)} + \frac{\Phi(x_2)}{\Phi(x_1) + \Phi(x_2)} \frac{x_2}{\Phi(x_2)}. \end{aligned}$$

既然 u 是 Φ -端点, 那么 $\frac{x_1}{\Phi(x_1)} = \frac{x_2}{\Phi(x_2)} = u$ 或 (不失一般性) $\frac{x_1}{\Phi(x_1)} = u, \frac{x_2}{\Phi(x_2)} = u^\circ$. 当 $\frac{x_1}{\Phi(x_1)} = \frac{x_2}{\Phi(x_2)} = u$ 成立时, $x_1 = \Phi(x_1)u, x_2 = \Phi(x_2)u \in L$. 当 $\frac{x_1}{\Phi(x_1)} = u, \frac{x_2}{\Phi(x_2)} = u^\circ$ 成立时 (此时, $u^\circ \in C, L$ 为端直线), 仍有 $x_1 = \Phi(x_1)u, x_2 = \Phi(x_2)u^\circ \in L$. $\square$

由于有顶点的闭凸锥一定存在端射线 (参见文献 [36, 定理 1.3.9]), 所以下面的推论自然成立.

推论 2.2 [59] 若 $C \in \mathcal{K}^p(\mathbb{S}_\Phi)$, 则 $\text{ext}_\Phi C \neq \emptyset$.

推论 2.3 设 $C \in \mathcal{K}^p(\mathbb{S}_\Phi)$, $u \in \text{ext}_\Phi C$. 若存在 $u_i \in C$ 和满足 $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ 的 $\lambda_i \in (0, 1)$, $1 \leq i \leq k$, 使得 $u = (\Phi) \sum_{i=1}^k \lambda_i u_i$, 那么 $u_1 = u_2 = \cdots = u_k = u$.

证明 由命题 2.5 知, $L := \{tu \mid t \geq 0\}$ 是 $\text{cone} C$ 的端射线. 由 $u = (\Phi) \sum_{i=1}^k \lambda_i u_i$ 得

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i u_i = \Phi\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i u_i\right) u \in L,$$

于是 $u_1, u_2, \dots, u_k \in L$, 进而 $u_1, u_2, \dots, u_k \in L \cap C$. 于是 $u_1 = u_2 = \cdots = u_k = u$. $\square$

命题 2.6 设 $C \in \mathcal{K}(\mathbb{S}_\Phi)$, 则下列结论成立.

- (i) 若对点 $u, u^\circ \in C$, 则 $u \in \text{ext}_\Phi C$ 当且仅当 $u^\circ \in \text{ext}_\Phi C$.
- (ii) 若 C 含有对点, 则任意其他点都不是 Φ -端点; 特别地, 非真闭 Φ -凸集的 Φ -端点的个数为 0 或 2.

(iii) 若存在 $u \in \text{ext}_\Phi C$, 但 $u^\circ \notin C$, 则 $C \in \mathcal{K}^p(\mathbb{S}_\Phi)$; 若 C 含有两对对点, 则 $\text{ext}_\Phi C = \emptyset$.

证明 (i) 此为命题 2.5 的直接推论.

(ii) 假设 $u, u^\circ \in C$ 为对点. 若 $v \in C$ 且 $v \neq u, v \neq u^\circ$, 那么由半圆 $[u, v]_\Phi \cup [v, u^\circ]_\Phi \subset C$ 即可推出 v 不是 Φ -端点. 至于第二个结论, 只需注意到此时 C 含有对点, 即知结论成立.

(iii) 这里的两个结论皆为 (ii) 的直接推论. $\square$

下面是关于真闭 Φ - 凸集的 Minkowski 型结构定理.

定理 2.5 (Minkowski 型结构定理) 设 $C \in \mathcal{K}^p(\mathbb{S}_\Phi)$, 则 $C = \text{co}_\Phi(\text{extr}_\Phi C)$.

证明 由命题 2.1 知, $\text{cone}C$ 不含直线, 所以 $\text{cone}C = \text{co}(\text{extr}(\text{cone}C))$ (参见文献 [2, 定理 1.4.3]), 其中 $\text{extr}(\text{cone}C)$ 表示 $\text{cone}C$ 所有端射线的并集. 于是, 若 $u \in C \subset \text{cone}C$, 则存在非零的 $x_i \in L_i$, $\lambda_i \in \mathbb{R}_*^+$, 其中 L_i 为端射线, $i = 1, 2, \dots, m$, 使得 $u = \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i$. 从而, 由 ρ_Φ 的性质可得

$$\begin{aligned} u &= \rho_\Phi \left(\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i \right) = \rho_\Phi \left(\sum_{i=1}^m \frac{\lambda_i \Phi(x_i)}{\sum_{j=1}^m \lambda_j \Phi(x_j)} \frac{x_i}{\Phi(x_i)} \right) \\ &= (\Phi) \sum_{i=1}^m \frac{\lambda_i \Phi(x_i)}{\sum_{j=1}^m \lambda_j \Phi(x_j)} \frac{x_i}{\Phi(x_i)} \in \text{co}_\Phi(\text{extr}_\Phi C), \end{aligned}$$

其中用到了 $\frac{x_i}{\Phi(x_i)} \in \text{extr}_\Phi C$ (命题 2.5). □

注 2.7 对非真闭 Φ - 凸集, 定理 2.5 结论基本不成立: 设 C 为非真的闭 Φ - 凸集, 由命题 2.6(ii) 知, $\text{extr}_\Phi C$ 中仅有 0 或 2 个元素, 且此两个元素为对点 u 和 u° , 而 $\text{co}_\Phi\{u, u^\circ\} = \{u, u^\circ\}$. 事实上, 容易证明, 若 C 为非真的闭 Φ - 凸集, 则 $C = \text{co}_\Phi(\text{extr}_\Phi C)$ 当且仅当 C 是一个 0- Φ - 球面, 即由一对对点构成的两点集.

问题 2.2 一般闭 Φ - 凸集 Minkowski 型结构定理的表现形式应是什么?

3 球面上的变换与运算

相对于 Euclid 空间上丰富的 (线性) 变换与运算, 球面上适宜的变换与运算似乎不多, 这是影响球面空间系统凸分析形成的主要障碍之一, 虽然近年来已有一些此方面的研究, 但仍有许多问题有待解决. 这里将简单介绍近年来有关的研究进展.

3.1 球面空间上的典型变换

在球面空间凸性理论的研究过程中, 由于大多采用几何研究方法, 所以寻求球面空间上适宜的一般变换问题似乎并未引起过多的关注, 研究者大多是根据所研究的问题去处理一些具体的变换, 如球面投影映射和心射投影等. 最近, 文献 [64] 还定义了如下的变换, 并发现了它们的一些应用¹⁾.

定义 3.1 设 $\mathbb{S}_\Phi$ 为 Φ - 球面. 对任意 $A \in \text{GL}(\mathbb{R}^n)$, 定义变换 $\hat{A}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{S}_\Phi \cup \{o\}$ 如下:

$$\hat{A}(u) := \rho_\Phi \circ A(u), \quad \forall u \in \mathbb{R}^n.$$

当 $\hat{A}$ 限制于 $\mathbb{S}_\Phi$ 上时 (仍记为 $\hat{A}$), 称其为 $\mathbb{S}_\Phi$ 上的一个典型变换. $\mathbb{S}_\Phi$ 上典型变换的全体记为 $\text{CT}(\mathbb{S}_\Phi)$.

注 3.1 (i) 由 A 的线性性质和 ρ_Φ 的性质知 $\hat{A} = \hat{A} \circ \rho_\Phi$. 特别地, 对任意 $u, v \in \mathbb{R}^n$, $a, b \in \mathbb{R}_*^+$, 有

$$\hat{A}(au + bv) = \hat{A}(au +_\Phi bv) = \hat{A}\left(\frac{a}{a+b}u +_\Phi \frac{b}{a+b}v\right).$$

(ii) 在 $\mathbb{S}_\Phi$ 上, $\hat{A}$ 是可逆的.

命题 3.1 在算子复合运算下 $\text{CT}(\mathbb{S}_\Phi)$ 构成一个群, 并且, $\hat{I}$ 是 $\text{CT}(\mathbb{S}_\Phi)$ 的单位元, 其中 $I \in \text{GL}(\mathbb{R}^n)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的恒等变换; 对任意 $A, B \in \text{GL}(\mathbb{R}^n)$, 有 $(\hat{A})^{-1} = \widehat{A^{-1}}$, $\hat{A} \circ \hat{B} = \widehat{AB}$.

1) Tan X, Guo Q. Support functions of spherically convex sets. Preprint, 2020

证明 易验证 $\widehat{I}$ 是 $CT(\mathbb{S}_\Phi)$ 的单位元. 现证 $(\widehat{A})^{-1} = \widehat{A^{-1}}$, $\widehat{A} \circ \widehat{B} = \widehat{AB}$.

对任意的 $u \in \mathbb{S}_\Phi$, 由 ρ_Φ 的性质可得

$$\widehat{A^{-1}} \circ \widehat{A}(u) = \widehat{A^{-1}}\left(\frac{A(u)}{\Phi(A(u))}\right) = \rho_\Phi\left(\frac{A^{-1}A(u)}{\Phi(A(u))}\right) = \rho_\Phi\left(\frac{u}{\Phi(A(u))}\right) = \rho_\Phi(u) = u.$$

同理, $\widehat{A} \circ \widehat{A^{-1}}(u) = u$, 所以 $(\widehat{A})^{-1} = \widehat{A^{-1}}$. 对任意的 $u \in \mathbb{S}_\Phi$, 有

$$\begin{aligned}\widehat{A} \circ \widehat{B}(u) &= \widehat{A}\left(\frac{B(u)}{\Phi(B(u))}\right) = \rho_\Phi\left(A\left(\frac{B(u)}{\Phi(B(u))}\right)\right) \\ &= \rho_\Phi\left(\frac{AB(u)}{\Phi(B(u))}\right) = \rho_\Phi(AB(u)) = \widehat{AB}(u).\end{aligned}$$

所以, $\widehat{A} \circ \widehat{B} = \widehat{AB}$. □

$CT(\mathbb{S}_\Phi)$ 称为 $\mathbb{S}_\Phi$ 上的典型变换群. 显然, 若定义 $\phi(A) := \widehat{A}$, $\forall A \in GL(\mathbb{R}^n)$, 则命题 3.1 表明, $\phi: GL(\mathbb{R}^n) \rightarrow CT(\mathbb{S}_\Phi)$ 为一个群同态.

命题 3.2 群同态 ϕ 的核 $\ker\phi = \{tI \mid t \in \mathbb{R}_*^+\}$.

证明 对 $t \in \mathbb{R}_*^+$, 显然有 $tI \in \ker\phi$. 反之, 若 $A \in \ker\phi$, 则 $\widehat{A}(u) = u$, $\forall u \in \mathbb{S}_\Phi$, 即 $\frac{A(u)}{\Phi(A(u))} = u$, 或 $A(u) = \Phi(A(u))u$, $\forall u \in \mathbb{S}_\Phi$. 这样, 所有的 $\Phi(A(u))$ ($u \in \mathbb{S}_\Phi$), 都是 A 的特征值. 由于 A 最多有 n 个不同的特征值, 所以, $\{\Phi(A(u)) \mid u \in \mathbb{S}_\Phi\}$ 为有限集. 再由 $\Phi(A(\cdot))$ 的连续性可知其必为单点集, 即 $\Phi(A(u))$ 在 $\mathbb{S}_\Phi$ 上为一个正常数 t . 于是, $A(u) = tu$, $\forall u \in \mathbb{S}_\Phi$, 由此可知 $A = tI$. □

下一个定理表明 $\widehat{A}$ 是保 Φ -凸性的.

定理 3.1 设 $\widehat{A} \in CT(\mathbb{S}_\Phi)$. 若 $C \in \mathcal{K}(\mathbb{S}_\Phi)$ (相应地, $\mathcal{K}^p(\mathbb{S}_\Phi)$), 则 $\widehat{A}(C) := \{\widehat{A}(x) \mid x \in C\} \in \mathcal{K}(\mathbb{S}_\Phi)$ (相应地, $\mathcal{K}^p(\mathbb{S}_\Phi)$).

证明 首先注意, 若 $u, v \in \mathbb{R}^n$, $0 \leq \lambda \leq 1$, 则 $\lambda u +_\Phi (1-\lambda)v = o$ 当且仅当 $\lambda \widehat{A}(u) +_\Phi (1-\lambda)\widehat{A}(v) = o$.

设 $C \in \mathcal{K}(\mathbb{S}_\Phi)$. 若 $u_1, u_2 \in \widehat{A}(C)$, 则存在 $v_1, v_2 \in C$ 使得 $u_1 = \widehat{A}(v_1)$, $u_2 = \widehat{A}(v_2)$. 这样, 对任意 $0 \leq \lambda \leq 1$, 由注 3.1(i) 知,

$$\begin{aligned}\lambda u_1 +_\Phi (1-\lambda)u_2 &= \rho_\Phi(\lambda \widehat{A}(v_1) + (1-\lambda)\widehat{A}(v_2)) \\ &= \rho_\Phi\left(\frac{\lambda}{\Phi(A(v_1))}A(v_1) + \frac{1-\lambda}{\Phi(A(v_2))}A(v_2)\right) \\ &= \rho_\Phi \circ A\left(\frac{\lambda}{\Phi(A(v_1))}v_1 + \frac{1-\lambda}{\Phi(A(v_2))}v_2\right) \\ &= \widehat{A}(\mu v_1 +_\Phi (1-\mu)v_2),\end{aligned}\tag{*}$$

其中

$$\mu = \frac{\lambda}{\Phi(A(v_1))} \left(\frac{\lambda}{\Phi(A(v_1))} + \frac{1-\lambda}{\Phi(A(v_2))} \right)^{-1}.$$

此时, 若 $\lambda u_1 +_\Phi (1-\lambda)u_2 \neq o$, 则 $\mu v_1 +_\Phi (1-\mu)v_2 \neq o$, 从而, $\mu v_1 +_\Phi (1-\mu)v_2 \in C$, 进而, $\lambda u_1 +_\Phi (1-\lambda)u_2 \in \widehat{A}(C)$.

