Markov 调节中基于时滞和相依风险模型的最优再保险与投资

张彩斌¹, 梁志彬^{2*}, 袁锦泉³

1. 南京财经大学金融学院, 南京 210023;

2. 南京师范大学数学科学学院, 南京 210023;

3. 香港大学统计与精算学系, 香港

E-mail: zhang_caibin@163.com, liangzhibin111@hotmail.com, keyuen@hku.hk

收稿日期: 2017-06-09; 接受日期: 2019-06-17; 网络出版日期: 2020-03-30; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11471165 和 11771079) 和香港研究资助局 (批准号: HKU17329216) 资助项目

摘要 本文研究保险公司在 Markov 调节下基于时滞及相依风险模型的最优再保险与最优投资问题, 其中市场被划分为有限个状态, 一些重要的参数随着市场状态的转换而变化. 假设保险公司的盈余过程由复合 Poisson 过程描述, 而风险资产的价格过程由几何跳扩散模型刻画, 并且假设这两个跳过程是相依的. 以最大化终端财富值的均值 - 方差效用为目标, 在博弈论框架下, 利用随机控制理论和相应的广义 Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) 方程, 本文得到最优策略和值函数的显式表达, 并证明解的存在性和唯一性. 最后, 通过一些数值实例, 验证所得结论的正确性, 并探讨一些重要参数对最优策略的影响.

关键词 均值 - 方差 再保险与投资 相依风险 广义 HJB 方程 时滞 Markov 调节

MSC (2020) 主题分类 62P05, 93E20, 97M30

1 引言

近年来, 风险管理和风险控制已成为保险公司的重要议题之一. 为了降低自身经营的风险, 保险公司往往通过开展再保险业务, 以降低潜在的利润为代价, 将自己的部分风险转移给另一方. 另外, 为了提高偿付能力, 保持保险业务的正常运行, 以及增加公司的利润和提高竞争力, 保险公司将收取的保费资金进行投资. 因此, 寻找最优的再保险策略和投资策略来平衡风险和利润对保险公司来说是非常有意义的. 在已有的工作中, 如文献 [1–4] 等重要文献, 终端期望效用最大化和破产概率最小化是保险公司常用的两个目标准则.

保险公司非常感兴趣的另一个目标是均值 - 方差准则. 相比于期望效用最大化和破产概率最小化准则, 均值 - 方差准则能够使保险公司在其可接受的收益下尽可能地降低风险 (由收益的方差量化).

英文引用格式: Zhang C B, Liang Z B, Yuen K C. Optimal reinsurance and investment in a Markovian regime-switching economy with delay and common shock (in Chinese). *Sci Sin Math*, 2021, 51: 773–796, doi: 10.1360/SCM-2017-0371

这类准则不仅考虑了风险,同时还权衡了收益.由于其合理性及实用性,均值-方差准则已成为金融理论中一种比较流行的决策准则.关于均值-方差准则的研究,最早可以追溯到文献[5].此后,均值-方差准则下的最优化问题及其在金融保险中的推广与应用的研究工作层出不穷.例如,文献[6]引进了一种嵌入技术,将原来离散时间模型下的均值-方差问题转化为随机线性二次控制问题,这种嵌入技术被文献[7]推广到相应的连续时间模型中;在 Markov 调节风险模型下,文献[8]研究了一个连续时间模型下的最优投资组合问题并获得了最优投资组合策略和有效前沿.而均值-方差准则在最优再保险方面的应用与推广可参见文献[9-14]等.

在实践中,经济环境复杂多变,往往存在着许多不同的市场状态,如熊市和牛市.因此,股票的收益率和波动率随着市场状态的改变而变化是实际金融市场中一种普遍的现象.对于该种现象,Markov 调节风险模型能够很好地进行刻画,并且近年来备受研究者的关注.例如,文献[2,8,15]在 Markov 调节风险模型下研究了各种随机最优控制问题.另一方面,正如文献[16]所提及的,大多数关于最优投资和最优再保险问题研究的文献在研究最优控制问题时不考虑时滞带来的影响.换句话说,决策者在做决策时,往往只关注当下而忽略了历史信息.然而,在实际金融保险市场中,过去的历史信息,如之前的经营管理方法及决策,对现在的投资与购买再保险起着重要的借鉴和参考作用.因此,在最优化问题中考虑时滞带来的影响是更加合理的.关于时滞模型及其应用,可以参见文献[16-20]等.

尽管目前有大量的文献研究最优再保险和最优投资问题,但基于相依风险模型考虑相应的最优化问题的的工作却不多,现有的工作有文献[4,13,21-23].另外,许多关于最优投资问题的研究通常假设股票价格由扩散模型刻画,特别是几何 Brown 运动模型.但是,实际中,一些突发或者重大的事件往往导致股票市场发生巨大的波动使得股票价格出现大幅度的涨跌.基于此,采用几何跳扩散模型来描述股票价格的变化是合理和现实的.在均值-方差准则下,文献[13]研究了金融保险市场中的一个最优再保险与投资问题,其中,保险风险模型由复合 Poisson 过程刻画而风险资产的价格过程由跳扩散模型描述,并且假设这两个跳过程是相互关联的,即一个共同的事件同时影响股票市场和保险市场.事实上,保险业务与投资业务之间总会以某种方式相互联系影响着.例如,地震或长期极端天气等严重事件不仅对金融市场有直接的不利影响,而且还会引发各种保险索赔.

在以上研究的基础上,本文探讨了跳扩散相依风险模型下的最优再保险与最优投资问题,其中,由复合 Poisson 过程刻画的保险风险模型与由跳扩散模型描述的风险资产的价格过程是相依的.为使模型更具实际意义,我们假设一些重要的参数由一个连续时间的 Markov 链控制,风险厌恶系数不仅依赖于时间状态,同时还依赖于市场状态,并且假设当下所做的决策还依赖于过去的历史信息.此外,我们还假设市场不允许卖空.由于目标函数是非线性函数的期望形式,由文献[24]可知,此类问题是时间不一致性问题,从而 Bellman 最优性原理在这里不再适用.不同于文献[13],我们采用博弈论(参见文献[23-25])的方法去寻找 Nash 均衡策略.在最大化终端均值-方差效用准则下,本文运用随机控制理论和广义 HJB 方程,得到最优策略和值函数的显式表达,并证明这些解的存在性和唯一性.

本文余下内容安排如下.第2节给出模型与假设.第3节描述最优控制问题,并给出对应的广义 HJB 方程和验证定理.第4节致力于求解该广义 HJB 方程,从而得到相应的最优策略和值函数.第5节展示一些数值例子来说明所获得的结论,并探讨一些重要参数对最优策略的影响.最后,第6节对本文进行总结与展望.

2 模型与假设

记 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ 为概率空间,其中 $\mathcal{F}_t$ 表示到 t 时刻的信息流,它满足通常条件.设 $\{\alpha(t) : t \in [0, T]\}$

是一个连续时间、 $\mathcal{F}_t$ 可测且取值于有限个状态 $\mathcal{M} = \{1, 2, \dots, l\}$ 的 Markov 链. 假设此 Markov 链是平稳的, 其 Q 算子 $Q = (q_{ij})_{l \times l}$ 满足, 对任意的状态 $i \in \mathcal{M}$, 有 $\sum_{j=1}^l q_{ij} = 0$. 本文假设当 $i \neq j$ 时, $q_{ij} > 0$. 因此, 有

$$q_{ii} = -\sum_{j \neq i} q_{ij} < 0.$$

假设金融市场里包含两种可连续交易的资产. 其中一种资产为债券, 它的价格过程由下面的常微分方程刻画:

$$\begin{cases} dS_0(t) = r_0(t)S_0(t)dt, & t \in [0, T], \\ S_0(0) = 1, \end{cases}$$

其中 $r_0(t) (> 0)$ 为无风险利率. 另一种资产是股票, 其价格过程满足

$$\begin{cases} dS_1(t) = S_1(t-)\left[r_1(t, \alpha(t))dt + \sigma_1(t, \alpha(t))dW_1(t) + d\sum_{j=1}^{M_{2\alpha(t)}(t)} Y_j\right], & t \in [0, T], \\ S_1(0) = S_0, \end{cases} \quad (2.1)$$

其中 S_0 为初始价格; $r_1(t, i)$ 和 $\sigma_1(t, i)$ 分别为股票价格过程在市场状态 i 下的收益率和波动率; $\{W_1(t)\}_{t \geq 0}$ 是一个标准的 $\{\mathcal{F}_t\}$ 适应的 Brown 运动; $\{M_{2i}(t)\}_{t \geq 0}$ 为市场状态 i 下强度为 $\lambda_{2i} + \lambda_{0i}$ 的齐次 Poisson 计数过程, 表示到 t 时刻为止股票价格发生跳的次数; Y_j 表示第 j 次的跳幅, 且随机跳幅 $\{Y_j, j \geq 1\}$ 独立同分布并满足 $P\{Y_j > -1, j = 1, 2, \dots\} = 1$, 其均值为 $E(Y_j) = \mu_2$, 二阶矩为 $E(Y_j^2) = \beta_2$. 像往常一样, 假设过程 $\{W_1(t)\}_{t \geq 0}$ 、 $\{M_{2i}(t)\}_{t \geq 0}$ 和 $\{Y_j, j \geq 1\}$ 相互独立.

股票价格过程 (2.1) 中的扩散项表示由于经济形势的逐步变化使得股票价格发生正常波动, 而 (2.1) 中跳的部分描述的是突发或者重大事件对股票市场的巨大波动, 导致股票价格发生突然变化. 根据随机微分方程的理论可知, 方程 (2.1) 存在唯一的解.

