Hankel 算子乘积的两个问题

丁宣浩¹, 桑元琦^{2*}

1. 重庆工商大学数学与统计学院, 重庆市经济社会应用统计重点实验室, 重庆 401331;

2. 复旦大学数学科学学院, 上海 200433

E-mail: xuanhaod@qq.com, yuanqisang@fudan.edu.cn

收稿日期: 2019-01-09; 接受日期: 2020-03-12; 网络出版日期: 2020-08-27; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11871122) 和重庆市自然科学基金 (批准号: cstc2018jcyjAX0595) 资助项目

摘要 设 f, u 和 g 是单位圆周 Hardy 空间 H^2 中的函数, h 是单位圆周上平方可积的函数, $H_{\bar{f}}, H_{\bar{u}}, H_{\bar{g}}$ 和 H_h 都是从单位圆周 Hardy 空间 H^2 到其正交补空间 $(H^2)^\perp$ 上有界的 Hankel 算子. 本文得到了 3 个 Hankel 算子的乘积等于一个 Hankel 算子 (即 $H_{\bar{f}}H_{\bar{u}}^*H_{\bar{g}} = H_h$) 成立的充分必要条件, 以及 $H_{\bar{f}}H_{\bar{u}}^*H_{\bar{g}} = H_{\bar{g}}H_{\bar{u}}^*H_{\bar{f}}$ 成立的充分必要条件.

关键词 Hankel 算子 Hardy 空间 乘积**MSC (2020) 主题分类** 47B35

1 引言

本文中, $\mathbb{D}$ 和 $\mathbb{T}$ 分别表示复平面中的开单位圆盘和单位圆周. $d\sigma(z)$ 是 $\mathbb{T}$ 上的正规化的 Haar 测度. $L^2 = L^2(\mathbb{T}, d\sigma)$ 为 $\mathbb{T}$ 上的平方可积函数全体, L^∞ 为 $\mathbb{T}$ 上的本性有界函数全体. H^2 表示 Hardy 空间, 是 L^2 的真闭子空间, 其定义为

$$H^2 = \left\{ f \in L^2 : f = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n)z^n, \sum_{n=0}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2 < \infty \right\}.$$

利用调和扩张, H^2 中的函数在 $\mathbb{D}$ 上解析, 且 H^2 中的任意元素 f 的范数为

$$\|f\| = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2 \right)^{1/2},$$

其中 $f = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n)z^n$ 是 f 在 H^2 中标准正交基 $\{z^n : n = 0, 1, 2, \dots\}$ 下的 Fourier 展开式, 或解析函数 f 在 $\mathbb{D}$ 内的 Taylor 展式.

英文引用格式: Ding X H, Sang Y Q. Two questions on products of Hankel operators (in Chinese). Sci Sin Math, 2021, 51: 1151–1162, doi: 10.1360/N012019-00017

设 P 是从 L^2 到 H^2 上的正交投影, 记 $P_- = I - P$ 为从 L^2 到 $(H^2)^\perp$ 上的正交投影. 对于 $\varphi \in L^\infty$, Toeplitz 算子 T_φ 定义为

$$T_\varphi x = P\varphi x, \quad \forall x \in H^2.$$

Hankel 算子 H_φ 定义为

$$H_\varphi x = P_- \varphi x, \quad \forall x \in H^2.$$

对偶 Toeplitz 算子 S_φ 定义为

$$S_\varphi y = P_- \varphi y, \quad \forall y \in (H^2)^\perp.$$

Hankel 算子的伴随 H_φ^* 定义为

$$H_\varphi^* y = P\varphi y, \quad \forall y \in (H^2)^\perp.$$

L^2 上的乘法算子 M_f 在空间分解 $L^2 = H^2 \oplus (H^2)^\perp$ 下可以表示为如下的 2×2 算子矩阵:

$$M_f = \begin{pmatrix} T_f & H_f^* \\ H_f & S_f \end{pmatrix}.$$

由 $M_f M_g = M_{fg}$, 可得

$$T_{fg} = T_f T_g + H_f^* H_g, \quad (1.1)$$

$$H_{fg} = H_f T_g + S_f H_g, \quad (1.2)$$

$$H_{fg}^* = T_f H_g^* + H_f^* S_g, \quad (1.3)$$

$$S_{fg} = S_f S_g + H_f H_g^*. \quad (1.4)$$

若 $\varphi \in H^2$, 则 $H_\varphi = 0$. 这样 (1.3) 和 (1.4) 可以推出

$$H_{\varphi\psi} = S_\varphi H_\psi = H_\psi T_\varphi, \quad \varphi \in H^2. \quad (1.5)$$

1997 年, Xia 和 Zheng^[1] 讨论了 3 个 Hankel 算子乘积为 0 和为紧算子的条件, 时隔多年数学家们发现这些结果在讨论截断 Toeplitz 算子时非常有用. 设 θ 是一个非常数的内函数, $K_\theta^2 = H^2 \ominus \theta H^2$ 为模型空间, P_θ 表示从 L^2 到 K_θ^2 上的正交投影. 2007 年, Sarason^[2] 引入了截断 Toeplitz 算子, 定义如下: 对于 $\varphi \in L^\infty$,

$$A_\varphi x = P_\theta \varphi x, \quad \forall x \in K_\theta^2.$$

随后, 数学家们注意到截断 Toeplitz 算子与 3 个 Hankel 算子的乘积有如下关系 (参见文献 [3]):

$$\begin{pmatrix} A_\varphi M_\theta & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = H_\theta^* H_{\bar{\theta}\varphi} H_\theta^* : (H^2)^\perp = \bar{\theta} K_\theta^2 \oplus \bar{\theta} (H^2)^\perp \rightarrow H^2 = K_\theta^2 \oplus \theta H^2.$$