若 $C \in \mathcal{K}^p(\mathbb{S}_\Phi)$, 则对任意 $v_1, v_2 \in C$, $0 \leq \mu \leq 1$, 有 $\mu v_1 +_\Phi (1-\mu)v_2 \in C$. 从而由 (*) 知, 对任意的 $u_1, u_2 \in \widehat{A}(C)$, $0 \leq \lambda \leq 1$, 有 $\lambda u_1 +_\Phi (1-\lambda)u_2 \in \widehat{A}(C)$. 所以, $\widehat{A}(C) \in \mathcal{K}^p(\mathbb{S}_\Phi)$. □

下述命题表明 $\widehat{A}$ 也是保对点和保端点的.

命题 3.3 若 $u, u^\circ \in \mathbb{S}_\Phi$ 为对点, 则 $\hat{A}(u)$ 和 $\hat{A}(u^\circ)$ 为对点, 即 $\hat{A}(u^\circ) = (\hat{A}(u))^\circ$; 若 $C \in \mathcal{K}(\mathbb{S}_\Phi)$, $u \in \text{ext}_\Phi(C)$, 则 $\hat{A}(u) \in \text{ext}_\Phi(\hat{A}(C))$.

证明 由于 $u^\circ = -t_0 u$ ($t_0 > 0$), 所以, $\hat{A}(u^\circ) = \hat{A}(-t_0 u) = \hat{A}(-u) = (\hat{A}(u))^\circ$.

设 $C \in \mathcal{K}(\mathbb{S}_\Phi)$, $v_1 = \hat{A}(u_1)$, $v_2 = \hat{A}(u_2) \in \hat{A}(C)$, 其中 $u_1, u_2 \in C$, 满足 $\hat{A}(u) = \frac{1}{2}v_1 +_\Phi \frac{1}{2}v_2$, 那么由注 3.1(i) 知,

$$\begin{aligned}\hat{A}(u) &= \frac{1}{2}\hat{A}(u_1) +_\Phi \frac{1}{2}\hat{A}(u_2) = \hat{A}(u_1) +_\Phi \hat{A}(u_2) \\ &= \rho_\Phi \left(\frac{A(u_1)}{\Phi(A(u_1))} + \frac{A(u_2)}{\Phi(A(u_2))} \right) \\ &= \rho_\Phi \circ A \left(\frac{u_1}{\Phi(A(u_1))} + \frac{u_2}{\Phi(A(u_2))} \right) \\ &= \hat{A}(\lambda u_1 +_\Phi (1-\lambda)u_2),\end{aligned}$$

其中 $\lambda = \frac{\Phi(A(u_2))}{\Phi(A(u_1)) + \Phi(A(u_2))}$. 这样 $u = \lambda u_1 +_\Phi (1-\lambda)u_2$. 既然 $u \in \text{ext}_\Phi(C)$, 由注 2.6 知, $u_1 = u_2 = u$ 或 (不失一般性) $u_1 = u$, $u_2 = u^\circ$. 若 $u_1 = u_2 = u$, 则 $v_1 = v_2 = \hat{A}(u)$; 若 $u_1 = u$, $u_2 = u^\circ$, 则 $v_1 = \hat{A}(u)$, $v_2 = \hat{A}(u^\circ) = (\hat{A}(u))^\circ$, 所以, $\hat{A}(u) \in \text{ext}_\Phi(\hat{A}(C))$. $\square$

在下文中可以看到, 对 $\mathbb{R}^n$ 上不可逆的线性变换 A , 也可以定义类似的 $\hat{A}$.

3.2 球面空间到闭球凸集的投影

在球面空间凸性理论的研究中, 特别是球面凸分析研究中, 球投影映射是仅有的几个常用变换之一. 这里介绍相关的概念、性质及研究成果.

首先介绍 $\mathbb{S}_\Phi$ 上内蕴距离的概念 (参见文献 [13]). 对任意非零 $u \in \mathbb{R}^n$, 记 $\dot{u} := \frac{u}{\|u\|}$. 设 $u, v \in \mathbb{S}_\Phi$, 则 $d_s(u, v) := \arccos \langle \dot{u}, \dot{v} \rangle$ 称为 u 和 v 之间的内蕴距离 (注意, 事实上, d_s 与 Φ 无关). 显然, d_s 是 $\mathbb{S}_\Phi$ 上的距离, $(\mathbb{S}_\Phi, d_s)$ 为完备的度量空间; $0 \leq d_s(u, v) \leq \pi$, 且 $d_s(u, v) = 0$ 当且仅当 $u = v$, $d_s(u, v) = \pi$ 当且仅当 $v = u^\circ$.

先考虑 $\mathbb{S}_\Phi$ 到其 k - Φ -球面的投影 ($0 \leq k \leq n-1$). 对 $\mathbb{R}^n$ 的 $k+1$ 维子空间 V ($0 \leq k \leq n-1$), k - Φ -球面 $V \cap \mathbb{S}_\Phi$ 记作 $\mathbb{S}_V$. 对任意 $E \subset \mathbb{R}^n$, $\mathcal{P}(E)$ 表示 E 的幂集.

定义 3.2 设 $\mathbb{S}_\Phi$ 为 Φ -球面, $V \subset \mathbb{R}^n$ 为 $k+1$ 维子空间, P_V 为 $\mathbb{R}^n$ 到 V 的正交投影, 则球投影映射 $P_{\mathbb{S}_V} : \mathbb{S}_\Phi \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{S}_V)$ 定义如下:

$$P_{\mathbb{S}_V}(u) := \begin{cases} \{\hat{P}_V(u)\}, & u \notin \ker P_V, \\ \mathbb{S}_V, & u \in \ker P_V, \end{cases}$$

其中 $\hat{P}_V := \rho_\Phi \circ P_V$.

命题 3.4 设 $\mathbb{S}_\Phi$ 为 Φ -球面, $V \subset \mathbb{R}^n$ 为 $k+1$ 维子空间, 则有

- (i) $P_{\mathbb{S}_V}(u) = \{v \in \mathbb{S}_V \mid d_s(u, v) \leq d_s(u, w), w \in \mathbb{S}_V\}$, 且当 $u \notin \ker P_V$ 时, $P_{\mathbb{S}_V}(u)$ 为单点集;
- (ii) 当 $u \notin \ker P_V$ 时, $P_{\mathbb{S}_V}(u) = \text{co}_\Phi(\{u\} \cup \mathbb{S}_{V^\perp}) \cap \mathbb{S}_V$, 其中 $V^\perp$ 表示 V 的正交补空间.

证明 (i) 当 $u \in \ker P_V$ 时, 对任意 $v \in \mathbb{S}_V$, 有 $\langle \dot{u}, \dot{v} \rangle = 0$, 所以等式成立. 当 $u \notin \ker P_V$ 时, 因为 $\dot{u} = u^\perp + v_0 = u^\perp + \Phi(v_0)\rho_\Phi(v_0)$, 其中 $u^\perp = P_{V^\perp}(\dot{u})$, $v_0 := P_V(\dot{u}) (\neq o)$. 所以, 对任意 $w (\neq \hat{P}_V(u) = \rho_\Phi(v_0)) \in \mathbb{S}_V$, 有

$$\langle \dot{u}, \dot{w} \rangle = \langle v_0, \dot{w} \rangle = \langle \Phi(v_0)\rho_\Phi(v_0), \dot{w} \rangle = \Phi(v_0)\|\rho_\Phi(v_0)\| \left\langle \frac{\rho_\Phi(v_0)}{\|\rho_\Phi(v_0)\|}, \dot{w} \right\rangle$$

$$\begin{aligned} &< \Phi(v_0) \|\rho_\Phi(v_0)\| \left\langle \frac{\rho_\Phi(v_0)}{\|\rho_\Phi(v_0)\|}, \frac{\rho_\Phi(v_0)}{\|\rho_\Phi(v_0)\|} \right\rangle \\ &= \left\langle v_0, \frac{\rho_\Phi(v_0)}{\|\rho_\Phi(v_0)\|} \right\rangle = \left\langle \dot{u}, \frac{\hat{P}_V(u)}{\|\hat{P}(u)\|} \right\rangle. \end{aligned}$$

于是, 对任意的 $w (\neq \hat{P}_V(u)) \in \mathbb{S}_V$, 有

$$d_s(u, \hat{P}_V(u)) = \arccos \left\langle \dot{u}, \frac{\hat{P}_V(u)}{\|\hat{P}(u)\|} \right\rangle < \arccos \langle \dot{u}, \dot{w} \rangle = d_s(u, w),$$

即此时 (i) 中等式右端恰为单点集 $\{\hat{P}_V(u)\} (= P_{\mathbb{S}_V}(u))$.

(ii) 设 $u \notin \ker P_V$. 若 $v \in \text{co}_\Phi(\{u\} \cup \mathbb{S}_{V^\perp}) \cap \mathbb{S}_V$, 则存在 $v_i \in \mathbb{S}_{V^\perp}$, $\lambda_0 > 0$, $0 \leq \lambda_i \leq 1$, $1 \leq i \leq m$, 满足 $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$, 使得 $v = (\Phi)(\lambda_0 u + \sum_{i=1}^m \lambda_i v_i)$ 且 $\hat{P}_V(v) = v$. 于是, 由 ρ_Φ 的性质可得

$$v = \hat{P}(v) = \hat{P}_V \left((\Phi) \left(\lambda_0 u + \sum_{i=1}^m \lambda_i v_i \right) \right) = \hat{P}_V \left(\lambda_0 u + \sum_{i=1}^m \lambda_i v_i \right) = \hat{P}_V(\lambda_0 u) = \hat{P}_V(u).$$

又显然, $u \in \text{co}_\Phi(\{u\} \cup \mathbb{S}_{V^\perp}) \cap \mathbb{S}_V$, 所以等式成立. $\square$

注 3.2 当 $\mathbb{S}_\Phi = \mathbb{S}^{n-1}$ 时, (i) 中等式右端是文献 [13] 给出的球面空间到子球面投影映射的定义. 当 $u \notin \ker P_V$ 时, (ii) 中等式右端是文献 [12, 30] 给出的球面空间到子球面投影映射的定义; 而当 $u \in \ker P_V$, 即 $u \in \mathbb{S}_{V^\perp}$ 时, (ii) 中等式右端为空集, 但此时文献 [12, 30] 仍以此作为投影像的定义, 所以应予以订正 (直接约定等于 $\mathbb{S}_V$ 即可). 经此订正后, 即可证明当 $\Phi(\cdot) = \|\cdot\|$ 时, 定义 3.2 与文献 [12, 30] 中的定义是一致的. 实际上, 我们有下面的命题 3.4(ii) 的推广.

命题 3.5 若记 $P_{\mathbb{S}_V}(C) = \bigcup_{u \in C} P_{\mathbb{S}_V}(u)$, 则有

$$P_{\mathbb{S}_V}(C) = \begin{cases} \text{co}_\Phi(C \cup \mathbb{S}_{V^\perp}) \cap \mathbb{S}_V, & C \cap \ker P_V = \emptyset, \\ \mathbb{S}_V, & C \cap \ker P_V \neq \emptyset. \end{cases}$$

证明 当 $C \cap \ker P_V \neq \emptyset$ 时, 等式显然成立. 设 $C \cap \ker P_V = \emptyset$, 即 $C \cap \mathbb{S}_{V^\perp} = \emptyset$, 则首先由命题 3.4 知, $P_{\mathbb{S}_V}(C) \subset \text{co}_\Phi(C \cup \mathbb{S}_{V^\perp}) \cap \mathbb{S}_V$. 现取 $w \in \text{co}_\Phi(C \cup \mathbb{S}_{V^\perp}) \cap \mathbb{S}_V$, 那么存在 $u_1, \dots, u_m \in C$, $s'_{m+1}, \dots, s'_{m+l} \in \mathbb{S}_{V^\perp}$ 和满足 $\sum_{i=1}^{m+l} \lambda_i = 1$ 的 $\lambda_1, \dots, \lambda_m, \lambda_{m+1}, \dots, \lambda_{m+l} \in [0, 1]$, 使得

$$w = \rho_\Phi \left(\sum_{i=1}^m \lambda_i u_i + \sum_{i=m+1}^{m+l} \lambda_i s'_i \right) \in \mathbb{S}_V,$$

其中

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i u_i + \sum_{i=m+1}^{m+l} \lambda_i s'_i \neq o.$$

注意 $\sum_{i=1}^m \lambda_i u_i \neq o$ (否则将得到矛盾 $w = \rho_\Phi(\sum_{i=m+1}^{m+l} \lambda_i s'_i) \in \mathbb{S}_{V^\perp}$), 所以, 若记 $a^{-1} := \Phi(\sum_{i=1}^m \lambda_i u_i)$, $u^* := a \sum_{i=1}^m \lambda_i u_i (\in C)$, 则由 ρ_Φ 的性质可得

$$\begin{aligned} w &= \rho_\Phi \left(a \sum_{i=1}^m \lambda_i u_i + a \sum_{i=m+1}^{m+l} \lambda_i s'_i \right) = \rho_\Phi \left(u^* + a \sum_{i=m+1}^{m+l} \lambda_i s'_i \right) \\ &= \rho_\Phi \left(P_V(u^*) + P_{V^\perp}(u^*) + a \sum_{i=m+1}^{m+l} \lambda_i s'_i \right) \end{aligned}$$

$$= b \left(P_V(u^*) + P_{V^\perp}(u^*) + a \sum_{i=m+1}^{m+l} \lambda_i s'_i \right),$$

其中 $b^{-1} = \Phi(u^* + a \sum_{i=m+1}^{m+l} \lambda_i s'_i)$. 由于 $w \in \mathbb{S}_V$, 所以,

$$P_{V^\perp}(u^*) + a \sum_{i=m+1}^{m+l} \lambda_i s'_i = o,$$

于是, $w = \rho_\Phi(P_V(u^*)) = P_{\mathbb{S}_V}(u^*) \in P_{\mathbb{S}_V}(C)$. □

下面介绍球面空间到其闭 Φ -凸集的投影 (参见文献 [13]).