假设保险公司在 t 时刻的盈余可表示为

$$dR(t) = c_1(\alpha(t))dt + \sigma_0(t, \alpha(t))dW_0(t) - d\sum_{j=1}^{M_{1\alpha(t)}(t)} X_j, \quad R(0) = R_0, \quad (2.2)$$

其中 R_0 是初始盈余; $\{W_0(t)\}_{t \geq 0}$ 是信息流 $\{\mathcal{F}_t\}$ 上的标准 Brown 运动; $\{M_{1i}(t)\}_{t \geq 0}$ 是市场状态 i 下强度为 $\lambda_{1i} + \lambda_{0i} > 0$ 的 Poisson 过程, 表示到 t 时刻为止的理赔次数; X_j 表示第 j 次理赔额, 假设随机理赔额 $\{X_j, j \geq 1\}$ 独立同分布且独立于过程 $\{M_{1i}(t)\}_{t \geq 0}$, 其一阶矩为 $E(X_j) = \mu_1$, 二阶矩为 $E(X_j^2) = \beta_1$. 假设保险公司采用安全负荷系数为 η_1 的期望值保费原理进行定价, 那么单位时间内其收取的保费为 $c_1(i) = (1 + \eta_1)a_{1i}$, 其中, $a_{1i} = (\lambda_{1i} + \lambda_{0i})\mu_1$. 站在保险公司的角度来看, 盈余过程 (2.2) 实际上是一个与保险合同业务有关的盈余过程.

假设 Poisson 计数过程 $\{M_{1i}(t)\}_{t \geq 0}$ 和 $\{M_{2i}(t)\}_{t \geq 0}$ 通过以下方式相互依赖:

$$M_{1i}(t) = N_{1i}(t) + N_{0i}(t) \quad \text{和} \quad M_{2i}(t) = N_{2i}(t) + N_{0i}(t),$$

其中 $N_{1i}(t)$ 、 $N_{2i}(t)$ 和 $N_{0i}(t)$ 是三个独立的 Poisson 过程, 对应的强度分别为 λ_{1i} 、 λ_{2i} 和 λ_{0i} . 显然, 风险资产和总索赔过程之间的依赖性体现在计数过程 $N_{0i}(t)$ 中. 进一步, 假设过程 $\{W_0(t)\}_{t \geq 0}$ 、 $\{W_1(t)\}_{t \geq 0}$ 、 $\{N_{1i}(t)\}_{t \geq 0}$ 、 $\{X_j, j \geq 1\}$ 、 $\{N_{2i}(t)\}_{t \geq 0}$ 、 $\{Y_j, j \geq 1\}$ 和 $\{N_{0i}(t)\}_{t \geq 0}$ 相互独立.

假设保险公司可以购买再保险. 记 $q(t) (\geq 0)$ 表示保险公司在 t 时刻的自留比例, 即对任意潜在的理赔额 X_j , 保险公司自留风险为 $q(t)X_j$, 再保险公司分担的风险为 $(1 - q(t))X_j$. 假设再保险公司同样采用期望值保费原理向原保险公司收取保费, 但是使用一个较大的安全负荷 $\eta_2 (\geq \eta_1)$. 因此, 保险公司需向再保险公司支付的保费为 $c_2(q(t)) = (1 + \eta_2)(1 - q(t))a_{1i}$. 注意到, 当 $q(t) \in [0, 1]$ 时, 对应于再保险业务, 而 $q(t) > 1$ 表示保险公司从其他再保险公司获得额外的保险业务 (即作为再保险公司). 于是, 在再保险合同 $q(t)$ 下, 原保险公司的盈余过程可表示为

$$dR^q(t) = [(1 + \eta_2)q(t)a_{1\alpha(t)} - \eta a_{1\alpha(t)}]dt + \sigma_0(t, \alpha(t))q(t)dW_0(t) - q(t)d \sum_{j=1}^{M_{1\alpha(t)}(t)} X_j,$$

其中 $\eta = \eta_2 - \eta_1$.

假设允许保险公司在金融市场里进行投资. 记 $u(t)$ 为 t 时刻保险公司投资到股票的金额. 当 $u(t) < 0$ 时意味着股票被卖空. 在本文中, 假设市场不允许卖空, 要求 $u(t)$ 必须是非负的, 即 $u(t) \geq 0$. 令 $\pi(t) = (q(t), u(t))^T$, 其中 π^T 表示 π 的转置. 从而, 在自融资的条件下, 财富过程可以表示为

$$\begin{aligned} dR^\pi(t) &= dR^q(t) + \frac{u(t)}{S_1(t)}dS_1(t) + \frac{R^\pi(t) - u(t)}{S_0(t)}dS_0(t) \\ &= [r_0(t)R^\pi(t) + r(t, \alpha(t))u(t) + (1 + \eta_2)q(t)a_{1\alpha(t)} - \eta a_{1\alpha(t)}]dt \\ &\quad + \sigma_0(t, \alpha(t))q(t)dW_0(t) + \sigma_1(t, \alpha(t))u(t)dW_1(t) \\ &\quad - q(t)d \sum_{j=1}^{M_{1\alpha(t)}(t)} X_j + u(t)d \sum_{j=1}^{M_{2\alpha(t)}(t)} Y_j, \end{aligned}$$

其中 $r(t, \alpha(t)) = r_1(t, \alpha(t)) - r_0(t)$.

现在考虑资本的即时流入或流出对原本财富过程的影响. 我们用 $X^\pi(t)$ 来表示具有时滞效用的保险公司的财富过程, 设

$$\begin{cases} Y^\pi(t) = \int_{-\delta}^0 e^{As} X^\pi(t+s)ds, \\ \bar{Y}^\pi(t) = \frac{Y^\pi(t)}{\int_{-\delta}^0 e^{As} ds}, \\ Z^\pi(t) = X^\pi(t - \delta), \end{cases}$$

其中 $A \geq 0$ 和 $\delta > 0$ 分别是给定的平均参数和时滞参数, 积分项中的 e^{As} 表示指数衰减因子. $Y^\pi(t)$ 、 $\bar{Y}^\pi(t)$ 和 $Z^\pi(t)$ 分别反映了在时间段 $[t - \delta, t]$ 中资本的综合、平均和逐点时滞信息. 记函数 $f(t, X^\pi(t) - \bar{Y}^\pi(t), X^\pi(t) - Z^\pi(t))$ 表示资本的流入/流出总额, 其中 $X^\pi(t) - \bar{Y}^\pi(t)$ 描述的是 $t - \delta$ 到 t 时间内财富值的平均变化, 而 $X^\pi(t) - Z^\pi(t)$ 刻画的是 $[t - \delta, t]$ 时间内财富值的绝对变化. 这种与过去财富值表现密切联系的资本流入或流出行为在实际的金融投资市场中经常发生. 例如, 若过去一段时间公司经营状况良好, 此时保险公司具有较好的收益, 那么保险公司则会拿出部分收益作为红利奖励给股东, 这对应的是资本流出的情形, 即 $f > 0$. 相反, 若过去的经营不佳, 为了达到初期的目标, 保险公司则会进行注资或者融资来弥补相应的损失, 这对应的是资本流入的情形, 此时 $f < 0$. 因此, 在时滞环境下, 保险公司的财富过程变为

$$dX^\pi(t) = dR^\pi(t) - f(t, X^\pi(t) - \bar{Y}^\pi(t), X^\pi(t) - Z^\pi(t))dt. \quad (2.3)$$

为了问题讨论的方便, 假设资本流入或流出与过去的财富值具有线性的关系, 即

$$f(t, X^\pi(t) - \bar{Y}^\pi(t), X^\pi(t) - Z^\pi(t)) = B_1(t)(X^\pi(t) - \bar{Y}^\pi(t)) + B_2(X^\pi(t) - Z^\pi(t)),$$

其中 $B_1(t) (\geq 0)$ 是一个确定的且一致有界的函数, B_2 是一个大于 0 的常数. 记

$$\tilde{B}_1(t) = B_1(t) \left(\int_{-\delta}^0 e^{As} ds \right)^{-1},$$

我们把财富过程 (2.3) 改写为

$$\begin{cases} dX^\pi(t) = [(r_0(t) - B_1(t) - B_2)X^\pi(t) + \tilde{B}_1(t)Y^\pi(t) + B_2Z^\pi(t) \\ \quad + r(t, \alpha(t))u(t) + (1 + \eta_2)q(t)a_{1\alpha(t)} - \eta a_{1\alpha(t)}]dt \\ \quad + \sigma_0(t, \alpha(t))q(t)dW_0(t) + \sigma_1(t, \alpha(t))u(t)dW_1(t) \\ \quad - q(t)d \sum_{j=1}^{M_{1\alpha(t)}(t)} X_j + u(t)d \sum_{j=1}^{M_{2\alpha(t)}(t)} Y_j, \\ dY^\pi(t) = [X^\pi(t) - AY^\pi(t) - e^{-A\delta}Z^\pi(t)]dt, \\ X^\pi(t) = x, \quad Y^\pi(t) = y, \quad Z^\pi(t) = z. \end{cases} \quad (2.4)$$

假设当 $t \in [-\delta, 0]$ 时, $X^\pi(t) = x > 0$, 也就是说, 保险公司在 $-\delta$ 时刻已经拥有了财富 x 且在时间段 $[-\delta, 0]$ 内未进行任何业务的运营.