Ma 和 Zheng^[4] 给出了截断 Toeplitz 算子为紧算子的充要条件, 其主要的方法是利用上面的矩阵表示和 3 个 Hankel 算子乘积为紧的条件. 而我们在讨论两个对偶截断 Toeplitz 算子的乘积为一个对偶截断 Toeplitz 算子时, 也遇到了 3 个 Hankel 算子乘积为 0 的刻画 (参见文献 [5]). 由此看来, 讨论 3 个 Hankel 算子的乘积的性质是非常有意义的. 由于符号为解析函数的 Hankel 算子为 0, 所以只需考虑符号为共轭解析函数的 Hankel 算子. 本文主要讨论关于有界 Hankel 算子的两个问题:

问题 1.1 设 f, g 和 u 是 H^2 中的 3 个非常值函数, $h \in L^2$, 什么条件下算子等式

$$H_{\bar{f}}H_u^*H_{\bar{g}} = H_h$$

成立?

问题 1.2 设 f, g 和 u 是 H^2 中的 3 个非常值函数, 什么条件下算子等式

$$H_{\bar{f}}H_u^*H_{\bar{g}} = H_{\bar{g}}H_u^*H_{\bar{f}}$$

成立?

本文完全回答了这两个问题. 主要结果如下:

定理 1.1 设 f, g 和 u 是属于 H^2 的 3 个非常值函数, $h \in L^2$, 则 $H_{\bar{f}}H_u^*H_{\bar{g}} = H_h$ 成立的充分必要条件是存在常数 λ , 使得 $(u - \lambda)\bar{f}$ 、 $(u - \lambda)\bar{g}$ 和 $(u - \lambda)\bar{f}\bar{g} - h$ 都属于 H^2 .

定理 1.2 设 f, g 和 u 是属于 H^2 的 3 个非常值函数, 则 $H_{\bar{f}}H_u^*H_{\bar{g}} = H_{\bar{g}}H_u^*H_{\bar{f}}$ 成立的充分必要条件是下列条件之一成立:

- (1) 存在常数 λ , 使得 $(u - \lambda)\bar{f}$ 和 $(u - \lambda)\bar{g}$ 都属于 H^2 ;
- (2) f 和 g 的非平凡线性组合是常数.

2 3 个 Hankel 算子的乘积等于一个 Hankel 算子

1999 年, Yoshino^[6] 给出了两个 Hankel 算子的乘积等于一个 Hankel 算子的条件. 这是我们研究问题 1.1 的另外一个重要的背景. Yoshino 定义的 Hankel 算子与本文的定义有所不同, 具体定义如下:

$$\hat{H}_f h = P(Ufh), \quad h \in H^2,$$

其中 $Uh(z) = \bar{z}h(\bar{z})$ 是 L^2 上的酉算子. 这种 Hankel 算子与本文的 Hankel 算子可以通过算子 U 相互转化, 事实上, 两种 Hankel 算子的基本性质是一致的. 因为 Hankel 算子不可能是恒等算子, 所以问题 1.1 不能约化为 Yoshino 研究的情形. 因此研究 3 个 Hankel 算子的乘积等于一个 Hankel 算子的条件就变成了一件非常有意义的事情.

在 Toeplitz 算子与 Hankel 算子的代数运算中有一个非常有趣的现象, 即根据两个算子乘积的结果很难推导出两个以上乘积的情况. 例如, 著名的 Brown-Halmos 定理^[7] 给出了单位圆盘 Hardy 空间上两个 Toeplitz 算子的乘积等于一个 Toeplitz 算子的充分必要条件. 但是, 至今不知道 3 个 Toeplitz 算子的乘积等于一个 Toeplitz 算子的条件, 当然任意有限个 Toeplitz 算子的乘积等于一个 Toeplitz 算子的充分必要条件是一个更加困难的公开问题. Ahern^[8]、Ahern 和 Čučković^[9] 给出了单位圆盘 Bergman 空间上具有有界调和函数符号的两个 Toeplitz 算子的乘积等于一个 Toeplitz 算子的条件, 但是刻画 3 个具有有界调和函数符号的 Toeplitz 算子的乘积等于一个 Toeplitz 算子的条件仍然是一个没有解决的困难问题. 本节将给出 3 个 Hankel 算子的乘积等于一个 Hankel 算子的条件, 从而完全解决问题 1.1.

定理 2.1 设 f 、 g 和 u 是属于 H^2 的 3 个非常值函数, $h \in L^2$, 则 $H_{\bar{f}}H_u^*H_{\bar{g}} = H_h$ 成立的充分必要条件是存在常数 λ , 使得 $(u - \lambda)\bar{f}$ 、 $(u - \lambda)\bar{g}$ 和 $(u - \lambda)\bar{f}\bar{g} - h$ 都属于 H^2 .

证明 先证充分性. 假设存在常数 λ , 使得 $(u - \lambda)\bar{f}$ 、 $(u - \lambda)\bar{g}$ 和 $(u - \lambda)\bar{f}\bar{g} - h$ 都属于 H^2 . 因为 $H_u^* = H_{u-\lambda}^*$ 成立, 所以, $H_{\bar{f}}H_u^*H_{\bar{g}} = H_h$ 成立等价于

$$H_{\bar{f}}H_{u-\lambda}^*H_{\bar{g}} = H_h \quad (2.1)$$

成立. 对于任意 $z \in \mathbb{D}$, $K_z(\zeta) = \frac{1}{1-\bar{z}\zeta}$ 是 H^2 的再生核. 根据假设, 我们将 (2.1) 两边作用在 K_z 上可得

$$\begin{aligned} H_{\bar{f}}H_{u-\lambda}^*H_{\bar{g}}K_z &= H_{\bar{f}}H_{u-\lambda}^*(I - P)\bar{g}K_z \\ &= H_{\bar{f}}H_{u-\lambda}^*(\bar{g} - \bar{g}(z))K_z \\ &= H_{\bar{f}}P(u - \lambda)(\bar{g} - \bar{g}(z))K_z \\ &= H_{\bar{f}}((u - \lambda)(\bar{g} - \bar{g}(z))K_z) \\ &= (I - P)(u - \lambda)\bar{f}\bar{g}K_z - \bar{g}(z)(I - P)\bar{f}(u - \lambda)K_z \\ &= (I - P)(u - \lambda)\bar{f}\bar{g}K_z \\ &= (I - P)((u - \lambda)\bar{f}\bar{g} - h)K_z + (I - P)hK_z \\ &= H_hK_z. \end{aligned}$$