定义 3.3 设 $\mathbb{S}_\Phi$ 为 Φ -球面, $C \in \mathcal{K}(\mathbb{S}_\Phi)$, 则球投影映射 $P_C : \mathbb{S}_\Phi \rightarrow \mathcal{P}(C)$ 定义如下:

$$P_C(u) = \{v \in C \mid d_s(u, v) \leq d_s(u, w), \forall w \in C\} = \{v \in C \mid \langle \dot{u}, \dot{v} \rangle \geq \langle \dot{u}, \dot{w} \rangle, \forall w \in C\}, \quad \forall u \in \mathbb{S}^{n-1}.$$

由 C 的紧性和 d_s (关于 Euclid 度量) 的连续性可知, 对任意 $u \in \mathbb{S}_\Phi$, 有 $P_C(u) \neq \emptyset$, 且易看出 $P_C(u) \subset \text{bd}C$. 当 $C = \mathbb{S}_V$ 时, 由命题 3.4 知, 定义 3.3 与 3.2 一致.

命题 3.6 设 $\mathbb{S}_\Phi$ 为 Φ -球面, $C \in \mathcal{K}(\mathbb{S}_\Phi)$, $u \in \mathbb{S}_\Phi$, $v \in P_C(u)$. 对 $0 \leq \lambda \leq 1$, 记 $u_\lambda := \lambda v +_\Phi (1-\lambda)u$, 则有 $v \in P_C(u_\lambda)$.

证明 对任意 $w \in C$, 由于 $\langle \dot{w}, v \rangle \leq \langle \dot{v}, v \rangle$, $\langle \dot{w}, u \rangle \leq \langle \dot{v}, u \rangle$, 所以,

$$\langle \dot{w}, \dot{u}_\lambda \rangle = \frac{1}{\|u_\lambda\| \Phi(\lambda v + (1-\lambda)u)} \langle \dot{w}, \lambda v + (1-\lambda)u \rangle \leq \frac{1}{\|u_\lambda\| \Phi(\lambda v + (1-\lambda)u)} \langle \dot{v}, \lambda v + (1-\lambda)u \rangle = \langle \dot{v}, \dot{u}_\lambda \rangle.$$

由定义知, $v \in P_C(u_\lambda)$. □

下面的命题将文献 [13, 推论 2] 推广至 Φ -球面上 (不必真) 的闭球凸集.

命题 3.7 设 $\mathbb{S}_\Phi$ 为 Φ -球面, $C \in \mathcal{K}(\mathbb{S}_\Phi)$, 则对任意 $u_1, u_2 \in \mathbb{S}_\Phi$, 有

$$\langle \dot{v}_1 - \dot{v}_2, u_1 - u_2 \rangle \geq 0, \quad \forall v_1 \in P_C(u_1), \quad v_2 \in P_C(u_2).$$

证明 由 d_s 的定义、函数 $\arccost$ 的单调递减性和内积运算的齐次性可知, $v \in P_C(u)$ 当且仅当 $\langle u, \dot{w} \rangle \leq \langle u, \dot{v} \rangle$, $\forall w \in C$. 这样, 如果 $u_1, u_2 \in \mathbb{S}_\Phi$, $v_1 \in P_C(u_1)$, $v_2 \in P_C(u_2)$, 那么 $\langle u_1, \dot{v}_2 \rangle \leq \langle u_1, \dot{v}_1 \rangle$, $\langle u_2, \dot{v}_1 \rangle \leq \langle u_2, \dot{v}_2 \rangle$, 从而, $\langle u_1, \dot{v}_2 - \dot{v}_1 \rangle \leq 0$, $\langle u_2, \dot{v}_1 - \dot{v}_2 \rangle \leq 0$. 由此即可得到命题中的不等式. □

对 $v \in \mathbb{S}^{n-1}$, 记 $T_v(\mathbb{S}^{n-1}) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle v, x \rangle = 0\}$, 称为 $\mathbb{S}^{n-1}$ 在 v 处的切空间. 显然, $T_v(\mathbb{S}^{n-1})$ 就是 $\langle v \rangle$ 的直交补空间 (简记为 $v^\perp$), 即 $T_v(\mathbb{S}^{n-1}) = v^\perp$. 容易验证, 线性变换 $I - vv^\top$ (其中 $v^\top$ 表示列向量 v 的转置) 为 $\mathbb{R}^n$ 到 $T_v(\mathbb{S}^{n-1})$ 的正交投影 (记作 $P_{v^\perp}$), 即 $I - vv^\top = P_{v^\perp}$.

若 C 为 Φ -凸集, 记 $K_C := \text{cone}C$; 又若 $C \neq \mathbb{S}_\Phi$, 则定义其极 Φ -凸集 (或称极球凸集) $C^\perp := \{u \in \mathbb{S}_\Phi \mid \langle u, v \rangle \leq 0, \forall v \in C\}$. P_{K_C} 表示 $\mathbb{R}^n$ 到 K_C 的投影算子. 类似地, 对任意凸锥 $K \subset \mathbb{R}^n$, $K^\perp := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, y \rangle \leq 0, \forall y \in K\}$ 称为 K_C 的极锥. 容易验证, 对任意非全集的 Φ -凸集 C , 有 $(K_C)^\perp = K_{C^\perp}$.

定理 3.2 设 $\mathbb{S}_\Phi$ 为 Φ -球面, $C \in \mathcal{K}(\mathbb{S}_\Phi)$, $v \in C$, $u \in \mathbb{S}_\Phi$ 满足 $P_{K_C}(u) \neq o$, 则 $v \in P_C(u)$ 当且仅当 $v = \rho_\Phi(P_{K_C}(u))$. 特别地, 若 $P_C(u) \neq o$, 则 $P_C(u) = \{\rho_\Phi(P_{K_C}(u))\}$ 为单点集.

注 3.3 当 $\Phi(\cdot) = \|\cdot\|$ 且 C 为真闭凸集时, 文献 [13, 命题 8] 给出了定理 3.2 中的充分性.

定理 3.2 的证明 若 $C = \mathbb{S}_\Phi$, 则结论显然, 故设 $C \neq \mathbb{S}_\Phi$, 并记 $v^* := P_{K_C}(u)$.

设 $v = \rho_\Phi(v^*)$. 由 P_{K_C} 的正齐次性可知 $P_{K_C}(\dot{u}) = \|\dot{u}\|^{-1}v^* =: v'$, 又对任意 $w \in C$, 显然有 $\|v'\|w \in K_C$, 所以,

$$0 \geq \langle \dot{u} - v', \|v'\|\dot{w} - v' \rangle = \|v'\| \langle \dot{u}, \dot{w} \rangle - \|v'\| \langle v', \dot{w} \rangle - \langle \dot{u}, v' \rangle + \langle v', v' \rangle.$$

由此, 对任意 $w \in C$, 有

$$\left\langle \dot{u}, \frac{v'}{\|v'\|} \right\rangle \geq \langle \dot{u}, \dot{w} \rangle - \langle v', \dot{w} \rangle + \left\langle \frac{v'}{\|v'\|}, v' \right\rangle = \langle \dot{u}, \dot{w} \rangle + \|v'\| \left(\left\langle \frac{v'}{\|v'\|}, \frac{v'}{\|v'\|} \right\rangle - \left\langle \frac{v'}{\|v'\|}, \dot{w} \right\rangle \right) \geq \langle \dot{u}, \dot{w} \rangle.$$

这样, 注意到 $\dot{v} = \frac{v}{\|v\|} = \frac{v'}{\|v'\|}$, 由定义可知, $v \in P_C(u)$.

现设另有 $v_1 (\neq v) \in P_C(u)$ 满足 $\langle u, v_1 \rangle > 0$, 那么显然有 $\langle \dot{u}, \dot{v}_1 \rangle = \langle \dot{u}, \dot{v} \rangle (> 0)$, 并由此可知 $\dot{v}_1 \neq -\dot{v}$. 这样, 记 $w \in \frac{1}{2}v + \Phi \frac{1}{2}v_1 (\in C)$, 由注 2.1(iii) 可推知, $\dot{w} \in [\dot{v}, \dot{v}_1]_{\|\cdot\|} \subset \mathbb{S}^{n-1}$, 即存在 $0 < \mu < 1$, 使得 $\dot{w} = \mu\dot{v} + \|\cdot\| (1 - \mu)\dot{v}_1$. 于是, 得到下列矛盾 (注意, $0 < \|\mu\dot{v} + (1 - \mu)\dot{v}_1\| < 1$):

$$\begin{aligned} \langle \dot{u}, \dot{v} \rangle &\geq \langle \dot{u}, \dot{w} \rangle = \langle \dot{u}, \mu\dot{v} + \|\cdot\| (1 - \mu)\dot{v}_1 \rangle \\ &= \|\mu\dot{v} + (1 - \mu)\dot{v}_1\|^{-1} \langle \dot{u}, \mu\dot{v} + (1 - \mu)\dot{v}_1 \rangle \\ &> \langle \dot{u}, \mu\dot{v} + (1 - \mu)\dot{v}_1 \rangle = \langle \dot{u}, \dot{v} \rangle. \end{aligned}$$

此矛盾表明 $v_1 = v = \rho_\Phi(P_{K_C}(u))$. □

下面定理展示了球投影映射的一个非常重要的性质. 当 $\Phi(\cdot) = \|\cdot\|$ 时, 相应的结论即为文献 [13, 命题 6 和 7] (仅涉及真闭球凸集). 由于文献 [13] 中采用了指数映射等工具来描述测地线 (弧段和半圆), 并进而定义球凸性, 所以, 文献 [13] 中相应 (以及其他一些) 结论的证明略显烦琐. 这里给出一个分析证明, 并推广了文献 [13] 中的结论. 需要说明的是, 尽管文献 [13] 中的处理方式比较烦琐, 但其采用的方法仍具有重要的价值, 可用来解决其他相关问题, 可参见文献 [12, 13, 30] 等以了解其处理方法.

定理 3.3 设 $\mathbb{S}_\Phi$ 为 Φ -球面, $C \in \mathcal{K}(\mathbb{S}_\Phi)$, 则对满足 $\langle u, v \rangle > 0$ 的 $u \in \mathbb{S}_\Phi, v \in C$, 下列结论等价:

- (i) $v \in P_C(u)$;
- (ii) $\langle P_{\dot{v}^\perp}(u), P_{\dot{v}^\perp}(w) \rangle \leq 0, \forall w \in C$;
- (iii) $P_{\dot{v}^\perp}(u) = u - \langle u, \dot{v} \rangle \dot{v} \in K_{C^\perp}$.

证明 若 $C = \mathbb{S}_\Phi$, 则结论显然, 故设 $C \neq \mathbb{S}_\Phi$.

(i) $\Rightarrow$ (ii) 设 $v \in P_C(u)$. 由定理 3.2 知, $v = \rho_\Phi(P_{K_C}(u))$, 从而存在 $c > 0$ 使得 $P_{K_C}(u) = cv$. 于是由文献 [1, 命题 3.2.3] 可知,

$$\langle u - cv, cv \rangle = 0, \quad \langle u - cv, w \rangle \leq 0, \quad \forall w \in K_C.$$

这样, 将 $w = P_{\langle v \rangle}(w) + P_{\dot{v}^\perp}(w)$ 和 $u - cv = P_{\dot{v}^\perp}(u - cv) = P_{\dot{v}^\perp}(u)$ 代入上面不等式, 就得到 $\langle P_{\dot{v}^\perp}(u), P_{\dot{v}^\perp}(w) \rangle \leq 0, \forall w \in K_C (\supset C)$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) 若 $\langle P_{\dot{v}^\perp}(u), P_{\dot{v}^\perp}(w) \rangle \leq 0, \forall w \in C$, 则由 $P_{\dot{v}^\perp}$ 的齐次性可知, 对任意 $w \in K_C$, 有 $\langle P_{\dot{v}^\perp}(u), P_{\dot{v}^\perp}(w) \rangle \leq 0$. 于是, 对任意 $w \in K_C$, 有

$$\langle u - \langle u, \dot{v} \rangle \dot{v}, w \rangle = \langle P_{\dot{v}^\perp}(u), w \rangle = \langle P_{\dot{v}^\perp}(u), P_{\langle v \rangle}(w) + P_{\dot{v}^\perp}(w) \rangle = \langle P_{\dot{v}^\perp}(u), P_{\dot{v}^\perp}(w) \rangle \leq 0,$$

所以, $P_{\dot{v}^\perp}(u) = u - \langle u, \dot{v} \rangle \dot{v} \in (K_C)^\perp = K_{C^\perp}$.

(iii) $\Rightarrow$ (i) 设 $P_{\dot{v}^\perp}(u) = u - \langle u, \dot{v} \rangle \dot{v} \in K_{C^\perp}$, 那么对任意 $w \in C$ (此时 $\dot{w} \in K_C$), 有

$$\langle u, \dot{w} \rangle = \langle u - \langle u, \dot{v} \rangle \dot{v} + \langle u, \dot{v} \rangle \dot{v}, \dot{w} \rangle = \langle u - \langle u, \dot{v} \rangle \dot{v}, \dot{w} \rangle + \langle u, \dot{v} \rangle \langle \dot{v}, \dot{w} \rangle \leq \langle u, \dot{v} \rangle \langle \dot{v}, \dot{w} \rangle \leq \langle u, \dot{v} \rangle.$$

再由内积的齐次性知, $\langle \dot{u}, \dot{w} \rangle \leq \langle \dot{u}, \dot{v} \rangle, \forall w \in C$, 所以, $v \in P_C(u)$. $\square$

与 Euclid 空间上的情形一样, 关于球面投影也有如下的 Moreau 型定理.

定理 3.4 设 $\mathbb{S}_\Phi$ 为 Φ -球面, $C (\neq \mathbb{S}_\Phi) \in \mathcal{K}(\mathbb{S}_\Phi)$. 若 $u, u_1, u_2 \in \mathbb{S}_\Phi$ 满足 $\langle u, u_1 \rangle > 0, \langle u, u_2 \rangle > 0$, 则下列结论等价:

(i) $u = \lambda u_1 +_\Phi (1 - \lambda) u_2, u_1 \in C, u_2 \in C^\perp, \langle u_1, u_2 \rangle = 0, 0 < \lambda < 1$;

(ii) $P_C(u) = \{u_1\}, P_{C^\perp}(u) = \{u_2\}$.