定义 2.1 称策略 $\pi(t) = (q(t), u(t))^T$ 是一个可容许策略, 如果它满足以下条件:

- (i) $\pi(t) = (q(t), u(t))^T$ 是 $\mathcal{F}_t$ 可料的;
- (ii) $q(t) \geq 0$ 且 $u(t) \geq 0$;
- (iii) $E \int_0^T [|q(t)|^2 + |u(t)|^2] dt < +\infty$;
- (iv) 方程 (2.4) 关于 $(X^\pi(t), Y^\pi(t))$ 存在唯一的解.

记 Π 表示所有可容许策略的集合.

在结束本节之前, 我们提出以下假设:

假设 2.1 (A₁) 在时间 $[t, T]$ 内, 交易可以连续地进行, 且没有交易费用的产生也不考虑交税;

(A₂) $r_0(t)$ 、 $r_1(t, i)$ 、 $\sigma_0(t, i)$ 和 $\sigma_1(t, i)$ 关于 t 可测且一致有界;

(A₃) 为了使问题可解且为有限维, 假设

$$\tilde{B}_1(t) = \theta(r_0(t) - B_1(t) - B_2 + A + \theta) \quad \text{和} \quad B_2 = \theta e^{-A\delta},$$

其中 θ 是一个权重参数, 将在下一节进行介绍.

虽然假设 (A₃) 有一定的局限性, 但这两个条件保证了此时滞最优控制问题是有限维的、可解的, 并且使得下一节定义的值函数 V 只依赖于 (t, x, y, i) . 更多有关此假设的详细介绍参见文献 [16, 18] 等.

3 最优控制问题

本文的目标准则是最大化终端财富效用, 其中效用函数为均值 - 方差的形式, 即我们的目标函数为

$$J(t, x, y, z, i, \pi) = E_{t, x, y, z, i} [X^\pi(T) + \theta Y^\pi(T)] - \frac{\gamma(t, i)}{2} \text{Var}_{t, x, y, z, i} [X^\pi(T) + \theta Y^\pi(T)]$$

$$\triangleq \mathbb{E}_{t,x,y,z,i}[F(t,i,X^\pi(T)+\theta Y^\pi(T))] + G(t,i,\mathbb{E}_{t,x,y,z,i}[X^\pi(T)+\theta Y^\pi(T)]),$$

其中

$$\begin{cases} F(t,i,x) = x - \frac{\gamma(t,i)}{2}x^2, \\ G(t,i,x) = \frac{\gamma(t,i)}{2}x^2, \end{cases}$$

这里 $\gamma(t,i) (> 0)$ 为市场状态 i 下的风险厌恶系数, $\mathbb{E}_{t,x,y,z,i}[\cdot]$ 和 $\text{Var}_{t,x,y,z,i}[\cdot]$ 分别为基于初始值 x, y 和 z 的条件期望和条件方差, $\theta (\geq 0)$ 为 $X^\pi(T)$ 与 $Y^\pi(T)$ 之间的权重参数. 通过引入权重参数 θ , 我们不仅考虑了终端财富值 $X^\pi(T)$ 的大小, 而且还考虑到了 $[T-\delta, T]$ 时间内的累积财富值 $Y^\pi(T)$ 所带来的影响, 这可以帮助保险公司更加合理地做出相关决策.

注意到本文中的目标函数是基于非线性函数 $G(\cdot)$ 的期望形式, 如文献 [24] 所述, 此类问题是一个时间不一致性问题. 这意味着 Bellman 最优性原理不再适用. 为了求得时间一致性策略, 首先引入均衡策略的定义.

定义 3.1 给定一个策略 π^* , 构建一个新的策略 π_h :

$$\pi_h(s,x,y,z,i) = \begin{cases} \pi(s,x,y,z,i), & t \leq s < t+h, \\ \pi^*(s,x,y,z,i), & t+h \leq s \leq T, \end{cases}$$

其中 $\pi \in \Pi$, $h > 0$. 对于任意的 $\pi \in \Pi$ 和 $(t,x,y,z,i) \in [0,T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathcal{M}$, 如果

$$\liminf_{h \rightarrow 0} \frac{J(t,x,y,z,i,\pi^*) - J(t,x,y,z,i,\pi_h)}{h} \geq 0$$

恒成立, 则称 π^* 是一个均衡策略. 此时均衡值函数定义为

$$V(t,x,y,z,i) = J(t,x,y,z,i,\pi^*) = \sup_{\pi \in \Pi} J(t,x,y,z,i,\pi).$$

由定义 3.1 可知, 均衡策略是一个时间一致性策略. 因此, 在标准的时间一致性情形下, 均衡策略与通常的最优策略是一致的, 而均衡值函数就是通常所求的值函数.

另外, 正如文献 [16, 18] 所述, 时滞模型下的最优控制问题一般是无限维问题. 要想求解该最优化问题并获得相应的最优结果, 我们需对一些参数附加一些额外条件. 本文中, 在 (A_3) 的假设条件下, 值函数 V 具有如下形式:

$$V(t,x,y,z,i) = V(t,x,y,i). \quad (3.1)$$

为了书写的方便, 我们把 $r_0(t), r(t,i), \sigma_0(t,i), \sigma_1(t,i), B_1(t)$ 和 $\tilde{B}_1(t)$ 分别简记为 $r_0, r_i, \sigma_{0i}, \sigma_{1i}, B_1$ 和 $\tilde{B}_1$. 令 $C^{1,2,1}([0,T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ 表示满足以下条件的函数的集合: 函数 $\varphi(t,x,y,i)$ 及其偏导数 $\varphi_t(t,x,y,i), \varphi_x(t,x,y,i), \varphi_{xx}(t,x,y,i)$ 和 $\varphi_y(t,x,y,i)$ 均在定义域 $[0,T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 上连续. 对于任意函数 $\varphi(t,x,y,i) \in C^{1,2,1}$ 和固定的 $\pi \in \Pi$, 跳扩散模型 (2.4) 的微分算子为

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^\pi \varphi(t,x,y,i) = & [(r_0 - B_1 - B_2)x + \tilde{B}_1 y + B_2 z + r_i u + (1 + \eta_2)qa_{1i} - \eta a_{1i}] \varphi_x(t,x,y,i) \\ & + (x - Ay - e^{-A\delta} z) \varphi_y(t,x,y,i) + \frac{1}{2}(\sigma_{0i}^2 q^2 + \sigma_{1i}^2 u^2) \varphi_{xx}(t,x,y,i) \\ & + \lambda_{1i} \mathbb{E}[\varphi(t,x - qX_j, y, i) - \varphi(t,x,y,i)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \lambda_{2i} E[\varphi(t, x + uY_j, y, i) - \varphi(t, x, y, i)] \\
& + \lambda_{0i} [\varphi(t, x - qX_j + uY_j, y, i) - \varphi(t, x, y, i)] \\
& + \sum_{j=1}^l q_{ij} [\varphi(t, x, y, j) - \varphi(t, x, y, i)] + \varphi_t(t, x, y, i).
\end{aligned} \tag{3.2}$$

类似于文献 [24], 现在来定义广义 HJB 系统.

定义 3.2 Nash 均衡问题中的广义 HJB 系统定义如下:

$$\begin{cases} \sup_{\pi \in \Pi} \{ \mathcal{A}^\pi V(t, x, y, i) - \mathcal{A}^\pi f(t, x, y, i, t, i) + \mathcal{A}^\pi f^{t,i}(t, x, y, i) \\ \quad - \mathcal{A}^\pi (G \diamond g)(t, x, y, i) + \mathcal{H}^\pi g(t, x, y, i) \} = 0, & 0 \leq t \leq T, \\ \mathcal{A}^{\pi^*} f^{s,k}(t, x, y, i) = 0, & 0 \leq t \leq T, \\ \mathcal{A}^{\pi^*} g(t, x, y, i) = 0, & 0 \leq t \leq T, \\ V(T, x, y, i) = F(T, i, x + \theta y) + G(T, i, x + \theta y), \\ f^{s,j}(T, x, y, i) = F(s, j, x + \theta y), \\ g(T, x, y, i) = x + \theta y, \end{cases} \tag{3.3}$$

其中函数 f 和 g 定义为

$$f(t, x, y, i, s, j) \triangleq E_{t,x,y,i}[F(s, j, X^{\pi^*}(T) + \theta Y^{\pi^*}(T))], \tag{3.4}$$

$$g(t, x, y, i) \triangleq E_{t,x,y,i}[X^{\pi^*}(T) + \theta Y^{\pi^*}(T)], \tag{3.5}$$

这里 π^* 是使得系统 (3.3) 中第一个方程达到最大值的策略, $f^{s,j}$ 、 $G \diamond g$ 、 $\mathcal{H}^\pi g$ 和 G_x 分别为

$$\begin{cases} f^{s,j}(t, x, y, i) = f(t, x, y, i, s, j), \\ (G \diamond g)(t, x, y, i) = G(t, i, g(t, x, y, i)), \\ \mathcal{H}^\pi g(t, x, y, i) = G_g(t, i, g(t, x, y, i)) \mathcal{A}^\pi g(t, x, y, i), \\ G_x(t, i, x) = \frac{\partial G}{\partial x}(t, i, x). \end{cases}$$

利用定义 3.1 中均衡策略的定义和微分算子 (3.2), 接下来的定理给出了广义 HJB 系统的解与最优结果之间的联系.