从而, 对于任意的 $z \in \mathbb{D}$, $H_{\bar{f}}H_u^*H_{\bar{g}}K_z = H_hK_z$ 成立. 由于 $\{K_z : z \in \mathbb{D}\}$ 的有限线性组合全体在 H^2 中稠密, 故

$$H_{\bar{f}}H_u^*H_{\bar{g}} = H_h.$$

下证必要性. 假设 $H_{\bar{f}}H_u^*H_{\bar{g}} = H_h$ 成立. 由 (1.1) 可知, $H_u^*H_{\bar{g}} = T_{u\bar{g}} - T_uT_{\bar{g}}$. 故

$$\begin{aligned} H_{\bar{f}}H_u^*H_{\bar{g}} &= H_{\bar{f}}(T_{u\bar{g}} - T_uT_{\bar{g}}) \\ &= H_{\bar{f}}T_{u\bar{g}} - H_{\bar{f}}T_uT_{\bar{g}} \\ &= H_{\bar{f}}T_{u\bar{g}} - H_{u\bar{f}}T_{\bar{g}}. \end{aligned}$$

这样 $H_{\bar{f}}H_u^*H_{\bar{g}} = H_h$ 变成了

$$H_{\bar{f}}T_{u\bar{g}} - H_{u\bar{f}}T_{\bar{g}} = H_h. \quad (2.2)$$

又因为 $I = T_zT_{\bar{z}} + 1 \otimes 1$, 其中 $1 \otimes 1$ 为秩一算子, 满足 $(1 \otimes 1)x = \langle x, 1 \rangle 1$, $\forall x \in H^2$. 从而, (2.2) 变为

$$\begin{aligned} H_{\bar{f}}(T_zT_{\bar{z}} + 1 \otimes 1)T_{u\bar{g}} - H_{u\bar{f}}(T_zT_{\bar{z}} + 1 \otimes 1)T_{\bar{g}} &= H_h, \\ H_{\bar{f}}(1 \otimes 1)T_{u\bar{g}} - H_{u\bar{f}}(1 \otimes 1)T_{\bar{g}} &= H_h - (H_{\bar{f}}T_zT_{\bar{z}}T_{u\bar{g}} - H_{u\bar{f}}T_zT_{\bar{z}}T_{\bar{g}}), \\ H_{\bar{f}}(1 \otimes 1)T_{u\bar{g}} - H_{u\bar{f}}(1 \otimes 1)T_{\bar{g}} &= H_h - S_z(H_{\bar{f}}T_{u\bar{z}\bar{g}} - H_{u\bar{f}}T_{\bar{z}\bar{g}}). \end{aligned}$$

在上式两边同时复合算子 T_z , 可得

$$\begin{aligned} (H_{\bar{f}}(1 \otimes 1)T_{u\bar{g}} - H_{u\bar{f}}(1 \otimes 1)T_{\bar{g}})T_z &= H_hT_z - S_z(H_{\bar{f}}T_{u\bar{g}} - H_{u\bar{f}}T_{\bar{g}}) \\ &= H_hT_z - S_zH_h \end{aligned}$$

$$= H_{hz} - H_{hz} = 0.$$

因此,

$$H_{\bar{f}}(1 \otimes 1)T_{u\bar{g}}T_z = H_{u\bar{f}}(1 \otimes 1)T_{\bar{g}}T_z.$$

把上式中每一项具体写出来, 可得

$$P_-(\bar{f}) \otimes P(\bar{z}\bar{u}g) = P_-(u\bar{f}) \otimes P(\bar{z}g). \quad (2.3)$$

下面分两种情形讨论上面的算子方程.

情形 1 $P_-(\bar{f}) \otimes P(\bar{z}\bar{u}g)$ 和 $P_-(u\bar{f}) \otimes P(\bar{z}g)$ 都是零算子. 因为 f 和 g 不是常值函数, 所以有 $P_-(\bar{f}) \neq 0$ 和 $P(\bar{z}g) \neq 0$. 从而 $P(\bar{z}\bar{u}g) = 0$ 且 $P_-(u\bar{f}) = 0$. 因此, $\bar{z}\bar{u}g \in (H^2)^\perp$ 且 $u\bar{f} \in H^2$. $\bar{z}\bar{u}g \in (H^2)^\perp$ 可以推出 $\bar{u}g \in z(H^2)^\perp = \overline{H^2}$, 则 $u\bar{g} \in H^2$. 显见

$$H_{\bar{f}}H_{\bar{u}}^*H_{\bar{g}}1 = H_h1. \quad (2.4)$$

计算 (2.4) 左边可得

$$\begin{aligned} H_{\bar{f}}H_{\bar{u}}^*H_{\bar{g}}1 &= H_{\bar{f}}H_{\bar{u}}^*P_-\bar{g} \\ &= H_{\bar{f}}H_{\bar{u}}^*[\bar{g} - \bar{g}(0)] \\ &= H_{\bar{f}}Pu[\bar{g} - \bar{g}(0)] \\ &= P_-\bar{f}u[\bar{g} - \bar{g}(0)] \\ &= P_-\bar{f}\bar{g} - \bar{g}(0)P_-(u\bar{f}) \\ &= P_-\bar{f}\bar{g}. \end{aligned}$$