注 3.4 当 $\Phi(\cdot) = \|\cdot\|$ 时, 文献 [13] 给出了关于球面投影 Moreau 型定理的另一种表现形式 (这里形式略有改动):

定理^[13] 设 $C \in \mathbb{S}^{n-1}$ 为真闭球凸集且 $\text{int}C \neq \emptyset$. 若 $u, u_1, u_2 \in \mathbb{S}^{n-1}$ 满足 $\langle u, u_i \rangle > 0, i = 1, 2$, 则下列结论等价:

(i) $u = \langle u, u_1 \rangle u_1 + \langle u, u_2 \rangle u_2, u_1 \in C, u_2 \in C^\perp, \langle u_1, u_2 \rangle = 0$;

(ii) $P_C(u) = \{u_1\}, P_{C^\perp}(u) = \{u_2\}$.

与定理 3.4 相比照可知, $\lambda = \frac{\langle u, u_1 \rangle}{\langle u, u_1 \rangle + \langle u, u_2 \rangle}$.

定理 3.4 的证明 (i) $\Rightarrow$ (ii) 设 (i) 成立, 那么 $cu = \lambda u_1 + (1 - \lambda)u_2$, 其中 $c = \Phi(\lambda u_1 + (1 - \lambda)u_2) > 0$. 既然 $\lambda u_1 \in K_C, (1 - \lambda)u_2 \in K_{C^\perp} = (K_C)^\perp$ 并且 $\langle \lambda u_1, (1 - \lambda)u_2 \rangle = 0$, 由经典的 Moreau 定理 (参见文献 [1, 定理 3.2.5]) 知, $\lambda u_1 = cP_{K_C}(u), (1 - \lambda)u_2 = cP_{K_{C^\perp}}(u)$ 或 $u_1 = \frac{c}{\lambda}P_{K_C}(u), u_2 = \frac{c}{1 - \lambda}P_{K_{C^\perp}}(u)$. 这样, 由定理 3.2 知, $\{u_1\} = P_C(u), \{u_2\} = P_{C^\perp}(u)$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) 设 $P_C(u) = \{u_1\}, P_{C^\perp}(u) = \{u_2\}$. 由于 $\langle u, u_1 \rangle > 0, \langle u, u_2 \rangle > 0$, 所以 $P_{K_C}(u) \neq o, P_{K_{C^\perp}}(u) \neq o$. 于是由定理 3.2 知, 存在 $c_1 > 0, c_2 > 0$, 使得 $c_1 u_1 = P_{K_C}(u), c_2 u_2 = P_{K_{C^\perp}}(u)$. 再由经典的 Moreau 定理知, $u = P_{K_C}(u) + P_{K_{C^\perp}}(u); P_{K_C}(u) \in K_C, P_{K_{C^\perp}}(u) \in K_{C^\perp}; \langle P_{K_C}(u), P_{K_{C^\perp}}(u) \rangle = 0$. 于是 $u_1 \in C, u_2 \in C^\perp, \langle u_1, u_2 \rangle = 0$, 并且由 ρ_Φ 的性质 (记 $\lambda = \frac{c_1}{c_1 + c_2}$) 可得

$$u = \rho_\Phi(u) = \rho_\Phi(c_1 u_1 + c_2 u_2) = \rho_\Phi\left(\frac{c_1}{c_1 + c_2} u_1 + \frac{c_2}{c_1 + c_2} u_2\right) = \lambda u_1 +_\Phi (1 - \lambda) u_2.$$

证毕. $\square$

3.3 球面空间到 Euclid 空间的心射投影

在球面凸分析和球面凸几何分析研究中, 心射投影是一种常用的工具 (另一种重要的球面空间到 Euclid 空间的映射可参见文献 [65]), 它建立了球凸集与凸集之间的密切联系 (参见文献 [12, 30]), 这里仅介绍其基本概念与性质. 对 $v \in \mathbb{S}^{n-1}$, 记 $\mathbb{S}_v := H_v \cap \mathbb{S}^{n-1}, \mathbb{S}_v^+ := H_v^+ \cap \mathbb{S}^{n-1}, \mathbb{R}_v^{n-1} = v^\perp (\cong \mathbb{R}^{n-1})$.

定义 3.4 设 $v \in \mathbb{S}^{n-1}$, 则如下定义的映射 $g_v: \mathbb{S}_v^+ \rightarrow \mathbb{R}_v^{n-1}$:

$$g_v(u) := \langle v, u \rangle^{-1} u - v, \quad \forall u \in \mathbb{S}_v^+$$

称为 $\mathbb{S}_v^+$ 到 $\mathbb{R}_v^{n-1}$ 的心射投影; 其逆映射 $g_v^{-1}: \mathbb{R}_v^{n-1} \rightarrow \mathbb{S}_v^+$ 是 $g_v^{-1}(x) = \rho_s(v + x), \forall x \in \mathbb{R}_v^{n-1}$.

心射投影具有非常直观的几何意义, 如果利用对应关系 $x \mapsto v + x$, 将 $\mathbb{R}_v^{n-1}$ 等同于 $\mathbb{R}_v^{n-1} + v$, 那么对任意 $C \subset \mathbb{S}_v^+, g_v(C)$ 就是 C 的径向延拓 $\text{rad}C := \mathbb{R}^+ C$ 与 $(v \text{ 点处的})$ 切平面 $\mathbb{R}_v^{n-1} + v$ 的交

集, 即 $g_v(C) = \mathbb{R}^+C \cap (\mathbb{R}_v^{n-1} + v) - v$: 令 $x \in \mathbb{R}^+C \cap (\mathbb{R}_v^{n-1} + v) - v$, 那么存在 $u \in C, t > 0$, 使得 $x = tu - v, \langle tu - v, v \rangle = 0$. 由此, $t = \langle v, u \rangle^{-1}$, 进而, $x = g_v(u) \in g_v(C)$. 反之, 若 $x \in g_v(C)$, 则存在 $u \in C$ 使得 $x = \langle v, u \rangle^{-1}u - v$. 显然, $\langle v, u \rangle^{-1}u \in \mathbb{R}^+C, \langle \langle v, u \rangle^{-1}u - v, v \rangle = 0$, 即 $\langle v, u \rangle^{-1}u - v \in \mathbb{R}_v^{n-1}$ 或 $\langle v, u \rangle^{-1}u \in \mathbb{R}_v^{n-1} + v$, 从而, $x \in \mathbb{R}^+C \cap (\mathbb{R}_v^{n-1} + v) - v$.

下面的命题说明心射投影及其逆映射都是保凸组合运算的.

命题 3.8 设 $v \in \mathbb{S}^{n-1}$. 如果 $u_1, u_2, \dots, u_m \in \mathbb{S}_v^+, 0 \leq \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \leq 1$ 且满足 $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$, 那么

$$g_v\left((s) \sum_{i=1}^m \lambda_i u_i\right) = \sum_{i=1}^m \mu_i g_v(u_i),$$

其中 $\mu_i = \frac{\langle v, \lambda_i u_i \rangle}{\sum_{j=1}^m \langle v, \lambda_j u_j \rangle} (\geq 0)$ 满足 $\sum_{i=1}^m \mu_i = 1$. 反之, 如果 $x_1, x_2, \dots, x_m \in \mathbb{R}_v^{n-1}, 0 \leq \mu_i \leq 1$ 且 $\sum_{i=1}^m \mu_i = 1$, 那么

$$g_v^{-1}\left(\sum_{i=1}^m \mu_i x_i\right) = (s) \sum_{i=1}^m \lambda_i g_v^{-1}(x_i),$$

其中 $\lambda_i = \frac{\mu_i \|v + x_i\|}{\sum_{j=1}^m \mu_j \|v + x_j\|}$.

证明 设 $u_i \in \mathbb{S}_v^+, 0 \leq \lambda_i \leq 1$ 且 $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$. 由 $\mathbb{S}_v^+$ 的真球凸性知, $\langle v, \sum_{i=1}^m \lambda_i u_i \rangle \neq 0$. 记 $a = \langle v, \sum_{i=1}^m \lambda_i u_i \rangle^{-1}$, 则得到

$$\begin{aligned} g_v\left((s) \sum_{i=1}^m \lambda_i u_i\right) &= \left\langle v, (s) \sum_{i=1}^m \lambda_i u_i \right\rangle^{-1} \left((s) \sum_{i=1}^m \lambda_i u_i\right) - v = a \sum_{i=1}^m \lambda_i u_i - v \\ &= \sum_{i=1}^m a \langle v, \lambda_i u_i \rangle \left(\frac{u_i}{\langle v, u_i \rangle} - v\right) = \sum_{i=1}^m \mu_i g_v(u_i). \end{aligned}$$

反之, 设 $x_i \in \mathbb{R}_v^{n-1}, 0 \leq \mu_i \leq 1$ 且 $\sum_{i=1}^m \mu_i = 1$. 记 $b = (\sum_{j=1}^m \mu_j \|v + x_j\|)^{-1}$, 则由 ρ_s 的性质可得

$$\begin{aligned} g_v^{-1}\left(\sum_{i=1}^m \mu_i x_i\right) &= \rho_s\left(v + \sum_{i=1}^m \mu_i x_i\right) = \rho_s\left(\sum_{i=1}^m \mu_i (v + x_i)\right) = \rho_s\left(\sum_{i=1}^m \mu_i \|v + x_i\| \frac{v + x_i}{\|v + x_i\|}\right) \\ &= \rho_s\left(\sum_{i=1}^m b \mu_i \|v + x_i\| \frac{v + x_i}{\|v + x_i\|}\right) = (s) \sum_{i=1}^m \lambda_i g_v^{-1}(x_i), \end{aligned}$$

其中

$$\lambda_i = b \mu_i \|v + x_i\| = \frac{\mu_i \|v + x_i\|}{\sum_{j=1}^m \mu_j \|v + x_j\|}.$$

证毕. □

由命题 3.8 及 g_v 和 g_v^{-1} 的连续性等可推得下面的结论 (参见文献 [30]).

命题 3.9 设 $v \in \mathbb{S}^{n-1}$. 对任意 $C \subset \mathbb{S}_v^+$, 若 $g_v(C)$ 表示 C 在 g_v 下的像集, 则有以下结论成立:

(i) $g_v(C) \subset \mathbb{R}_v$ 为 (紧) 凸集当且仅当若 C 为 (闭) 球凸集, 从而, $g_v: \mathcal{K}(\mathbb{S}^{n-1}) \rightarrow \mathcal{K}(\mathbb{R}_v^{n-1})$ 是 1-1 映射, 其中 $\mathcal{K}(\mathbb{R}_v^{n-1})$ 表示 $\mathbb{R}_v^{n-1}$ 上紧凸集的全体.

(ii) 若 $S \subset \mathbb{S}^{n-1}$ 是一个 k -球面, $0 \leq k \leq n-2$, 且 $S \cap \mathbb{S}_v^+ \neq \emptyset$, 则 $g_v(S \cap \mathbb{S}_v^+) \subset \mathbb{R}_v^{n-1}$ 是一个 k -维仿射子空间. 反之, 若 $v \in \mathbb{R}_v^{n-1}$ 是一个 k -维仿射子空间, 则 $g_v^{-1}(V)$ 是含于 $\mathbb{S}_v^+$ 的一个 k -半球面. 而且 $v \in S \cap \mathbb{S}_v^+$ 当且仅当 $g_v(S \cap \mathbb{S}_v^+)$ 是线性子空间.

自然地, 我们可以通过先定义其逆映射 $\rho_{\Phi}(v + \cdot)$ 的方式来引进一般 $\mathbb{S}_{\Phi}$ 上的心射投影 g_v^{Φ} , 并且可以证明类似于命题 3.8 等的结论仍然成立, 但限于篇幅, 这里不再赘述.

利用命题 3.9, 可将部分有关球凸集问题的研究转化为有关凸集问题的研究. 例如, 鉴于凸集支撑函数在凸几何分析中的重要且便利的作用, 许多研究者开始尝试定义球凸集的支撑函数 (参见文献 [30, 66] 和脚注 1)). 这里简单介绍文献 [30] 中的定义, 以及如何将有关球凸集支撑函数的研究转化为凸集支撑函数的研究, 相应的更深入研究可直接参见文献 [13, 30, 38].

对 $v \in \mathbb{S}^{n-1}$, 记 $\mathcal{K}_v^p(\mathbb{S}^{n-1}) := \{C \in \mathcal{K}^p(\mathbb{S}^{n-1}) \mid C \subset \mathbb{S}_v^+\}$.

定义 3.5 ^[30] 设 $v \in \mathbb{S}^{n-1}$, $C \in \mathcal{K}_v^p(\mathbb{S}^{n-1})$, 则其球支撑函数 $h_v(C, \cdot) : \mathbb{S}_v \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 定义如下:

$$h_v(C, u) := \max\{\operatorname{sgn}(\langle u, w \rangle) d_s(v, P_{\mathbb{S}_{u,v}^1}(w)) \mid w \in C\}, \quad \forall u \in \mathbb{S}_v,$$

其中 $\mathbb{S}_{u,v}^1$ 表示通过 u 和 v 的短 1- 球面 (即大圆).

可以证明, 若 $C, D \in \mathcal{K}_v^p(\mathbb{S}^{n-1})$, 则 $C \subset D$ 当且仅当 $h_v(C, \cdot) \leq h_v(D, \cdot)$ (参见文献 [30]). 利用心射投影, 文献 [30] 建立了球凸集支撑函数与凸集支撑函数之间的如下关系.

命题 3.10 设 $v \in \mathbb{S}^{n-1}$, 则对任意 $C \in \mathcal{K}_v^p(\mathbb{S}^{n-1})$, 有

$$h(g_v(C), u) = \tan h_v(C, u), \quad \forall u \in \mathbb{S}_v.$$

特别地, C 由 $h_v(C, \cdot)$ 唯一确定.