定理 3.1 (验证定理) 设 ϕ 、 f 和 g 为 $C^{1,2,1}([0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ 上的三个函数, (ϕ, f, g) 为定义 3.2 中广义 HJB 系统的一个解, 并且假设 π^* 满足

$$\begin{aligned}
\pi^* = \arg \sup_{\pi \in \Pi} \{ & \mathcal{A}^\pi \phi(t, x, y, i) - \mathcal{A}^\pi f(t, x, y, i, t, i) + \mathcal{A}^\pi f^{t,i}(t, x, y, i) \\ & - \mathcal{A}^\pi (G \diamond g)(t, x, y, i) + \mathcal{H}^\pi g(t, x, y, i) \}.
\end{aligned}$$

则 π^* 是一个均衡策略, ϕ 为相应的值函数, 即 $\phi(t, x, y, i) = V(t, x, y, i)$, 并且 f 和 g 分别可以通过 (3.4) 和 (3.5) 表示出来.

注 3.1 由验证定理可知, $V(t, x, y, i)$ 为均衡策略 π^* 下的值函数. 因此, 有

$$V(t, x, y, i) = f(t, x, y, i, t, i) + G(t, i, g(t, x, y, i)). \tag{3.6}$$

由于微分算子 (3.2) 是线性的, 因此,

$$\begin{aligned}\mathcal{A}^\pi V(t, x, y, i) &= \mathcal{A}^\pi(f(t, x, y, i, t, i) + G(t, i, g(t, x, y, i))) \\ &= \mathcal{A}^\pi f(t, x, y, i, t, i) + \mathcal{A}^\pi G(t, i, g(t, x, y, i)).\end{aligned}$$

所以, 定义 3.2 中广义 HJB 系统可以改写为

$$\begin{cases} \sup_{\pi \in \Pi} \{\mathcal{A}^\pi f^{t,i}(t, x, y, i) + \gamma(t, i)g(t, x, y, i)\mathcal{A}^\pi g(t, x, y, i)\} = 0, & 0 \leq t \leq T, \\ \mathcal{A}^{\pi^*} f^{s,k}(t, x, y, i) = 0, & 0 \leq t \leq T, \\ \mathcal{A}^{\pi^*} g(t, x, y, i) = 0, & 0 \leq t \leq T, \\ f^{s,j}(T, x, y, i) = (x + \theta y) - \frac{\gamma(s, j)}{2}(x + \theta y)^2, \\ g(T, x, y, i) = x + \theta y. \end{cases} \quad (3.7)$$

方程 (3.6) 表明, 如果我们想得到此最优控制问题的值函数 $V(t, x, y, i)$, 首先得求出函数 $f(t, x, y, i, t, i)$ 和 $g(t, x, y, i)$ 的表达式. 因此, 在下一节, 我们主要致力于去求解广义 HJB 系统 (3.7).

4 最优策略与值函数

本小节的目标是求解广义 HJB 系统 (3.7). 根据微分算子 (3.2) 和方程 (2.4), 广义 HJB 系统 (3.7) 化简为

$$\begin{cases} f_t^{t,i} + \gamma(t, i)gg_t + \sup_{\pi \in \Pi} \left\{ (\Gamma_1(x, y, z) + \Gamma_3(u, q))(f_x^{t,i} + \gamma(t, i)gg_x) \right. \\ \quad + \Gamma_2(x, y, z)(f_y^{t,i} + \gamma(t, i)gg_y) + \Gamma_4(u, q)(f_{xx}^{t,i} + \gamma(t, i)gg_{xx}) \\ \quad + \lambda_{1i}\{E[f^{t,i}(t, x - qX_j, y, i) - f^{t,i}(t, x, y, i)] + \gamma(t, i)gE[g(t, x - qX_j, y, i) - g(t, x, y, i)]\} \\ \quad + \lambda_{2i}\{E[f^{t,i}(t, x + uY_j, y, i) - f^{t,i}(t, x, y, i)] + \gamma(t, i)gE[g(t, x + uY_j, y, i) - g(t, x, y, i)]\} \\ \quad + \lambda_{0i}\{E[f^{t,i}(t, x - qX_j + uY_j, y, i) - f^{t,i}(t, x, y, i)] \\ \quad + \gamma(t, i)g[g(t, x - qX_j + uY_j, y, i) - g(t, x, y, i)]\} \\ \quad \left. + \sum_{j=1}^l q_{ij}\{[f^{t,i}(t, x, y, j) - f^{t,i}(t, x, y, i)] + \gamma(t, i)g[g(t, x, y, j) - g(t, x, y, i)]\} \right\} = 0, \\ f_t^{s,k} + [\Gamma_1(x, y, z) + \Gamma_3(u^*, q^*)]f_x^{s,k} + \Gamma_2(x, y, z)f_y^{s,k} + \Gamma_4(u^*, q^*)f_{xx}^{s,k} \\ \quad + \lambda_{1i}E[f^{s,k}(t, x - q^*X_j, y, i) - f^{s,k}(t, x, y, i)] + \lambda_{2i}E[f^{s,k}(t, x + u^*Y_j, y, i) - f^{s,k}(t, x, y, i)] \\ \quad + \lambda_{0i}E[f^{s,k}(t, x - q^*X_j + u^*Y_j, y, i) - f^{s,k}(t, x, y, i)] \\ \quad + \sum_{j=1}^l q_{ij}[f^{s,k}(t, x, y, j) - f^{s,k}(t, x, y, i)] = 0, \\ g_t + [\Gamma_1(x, y, z) + \Gamma_3(u^*, q^*)]g_x + \Gamma_2(x, y, z)g_y + \Gamma_4(u^*, q^*)g_{xx} \\ \quad + \lambda_{1i}E[g(t, x - q^*X_j, y, i) - g(t, x, y, i)] + \lambda_{2i}E[g(t, x + u^*Y_j, y, i) - g(t, x, y, i)] \\ \quad + \lambda_{0i}[g(t, x - q^*X_j + u^*Y_j, y, i) - g(t, x, y, i)] \\ \quad + \sum_{j=1}^l q_{ij}[g(t, x, y, j) - g(t, x, y, i)] = 0, \end{cases} \quad (4.1)$$

其中

$$\begin{cases} \Gamma_1(x, y, z) = (r_0 - B_1 - B_2)x + \tilde{B}_1 y + B_2 z, \\ \Gamma_2(x, y, z) = x - Ay - e^{-A\delta} z, \\ \Gamma_3(u, q) = r_i u + (1 + \eta_2) q a_{1i} - \eta a_{1i}, \\ \Gamma_4(u, q) = \frac{1}{2}(\sigma_{0i}^2 q^2 + \sigma_{1i}^2 u^2). \end{cases}$$

注意到 f 和 g 分别是关于 $E_{t,x,y,i}[X^{\pi^*}(T) + \theta Y^{\pi^*}(T)]$ 和 $E_{t,x,y,i}[(X^{\pi^*}(T) + \theta Y^{\pi^*}(T))^2]$ 的函数. 为了求得函数 f 和 g , 假设

$$\begin{cases} E_{t,x,y,i}[X^{\pi^*}(T) + \theta Y^{\pi^*}(T)] = P_1(t, i)(x + \theta y) + L_1(t), \\ E_{t,x,y,i}[(X^{\pi^*}(T) + \theta Y^{\pi^*}(T))^2] = K(t, i)(x + \theta y)^2 + P_2(t, i)(x + \theta y) + L_2(t). \end{cases}$$

从而, 函数 f 和 g 具有如下的形式:

$$\begin{cases} g(t, x, y, i) = P_1(t, i)(x + \theta y) + L_1(t, i), \\ f^{t,i}(t, x, y, i) = P_1(t, i)(x + \theta y) + L_1(t, i) \\ \quad - \frac{\gamma(t, i)}{2}[K(t, i)(x + \theta y)^2 + P_2(t, i)(x + \theta y) + L_2(t, i)]. \end{cases} \quad (4.2)$$

分别对函数 f 和 g 关于 t, x 和 y 求偏导, 得到

$$\begin{cases} g_t(t, x, y, i) = \dot{P}_1(t, i)(x + \theta y) + \dot{L}_1(t), \\ g_x(t, x, y, i) = P_1(t, i), \\ g_y(t, x, y, i) = \theta P_1(t, i), \\ g_{xx}(t, x, y, i) = 0, \end{cases} \quad (4.3)$$

以及

$$\begin{cases} f_t^{t,i}(t, x, y, i) = \dot{P}_1(t, i)(x + \theta y) + \dot{L}_1(t) - \frac{\gamma(t, i)}{2}[\dot{K}(t, i)(x + \theta y)^2 + \dot{P}_2(t, i)(x + \theta y) + \dot{L}_2(t)], \\ f_x^{t,i}(t, x, y, i) = P_1(t, i) - \gamma(t, i)K(t, i)(x + \theta y) - \frac{\gamma(t, i)}{2}P_2(t, i), \\ f_y^{t,i}(t, x, y, i) = \theta \left[P_1(t, i) - \gamma(t, i)K(t, i)(x + \theta y) - \frac{\gamma(t, i)}{2}P_2(t, i) \right], \\ f_{xx}^{t,i}(t, x, y, i) = -\gamma(t, i)K(t, i). \end{cases} \quad (4.4)$$

符号 $\dot{\varphi}(t)$ 表示函数 $\varphi(t)$ 关于 t 的导数. 将 (4.2)–(4.4) 代入到广义 HJB 系统 (4.1), 我们得到以下结论.