计算 (2.4) 右边可得

$$H_h1 = P_-h.$$

因此,

$$P_-(u\bar{f}\bar{g} - h) = 0 \quad \Rightarrow \quad u\bar{f}\bar{g} - h \in H^2.$$

情形 2 若 $P_-(\bar{f}) \otimes P(\bar{z}\bar{u}g)$ 和 $P_-(u\bar{f}) \otimes P(\bar{z}g)$ 都不是零算子, 则存在 $\mathbb{D}$ 中的一点 z_0 , 使得

$$\langle P(\bar{z}\bar{u}g), K_{z_0} \rangle = P(\bar{z}\bar{u}g)(z_0), \quad \langle P(\bar{z}g), K_{z_0} \rangle = P(\bar{z}g)(z_0)$$

都是非零常数. 由假设可知,

$$P_-(\bar{f}) \otimes P(\bar{z}\bar{u}g)K_{z_0} = P_-(u\bar{f}) \otimes P(\bar{z}g)K_{z_0}.$$

计算上式可得

$$\langle K_{z_0}, P(\bar{z}\bar{u}g) \rangle P_-(\bar{f}) = \langle K_{z_0}, P(\bar{z}g) \rangle P_-(u\bar{f}).$$

记 $\lambda = \frac{P(\bar{z}\bar{u}g)(z_0)}{P(\bar{z}g)(z_0)} \neq 0$ 使得

$$P_-(u\bar{f}) = \lambda P_-(\bar{f}). \quad (2.5)$$

因此,

$$P_-(u\bar{f} - \lambda\bar{f}) = 0 \Rightarrow (u - \lambda)\bar{f} \in H^2.$$

将 (2.5) 代入 (2.3) 可得

$$P_-(\bar{f}) \otimes P(\bar{z}\bar{u}g) = \lambda P_-(\bar{f}) \otimes P(\bar{z}g),$$

化简上式可得

$$P_-(\bar{f}) \otimes (P(\bar{z}\bar{u}g) - \lambda P(\bar{z}g)) = 0.$$

故

$$\begin{aligned} P(\bar{z}(\bar{u}g - \bar{\lambda})g) = 0 &\Rightarrow \bar{z}(\bar{u}g - \bar{\lambda})g \in (H^2)^\perp \\ &\Rightarrow (\bar{u} - \bar{\lambda})g \in z(H^2)^\perp = \overline{H^2} \\ &\Rightarrow (u - \lambda)\bar{g} \in H^2. \end{aligned}$$

由假设可得

$$H_{\bar{f}}H_{\bar{u}-\bar{\lambda}}^*H_{\bar{g}}1 = H_h1.$$

将上式展开可得

$$\begin{aligned} H_{\bar{f}}H_{\bar{u}-\bar{\lambda}}^*H_{\bar{g}}1 &= H_{\bar{f}}P(u - \lambda)(\bar{g} - \bar{g}(0)) \\ &= P_-\bar{f}(u - \lambda)(\bar{g} - \bar{g}(0)) \\ &= P_-(u - \lambda)\bar{f}\bar{g} = P_-h. \end{aligned}$$

故

$$(u - \lambda)\bar{f}\bar{g} - h \in H^2.$$

证毕. □

推论 2.1 设 $f_1, f_2, f_3 \in L^\infty$, 则 $H_{f_1}H_{f_2}^*H_{f_3} = 0$ 成立当且仅当存在常数 λ , 使得 $(f_{2-}^- - \lambda)f_{1-}$ 、 $(f_{2-}^- - \lambda)f_{3-}$ 和 $(f_{2-}^- - \lambda)f_{1-}f_{3-}$ 都属于 H^2 , 其中 $f_{i-} = P_-f_i$, $i = 1, 2, 3$.

3 3 个 Hankel 算子乘积的另一个问题: 问题 1.2

首先回顾问题 1.2. 设 $f, g, u \in H^2$, 则

$$H_{\bar{f}}H_{\bar{u}}^*H_{\bar{g}} = H_{\bar{g}}H_{\bar{u}}^*H_{\bar{f}}$$

成立的条件是什么?

本节的目标就是解决这个问题, 我们需要下面的引理.

引理 3.1 设 $f, g, u \in H^2$, 其中 f 不是常数. 在 $H_{\bar{f}}H_{\bar{u}}^*H_{\bar{g}} = H_{\bar{g}}H_{\bar{u}}^*H_{\bar{f}}$ 成立的情况下, 如果存在常数 λ , 使得 $(u - \lambda)\bar{f} \in H^2$, 则必有 $(u - \lambda)\bar{g} \in H^2$.

证明 因为对于常数 λ , 任意有界 Hankel 算子 H_ϕ 满足 $H_\phi = H_{\phi+\lambda}$ 成立, 所以可以假设 $f(0) = g(0) = 0$. 根据已知条件 $H_{\bar{f}}H_u^*H_{\bar{g}} = H_{\bar{g}}H_u^*H_{\bar{f}}$ 可以推出

$$H_{\bar{f}}H_{u-\bar{\lambda}}^*H_{\bar{g}} = H_{\bar{g}}H_{u-\bar{\lambda}}^*H_{\bar{f}}.$$

因此,

$$H_{\bar{f}}H_{u-\bar{\lambda}}^*H_{\bar{g}}1 = H_{\bar{g}}H_{u-\bar{\lambda}}^*H_{\bar{f}}1.$$