证明 通过简单的初等计算可知, 对任意 $u \in \mathbb{S}_v$, $w \in \mathbb{S}_v^+$, 有

$$\frac{\langle u, w \rangle}{\langle v, w \rangle} = \tan(\operatorname{sgn}(\langle u, w \rangle) d_s(v, P_{\mathbb{S}_{u,v}^1}(w))).$$

这样, 由 g_v 的定义和 $\tan$ 的单增性可知,

$$h(g_v(C), u) = \max_{x \in g_v(C)} \langle u, x \rangle = \max_{w \in C} \frac{\langle u, w \rangle}{\langle v, w \rangle} = \tan h_v(C, u).$$

证毕. □

由命题 3.9 可知, 函数 $h : \mathbb{S}_v \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 为某个 $C \in \mathcal{K}_v^p(\mathbb{S}^{n-1})$ 的球支撑函数的充要条件是, $\tan h$ 在 $\mathbb{R}_v^{n-1}$ 上的 1 次齐次延拓是 $\mathbb{R}_v^{n-1}$ 中某个紧凸集的支撑函数.

心射投影还具有保持边界点性质 (如正则性、奇异性等) 的特点, 有关利用其研究闭球凸集边界结构的深刻结果可参见文献 [30]. 有关利用心射投影研究球凸集之间二元运算的工作将在下文介绍.

3.4 球面空间上的二元运算

经典 Euclid 凸性理论的核心内容是 Brunn-Minkowski 理论, 该理论的关键之处是将凸集几何不变量 (如体积等) 与凸集的二元运算 (如 Minkowski 加法等) 结合起来研究, 从而建立了一套可用于解决各类有关 Euclid 凸集极值问题或唯一性问题的统一方法 (参见文献 [2-5]). 然而, 几乎同时出现的球面空间凸性理论的发展却比较缓慢, 这其中最重要的原因可能是由于至今尚未在球面空间上找到与 Minkowski 加法类似的二元运算 (相关的一些直接尝试可参见文献 [64, 66], 有关 Euclid 空间中一般二元运算的研究可参见文献 [6, 67]). 为此, 研究者近年来开始从各种不同途径寻找球面空间上的此类二元运算.

注意到 Minkowski 加法具有保凸性、投影协变性 (定义见下文) 以及保证恒等变换为 Minkowski 赋值等性质, 一些数学研究者开始研究球面空间上具有这些性质的二元运算存在性问题. 这里, 首先介绍文献 [12] 的工作, 受文献 [6] 工作的启发, 文献 [12] 重点考虑了保球凸性且球投影协变二元运算的存在性问题.

定义 3.6^[12] 设 $v \in \mathbb{S}^{n-1}$, $*$: $\mathcal{K}^p(\mathbb{S}^{n-1}) \times \mathcal{K}^p(\mathbb{S}^{n-1}) \rightarrow \mathcal{K}^p(\mathbb{S}^{n-1})$ 为 $\mathcal{K}^p(\mathbb{S}^{n-1})$ 上的二元运算. 若对所有满足 $S \ni v$ 的 k -球面 $S \subset \mathbb{S}^{n-1}$ ($0 \leq k \leq n-2$) 和所有的 $C, D \in \mathcal{K}_v^p(\mathbb{S}^{n-1})$,

$$P_S(C) * P_S(D) = P_S(C * D)$$

恒成立, 则称二元运算 $*$ 是 v -投影协变的. 又若对所有 $v \in \mathbb{S}^{n-1}$, $*$ 是 v -投影协变的, 则称 $*$ 是球投影协变的.

$\delta = \delta(\cdot, \cdot)$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 中紧集间的 Hausdorff 度量, 而球面闭集间常用的是球面 Hausdorff 度量 δ_s : 设闭集 $E, F \in \mathbb{S}^{n-1}$, 定义 $\delta_s(E, F) := \min\{0 \leq \theta \leq \pi \mid E \subset F_\theta, F \subset E_\theta\}$, 其中 $F_\theta := \{u \in \mathbb{S}^{n-1} \mid d_s(u, F) \leq \theta\}$, 而 $d_s(u, F) := \min\{d_s(u, v) \mid v \in F\}$. $\mathcal{K}(\mathbb{S}^{n-1})$ 上的另外一种度量也非常值得了解 (虽然本文并未用到): 取定 $v \in \mathbb{S}^{n-1}$, 对任意 $C, D \in \mathcal{K}_v^p(\mathbb{S}^{n-1})$, 定义 $\gamma_v(C, D) := \max_{u \in \mathbb{S}_v} |h_v(C, u) - h_v(D, u)|$. 虽然 $\gamma_v \neq \delta_s$, 但可以证明在 $\mathcal{K}_v^p(\mathbb{S}^{n-1})$ 上它们诱导相同的拓扑 (参见文献 [12, 命题 4.4]).

下面的结论多少有些令人沮丧.

定理 3.5^[12] 二元运算 $*$: $\mathcal{K}^p(\mathbb{S}^{n-1}) \times \mathcal{K}^p(\mathbb{S}^{n-1}) \rightarrow \mathcal{K}^p(\mathbb{S}^{n-1})$ 为 (关于 δ_s) 连续且球投影协变的当且仅当 $*$ 是平凡的, 即对任意的 $C, D \in \mathcal{K}^p(\mathbb{S}^{n-1})$, 有 $C * D \equiv C$ 或 $C * D \equiv -C$ 或 $C * D \equiv D$ 或 $C * D \equiv -D$.

定理 3.5 证明的关键步骤是, 利用心射投影, 建立 Euclid 紧凸集类 $\mathcal{K}(\mathbb{R}^{n-1})$ 上投影协变二元运算与 $\mathcal{K}_v^p(\mathbb{S}^{n-1})$ 上球投影协变二元运算之间的 1-1 对应关系 ($\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ 上的二元运算 $\bar{*}$ 称为投影协变的, 如果对 $\mathbb{R}^n$ 的任意 k -维子空间 V ($0 \leq k \leq n-1$), 和任意的 $K, L \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$, $P_V(K) \bar{*} P_V(L) = P_V(K \bar{*} L)$ 恒成立, 其中 P_V 表示 $\mathbb{R}^n$ 到 V 的正交投影). 这样就可以利用有关 Euclid 紧凸集类上二元运算的相应结论 (参见文献 [6]). 下面的定理是文献 [12] 中一个很关键的结论, 这里给出一个简洁的证明.

定理 3.6^[12] 取定 $v \in \mathbb{S}^{n-1}$. 若对 $\mathcal{K}_v^p(\mathbb{S}^{n-1})$ 上任意的 v -投影协变二元运算 $*$, 定义 $\mathcal{K}(\mathbb{R}_v^{n-1})$ 上的二元运算 $\bar{*}$ 如下:

$$K \bar{*} L := g_v(g_v^{-1}(K) * g_v^{-1}(L)), \quad \forall K, L \in \mathcal{K}(\mathbb{R}_v^{n-1}),$$

则 $\bar{*}$ 是 $\mathcal{K}(\mathbb{R}_v^{n-1})$ 上的投影协变二元运算. 反之, 若对 $\mathcal{K}(\mathbb{R}_v^{n-1})$ 上任意的投影协变二元运算 $\bar{*}$, 定义 $\mathcal{K}_v^p(\mathbb{S}^{n-1})$ 上的二元运算 $*$ 如下:

$$C * D := g_v^{-1}(g_v(C) \bar{*} g_v(D)), \quad \forall C, D \in \mathcal{K}_v^p(\mathbb{S}^{n-1}),$$

则 $*$ 是 $\mathcal{K}_v^p(\mathbb{S}^{n-1})$ 上的 v -投影协变二元运算. 由此, 每一个 v -投影协变二元运算关于 δ_s 都是连续的.

证明 首先由命题 3.9(i) 知, 定理中定义的二元运算均为合理的. 现设 $*$ 是 $\mathcal{K}_v^p(\mathbb{S}^{n-1})$ 上的一个 v -投影协变二元运算. 对 $\mathbb{R}_v^{n-1}$ 的任一 k -维子空间 V ($0 \leq k \leq n-2$), 由命题 3.9(ii) 知, $\mathbb{S}^{n-1}$ 中存在 k -球面 S 满足 $v \in S$, $g_v(S) = V$ 或 $S = g_v^{-1}(V)$. 由于 $v \in S$, 所以 $S = U \cap \mathbb{S}^{n-1}$, 其中 $U = \text{lin}\{v, V\} = \langle v \rangle + V$. 这样, 由定义 3.2 和 ρ_s 的性质知, 对任意 $K \in \mathcal{K}(\mathbb{R}_v^{n-1})$, 有

$$P_S(g_v^{-1}(K)) = \hat{P}_U(g_v^{-1}(K)) = \left\{ \rho_s \circ P_U \left(\frac{v+x}{\|v+x\|} \right) \mid x \in K \right\} = \{ \rho_s \circ P_U(v+x) \mid x \in K \}$$

$$= \{\rho_s(v + P_U(x)) \mid x \in K\} = \{\rho_s(v + P_V(x)) \mid x \in K\} = g_v^{-1}(P_V(K)),$$

其中用到了 $P_U(v) = v$ 和 $P_U(x) = P_V(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}_v^{n-1}$. 于是, 对任意的 $K, L \in \mathcal{K}(\mathbb{R}_v^{n-1})$, 有

$$\begin{aligned} P_V(K) \bar{*} P_V(L) &= g_v(g_v^{-1}(P_V(K)) * g_v^{-1}(P_V(L))) = g_v(P_S(g_v^{-1}(K)) * P_S(g_v^{-1}(L))) \\ &= g_v(P_S(g_v^{-1}(K) * g_v^{-1}(L))) = P_V(g_v(g_v^{-1}(K) * g_v^{-1}(L))) = P_V(K \bar{*} L). \end{aligned}$$

所以 $\bar{*}$ 是投影协变的. 第二个结论的证明完全类似. 至于连续性, 由 Euclid 空间上投影协变的二元运算是连续的结论 (参见文献 [6]), 以及 $g_v : (\mathcal{K}_v^p(\mathbb{S}^{n-1}), \delta_s) \rightarrow (\mathcal{K}(\mathbb{R}_v^{n-1}), \delta)$ 是拓扑同胚 (参见文献 [12, 推论 4.5]) 即可得到. $\square$

关于如何利用定理 3.6 证明定理 3.5, 可直接参见文献 [12]. 虽然定理 3.5 否定了 $\mathcal{K}^p(\mathbb{S}^{n-1})$ 上连续的非平凡球投影协变二元运算的存在性, 但文献 [12] 同时提供例子表明, 若不要求连续性, 则存在非平凡球投影协变二元运算, 记 $\mathcal{C} := \bigcup_{v \in \mathbb{S}^{n-1}} \mathcal{K}_v^p(\mathbb{S}^{n-1}) \times \mathcal{K}_v^p(\mathbb{S}^{n-1})$, 定义如下二元运算 $*$:

$$C * D := \begin{cases} C, & \text{若 } (C, D) \in \mathcal{C}, \\ D, & \text{若 } (C, D) \notin \mathcal{C}. \end{cases}$$

容易验证, 上述二元运算 $*$ 是球投影协变但不连续的. 值得指出的是, 若只考虑在 $\mathcal{C}$ 上定义二元运算, 那么确实存在连续的非平凡球投影协变二元运算 (但仅有两个):

定理 3.7 ^[12] 映射 $*$: $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{K}^p(\mathbb{S}^{n-1})$ 为非平凡连续且球投影协变的充要条件是, 对任意 $(C, D) \in \mathcal{C}$, 有 $C * D = \text{co}_s(C \cup D)$ 或 $C * D = -\text{co}_s(C \cup D)$.

关于定理 3.7 的证明, 可参见文献 [12].

由上段讨论可知, $\mathcal{K}^p(\mathbb{S}^{n-1})$ 上不存在非平凡的连续且球投影协变的二元运算, 所以在寻求球面空间 (或其球凸集类) 上的二元运算时, 人们不得不放弃对其中某些性质的要求. 一般说来, 在球面凸几何分析中, 二元运算的保凸性是应该具备的基本性质, 至于连续性和球投影协变性, 则可根据研究问题的需要决定取舍. 有关此方面的工作, 文献 [64] 在 $\mathbb{S}^1$ 上进行了尝试, 定义了一种非平凡的二元运算, 并证明了此种运算具有很好的性质. 这里将文献 [64] 的工作推广至一般的 $\mathbb{S}_\Phi^1 := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \Phi(x) = 1\}$ 上.

首先容易看出 $\mathcal{K}^p(\mathbb{S}_\Phi^1) = \{[u, v]_\Phi \mid u, v \in \mathbb{S}_\Phi^1, v \neq u^\circ\}$, 而除真闭 Φ -凸集外, $\mathcal{K}(\mathbb{S}_\Phi^1)$ 中其他元素就是所有的半闭 Φ -圆和 0 - Φ -球面 $\{u, u^\circ\}$, $u \in \mathbb{S}_\Phi^1$. 现定义 $\mathcal{K}(\mathbb{S}_\Phi^1)$ 上的加法 $+_\Phi$ 如下:

$$C +_\Phi D := \begin{cases} \{u +_\Phi v \mid u \in C, v \in D\}, & \text{若 } C \cup D \text{ 不含对点,} \\ \text{co}_\Phi(C \cup D), & \text{若 } C \cup D \text{ 包含对点,} \end{cases} \quad \forall C, D \in \mathcal{K}(\mathbb{S}_\Phi^1).$$

显然, 即使限制在 $\mathcal{C}$ 上, $+_\Phi$ 也不同于定理 3.7 中给出的二元运算. 事实上, $+_\Phi$ 是不连续的: 取定 $u \in \mathbb{S}_\Phi^1$ 和一个连接 u 与 u° 的半 Φ -圆 L , 再选取 $u_k \in L$ 满足 $u_k \neq u^\circ$ 但 $u_k \rightarrow u^\circ$, $k \rightarrow \infty$, 那么 $\{u\} +_\Phi \{u_k\} \rightarrow \{u^*\}$, 其中 $u^* \in L$ 满足 $\langle u^*, u \rangle = 0$, 但是 $\{u\} +_\Phi \{u^\circ\} = \text{co}_\Phi\{u, u^\circ\} = \{u, u^\circ\} \neq \{u^*\}$. 同时, $+_\Phi$ 也不是投影协变的: 任意选定一个 0 - Φ -球面 $\mathbb{S}_V := \{u, u^\circ\}$, 再选取 $u_1, u_2 \in \mathbb{S}_\Phi^1$ 满足 $\langle u_1, u \rangle = \langle u_1, u^\circ \rangle = 0$ 和 $u_2 \in (u, u_1)_\Phi$, 那么 $P_{\mathbb{S}_V}(\{u_1\} +_\Phi \{u_2\}) = \{u\}$, 但 $P_{\mathbb{S}_V}(\{u_1\}) +_\Phi P_{\mathbb{S}_V}(\{u_2\}) = \{u, u^\circ\} +_\Phi \{u\} = \{u, u^\circ\} \neq \{u\}$. 然而, 下面的命题表明 $+_\Phi$ 是保凸的, 从而确为 $\mathcal{K}(\mathbb{S}_\Phi^1)$ 上的二元运算.