定理 4.1 对于最优化问题 (3.1), 其相应的广义 HJB 系统为

$$\sup_{\pi \in \Pi} \left\{ \phi_1(t, x, y, i) + \theta_1(t, x, y, i) + \sum_{j=1}^l q_{ij} \varphi_1(t, x, y, j) \right\} = 0, \quad (4.5)$$

$$\phi_2(t, x, y, i) + \theta_2(t, x, y, i) + \sum_{j=1}^l q_{ij} \varphi_2(t, x, y, j) = 0, \quad (4.6)$$

$$\phi_3(t, x, y, i) + \theta_3(t, x, y, i) + \sum_{j=1}^l q_{ij} \varphi_3(t, x, y, j) = 0, \quad (4.7)$$

其中

$$\begin{cases} \phi_1(t, x, y, i) = \dot{P}_1(t, i)(x + \theta y) + \dot{L}_1(t) - \frac{\gamma(t, i)}{2} [\dot{K}(t, i)(x + \theta y)^2 + \dot{P}_2(t, i)(x + \theta y) + \dot{L}_2(t)] \\ \quad + \gamma(t, i) [P_1(t, i)(x + \theta y) + L_1(t)] [\dot{P}_1(t, i)(x + \theta y) + \dot{L}_1(t)], \\ \phi_2(t, x, y, i) = \dot{P}_1(t, i)(x + \theta y) + \dot{L}_1(t) - \frac{\gamma(s, k)}{2} [\dot{K}(t, i)(x + \theta y)^2 + \dot{P}_2(t, i)(x + \theta y) + \dot{L}_2(t)], \\ \phi_3(t, x, y, i) = \dot{P}_1(t, i)(x + \theta y) + \dot{L}_1(t), \\ \theta_1(t, x, y, i) = [\Gamma_7(x, y, z) + \Gamma_5(u, q)] \left[P_1 - \frac{\gamma(t, i)}{2} (2K(x + \theta y) + P_2) \right. \\ \quad \left. + \gamma(t, i) P_1 (P_1(x + \theta y) + L_1) \right] + \Gamma_6(u, q) [-\gamma(t, i) K], \\ \theta_2(t, x, y, i) = [\Gamma_7(x, y, z) + \Gamma_5(u^*, q^*)] \left[P_1 - \frac{\gamma(s, k)}{2} (2K(x + \theta y) + P_2) \right] + \Gamma_6(u^*, q^*) [-\gamma(s, k) K], \\ \theta_3(t, x, y, i) = [\Gamma_7(x, y, z) + \Gamma_5(u^*, q^*)] P_1, \\ \varphi_1(t, x, y, j) = P_1(t, j)(x + \theta y) + L_1(t, j) - \frac{\gamma(t, i)}{2} [K(t, j)(x + \theta y)^2 + P_2(t, j)(x + \theta y) + L_2(t, j)] \\ \quad + \gamma(t, i) [P_1(t, i)(x + \theta y) + L_1(t, i)] [P_1(t, j)(x + \theta y) + L_1(t, j)], \\ \varphi_2(t, x, y, j) = P_1(t, j)(x + \theta y) + L_1(t, j) - \frac{\gamma(s, k)}{2} [K(t, j)(x + \theta y)^2 + P_2(t, j)(x + \theta y) + L_2(t, j)], \\ \varphi_3(t, x, y, j) = P_1(t, j)(x + \theta y) + L_1(t, j), \end{cases}$$

满足边界条件

$$K(T, i) = 1, \quad L_1(T, i) = 0, \quad L_2(T, i) = 0, \quad P_1(T, i) = 1, \quad P_2(T, i) = 0$$

和

$$\begin{cases} a_{1i} = (\lambda_{1i} + \lambda_{0i})\mu_1, & \xi_{1i}^2 = (\lambda_{1i} + \lambda_{0i})\beta_1, \\ a_{2i} = (\lambda_{2i} + \lambda_{0i})\mu_2, & \xi_{2i}^2 = (\lambda_{2i} + \lambda_{0i})\beta_2, \\ \Gamma_5(u, q) = (r_i + a_{2i})u + \eta_2 a_{1i} q - \eta a_{1i}, \\ \Gamma_6(u, q) = \frac{1}{2} [(\sigma_{0i}^2 + \xi_{1i}^2)q^2 + (\sigma_{1i}^2 + \xi_{2i}^2)u^2 - 2\lambda_{0i}\mu_1\mu_2qu], \\ \Gamma_7(x, y, z) = (r_0 - B_1 - B_2 + \theta)x + (\tilde{B}_1 - A\theta)y + (B_2 - \theta e^{-A\delta})z. \end{cases}$$

注意到, 由于假设 (A₃) 中 $B_2 = \theta e^{-A\delta}$, 那么 $\Gamma_7(x, y, z)$ 中关于 z 的项将会抵消. 从而, 定理 4.1 中广义 HJB 系统只依赖于 (t, x, y, i) . 设

$$h(q, u) = \phi_1(t, x, y, i) + \theta_1(t, x, y, i) + \sum_{j=1}^l q_{ij} \varphi_1(t, x, y, j). \quad (4.8)$$

对函数 $h(q, u)$ 分别关于 q 和 u 求偏导, 得到

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial q} = \eta_2 a_{1i} \Delta(t, i) - [(\sigma_{0i}^2 + \xi_{1i}^2)q - \lambda_{0i} \mu_1 \mu_2 u] \gamma(t, i) K(t, i), \\ \frac{\partial h}{\partial u} = (r_i + a_{2i}) \Delta(t, i) - [(\sigma_{1i}^2 + \xi_{2i}^2)u - \lambda_{0i} \mu_1 \mu_2 q] \gamma(t, i) K(t, i), \\ \frac{\partial^2 h}{\partial q^2} = -(\sigma_{0i}^2 + \xi_{1i}^2) \gamma(t, i) K(t, i), \\ \frac{\partial^2 h}{\partial u^2} = -(\sigma_{1i}^2 + \xi_{2i}^2) \gamma(t, i) K(t, i), \\ \frac{\partial^2 h}{\partial q \partial u} = \frac{\partial^2 h}{\partial u \partial q} = \lambda_{0i} \mu_1 \mu_2 \gamma(t, i) K(t, i), \end{cases}$$

其中

$$\Delta(t, i) = P_1 - \frac{\gamma(t, i)}{2} [2K(x + \theta y) + P_2] + \gamma(t, i) P_1 [P_1(x + \theta y) + L_1].$$

根据上述的偏导数, 相应的 Hessian 矩阵可以表示为

$$\begin{aligned} H &= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 h}{\partial q^2} & \frac{\partial^2 h}{\partial q \partial u} \\ \frac{\partial^2 h}{\partial u \partial q} & \frac{\partial^2 h}{\partial u^2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -(\sigma_{0i}^2 + \xi_{1i}^2) & \lambda_{0i} \mu_1 \mu_2 \\ \lambda_{0i} \mu_1 \mu_2 & -(\sigma_{1i}^2 + \xi_{2i}^2) \end{pmatrix} (\gamma(t, i) K(t, i)). \end{aligned}$$

对于每一个固定的状态 i , 由 Cauchy-Schwartz 不等式, 有

$$(\sigma_{0i}^2 + \xi_{1i}^2)(\sigma_{1i}^2 + \xi_{2i}^2) - (\lambda_{0i} \mu_1 \mu_2)^2 > 0.$$

另外, 我们稍后将证明 $K(t, i) > 0$. 从而, Hessian 矩阵 H 是一个负定矩阵, 这意味着函数 $h(q, u)$ 的最大值点 $(\hat{q}, \hat{u})$ 是下面方程组的解:

$$\begin{cases} \eta_2 a_{1i} \Delta(t, i) - [(\sigma_{0i}^2 + \xi_{1i}^2)q - \lambda_{0i} \mu_1 \mu_2 u] \gamma(t, i) K(t, i) = 0, \\ (r_i + a_{2i}) \Delta(t, i) - [(\sigma_{1i}^2 + \xi_{2i}^2)u - \lambda_{0i} \mu_1 \mu_2 q] \gamma(t, i) K(t, i) = 0. \end{cases}$$

因此, 我们得到最大值点

$$\begin{cases} \hat{q}(t, x, y, i) = m_{1i} \varrho(t, i), \\ \hat{u}(t, x, y, i) = m_{2i} \varrho(t, i), \end{cases} \quad (4.9)$$

其中

$$\varrho(t, i) = \frac{\Delta(t, i)}{\gamma(t, i) K(t, i)}, \quad (4.10)$$

$$m_{1i} = \frac{\eta_2 a_{1i} (\sigma_{1i}^2 + \xi_{2i}^2) + (r_i + a_{2i}) \lambda_{0i} \mu_1 \mu_2}{(\sigma_{0i}^2 + \xi_{1i}^2)(\sigma_{1i}^2 + \xi_{2i}^2) - (\lambda_{0i} \mu_1 \mu_2)^2}, \quad (4.11)$$

$$m_{2i} = \frac{(r_i + a_{2i})(\sigma_{0i}^2 + \xi_{1i}^2) + \eta_2 a_{1i} \lambda_{0i} \mu_1 \mu_2}{(\sigma_{0i}^2 + \xi_{1i}^2)(\sigma_{1i}^2 + \xi_{2i}^2) - (\lambda_{0i} \mu_1 \mu_2)^2}. \quad (4.12)$$

在讨论最优策略之前, 我们先给出一些重要结论.