直接计算上式可得

$$\begin{aligned} H_{\bar{f}}H_{u-\bar{\lambda}}^*H_{\bar{g}}1 &= H_{\bar{f}}H_{u-\bar{\lambda}}^*\bar{g} \\ &= H_{\bar{f}}P(u-\lambda)\bar{g} \\ &= (I-P)\bar{f}P(u-\lambda)\bar{g} \\ &= \bar{f}P(u-\lambda)\bar{g} - P\bar{f}P(u-\lambda)\bar{g} \\ &= \bar{f}P(u-\lambda)\bar{g} - P(u-\lambda)\bar{f}\bar{g} \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned} H_{\bar{g}}H_{u-\bar{\lambda}}^*H_{\bar{f}}1 &= H_{\bar{g}}H_{u-\bar{\lambda}}^*\bar{f} \\ &= H_{\bar{g}}P(u-\lambda)\bar{f} \\ &= (I-P)\bar{g}(u-\lambda)\bar{f}, \end{aligned}$$

则

$$\bar{f}P(u-\lambda)\bar{g} - P(u-\lambda)\bar{f}\bar{g} = (I-P)(u-\lambda)\bar{f}\bar{g}.$$

整理上式可得

$$\bar{f}[P(u-\lambda)\bar{g} - (u-\lambda)\bar{g}] = 0.$$

根据假设 f 不是常数, 可得

$$P(u-\lambda)\bar{g} = (u-\lambda)\bar{g} \Rightarrow (u-\lambda)\bar{g} \in H^2.$$

证毕. □

下面是本节的主要结果.

定理 3.1 设 f 、 g 和 u 是属于 H^2 的 3 个非常值函数, 则 $H_{\bar{f}}H_u^*H_{\bar{g}} = H_{\bar{g}}H_u^*H_{\bar{f}}$ 成立的充分必要条件是下列条件之一成立:

- (1) 存在常数 λ , 使得 $(u-\lambda)\bar{f}$ 和 $(u-\lambda)\bar{g}$ 都属于 H^2 ;
- (2) f 和 g 的非平凡线性组合是常数.

证明 先证充分性. 如果 f 和 g 的非平凡线性组合为常数, 不失一般性, 可设 $f = ag + b$, 其中 a 和 b 为常数, 则 $H_{\bar{f}} = aH_{\bar{g}}$. 因此,

$$H_{\bar{f}}H_u^*H_{\bar{g}} = aH_{\bar{g}}H_u^*H_{\bar{g}}, \quad H_{\bar{g}}H_u^*H_{\bar{f}} = aH_{\bar{g}}H_u^*H_{\bar{g}}.$$

若存在常数 λ , 使得 $(u - \lambda)\bar{f}$ 和 $(u - \lambda)\bar{g}$ 都属于 H^2 , 则对于 $z \in \mathbb{D}$, 有

$$\begin{aligned} H_{\bar{f}}H_{\bar{u}-\bar{\lambda}}^*H_{\bar{g}}K_z &= H_{\bar{f}}H_{\bar{u}-\bar{\lambda}}^*(\bar{g} - \bar{g}(z))K_z \\ &= H_{\bar{f}}P(u - \lambda)(\bar{g} - \bar{g}(z))K_z \\ &= P_{-}\bar{f}(u - \lambda)(\bar{g} - \bar{g}(z))K_z \\ &= P_{-}(u - \lambda)\bar{f}\bar{g}K_z \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned} H_{\bar{g}}H_{\bar{u}-\bar{\lambda}}^*H_{\bar{f}}K_z &= H_{\bar{g}}P(u - \lambda)(\bar{f} - \bar{f}(z))K_z \\ &= P_{-}\bar{g}(u - \lambda)(\bar{f} - \bar{f}(z))K_z \\ &= P_{-}(u - \lambda)\bar{f}\bar{g}K_z. \end{aligned}$$

因此,

$$H_{\bar{f}}H_{\bar{u}-\bar{\lambda}}^*H_{\bar{g}}K_z = H_{\bar{g}}H_{\bar{u}-\bar{\lambda}}^*H_{\bar{f}}K_z.$$

由于 $\{K_z : z \in \mathbb{D}\}$ 的有限线性组合全体在 H^2 中稠密, 因此,

$$H_{\bar{f}}H_{\bar{u}-\bar{\lambda}}^*H_{\bar{g}} = H_{\bar{g}}H_{\bar{u}-\bar{\lambda}}^*H_{\bar{f}}$$

和

$$H_{\bar{f}}H_{\bar{u}}^*H_{\bar{g}} = H_{\bar{g}}H_{\bar{u}}^*H_{\bar{f}}$$

成立.

下证必要性. 假设

$$H_{\bar{f}}H_{\bar{u}}^*H_{\bar{g}} = H_{\bar{g}}H_{\bar{u}}^*H_{\bar{f}} \quad (3.1)$$

成立. 由 (1.1) 可知, $H_{\bar{u}}^*H_{\bar{g}} = T_{u\bar{g}} - T_uT_{\bar{g}}$. 故

$$\begin{aligned} H_{\bar{f}}H_{\bar{u}}^*H_{\bar{g}} &= H_{\bar{f}}(T_{u\bar{g}} - T_uT_{\bar{g}}) \\ &= H_{\bar{f}}T_{u\bar{g}} - H_{\bar{f}}T_uT_{\bar{g}} \\ &= H_{\bar{f}}T_{u\bar{g}} - H_{u\bar{f}}T_{\bar{g}}. \end{aligned}$$

同理可得

$$H_{\bar{g}}H_{\bar{u}}^*H_{\bar{f}} = H_{\bar{g}}T_{u\bar{f}} - H_{u\bar{g}}T_{\bar{f}}.$$

这样 (3.1) 变为

$$H_{\bar{f}}T_{u\bar{g}} - H_{u\bar{f}}T_{\bar{g}} = H_{\bar{g}}T_{u\bar{f}} - H_{u\bar{g}}T_{\bar{f}}.$$