命题 3.11 对任意 $C, D \in \mathcal{K}(\mathbb{S}_\Phi^1)$, 有 $C +_\Phi D \in \mathcal{K}(\mathbb{S}_\Phi^1)$.

证明 若 $C \cup D$ 包含对点, 那么结论显然. 设 $C \cup D$ 不含对点, 那么 $o \notin \text{co}(C \cup D)$. 这样由分离定理 (注意 $\text{co}(C \cup D)$ 为紧凸集) 知, 存在 $v \in \mathbb{S}^1$ 使得 $C, D \subset \mathbb{S}_{\Phi, v}^+ := H_v^+ \cap \mathbb{S}_\Phi^1$, 进而, $C = [u_1, u_2]_\Phi$, $D =$

$[u_3, u_4]_\Phi$ 为真闭 Φ -凸集, 其中 $u_1, u_2, u_3, u_4 \in S_{\Phi, v}^+$. 然后可分情形证明 $C +_\Phi D = [u_1, u_2]_\Phi +_\Phi [u_3, u_4]_\Phi \subset S_{\Phi, v}^+$ 仍为真闭 Φ -凸集. 例如, 当 $u_3 \in [u_1, u_2]_\Phi$ 和 $u_2 \in [u_3, u_4]_\Phi$ 时, 通过简单的初等推导可得

$$[u_1, u_2]_\Phi +_\Phi [u_3, u_4]_\Phi = [u_1 +_\Phi u_3, u_2 +_\Phi u_4]_\Phi.$$

由于 $u_1 +_\Phi u_3, u_2 +_\Phi u_4 \in S_{\Phi, v}^+$, 所以 $[u_1 +_\Phi u_3, u_2 +_\Phi u_4]_\Phi$ 为真闭 Φ -凸集. 其他情形的证明完全类似. $\square$

下面证明 $+_\Phi$ 的另一好性质: $\mathcal{K}(S_\Phi^1)$ 上的恒等变换是关于 $+_\Phi$ 的赋值.

设 $*$ 为 $\mathcal{K}(S_\Phi^1)$ 上的二元运算, $Z: \mathcal{K}(S_\Phi^1) \rightarrow \mathcal{K}(S_\Phi^1)$ 为一映射. 若对任意 $C, D, C \cup D, C \cap D \in \mathcal{K}(S_\Phi^1)$, 恒有

$$Z(C \cup D) * Z(C \cap D) = Z(C) * Z(D),$$

则称 Z 是关于 $*$ 的赋值. 这里需要说明的是, 球凸集类上赋值的定义与 Euclid 空间情形略有不同, 在 Euclid 空间中并未明显要求 $C \cap D$ 应在映射的定义域里. 这是因为若两个紧凸集的并集是紧凸集, 则它们的交集自然是非空的紧凸集. 然而, 在球面空间中, $C, D, C \cup D \in \mathcal{K}(S_\Phi^1)$ 并不蕴涵 $C \cap D \in \mathcal{K}(S_\Phi^1)$, 例如, $C := \{u\}$, $D := \{u^o\}$, $C \cup D = \{u, u^o\} \in \mathcal{K}(S_\Phi)$, 其中 $u \in S_\Phi$, 但 $C \cap D = \emptyset$.

定理 3.8 对任意的 $C, D, C \cup D, C \cap D \in \mathcal{K}(S_\Phi^1)$, 有 $C \cup D +_\Phi C \cap D = C +_\Phi D$, 即 $\mathcal{K}(S_\Phi^1)$ 上的恒等变换是关于 $+_\Phi$ 的赋值.

证明 若 $C \cup D$ 包含对点, 则 $(C \cup D) \cup (C \cap D) = C \cup D$ 包含对点, 由 “ $+_\Phi$ ” 的定义, 等式自然成立. 若 $C \cup D$ 不含对点, 则 $C = [u_1, u_2]_\Phi, D = [u_3, u_4]_\Phi \in \mathcal{K}^p(S_\Phi^1)$ (参见命题 3.11 的证明). 又由于 $C \cup D, C \cap D \in \mathcal{K}(S_\Phi^1)$, 所以有 $u_3 \in [u_1, u_2]_\Phi, u_2 \in [u_3, u_4]_\Phi$ (对称地, $u_1 \in [u_3, u_4]_\Phi, u_4 \in [u_1, u_2]_\Phi$) 或 $[u_3, u_4]_\Phi \subset [u_1, u_2]_\Phi$ (对称地, $[u_1, u_2]_\Phi \subset [u_3, u_4]_\Phi$). 当 $u_3 \in [u_1, u_2]_\Phi$ 和 $u_2 \in [u_3, u_4]_\Phi$ 时, $C \cup D +_\Phi C \cap D = [u_1, u_4]_\Phi +_\Phi [u_3, u_1]_\Phi = [u_1 +_\Phi u_3, u_2 +_\Phi u_4]_\Phi = [u_1, u_2]_\Phi +_\Phi [u_3, u_4]_\Phi = C +_\Phi D$. 当 $[u_3, u_4]_\Phi \subset [u_1, u_2]_\Phi$ 时, $C \cup D +_\Phi C \cap D = [u_1, u_2]_\Phi +_\Phi [u_3, u_4]_\Phi = C +_\Phi D$. 对称情形的证明完全类似. $\square$

注 3.5 显然在一般的 $\mathcal{K}(S_\Phi^{n-1})$ ($n \geq 3$) 上也可以定义如上的加法运算 $+_\Phi$, 但遗憾的是, 当 $n \geq 3$ 时, $+_\Phi$ 不再是保凸的. 例如, 对 $\mathbb{R}^3$ 单位球面 S^2 上的闭球凸集 $\{e_1\}$ 和 $[e_2, e_3]_s$, 其中 $e_1 := (1, 0, 0)$, $e_2 := (0, 1, 0)$, $e_3 := (0, 0, 1)$, 容易验证 $\{e_1\} +_\Phi [e_2, e_3]_s$ 不是球凸集. 为此, 提出以下问题:

问题 3.1 当 $n \geq 3$ 时, $\mathcal{K}(S_\Phi^{n-1})$ 上是否存在非平凡的二元运算 $*$, 使得 $\mathcal{K}(S_\Phi^{n-1})$ 上的恒等变换关于 $*$ 是赋值?

本节最后再引进一类关于 $+_\Phi$ 的赋值. 设 Φ 为 $\mathbb{R}^n$ 上的一个球面生成函数, $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 为非零线性变换 (不必可逆). 记 $V = A(\mathbb{R}^n)$, 然后定义 $\hat{A}: \mathcal{K}(S_\Phi) \rightarrow \mathcal{K}(S_V) := \{C \in \mathcal{K}(S_\Phi) \mid C \subset S_V\}$ 如下:

$$\hat{A}(C) := \begin{cases} \rho_\Phi \circ A(C), & \text{若 } C \cap \ker A = \emptyset, \\ S_V, & \text{若 } C \cap \ker A \neq \emptyset, \end{cases} \quad \forall C \in \mathcal{K}(S_\Phi).$$

$\hat{A}$ 是保球凸性的, 即若 $C \in \mathcal{K}(S_\Phi)$, 则 $\hat{A}(C) \in \mathcal{K}(S_V)$: 当 $C \cap \ker A \neq \emptyset$ 时, 结论显然; 当 $C \cap \ker A = \emptyset$ 时, 仿照定理 3.1 的证明即可. 利用定理 3.8 可得下面定理:

定理 3.9 若 $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是秩为 1 的线性变换, 则 $\hat{A}: \mathcal{K}(S_\Phi) \rightarrow \mathcal{K}(S_V)$ 是关于 $+_\Phi$ 的赋值, 其中 $V = A(\mathbb{R}^n)$. 特别地, S_Φ 到 $1-\Phi$ -球面的投影是关于 $+_\Phi$ 的赋值.

证明 设 $C, D, C \cup D, C \cap D \in \mathcal{K}(\mathbb{S}_\Phi)$. 若 $(C \cup D) \cap \ker A \neq \emptyset$, 则显然有 $\widehat{A}(C \cup D) +_\Phi \widehat{A}(C \cap D) = \widehat{A}(C) +_\Phi \widehat{A}(D)$. 故设 $(C \cup D) \cap \ker A = \emptyset$. 现断言此时有 $\widehat{A}(C \cap D) = \widehat{A}(C) \cap \widehat{A}(D)$. 首先 $\widehat{A}(C \cap D) \subset \widehat{A}(C) \cap \widehat{A}(D)$ 显然成立. 再设 $w \in \widehat{A}(C) \cap \widehat{A}(D)$, 那么存在 $u \in C, v \in D$, 使得 $w = \widehat{A}(u) = \widehat{A}(v)$ 或 $A(u) = \Phi(A(u))w, A(v) = \Phi(A(v))w$. 由于 $v \neq u^\circ$ (否则就有 $w = \widehat{A}(v) = \widehat{A}(u^\circ) = w^\circ$), 所以对任意 $0 \leq \lambda \leq 1$, 有 $u_\lambda := \lambda u +_\Phi (1 - \lambda)v \in C \cup D$, 并且由 ρ_Φ 的性质可知,

$$\widehat{A}(u_\lambda) = \rho_\Phi(\lambda A(u) + (1 - \lambda)A(v)) = \rho_\Phi(\lambda \Phi(A(u))w + (1 - \lambda)\Phi(A(v))w) = w.$$

由 u_λ 关于 λ 的连续性及 C 和 D 的闭性知, 存在 $\lambda_0 \in [0, 1]$, 使得 $u_{\lambda_0} \in C \cap D$. 这样, $w = \widehat{A}(u_{\lambda_0}) \in \widehat{A}(C \cap D)$, 从而, $\widehat{A}(C) \cap \widehat{A}(D) \subset \widehat{A}(C \cap D)$. 于是, $\widehat{A}(C \cap D) = \widehat{A}(C) \cap \widehat{A}(D)$ 成立. 又 $\widehat{A}(C \cup D) = \widehat{A}(C) \cup \widehat{A}(D)$ 是显然的, 所以, 由定理 3.8 (注意这里 $\mathbb{S}_V \cong \mathbb{S}_\Phi^1$), 可得

$$\widehat{A}(C \cup D) +_\Phi \widehat{A}(C \cap D) = \widehat{A}(C) \cup \widehat{A}(D) +_\Phi \widehat{A}(C) \cap \widehat{A}(D) = \widehat{A}(C) +_\Phi \widehat{A}(D).$$

证毕. □

4 球面凸函数

出于解决实际问题的需要 (例如, 一般优化问题参见文献 [39, 43–47, 49, 50], 最佳场所问题参见文献 [44–46], 凸锥最大夹角问题参见文献 [28, 47, 48]), 或出于一般理论研究的兴趣 (参见文献 [14–16, 18, 19, 40–42]), 已有许多有关球面凸函数的研究. 这些研究大多集中在具体问题解决或具体算法优化等方面, 对球面凸函数基本性质的研究并不多见. 这里简要介绍和推广文献 [38, 59] 中有关球面凸函数性质的一般性结果.

4.1 球面凸函数的第一种定义

这里依照文献 [38] 的处理方式, 只考虑 Euclid 单位球面 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上的函数. 首先引进一些必要的术语和定义: $\mathbb{S}^{n-1}$ 的任何一个 1- 球面称为一条测地线; 任意给定 $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$, 若分段连续可微函数 $\gamma: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ 满足 $\gamma([\alpha, \beta])$ 含于某条测地线, 则称其为一条测地线段 (函数). 测地线段 γ 的长度定义为 $l(\gamma) := \int_\alpha^\beta \|\gamma'(t)\| dt$. 若测地线段 γ 满足 $l(\gamma) = d_s(\gamma(\alpha), \gamma(\beta)) = \arccos\langle \gamma(\alpha), \gamma(\beta) \rangle$, 则称其为极小测地线段; 若 $\|\gamma'\| \equiv 1$, 则称其为规范测地线段. 若 $u, v \in \mathbb{S}^{n-1}$ 互不相同且 $v \neq -u$, 则从 u 到 v 的 (唯一) 极小规范测地线段是 $\gamma_{uv}(t) := (\cos t - (1 - \langle u, v \rangle^2)^{-1/2} \langle u, v \rangle \sin t)u + (1 - \langle u, v \rangle^2)^{-1/2} \sin t v$, $t \in [0, d_s(u, v)]$.

下面是文献 [38] 中给出的球面凸函数的定义 (文献 [38] 只研究了定义在 $\mathbb{S}^{n-1}$ 真球凸集上的函数, 并同时指出了定义在整个 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上的球面凸函数只有常函数).

定义 4.1 设 $C \subset \mathbb{S}^{n-1}$ 是一个真球凸集, $I \subset \mathbb{R}$ 是一区间. 函数 $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ 称为 (严格) 球面凸的, 若对任意极小测地线段 $\gamma: I \rightarrow C$, 函数 $f \circ \gamma: I \rightarrow \mathbb{R}$ 在通常意义下是 (严格) 凸的.