引理 4.1 假设保险公司是风险厌恶的, 任意的一个策略 (不一定是可容许策略) $(q, u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 满足

$$\begin{cases} q = A_1(t, i) \frac{P_1^2(t, i) - K(t, i)}{K(t, i)} (x + \theta y) + D_1(t, i), \\ u = A_2(t, i) \frac{P_1^2(t, i) - K(t, i)}{K(t, i)} (x + \theta y) + D_2(t, i), \end{cases} \quad (4.13)$$

其中 $A_1(t, i)$ 、 $A_2(t, i)$ 、 $D_1(t, i)$ 和 $D_2(t, i)$ 为状态 i 下关于 t 的连续函数. 假设 $A_1(t, i)$ 和 $A_2(t, i)$ 分别不依赖于 $P_1(t, i)$ 和 $K(t, i)$, 则对任意的 $t \in [0, T]$ 以及状态 i , 有

$$\varrho(t, i) = \frac{1}{\gamma(t, i)} e^{-\int_t^T [r_0 - B_1 - B_2 + \theta] ds} > 0. \quad (4.14)$$

证明 将 (4.13) 中 q 和 u 的形式代回到方程 (4.6) 和 (4.7), 得到

$$\begin{aligned} 0 = & \dot{P}_1(t, i)(x + \theta y) + \dot{L}_1(t, i) - \frac{\gamma(s, k)}{2} (\dot{K}(t, i)(x + \theta y)^2 + \dot{P}_2(t, i)(x + \theta y) + \dot{L}_2(t, i)) \\ & + \left[(r_0 - B_1 - B_2 + \theta)x + (\tilde{B}_1 - A\theta)y + (r_i + a_{2i})D_2(t, i) + \eta_2 a_{1i} D_1(t, i) - \eta a_{1i} \right. \\ & \left. + ((r_i + a_{2i})A_2(t, i) + \eta_2 a_{1i} A_1(t, i)) \frac{P_1^2(t, i) - K(t, i)}{K(t, i)} (x + \theta y) \right] \\ & \times \left[P_1(t, i) - \gamma(s, k)K(t, i)(x + \theta y) - \frac{\gamma(s, k)}{2} (P_2(t, i)) \right] - \frac{\gamma(s, k)K(t, i)}{2} \\ & \times \left\{ [(\sigma_{0i}^2 + \xi_{1i}^2)A_1^2(t, i) + (\sigma_{1i}^2 + \xi_{2i}^2)A_2^2(t, i) - 2\lambda_{0i}\mu_1\mu_2 A_1(t, i)A_2(t, i)] \left(\frac{P_1^2(t, i)}{K(t, i)} - 1 \right)^2 (x + \theta y)^2 \right. \\ & + 2[(\sigma_{0i}^2 + \xi_{1i}^2)A_1(t, i)D_1(t, i) + (\sigma_{1i}^2 + \xi_{2i}^2)A_2(t, i)D_2(t, i) \\ & \left. - \lambda_{0i}\mu_1\mu_2 (A_1(t, i)D_2(t, i) + A_2(t, i)D_1(t, i))] \right. \\ & \left. \times \left(\frac{P_1^2(t, i)}{K(t, i)} - 1 \right) (x + \theta y) + (\sigma_{0i}^2 + \xi_{1i}^2)D_1^2(t, i) + (\sigma_{1i}^2 + \xi_{2i}^2)D_2^2(t, i) - 2\lambda_{0i}\mu_1\mu_2 D_1(t, i)D_2(t, i) \right\} \\ & + \sum_{j=1}^l q_{ij} \left[P_1(t, j)(x + \theta y) + L_1(t, j) - \frac{\gamma(s, k)}{2} (K(t, j)(x + \theta y)^2 + P_2(t, j)(x + \theta y) + L_2(t, j)) \right], \end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned} 0 = & \dot{P}_1(t, i)(x + \theta y) + L_1(t, i) + \left[(r_0 - B_1 - B_2 + \theta)x + (\tilde{B}_1 - A\theta)y + (r_i + a_{2i})D_2(t, i) \right. \\ & \left. + \eta_2 a_{1i} D_1(t, i) - \eta a_{1i} + ((r_i + a_{2i})A_2(t, i) + \eta_2 a_{1i} A_1(t, i)) \frac{P_1^2(t, i) - K(t, i)}{K(t, i)} (x + \theta y) \right] P_1(t, i) \\ & + \sum_{j=1}^l q_{ij} [P_1(t, j)(x + \theta y) + L_1(t, j)]. \end{aligned}$$

在假设 (A₃) 条件下, 我们有 $\tilde{B}_1 - A\theta = \theta(r_0 - B_1 - B_2 + \theta)$. 对上述两个方程分别关于 $(x + \theta y)^2$ 和 $(x + \theta y)$ 进行分离变量, 化简后得到

$$\begin{cases} \dot{K}(t, i) + 2\Gamma_{11}(A_1, A_2)K(t, i) + \Gamma_8(A_1, A_2) \left(\frac{P_1^2(t, i) - K(t, i)}{K(t, i)} \right)^2 + \sum_{j=1}^l q_{ij} K(t, j) = 0, \\ K(T, i) = 1, \end{cases} \quad (4.15)$$

$$\begin{cases} \dot{P}_1(t, i) + \Gamma_{11}(A_1, A_2)P_1(t, i) + \sum_{j=1}^l q_{ij}P_1(t, j) = 0, \\ P_1(T, i) = 1, \end{cases} \quad (4.16)$$

$$\begin{cases} \dot{P}_2(t, i) + \Gamma_{11}(A_1, A_2)P_2(t, i) + 2\Gamma_9(D_1, D_2)K(t, i) \\ + 2\Gamma_{10}(A_1, A_2, D_1, D_2) + \sum_{j=1}^l q_{ij}P_2(t, j) = 0, \\ P_2(T, i) = 0, \end{cases} \quad (4.17)$$

$$\begin{cases} \dot{L}_1(t, i) + \Gamma_9(D_1, D_2)P_1(t, i) + \sum_{j=1}^l q_{ij}L_1(t, j) = 0, \\ L_1(T, i) = 0, \end{cases} \quad (4.18)$$

$$\begin{cases} \dot{L}_2(t, i) + \Gamma_8(D_1, D_2)K(t, i) + \Gamma_9(D_1, D_2)P_2(t, i) + \sum_{j=1}^l q_{ij}L_2(t, j) = 0, \\ L_2(T, i) = 0, \end{cases} \quad (4.19)$$

其中

$$\begin{cases} \Gamma_8(A_1, A_2) = (\sigma_{0i}^2 + \xi_{1i}^2)A_1^2(t, i) + (\sigma_{1i}^2 + \xi_{2i}^2)A_2^2(t, i) - 2\lambda_{0i}\mu_1\mu_2A_1(t, i)A_2(t, i), \\ \Gamma_9(D_1, D_2) = (r_i + a_{2i})D_2(t, i) + \eta_2a_{1i}D_1(t, i) - \eta a_{1i}, \\ \Gamma_{10}(A_1, A_2, D_1, D_2) = (\sigma_{0i}^2 + \xi_{1i}^2)A_1(t, i)D_1(t, i) + (\sigma_{1i}^2 + \xi_{2i}^2)A_2(t, i)D_2(t, i) \\ - \lambda_{0i}\mu_1\mu_2(A_1(t, i)D_2(t, i) + A_2(t, i)D_1(t, i))(P_1^2(t, i) - K(t, i)), \\ \Gamma_{11}(A_1, A_2) = (r_0 - B_1 - B_2 + \theta) + ((r_i + a_{2i})A_2(t, i) + \eta_2a_{1i}A_1(t, i))\left(\frac{P_1^2(t, i)}{K(t, i)} - 1\right). \end{cases}$$

联立方程 (4.15) 和 (4.16), 我们发现

$$K(t, i) = e^{\int_t^T 2[r_0 - B_1 - B_2 + \theta]ds}$$

和

$$P_1(t, i) = e^{\int_t^T [r_0 - B_1 - B_2 + \theta]ds}$$

分别是方程 (4.15) 和 (4.16) 的一个解. 在接下来的定理中, 我们将证明这些微分方程的解是唯一的. 此外, 观察方程 (4.17) 和 (4.18), 得到关系式

$$P_2(t, i) = 2P_1(t, i)L_1(t, i).$$

将 $K(t, i)$ 和 $P_1(t, i)$ 的值以及 $P_2(t, i)$ 、 $P_1(t, i)$ 和 $L_1(t, i)$ 的关系式代入 (4.10), 得到表达式 (4.14). 另外, 由于该保险公司是风险厌恶的, 即 $\gamma(t, i) > 0$, 所以, 对任意的 $t \in [0, T]$, 有 $\varrho(t, i) > 0$. 故引理得证. $\square$

以下定理证明了微分方程 (4.15)–(4.19) 存在唯一的解.

定理 4.2 对任意的 $t \in [0, T]$, 微分方程 (4.15)–(4.19) 分别存在唯一的解 $K(t, i)$ 、 $P_1(t, i)$ 、 $P_2(t, i)$ 、 $L_1(t, i)$ 和 $L_2(t, i)$.

证明 注意到, $P_2(t, i)$ 、 $L_1(t, i)$ 和 $L_2(t, i)$ 分别为关于 $K(t, i)$ 和 $P_1(t, i)$ 的函数, 因此, 我们只需证明微分方程 (4.15) 和 (4.16) 的解 $K(t, i)$ 和 $P_1(t, i)$ 是唯一的即可. 接下来的证明中, 我们主要详细证明微分方程 (4.16) 的解 $P_1(t, i)$ 是唯一的. 而对于微分方程 (4.15) 解的唯一性问题, 可以类似 (4.16) 的方法给出证明.