将 $I = T_zT_{\bar{z}} + 1 \otimes 1$ 代入上式, 得

$$H_{\bar{f}}(T_zT_{\bar{z}} + 1 \otimes 1)T_{u\bar{g}} - H_{u\bar{f}}(T_zT_{\bar{z}} + 1 \otimes 1)T_{\bar{g}}$$

$$= H_{\bar{g}}(T_z T_{\bar{z}} + 1 \otimes 1)T_{u\bar{f}} - H_{u\bar{g}}(T_z T_{\bar{z}} + 1 \otimes 1)T_{\bar{f}}.$$

化简上式, 得

$$\begin{aligned} & H_{\bar{f}}(1 \otimes 1)T_{u\bar{g}} - H_{u\bar{f}}(1 \otimes 1)T_{\bar{g}} + S_z(H_{\bar{f}}T_{u\bar{z}\bar{g}} - H_{u\bar{f}}T_{\bar{z}\bar{g}}) \\ &= H_{\bar{g}}(1 \otimes 1)T_{u\bar{f}} - H_{u\bar{g}}(1 \otimes 1)T_{\bar{f}} + S_z(H_{\bar{g}}T_{u\bar{z}\bar{f}} - H_{u\bar{g}}T_{\bar{z}\bar{f}}). \end{aligned}$$

对上式两边同时复合算子 T_z , 得

$$\begin{aligned} & H_{\bar{f}}(1 \otimes 1)T_{zu\bar{g}} - H_{u\bar{f}}(1 \otimes 1)T_{z\bar{g}} + S_z(H_{\bar{f}}T_{u\bar{g}} - H_{u\bar{f}}T_{\bar{g}}) \\ &= H_{\bar{g}}(1 \otimes 1)T_{zu\bar{f}} - H_{u\bar{g}}(1 \otimes 1)T_{z\bar{f}} + S_z(H_{\bar{g}}T_{u\bar{f}} - H_{u\bar{g}}T_{\bar{f}}). \end{aligned}$$

因此,

$$H_{\bar{f}}(1 \otimes 1)T_{zu\bar{g}} - H_{u\bar{f}}(1 \otimes 1)T_{z\bar{g}} = H_{\bar{g}}(1 \otimes 1)T_{zu\bar{f}} - H_{u\bar{g}}(1 \otimes 1)T_{z\bar{f}},$$

再化简, 可得

$$P_{-}\bar{f} \otimes P(\bar{z}\bar{u}g) - P_{-}(u\bar{f}) \otimes P(\bar{z}g) = P_{-}\bar{g} \otimes P(\bar{z}\bar{u}f) - P_{-}(u\bar{g}) \otimes P(\bar{z}f). \quad (3.2)$$

因为对于任意的常数 λ , 任何有界 Hankel 算子 H_ϕ 满足 $H_\phi = H_{\phi+\lambda}$. 若 f 或 g 为常数, 则定理 3.1(2) 自然成立. 为了方便讨论, 下面假设 $f(0) = g(0) = 0$ 并且 f 和 g 都不为常数, 则

$$P_{-}\bar{f} = \bar{f}, \quad P_{-}\bar{g} = \bar{g}, \quad P(\bar{z}g) = \bar{z}g \neq 0, \quad P(\bar{z}f) = \bar{z}f \neq 0.$$

这样 (3.2) 就变成了

$$\bar{f} \otimes P(\bar{z}\bar{u}g) - P_{-}(u\bar{f}) \otimes P(\bar{z}g) = \bar{g} \otimes P(\bar{z}\bar{u}f) - P_{-}(u\bar{g}) \otimes P(\bar{z}f). \quad (3.3)$$

接下来对以上的算子方程进行分类讨论.

情形 1 假设 $\bar{f} \otimes P(\bar{z}\bar{u}g)$ 、 $P_{-}(u\bar{f}) \otimes P(\bar{z}g)$ 、 $\bar{g} \otimes P(\bar{z}\bar{u}f)$ 和 $P_{-}(u\bar{g}) \otimes P(\bar{z}f)$ 中至少有一个为零算子.

情形 1.1 设 $\bar{f} \otimes P(\bar{z}\bar{u}g)$ 是零算子, 由于 f 不是常数, 则 $P(\bar{z}\bar{u}g) = 0$, 这样可以推出 $\bar{z}\bar{u}g \in (H^2)^\perp$, 从而 $u\bar{g} \in H^2$. 由引理 3.1 知, $u\bar{f} \in H^2$, 这样定理 3.1(1) 成立.

情形 1.2 设 $P_{-}(u\bar{f}) \otimes P(\bar{z}g)$ 是零算子, 由于 g 不是常数, 则

$$P(\bar{z}g) \neq 0 \quad \text{推出} \quad P_{-}(u\bar{f}) = 0 \quad \text{推出} \quad u\bar{f} \in H^2.$$

由引理 3.1 知 $u\bar{g} \in H^2$, 这样定理 3.1(1) 成立.

类似地, 当 $\bar{g} \otimes P(\bar{z}\bar{u}f) = 0$ 或 $P_{-}(u\bar{g}) \otimes P(\bar{z}f) = 0$ 时, 可以得到同样的结果 $u\bar{f}, u\bar{g} \in H^2$.