文献 [38] 的主要工作之一是给出了若干球面凸函数判定准则. 为介绍这些准则, 需要一些术语与概念. 设 $u \in \mathbb{S}^{n-1}$, $T_u(\mathbb{S}^{n-1})$ 表示 $\mathbb{S}^{n-1}$ 在 u 处的切空间. 定义指数映射 $\exp_u: T_u(\mathbb{S}^{n-1}) \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ 如下:

$$\exp_u(x) = \begin{cases} \cos(\|x\|)u + \sin(\|x\|)\frac{x}{\|x\|}, & x (\neq o) \in T_u(\mathbb{S}^{n-1}), \\ u, & x = o, \end{cases}$$

其逆映射为

$$\exp_u^{-1}(v) = \begin{cases} \frac{\arccos\langle u, v \rangle}{\sqrt{1 - \langle u, v \rangle^2}}(I - uu^\top)(v), & v \notin \{u, -u\}, \\ o, & v \in \{u, -u\}. \end{cases}$$

从而, $d_s(u, v) = \|\exp_u^{-1}(v)\|$, $\forall u, v \in \mathbb{S}^{n-1}$.

设 $\mathbb{S}^{n-1} \subset \Omega$, 其中 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ 为可微函数. 再设 $C \subset \mathbb{S}^{n-1}$ 为 (相对) 开集, $u \in C$, 那么 f 在 u 点关于球面的梯度 $\text{grad}_s f(u)$ 定义为

$$\text{grad}_s f(u) := (I - uu^\top)(Df(u)) = Df(u) - \langle Df(u), u \rangle u,$$

其中 $Df(u)$ 表示 f 在 u 点处通常的 (Euclid) 梯度. 若 f 是二次可微函数, 则其在 u 点关于球面的 Hesse 矩阵 $\text{Hess}_s f(u) := \nabla \text{grad}_s f(u): T_u(\mathbb{S}^{n-1}) \rightarrow T_u(\mathbb{S}^{n-1})$ 定义为

$$\text{Hess}_s f(u) := (I - uu^\top)(D^2 f(u) - \langle Df(u), u \rangle I),$$

其中 $D^2 f(u)$ 表示 f 在 u 点处通常的 (Euclid) Hesse 矩阵.

下面的命题汇集了文献 [38, 命题 7 和 8] 的结论 (证明略).

命题 4.1 设 f 在包含 $\mathbb{S}^{n-1}$ 的一个开集上可微, $C \subset \mathbb{S}^{n-1}$ 为开真球凸集, 那么下列结论等价:

- (i) f 是 C 上的球面凸函数;
- (ii) $f(v) \geq f(u) + \langle \text{grad}_s f(u), \exp_u^{-1}(v) \rangle$, $\forall u, v \in C, v \neq u$;
- (iii) $\langle \text{grad}_s f(u), \exp_u^{-1}(v) \rangle + \langle \text{grad}_s f(v), \exp_v^{-1}(u) \rangle \leq 0$, $\forall u, v \in C$.

对于二次可微函数, 文献 [38] 也得到了与 Euclid 凸函数判别法类似的准则 (具体可参见文献 [38]).

命题 4.2 设 f 在包含 $\mathbb{S}^{n-1}$ 的一个开集上二次可微, $C \subset \mathbb{S}^{n-1}$ 为开真球凸集, 那么 f 是 C 上的球面凸函数当且仅当 $\langle \text{Hess}_s f(u)x, x \rangle \geq 0$, $\forall u \in C, x \in T_u(\mathbb{S}^{n-1})$.

利用命题 4.2, 可以验证下列函数是球面凸的 (参见文献 [38]).

例 4.1 取定 $u \in \mathbb{S}^{n-1}$, 那么函数 $d_u(\cdot) := d_s(u, \cdot): H_u^+ \cap \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ 是球面凸的.

例 4.2 取定 $u \in \mathbb{S}^{n-1}$, 那么函数 $f_u(\cdot) := \frac{1}{2}d_s^2(u, \cdot): H_u^+ \cap \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ 是严格球面凸的.

例 4.3 取 $u^* = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^n$, $C = \{(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, \xi_n) \in \mathbb{S}^{n-1} \mid \xi_n > 0\}$, 那么函数 $\psi(\cdot) := -\ln(\frac{\pi}{2} - d_s(p^*, \cdot)): C \rightarrow \mathbb{R}$ 是球面凸的.

例 4.4 记 $\mathbb{S}^{++} := \{u = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{S}^{n-1} \mid \xi_i > 0, 1 \leq i \leq n\}$, 定义 $\varphi(u) = -\sum_{i=1}^n \ln(\xi_i)$, $\forall u \in \mathbb{S}^{++}$, 那么函数 φ 在 $\mathbb{S}^{++}$ 上是球面凸的.

关于球面凸函数在球面优化问题中的应用, 可参见文献 [38].

4.2 球面凸函数的第二种定义

文献 [59] 对定义在一般球面 $\mathbb{S}_\Phi$ 真 Φ -凸集的函数, 提出了另一形式的凸性. 下面是文献 [59] 中定义的推广.

定义 4.2 设 $\mathbb{S}_\Phi$ 是一个 Φ -球面, $C \subset \mathbb{S}_\Phi$ 是一个 Φ -凸集. 函数 $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ 称为 Φ -凸的, 如果对任意 $u, v \in C$, $0 \leq \lambda \leq 1$, 只要 $\lambda u +_\Phi (1 - \lambda)v \in C$, 就有

$$f(\lambda u +_\Phi (1 - \lambda)v) \leq \lambda f(u) + (1 - \lambda)f(v).$$

若上述不等式中的 “ $\leq$ ” 可以换成 “ $<$ ” (当 $u \neq v$ 时), 则称 f 在 C 上是严格 Φ -凸的. 函数 $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ 称为 (严格) Φ -凹的, 如果 $-f$ 是 (严格) Φ -凸的.

注 4.1 容易证明, 函数 $f: \mathbb{S}_\Phi \rightarrow \mathbb{R}$ 为 Φ -凸的充要条件是 f 为常数函数.

例 4.5 设球面生成函数 Φ 是凸的. 取定 $\dot{u} \in \mathbb{S}^{n-1}$, $a, b \in \mathbb{R}$. 如果 $a \geq 0$ ($a \leq 0$), 那么函数 $f(\cdot) := a\langle \dot{u}, \cdot \rangle + b$ 在 $\overline{H}_u^+ \cap \mathbb{S}_\Phi$ 上是 Φ -凹的 (Φ -凸的), 在 $\overline{H}_u^- \cap \mathbb{S}_\Phi$ 上是 Φ -凸的 (Φ -凹的). 事实上, 若 $a = 0$, 则结论显然. 若 $a > 0$, $u_1, u_2, u_\lambda := \lambda u_1 +_\Phi (1-\lambda)u_2 \in \overline{H}_u^+ \cap \mathbb{S}_\Phi$, 则有 (注意 $\Phi(\lambda u_1 + (1-\lambda)u_2) \leq 1$, $\langle \dot{u}, \lambda u_1 + (1-\lambda)u_2 \rangle \geq 0$)

$$\begin{aligned} f(u_\lambda) &= a\langle \dot{u}, \lambda u_1 +_\Phi (1-\lambda)u_2 \rangle + b = \frac{a}{\Phi(\lambda u_1 + (1-\lambda)u_2)} \langle \dot{u}, \lambda u_1 + (1-\lambda)u_2 \rangle + b \\ &\geq a\langle \dot{u}, \lambda u_1 + (1-\lambda)u_2 \rangle + b \\ &= \lambda(a\langle \dot{u}, u_1 \rangle + b) + (1-\lambda)(a\langle \dot{u}, u_2 \rangle + b) \\ &= \lambda f(u_1) + (1-\lambda)f(u_2). \end{aligned}$$

所以, f 在 $\overline{H}_u^+ \cap \mathbb{S}_\Phi$ 上是 Φ -凹的. 其他情形的论证类似. 另外, $\exp(a\langle \dot{u}, x \rangle + b)$ ($a > 0$) 在 $\overline{H}_u^- \cap \mathbb{S}_\Phi$ 上是 Φ -凸的. 一般地, 若 $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ 为 Φ -凸的, $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 为单增且凸的, 则 $g \circ f: C \rightarrow \mathbb{R}$ 为 Φ -凸的.

在讨论第二种定义与第一种定义 (当 $\Phi(\cdot) = \|\cdot\|$ 时) 的关系之前, 先讨论 Φ -凸函数的基本性质. 下面的定理 4.1-4.3 为通常凸函数相应性质在球面凸函数中的表现形式, 同时也是文献 [59] 中相应结论的推广.

定理 4.1 (Jensen 不等式) 设 Φ 是凸的球面生成函数, $C \subset \mathbb{S}_\Phi$ 是一个 Φ -凸集, $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ 为 Φ -凸的, 那么对任意 $u_1, u_2, \dots, u_k \in C$ ($k \geq 1$) 和满足 $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ 的 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in [0, 1]$, 只要 $(\Phi) \sum_{i=1}^k \lambda_i u_i \in C$, 就有

$$f\left((\Phi) \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i u_i\right) \leq \sum_{i=1}^k \lambda_i f(u_i).$$

为证明定理 4.1, 需要下面的初等引理.

引理 4.1 若 $f(t) = \frac{t}{(1-b)t+b}A + \frac{b}{(1-b)t+b}B$, $t \in [0, 1]$, 其中 $A, B \in \mathbb{R}$, $2b \in (0, 1)$ 为常数, 则 $f(t) \leq \max\{A + bB, B\}$.

证明 由 $f'(t) = \frac{b(A+(b-1)B)}{((1-b)t+b)^2}$ 可知, f 是单增或单减的. 又 $f(0) = B$, $f(1) = A + bB$, 所以不等式成立. $\square$

定理 4.1 的证明 由 Φ -凸函数的定义知, 当 $k = 1, 2$ 时不等式自然成立. 现假设不等式关于不超过 k (≥ 2) 的所有自然数成立. 设有 $u_1, u_2, \dots, u_{k+1} \in C$ 和满足 $\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i = 1$ 的 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in (0, 1)$, 使得 $(\Phi) \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i u_i \in C$. 不妨设 $f(x_{k+1}) = \min\{f(x_i)\}_{i=1}^{k+1}$ (若需要可以重新对 u_i 和 λ_i 标号), 并记 $z = \sum_{i=1}^k \frac{\lambda_i}{1-\lambda_{k+1}} u_i$. 若 $z = o$, 则

$$f\left((\Phi) \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i u_i\right) = f(u_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i f(u_{k+1}) \leq \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i f(u_i).$$

若 $z \neq o$, 则由归纳假设可得 (注意 $\frac{z}{\Phi(z)} = (\Phi) \sum_{i=1}^k \frac{\lambda_i}{1-\lambda_{k+1}} u_i \in C$)

$$\begin{aligned} f\left((\Phi) \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i u_i\right) &= f\left(\frac{(1-\lambda_{k+1})\Phi(z)}{(1-\lambda_{k+1})\Phi(z) + \lambda_{k+1}} \frac{z}{\Phi(z)} +_\Phi \frac{\lambda_{k+1}}{(1-\lambda_{k+1})\Phi(z) + \lambda_{k+1}} u_{k+1}\right) \\ &\leq \frac{(1-\lambda_{k+1})\Phi(z)}{(1-\lambda_{k+1})\Phi(z) + \lambda_{k+1}} f\left(\frac{z}{\Phi(z)}\right) + \frac{\lambda_{k+1}}{(1-\lambda_{k+1})\Phi(z) + \lambda_{k+1}} f(u_{k+1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{(1-\lambda_{k+1})\Phi(z)}{(1-\lambda_{k+1})\Phi(z)+\lambda_{k+1}} \sum_{i=1}^k \frac{\lambda_i}{1-\lambda_{k+1}} f(u_i) + \frac{\lambda_{k+1}}{(1-\lambda_{k+1})\Phi(z)+\lambda_{k+1}} f(u_{k+1}) \\ &= \frac{\Phi(z)}{(1-\lambda_{k+1})\Phi(z)+\lambda_{k+1}} \sum_{i=1}^k \lambda_i f(u_i) + \frac{\lambda_{k+1}}{(1-\lambda_{k+1})\Phi(z)+\lambda_{k+1}} f(u_{k+1}). \end{aligned}$$

在引理 4.1 中取 $A = \sum_{i=1}^k \lambda_i f(u_i)$, $B = f(u_{k+1})$, $b = \lambda_{k+1}$, $t = \Phi(z)$ (注意, 由 Φ 的凸性, $0 < t \leq 1$), 即得

$$f\left((\Phi) \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i u_i\right) \leq \max\left\{\sum_{i=1}^k \lambda_i f(u_i) + \lambda_{k+1} f(u_{k+1}), f(u_{k+1})\right\} = \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i f(u_i),$$

其中用到了 $f(u_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i f(u_{k+1}) \leq \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i f(u_i)$. □

定理 4.2 设 $C \subset \mathbb{S}_\Phi$ 是 Φ -凸集, $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ 是 Φ -凸的. 如果 $f(u) \geq f(u_0)$, $\forall u \in C \cap U(u_0)$, 其中 $U(u_0)$ 是 u_0 在 $\mathbb{R}^n$ 中的一个邻域, 那么 $f(u) \geq f(u_0)$, $\forall u \in C$.

证明 首先, 对任意的 $u, u^o \in C$, 有 $f(u) = f(u^o)$: 若 $f(u) \neq f(u^o)$ (不妨设 $f(u) < f(u^o)$), 则可取 $0 < \lambda' < 1$ 使得 $\lambda' u +_\Phi (1-\lambda') u^o = u^o$, 从而得到矛盾 $f(u^o) = f(\lambda' u +_\Phi (1-\lambda') u^o) \leq \lambda' f(u) + (1-\lambda') f(u^o) < f(u^o)$. 这样, 若 $u_0^o \in C$, 则 $f(u_0^o) = f(u_0)$.