对 $P_1(s, \alpha(s))$ 运用 Itô 公式, 可得

$$P_1(t, i) = 1 - \int_t^T \left[\dot{P}_1(s, \alpha(s)) + \sum_{j=1}^l q_{\alpha(s)j} (P_1(s, j) - P_1(s, \alpha(s))) \right] ds.$$

把微分方程 (4.16) 代入上式, 化简后为

$$P_1(t, i) = 1 + \int_t^T \Gamma_{11}(A_1(s, \alpha(s)), A_2(s, \alpha(s))) P_1(s, \alpha(s)) ds.$$

设 $P_1(t, i)$ 和 $P_1^*(t, i)$ 是微分方程 (4.16) 的两个解, 在假设 (A₁) 和 (A₂) 条件下, 有

$$\begin{aligned} |P_1(t, i) - P_1^*(t, i)| &= \left| \int_t^T \Gamma_{11}(A_1(s, \alpha(s)), A_2(s, \alpha(s))) (P_1(s, \alpha(s)) - P_1^*(s, \alpha(s))) ds \right| \\ &\leq \int_t^T |\Gamma_{11}(A_1(s, \alpha(s)), A_2(s, \alpha(s))) P_1(s, \alpha(s)) - P_1^*(s, \alpha(s))| ds \\ &\leq M \int_t^T |P_1(s, \alpha(s)) - P_1^*(s, \alpha(s))| ds, \end{aligned}$$

其中 M 是一个正的常数. 由 Gronwall 不等式, 得到 $P_1(t, i) \equiv P_1^*(t, i)$. 所以, 微分方程 (4.16) 存在唯一的解 $P_1(t, i)$. 故定理得证. $\square$

注 4.1 根据引理 4.1 的结论, 我们可以把 (4.9) 化简为

$$\begin{cases} \hat{q}(t, x, y, i) = \frac{m_{1i}}{\gamma(t, i)} e^{-\int_t^T (r_0 - B_1 - B_2 + \theta) ds}, \\ \hat{u}(t, x, y, i) = \frac{m_{2i}}{\gamma(t, i)} e^{-\int_t^T (r_0 - B_1 - B_2 + \theta) ds}, \end{cases} \quad (4.20)$$

以及把值函数写为

$$V(t, x, y, i) = e^{\int_t^T (r_0 - B_1 - B_2 + \theta) ds} (x + \theta y) + L_1(t, i) + \frac{\gamma(t, i)}{2} [L_1^2(t, i) - L_2(t, i)]. \quad (4.21)$$

从 (4.20) 可以看出, 策略 $\hat{q}(t, x, y, i)$ 和 $\hat{u}(t, x, y, i)$ 的正负性分别由 m_{1i} 和 m_{2i} 决定.

记

$$\begin{cases} \Delta_1(t, i) = -\frac{(r_i + a_{2i})\lambda_{0i}\mu_1\mu_2}{a_{1i}(\sigma_{1i}^2 + \xi_{2i}^2)}, \\ \Delta_2(t, i) = -\frac{(r_i + a_{2i})(\sigma_{0i}^2 + \xi_{1i}^2)}{a_{1i}\lambda_{0i}\mu_1\mu_2}, \end{cases}$$

其中 $\mu_2 \neq 0$, 则有以下结论.

引理 4.2 对任意的 $0 \leq t \leq T$, 如果 $\mu_2 \neq 0$ 和 $\mu_2 \neq -r_i(\lambda_{2i} + \lambda_{0i})^{-1}$, 则

- (i) 当 $-r_i(\lambda_{2i} + \lambda_{0i})^{-1} < \mu_2 < 0$ 时, $0 < \Delta_1(t, i) < \Delta_2(t, i)$;
- (ii) 当 $\mu_2 > 0$ 或 $-1 < \mu_2 < -r_i(\lambda_{2i} + \lambda_{0i})^{-1}$ 时, $\Delta_2(t, i) < \Delta_1(t, i) < 0$.

证明 该引理的证明与文献 [13] 中的证明相似, 所以, 在这里省略详细的证明过程. $\square$

注 4.2 当 $\mu_2 = 0$ 时, 不难发现 $m_{1i} > 0$ 和 $m_{2i} > 0$; 当 $\mu_2 = -r_i(\lambda_{2i} + \lambda_{0i})^{-1}$, 即 $r_i + a_{2i} = 0$ 时, 有 $m_{1i} > 0$ 和 $m_{2i} < 0$.

根据引理 4.2 的结论, 我们将分以下 5 种情形来讨论相应的最优结果:

- (1) $\mu_2 \geq 0, \eta_2 > 0$ (即 $m_{1i} > 0, m_{2i} > 0$);
- (2) $-1 < \mu_2 \leq -r_i(\lambda_{2i} + \lambda_{0i})^{-1}, \eta_2 > 0$ (即 $m_{1i} > 0, m_{2i} < 0$);
- (3) $-r_i(\lambda_{2i} + \lambda_{0i})^{-1} < \mu_2 < 0, 0 < \eta_2 \leq \Delta_1(t, i) < \Delta_2(t, i)$ (即 $m_{1i} \leq 0, m_{2i} > 0$);
- (4) $-r_i(\lambda_{2i} + \lambda_{0i})^{-1} < \mu_2 < 0, 0 < \Delta_1(t, i) < \eta_2 < \Delta_2(t, i)$ (即 $m_{1i} > 0, m_{2i} > 0$);
- (5) $-r_i(\lambda_{2i} + \lambda_{0i})^{-1} < \mu_2 < 0, 0 < \Delta_1(t, i) < \Delta_2(t, i) \leq \eta_2$ (即 $m_{1i} > 0, m_{2i} \leq 0$).

情形 1 $\mu_2 \geq 0, \eta_2 > 0$.

这种情形下, $m_{1i} > 0$ 和 $m_{2i} > 0$, 从而最优策略可以表示为

$$\begin{cases} q^*(t, x, y, i) = \frac{m_{1i}}{\gamma(t, i)} e^{-\int_t^T (r_0 - B_1 - B_2 + \theta) ds}, \\ u^*(t, x, y, i) = \frac{m_{2i}}{\gamma(t, i)} e^{-\int_t^T (r_0 - B_1 - B_2 + \theta) ds}. \end{cases}$$

对应于引理 4.1, 函数 $A_1(t, i)$ 、 $A_2(t, i)$ 、 $D_1(t, i)$ 和 $D_2(t, i)$ 的值分别为

$$\begin{cases} A_1(t, i) = 0, & A_2(t, i) = 0, \\ D_1(t, i) = m_{1i}\varrho(t, i), & D_2(t, i) = m_{2i}\varrho(t, i). \end{cases}$$

因此,

$$\begin{cases} K(t, i) = e^{\int_t^T 2(r_0 - B_1 - B_2 + \theta) ds}, \\ P_1(t, i) = e^{\int_t^T (r_0 - B_1 - B_2 + \theta) ds}, \\ P_2(t, i) = 2P_1(t, i)L_1(t, i). \end{cases}$$

从而, 引理 4.1 中关于 $L_1(t, i)$ 和 $L_2(t, i)$ 的微分方程分别为

$$\begin{cases} \dot{L}_1(t, i) + \Gamma_{12}(i)P_1(t, i) + \sum_{j=1}^l q_{ij}L_1(t, j) = 0, \\ L_1(T, i) = 0, \\ \dot{L}_2(t, i) + 2\Gamma_{12}(i)P_1(t, i)L_1(t, i) + \Gamma_{13}(i)P_1^2(t, i) + \sum_{j=1}^l q_{ij}L_2(t, j) = 0, \\ L_2(T, i) = 0, \end{cases}$$

其中

$$\begin{cases} \Gamma_{12}(i) = (r_i + a_{2i})m_{2i}\varrho(t, i) + \eta_2 a_{1i}m_{1i}\varrho(t, i) - \eta a_{1i}, \\ \Gamma_{13}(i) = (\sigma_{0i}^2 + \xi_{1i}^2)m_{1i}^2\varrho^2(t, i) + (\sigma_{1i}^2 + \xi_{2i}^2)m_{2i}^2\varrho^2(t, i) - 2\lambda_{0i}\mu_1\mu_2m_{1i}m_{2i}\varrho^2(t, i). \end{cases}$$

由 Feynman-Kac 表示定理, 我们分别得到 $L_1(t, i)$ 和 $L_2(t, i)$ 的表达式, 即

$$L_1(t, i) = E_{t,x,y,i} \left\{ \int_t^T \Gamma_{12}(\alpha(s)) P_1(s, \alpha(s)) ds \right\}, \quad (4.22)$$

$$L_2(t, i) = E_{t,x,y,i} \left\{ \int_t^T [2\Gamma_{12}(\alpha(s)) P_1(s, \alpha(s)) L_1(s, \alpha(s)) + \Gamma_{13}(\alpha(s)) P_1^2(s, \alpha(s))] ds \right\}. \quad (4.23)$$

将 (4.22) 和 (4.23) 代入到表达式 (4.21) 中, 我们得到此情形下的值函数.

情形 2 $-1 < \mu_2 \leq -r_i(\lambda_{2i} + \lambda_{0i})^{-1}$, $\eta_2 > 0$.