情形 2 假设 $\bar{f} \otimes P(\bar{z}\bar{u}g)$ 、 $P_{-}(u\bar{f}) \otimes P(\bar{z}g)$ 、 $\bar{g} \otimes P(\bar{z}\bar{u}f)$ 和 $P_{-}(u\bar{g}) \otimes P(\bar{z}f)$ 都不是零算子. 这样就存在 $\lambda_0 \in \mathbb{D}$, 使得

$$P(\bar{z}\bar{u}g)(\lambda_0) \neq 0, \quad P(\bar{z}g)(\lambda_0) \neq 0, \quad P(\bar{z}\bar{u}f)(\lambda_0) \neq 0, \quad P(\bar{z}f)(\lambda_0) \neq 0.$$

将 (3.3) 两边作用在 K_{λ_0} 上可得

$$(\bar{f} \otimes P(\bar{z}\bar{u}g) - P_{-}(u\bar{f}) \otimes P(\bar{z}g))K_{\lambda_0} = (\bar{g} \otimes P(\bar{z}\bar{u}f) - P_{-}(u\bar{g}) \otimes P(\bar{z}f))K_{\lambda_0},$$

$$\overline{P(\bar{z}ug)(\lambda_0)}\bar{f} - \overline{P(\bar{z}g)(\lambda_0)}P_-(u\bar{f}) = \overline{P(\bar{z}uf)(\lambda_0)}\bar{g} - \overline{P(\bar{z}f)(\lambda_0)}P_-(u\bar{g}).$$

因此, 存在非零常数 a_1 、 a_2 和 a_3 使得

$$P_-(u\bar{g}) = a_1\bar{g} + a_2P_-(u\bar{f}) + a_3\bar{f}. \quad (3.4)$$

将上式代入 (3.3), 可得

$$\bar{g} \otimes (\bar{a}_1\bar{z}f - P(\bar{z}uf)) + P_-(u\bar{f}) \otimes (\bar{a}_2\bar{z}f - \bar{z}g) + \bar{f} \otimes (\bar{a}_3\bar{z}f + P\bar{z}ug) = 0. \quad (3.5)$$

情形 2.1 假设 $\bar{g} \otimes (\bar{a}_1\bar{z}f - P(\bar{z}uf))$ 、 $P_-(u\bar{f}) \otimes (\bar{a}_2\bar{z}f - \bar{z}g)$ 和 $\bar{f} \otimes (\bar{a}_3\bar{z}f + P\bar{z}ug)$ 中至少有一个是零算子, 根据假设, 即, $(\bar{a}_1\bar{z}f - P(\bar{z}uf))$ 、 $(\bar{a}_2\bar{z}f - \bar{z}g)$ 和 $(\bar{a}_3\bar{z}f + P\bar{z}ug)$ 至少一个为 0.

情况 2.1.1 如果 $\bar{a}_1\bar{z}f - P(\bar{z}uf) = 0$, 则 $\bar{a}_1\bar{z}f - \bar{z}uf \in \overline{zH^2}$. 因此, $\bar{a}_1f - \bar{u}f \in \overline{H^2}$, $(u - a_1)\bar{f} \in H^2$. 根据引理 3.1 知 $(u - a_1)\bar{g} \in H^2$, 这样定理 3.1(1) 成立.

情形 2.1.2 如果 $\bar{a}_2\bar{z}f - \bar{z}g = 0$, 则 $\bar{a}_2f = g$, 定理 3.1(2) 成立.

情形 2.1.3 如果 $\bar{a}_3\bar{z}f + P(\bar{z}ug) = 0$, 则 $\bar{a}_3\bar{z}f + \bar{z}ug \in (H^2)^\perp$. 这样 $\bar{a}_3f + \bar{u}g \in \overline{H^2}$. 从而,

$$P_-(u\bar{g}) = -a_3\bar{f} \quad (3.6)$$

成立. 在这种情形的假设下, (3.5) 变为

$$\bar{g} \otimes (\bar{a}_1\bar{z}f - P(\bar{z}uf)) + P_-(u\bar{f}) \otimes (\bar{a}_2\bar{z}f - \bar{z}g) = 0.$$

根据假设, 我们只需要考虑 $\bar{g}$ 、 $(\bar{a}_1\bar{z}f - P(\bar{z}uf))$ 、 $P_-(u\bar{f})$ 和 $(\bar{a}_2\bar{z}f - \bar{z}g)$ 都不是零的情形. 因此存在非零常数 a_4 使得

$$P_-(u\bar{f}) = a_4\bar{g}. \quad (3.7)$$

将 (3.6) 和 (3.7) 代入 (3.4), 可得

$$-2a_3\bar{f} = (a_1 + a_2a_4)\bar{g}.$$

因此定理 3.1(2) 成立.

情形 2.2 假设 $\bar{g} \otimes (\bar{a}_1\bar{z}f - P(\bar{z}uf))$ 、 $P_-(u\bar{f}) \otimes (\bar{a}_2\bar{z}f - \bar{z}g)$ 和 $\bar{f} \otimes (\bar{a}_3\bar{z}f + P\bar{z}ug)$ 都不是零算子, 则存在常数 $\lambda \in \mathbb{D}$, 使得 $(\bar{a}_1\bar{z}f - P(\bar{z}uf))(\lambda)$ 、 $(\bar{a}_2\bar{z}f - \bar{z}g)(\lambda)$ 和 $(\bar{a}_3\bar{z}f + P\bar{z}ug)(\lambda)$ 都不是 0, 将 (3.5) 作用在 K_λ 可得

$$\begin{aligned} & (\bar{g} \otimes (\bar{a}_1\bar{z}f - P(\bar{z}uf)) + P_-(u\bar{f}) \otimes (\bar{a}_2\bar{z}f - \bar{z}g) + \bar{f} \otimes (\bar{a}_3\bar{z}f + P\bar{z}ug))K_\lambda \\ &= \langle K_\lambda, \bar{a}_1\bar{z}f - P(\bar{z}uf) \rangle \bar{g} + \langle K_\lambda, \bar{a}_2\bar{z}f - \bar{z}g \rangle P_-(\bar{f}u) + \langle K_\lambda, \bar{a}_3\bar{z}f + P\bar{z}ug \rangle \bar{f} \\ &= (\bar{a}_1\bar{z}f - P(\bar{z}uf))(\lambda)\bar{g} + (\bar{a}_2\bar{z}f - \bar{z}g)(\lambda)P_-(\bar{f}u) + (\bar{a}_3\bar{z}f + P\bar{z}ug)(\lambda)\bar{f} \\ &= 0. \end{aligned}$$