假设存在 $u_1 (\neq u_0^o) \in C$ 使得 $f(u_1) < f(u_0)$, 那么对任意 $0 < \lambda < 1$, 有

$$f(\lambda u_1 +_\Phi (1-\lambda) u_0) \leq \lambda f(u_1) + (1-\lambda) f(u_0) < f(u_0).$$

然而, 当 λ 很小时, $\lambda u_1 +_\Phi (1-\lambda) u_0 \in C \cap U(u_0)$, 此为矛盾. 所以, $f(u) \geq f(u_0)$, $\forall u \in C$. □

定理 4.3 设 Φ 是凸的球面生成函数, $C \in \mathcal{K}^p(\mathbb{S}_\Phi)$, $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ 为 Φ -凸的. 如果 $\max_{u \in C} f(u)$ 存在, 那么

$$\max_{u \in C} f(u) = \max_{u \in \text{ext}_\Phi C} f(u).$$

证明 设存在 $u_0 \in C$ 使得 $f(u_0) = \max_{u \in C} f(u)$. 由定理 2.5 知, 存在 $u_1, u_2, \dots, u_k \in \text{ext}_\Phi C$ 和满足 $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ 的 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in [0, 1]$, 使得 $u_0 = (\Phi) \sum_{i=1}^k \lambda_i u_i$. 这样, 由定理 4.1 得到

$$f(u_0) = f\left((\Phi) \sum_{i=1}^k \lambda_i u_i\right) \leq \sum_{i=1}^k \lambda_i f(u_i) \leq \sum_{i=1}^k \lambda_i f(u_0) = f(u_0).$$

由此可知 $f(u_1) = f(u_2) = \dots = f(u_k) = f(u_0) = \max_{u \in C} f(u)$. □

有关 Φ -凸函数的其他性质, 可直接参见文献 [59]. 下面的结论应在意料之中, 但由于证明过程尚需一定篇幅的准备, 所以具体证明参见本页脚注²⁾.

定理 4.4 设 $\Phi(\cdot) = \|\cdot\|$, $C \subset \mathbb{S}_\Phi = \mathbb{S}^{n-1}$ 为真 Φ -凸集, 则 $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ 为 Φ -凸的当且仅当 f 为球面凸的.

定理 4.4 表明, 关于定义在 Euclid 单位球面上的函数, 上述两种凸性的定义是等价的 (但需注意定义 4.2 中允许函数的定义域不是真球凸集). 由此可知, 例 4.1–4.4 中的函数都是 $\|\cdot\|$ -凸的. 容易看出, 若依照第二种定义直接验证例 4.1–4.4 中函数的 $\|\cdot\|$ -凸性, 则过程将比较烦琐, 所以第一种定义, 特别是由此提供的凸性判别法, 在实际使用中相对比较便利; 然而也容易看出, 若仅采用第一种定义, 则形如定理 4.1–4.3 的结论或者无法形成, 或者证明烦琐. 由于第一种定义仅限于 Euclid 单位球面, 所以, 我们提出下面问题.

2) Guo Q, Peng Y L. Epigraphs of spherically convex functions. Preprint, 2020

问题 4.1 在一般球面 $\mathbb{S}_\Phi$ 上, 第一种定义的表现形式是什么?

问题 4.2 在第二种定义下, 可否给出形如命题 4.1 和 4.2 的凸性判别法?

5 结束语

本文对球面空间凸性理论中有关球面凸集和球面凸函数的基本概念、基本性质和基本运算与变换等予以了详细的介绍, 并全部给出了证明; 对球面空间上有关二元运算等方面的较专门化的结论也尽可能地给出了证明. 需要说明的是, 由于尝试使用统一的分析术语和方法处理这些概念和结论, 并尽可能地推广已知结果, 所以文中一些定理的表现形式与原出处可能会有不同, 证明方法则大多进行了简化. 由此, 建议对该领域研究感兴趣的读者, 在阅读本文的同时最好参阅原出处的表述和证明.

由于意在为感兴趣的研究人员提供入门信息, 所以本文只是对最基础的理论概念进行了综述介绍. 若对较深入的专门研究感兴趣, 请参阅参考文献中相关的文章.

致谢 适逢恩师吴从炘先生八十五寿辰, 谨献此文敬贺. 同时感谢审稿人对本文第一稿提出的修改意见与建议.

参考文献

- 1 Hiriart-Urruty J-B, Lemaréchal C. *Fundamentals of Convex Analysis*. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 2001
- 2 Schneider R. *Convex Bodies: The Brunn-Minkowski Theory*, 2nd ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2014
- 3 Gruber P M. *Convex and Discrete Geometry*. Comprehensive Studies in Mathematics, vol. 336. Berlin: Springer, 2007
- 4 Gardner R J. *Geometric Tomography*, 2nd ed. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 58. Cambridge: Cambridge University Press, 2006
- 5 Gardner R J. The Brunn-Minkowski inequality. *Bull Amer Math Soc (NS)*, 2002, 39: 355–405
- 6 Gardner R J, Hug D, Weil W. Operations between sets in geometry. *J Eur Math Soc (JEMS)*, 2013, 15: 2297–2352
- 7 Haberl C, Parapatits L. Moments and valuations. *Amer J Math*, 2016, 138: 1575–1603
- 8 Ludwig M, Reitzner M. A classification of $SL(n)$ invariant valuations. *Ann of Math (2)*, 2010, 172: 1219–1267
- 9 Parapatits L. $SL(n)$ -contravariant L_p -Minkowski valuations. *Trans Amer Math Soc*, 2014, 366: 1195–1211
- 10 Aubrun G, Fradelizi M. Two-point symmetrization and convexity. *Arch Math (Basel)*, 2004, 82: 282–288
- 11 Barvinok A. *A Course in Convexity*. Providence: Amer Math Soc, 2002
- 12 Schuster F, Besau F. Binary operations in spherical convex geometry. *Indiana Univ Math J*, 2016, 65: 1263–1288
- 13 Ferreira O P, Iusem A N, Németh S Z. Projections onto convex sets on the sphere. *J Global Optim*, 2013, 57: 663–676
- 14 Ferreira O P, Németh S Z. On the spherical convexity of quadratic functions. *J Global Optim*, 2019, 73: 537–545
- 15 Ferreira O P, Németh S Z, Xiao L. On the spherical quasi-convexity of quadratic functions. *Linear Algebra Appl*, 2019, 562: 205–222
- 16 Gerhard C. Curvature flows in the sphere. *J Differential Geom*, 2015, 100: 301–347
- 17 Iqbal A, Ali S, Ahmad I. On geodesic E -convex sets, geodesic E -convex functions and E -epigraphs. *J Optim Theory Appl*, 2012, 155: 239–251
- 18 Barani A, Pouryayevali M R. Invariant monotone vector fields on Riemannian manifolds. *Nonlinear Anal*, 2009, 70: 1850–1861
- 19 Kimura Y, Kohsaka F. Spherical nonspreadingness of resolvents of convex functions in geodesic spaces. *J Fixed Point Theory Appl*, 2016, 18: 93–115
- 20 Afsari B, Tron R, Vidal R. On the convergence of gradient descent for finding the Riemannian center of mass. *SIAM J Control Optim*, 2013, 51: 2230–2260
- 21 Bernig A, Fu J H G, Solanes G. Integral geometry of complex space forms. *Geom Funct Anal*, 2014, 24: 403–492
- 22 Alesker S. Valuations on manifolds and integral geometry. *Geom Funct Anal*, 2010, 20: 1073–1143
- 23 Alesker S. Theory of valuations on manifolds: A survey. *Geom Funct Anal*, 2007, 17: 1321–1341
- 24 Figalli A, Ge Y. Isoperimetric-type inequalities on constant curvature manifolds. *Adv Calc Var*, 2012, 5: 251–284
- 25 Gao F, Hug D, Schneider R. Intrinsic volumes and polar sets in spherical space. *Math Notae*, 2003, 41: 159–176
- 26 Glasauer S. Integral geometry of spherically convex bodies. *Diss Summ Math*, 1996, 1: 219–226

- 27 Lassak M. Width of spherical convex bodies. *Aequationes Math*, 2015, 89: 555–567
- 28 Lassak M, Musielak M. Diameter of reduced spherical convex bodies. *Fascicula Math*, 2018, 61: 103–108
- 29 Lassak M, Musielak M. Reduced spherical convex bodies. *Bull Pol Acad Sci Math*, 2018, 66: 87–97
- 30 Besau F, Werner E M. The spherical convex floating body. *Adv Math*, 2016, 301: 867–901
- 31 Han H, Nishimura T. Self-dual Wulff shapes and spherical convex bodies of constant width $\pi/2$. *J Math Soc Japan*, 2017, 69: 1475–1484
- 32 Santalo L A. Convex regions on the n -dimensional spherical surface. *Ann of Math (2)*, 1946, 47: 448–459
- 33 Bezdek K, Schneider R. Covering large balls with convex sets in spherical space. *Contrib Alg Geom*, 2010, 51: 229–235
- 34 Musielak M. Covering a spherical convex body by a disk. *arXiv:1806.04246*, 2018
- 35 Gerhardt C. Minkowski type problems for convex hypersurfaces in the sphere. *Pure Appl Math*, 2007, 3: 417–449
- 36 Schneider R. The endomorphisms of the lattice of closed convex cones. *Contrib Alg Geom*, 2008, 49: 541–547
- 37 Yaskin V. The Busemann-Petty problem in hyperbolic and spherical spaces. *Adv Math*, 2006, 203: 537–553
- 38 Ferreira O P, Iusem A N, Németh S Z. Concepts and techniques of optimization on the sphere. *TOP*, 2014, 22: 1148–1170
- 39 Smith S T. Optimization techniques on Riemannian manifolds. In: *Hamiltonian and Gradient Flows, Algorithms and Control*. Fields Inst Commun, vol. 3. Providence: Amer Math Soc, 1994, 113–136
- 40 Tseveendorj I, Fortin D. Survey of piecewise convex maximization and PCMP over spherical sets. In: *Advances in Stochastic and Deterministic Global Optimization*. Springer Optimization and Application, vol. 107. Switzerland: Springer International Publishing, 2016, 33–50
- 41 Chernyaev Yu A. Convergence of the gradient projection method and Newton's method as applied to optimization problems constrained by intersection of a spherical surface and a convex closed set. *Comput Math Math Phys*, 2016, 56: 1716–1731
- 42 Cottle R W, Rando R, Stone R E. On spherically convex sets and Q -matrices. *Linear Algebra Appl*, 1981, 41: 73–80
- 43 Chen Y, Gao D Y. Global solutions to large-scale spherical constrained quadratic minimization via canonical dual approach. *arXiv:1308.4450*, 2013
- 44 Das P, Chakraborti N R, Chaudhuri P K. Spherical minimax location problem. *Comput Optim Appl*, 2001, 18: 311–326
- 45 Drezner Z, Wesolowsky G O. Minimax and maximin facility location problems on a sphere. *Naval Res Logist*, 1983, 30: 305–312
- 46 Zhang L. On the convergence of a modified algorithm for the spherical facility location problem. *Oper Res Lett*, 2003, 31: 161–166
- 47 Iusem A, Seeger A. Searching for critical angles in a convex cone. *Math Program*, 2009, 120: 3–25
- 48 Iusem A, Seeger A. On pairs of vectors achieving the maximal angle of a convex cone. *Math Program*, 2005, 104: 501–523
- 49 So A M C. Deterministic approximation algorithms for sphere constrained homogeneous polynomial optimization problems. *Math Program*, 2011, 129: 357–382
- 50 Zhang X, Ling C, Qi L. The best rank-1 approximation of a symmetric tensor and related spherical optimization problems. *SIAM J Matrix Anal Appl*, 2012, 33: 806–821
- 51 Dahl G, Leinaas J M, Myrheim J, et al. A tensor product matrix approximation problem in quantum physics. *Linear Algebra Appl*, 2007, 420: 711–725
- 52 Han D, Dai H H, Qi L. Conditions for strong ellipticity of anisotropic elastic materials. *J Elasticity*, 2009, 97: 1–13
- 53 Qi L, Teo K L. Multivariate polynomial minimization and its application in signal processing. *J Global Optim*, 2003, 26: 419–433
- 54 Weiland S, van Belzen F. Singular value decompositions and low rank approximations of tensors. *IEEE Trans Signal Process*, 2010, 58: 1171–1182
- 55 Baker M J C. A Helly-type theorem on a sphere. *J Aust Math Soc*, 1967, 7: 323–326
- 56 Baker M J C. A spherical Helly-type theorem. *Pacific J Math*, 1967, 23: 1–3
- 57 Horn A. Some generalizations of Helly's theorem on convex sets. *Bull Amer Math Soc (NS)*, 1949, 55: 923–929
- 58 Shao Y, Guo Q. An analytic approach to spherically convex sets in $\mathbb{S}^{n-1}$. *J Math (China)*, 2018, 38: 473–480
- 59 Guo Q, Peng Y L. Spherically convex sets and spherically convex functions. *J Conv Anal*, 2020, in press
- 60 Danzer L, Grünbaum B, Klee V. Helly's theorem and its relatives. *Convexity*. In: *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, vol. 7. Providence: Amer Math Soc, 1963, 101–180
- 61 Katchalski M. A Helly type theorem on the sphere. *Proc Amer Math Soc*, 1977, 66: 119–122
- 62 Molnár J. Über eine Übertragung des Hellyschen Satzes in Sphärische Räume. *Acta Math Academiae Scire Hungaricae*, 1957, 8: 315–318

- 63 Robinson C V. Spherical theorems of Helly type and congruence indices of spherical caps. Amer J Math, 1942, 64: 260–272
- 64 Zhou X, Guo Q. Compositions and valuations on spherical convex sets. Wuhan Univ J Nat Sci, 2020, in press
- 65 Oliker V. Embedding S^n into R^{n+1} with given integral Gauss curvature and optimal mass transport on S^n . Adv Math, 2007, 213: 600–620
- 66 Leichtweiss K. Linear combinations of convex hypersurfaces in non-Euclidean geometry. Beiträge Algebra Geom, 2012, 53: 77–88
- 67 Protasov Yu V. A generalized joint spectral radius. Izv Ross Akad Nauk Ser Mat, 1997, 61: 99–136

Convexity theory on spherical spaces (I)

Qi Guo

Abstract This paper mainly concerns the current progress on convexity theory on spherical spaces. Basic concepts and properties of spherically convex sets are introduced, including the spherical Radon's, Helly's, Carathéodoty's theorems and the spherical structural theorem of Minkowski type. Some useful operators, such as the projections from spheres onto sub-spheres or spherically convex sets, are discussed. The achievements in the study on existences of suitable binary operations in spherical convex geometry are summarized, and the concepts and properties of spherically convex functions are investigated.

Keywords spherically convex set, spherically convex function, spherical convex analysis, binary operation on sphere, spherical projection

MSC(2010) 52A55, 52A20, 52A35, 52A41

doi: 10.1360/SSM-2020-0161