因此存在非零常数 b_1 和 b_2 使得

$$P_-(\bar{f}u) = b_1\bar{g} + b_2\bar{f}. \quad (3.8)$$

将 (3.8) 代入 (3.5), 可得

$$\bar{g} \otimes (\bar{b}_1(\bar{a}_2\bar{z}f - \bar{z}g) + \bar{a}_1\bar{z}f - P(\bar{z}\bar{u}f)) = -\bar{f} \otimes (\bar{b}_2(\bar{a}_2\bar{z}f - \bar{z}g) + \bar{a}_3\bar{z}f + P\bar{z}\bar{u}g). \quad (3.9)$$

情形 2.2.1 如果 $(\bar{b}_1(\bar{a}_2\bar{z}f - \bar{z}g) + \bar{a}_1\bar{z}f - P(\bar{z}\bar{u}f))$ 和 $(\bar{b}_2(\bar{a}_2\bar{z}f - \bar{z}g) + \bar{a}_3\bar{z}f + P\bar{z}\bar{u}g)$ 都不是 0, 则 f 是 g 的常数倍.

情形 2.2.2 由假设知, f 和 g 都不是 0. 令 $\bar{b}_1(\bar{a}_2\bar{z}f - \bar{z}g) + \bar{a}_1\bar{z}f - P(\bar{z}\bar{u}f) = 0$, 则

$$\bar{b}_2(\bar{a}_2\bar{z}f - \bar{z}g) + \bar{a}_3\bar{z}f + P\bar{z}\bar{u}g = 0.$$

因此,

$$0 = \bar{b}_1(\bar{a}_2\bar{z}f - \bar{z}g) + \bar{a}_1\bar{z}f - P(\bar{z}\bar{u}f) = (\bar{a}_2\bar{b}_1 + \bar{a}_1)\bar{z}f - \bar{b}_1\bar{z}g - P(\bar{z}\bar{u}f),$$

则

$$(\overline{a_2b_1 + a_1})f - \bar{b}_1g - \bar{u}f \in \overline{H^2}.$$

于是,

$$0 = (a_2b_1 + a_1)\bar{f} - b_1\bar{g} - P_-(\bar{f}u). \quad (3.10)$$

结合 (3.8) 和 (3.10) 知, 定理 3.1(2) 成立. 类似地, 考虑 $\bar{b}_2(\bar{a}_2\bar{z}f - \bar{z}g) + \bar{a}_3\bar{z}f + P\bar{z}\bar{u}g = 0$. 定理证毕. $\square$

例 3.1 如果 u 是内函数, $f, g \in H^2 \cap u\overline{H^2}$, 则

$$H_{\bar{f}}H_{\bar{u}}^*H_{\bar{g}} = H_{\bar{g}}H_{\bar{u}}^*H_{\bar{f}}.$$

证明 因为 $f, g \in H^2 \cap u\overline{H^2}$, 所以存在 $f_1, g_1 \in H^2$ 使得

$$f = uf_1, \quad g = ug_1.$$

这样, $u\bar{f} = u(\bar{u}f_1) = f_1 \in H^2$ 和 $u\bar{g} = u(\bar{u}g_1) = g_1 \in H^2$. 由定理 3.1 可得 $H_{\bar{f}}H_{\bar{u}}^*H_{\bar{g}} = H_{\bar{g}}H_{\bar{u}}^*H_{\bar{f}}$. $\square$

致谢 衷心感谢审稿人的宝贵意见.

参考文献

- 1 Xia D, Zheng D. Products of Hankel operators. *Integral Equations Operator Theory*, 1997, 29: 339–363
- 2 Sarason D. Algebraic properties of truncated Toeplitz operators. *Oper Matrices*, 2007, 1: 491–526
- 3 Baranov A, Chalendar I, Fricain E, et al. Bounded symbols and reproducing Kernel thesis for truncated Toeplitz operators. *J Funct Anal*, 2010, 259: 2673–2701
- 4 Ma P, Zheng D. Compact truncated Toeplitz operators. *J Funct Anal*, 2016, 270: 4256–4279
- 5 Ding X, Sang Y. Dual truncated Toeplitz operators. *J Math Anal Appl*, 2018, 461: 929–946
- 6 Yoshino T. The conditions that the product of Hankel operators is also a Hankel operator. *Arch Math (Basel)*, 1999, 73: 146–153
- 7 Brown A, Halmos P. Algebraic properties of Toeplitz operators. *J Reine Angew Math*, 1964, 1964: 89–102
- 8 Ahern P. On the range of the Berezin transform. *J Funct Anal*, 2004, 215: 206–216
- 9 Ahern P, Čučković Ž. A theorem of Brown-Halmos type for Bergman space Toeplitz operators. *J Funct Anal*, 2001, 187: 200–210

Two questions on products of Hankel operators

Xuanhao Ding & Yuanqi Sang

Abstract Suppose f, u and g are in the Hardy space of the unit circle H^2 , and h is a square integrable function on the unit circle. $H_{\bar{f}}, H_{\bar{u}}, H_{\bar{g}}$ and H_h are Hankel operators which take the Hardy space of the unit circle H^2 into the orthogonal complement of the Hardy space $(H^2)^\perp$. We obtain necessary and sufficient conditions for $H_{\bar{f}}H_{\bar{u}}^*H_{\bar{g}} = H_h$ and $H_{\bar{f}}H_{\bar{u}}^*H_{\bar{g}} = H_{\bar{g}}H_{\bar{u}}^*H_{\bar{f}}$, respectively.

Keywords Hankel operator, Hardy space, product

MSC(2020) 47B35

doi: 10.1360/N012019-00017