对于这种情形, 有 $m_{1i} > 0$ 和 $m_{2i} < 0$. 因此 $u^* = 0$. 把 $u^* = 0$ 代入 (4.8), 然后对 $h(q)$ 关于 q 求导得到

$$q^*(t, x, y, i) = \frac{\eta_2 a_{1i}}{\gamma(t, i)(\sigma_{0i}^2 + \xi_{1i}^2)} e^{-\int_t^T (r_0 - B_1 - B_2 + \theta) ds}.$$

根据引理 4.1, 此时有

$$\begin{cases} A_1(t, i) = 0, & A_2(t, i) = 0, \\ D_1(t, i) = \frac{\eta_2 a_{1i}}{\sigma_{0i}^2 + \xi_{1i}^2} \varrho(t, i), & D_2(t, i) = 0. \end{cases}$$

采用类似情形 1 的步骤, 可得

$$\begin{cases} K(t, i) = e^{\int_t^T 2(r_0 - B_1 - B_2 + \theta) ds}, \\ P_1(t, i) = e^{\int_t^T (r_0 - B_1 - B_2 + \theta) ds}, \\ P_2(t, i) = 2P_1(t, i)L_1(t, i), \end{cases}$$

以及

$$L_1(t, i) = E_{t,x,y,i} \left\{ \int_t^T \left[\frac{\eta_2^2 a_{1\alpha(s)}^2 \varrho(s, \alpha(s))}{\sigma_{0\alpha(s)}^2 + \xi_{1\alpha(s)}^2} - \eta a_{1\alpha(s)} \right] P_1(s, \alpha(s)) ds \right\}, \quad (4.24)$$

$$\begin{aligned} L_2(t, i) = E_{t,x,y,i} \left\{ \int_t^T \left[2 \left(\frac{\eta_2^2 a_{1\alpha(s)}^2 \varrho(s, \alpha(s))}{\sigma_{0\alpha(s)}^2 + \xi_{1\alpha(s)}^2} - \eta a_{1\alpha(s)} \right) P_1(s, \alpha(s)) L_1(s, \alpha(s)) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\eta_2^2 a_{1\alpha(s)}^2 \varrho^2(s, \alpha(s))}{\sigma_{0\alpha(s)}^2 + \xi_{1\alpha(s)}^2} P_1^2(s, \alpha(s)) \right] ds \right\}. \end{aligned} \quad (4.25)$$

将上述 $L_1(t, i)$ 和 $L_2(t, i)$ 的值代入 (4.21), 我们得到此情形下相应的值函数.

采用类似的方法及步骤, 我们可以得到其他三种情形下相应的最优策略和值函数.

情形 3 $-r_i(\lambda_{2i} + \lambda_{0i})^{-1} < \mu_2 < 0$, $0 < \eta_2 \leq \Delta_1(t, i) \leq \Delta_2(t, i)$.

此时, 最优再保险策略和最优投资策略为

$$\begin{cases} q^*(t, x, y, i) = 0, \\ u^*(t, x, y, i) = \frac{r_i + a_{2i}}{\gamma(t, i)(\sigma_{1i}^2 + \xi_{2i}^2)} e^{-\int_t^T (r_0 - B_1 - B_2 + \theta) ds}, \end{cases}$$

其中

$$L_1(t, i) = E_{t,x,y,i} \left\{ \int_t^T \left[\frac{(r(s, \alpha(s)) + a_{2\alpha(s)})^2 \varrho(s, \alpha(s))}{\sigma_{1\alpha(s)}^2 + \xi_{2\alpha(s)}^2} - \eta a_{1\alpha(s)} \right] P_1(s, \alpha(s)) ds \right\}, \quad (4.26)$$

$$L_2(t, i) = E_{t,x,y,i} \left\{ \int_t^T \left[2 \left(\frac{(r(s, \alpha(s)) + a_{2\alpha(s)})^2 \varrho(s, \alpha(s))}{\sigma_{1\alpha(s)}^2 + \xi_{2\alpha(s)}^2} - \eta a_{1\alpha(s)} \right) P_1(s, \alpha(s)) L_1(s, \alpha(s)) \right. \right. \\ \left. \left. + \left(\frac{(r(s, \alpha(s)) + a_{2\alpha(s)})^2 \varrho^2(s, \alpha(s))}{\sigma_{1\alpha(s)}^2 + \xi_{2\alpha(s)}^2} \right) P_1^2(s, \alpha(s)) \right] ds \right\}. \quad (4.27)$$

基于这些函数的值, 我们也可得到值函数的表达式.

情形 4 $-r_i(\lambda_{2i} + \lambda_{0i})^{-1} < \mu_2 < 0$, $0 < \Delta_1(t, i) < \eta_2 < \Delta_2(t, i)$.

此时, $m_{1i} > 0$ 和 $m_{2i} > 0$. 因此, 这种情形下的最优结果与情形 1 相同.

情形 5 $-r_i(\lambda_{2i} + \lambda_{0i})^{-1} < \mu_2 < 0$, $0 < \Delta_1(t, i) < \Delta_2(t, i) \leq \eta_2$.

此时有, $m_{1i} > 0$, $m_{2i} \leq 0$. 所以, 这种情形下的最优结果与情形 2 一致.

综上所述, 我们得到以下定理.

定理 4.3 设 m_{1i} 、 m_{2i} 和 $\varrho(t, i)$ 分别由方程 (4.11)、(4.12) 和 (4.14) 给出. 对任意的 $t \in [0, T]$, 最优化问题 (3.1) 的值函数由 (4.21) 所示, 而风险模型 (2.4) 下的最优策略为

(i) 当 $\mu_2 \geq 0$ 和 $\eta_2 > 0$, 或者 $-r_i(\lambda_{2i} + \lambda_{0i})^{-1} < \mu_2 < 0$ 和 $0 < \Delta_1(t, i) < \eta_2 < \Delta_2(t, i)$ 时,

$$(q^*, u^*) = (m_{1i}\varrho(t, i), m_{2i}\varrho(t, i)),$$

其中值函数 (4.21) 中的 $L_1(t, i)$ 和 $L_2(t, i)$ 分别由 (4.22) 和 (4.23) 给出;

(ii) 当 $-1 < \mu_2 \leq -r_i(\lambda_{2i} + \lambda_{0i})^{-1}$ 和 $\eta_2 > 0$, 或者 $-r_i(\lambda_{2i} + \lambda_{0i})^{-1} < \mu_2 < 0$ 和 $0 < \Delta_1(t, i) < \Delta_2(t, i) \leq \eta_2$ 时,

$$(q^*, u^*) = \left(\frac{\eta_2 a_{1i}}{\sigma_{0i}^2 + \xi_{1i}^2} \varrho(t, i), 0 \right),$$

其中值函数 (4.21) 中的 $L_1(t, i)$ 和 $L_2(t, i)$ 分别由 (4.24) 和 (4.25) 给出;

(iii) 当 $-r_i(\lambda_{2i} + \lambda_{0i})^{-1} < \mu_2 < 0$ 和 $0 < \eta_2 \leq \Delta_1(t, i) \leq \Delta_2(t, i)$ 时,

$$(q^*, u^*) = \left(0, \frac{r_i + a_{2i}}{\sigma_{1i}^2 + \xi_{2i}^2} \varrho(t, i) \right),$$

其中值函数 (4.21) 中的 $L_1(t, i)$ 和 $L_2(t, i)$ 分别由 (4.26) 和 (4.27) 给出.

注 4.3 值得注意的是, $(q^*, u^*) = (0, 0)$ 这种情形不会发生. 也就是说, $m_{1i} \leq 0$ 和 $m_{2i} \leq 0$ 不可能同时成立. 事实上, 如果 $m_{1i} \leq 0$ 和 $m_{2i} \leq 0$ 同时成立的话, 则

$$\mu_2 < 0,$$

以及

$$\begin{cases} \eta_2 a_{1i}(\sigma_{1i}^2 + \xi_{2i}^2) + (r_i + a_{2i})\lambda_{0i}\mu_1\mu_2 \leq 0, \\ (r_i + a_{2i})(\sigma_{0i}^2 + \xi_{1i}^2) + \eta_2 a_{1i}\lambda_{0i}\mu_1\mu_2 \leq 0. \end{cases}$$

分别求解上述两个不等式, 得到

$$\begin{cases} r_i + a_{2i} \geq -\frac{\eta_2 a_{1i}(\sigma_{1i}^2 + \xi_{2i}^2)}{\lambda_{0i}\mu_1\mu_2} > 0, \\ r_i + a_{2i} \leq -\frac{\eta_2 a_{1i}\lambda_{0i}\mu_1\mu_2}{\sigma_{0i}^2 + \xi_{1i}^2}, \end{cases}$$

即

$$0 < -\frac{\eta_2 a_{1i}(\sigma_{1i}^2 + \xi_{2i}^2)}{\lambda_{0i} \mu_1 \mu_2} \leq r_i + a_{2i} \leq -\frac{\eta_2 a_{1i} \lambda_{0i} \mu_1 \mu_2}{\sigma_{0i}^2 + \xi_{1i}^2}. \quad (4.28)$$

然而, 由 Cauchy-Schwartz 不等式, 有

$$\frac{-\frac{\eta_2 a_{1i}(\sigma_{1i}^2 + \xi_{2i}^2)}{\lambda_{0i} \mu_1 \mu_2}}{-\frac{\eta_2 a_{1i} \lambda_{0i} \mu_1 \mu_2}{\sigma_{0i}^2 + \xi_{1i}^2}} = \frac{(\sigma_{0i}^2 + \xi_{1i}^2)(\sigma_{1i}^2 + \xi_{2i}^2)}{(\lambda_{0i} \mu_1 \mu_2)^2} > 1,$$

这与 (4.28) 矛盾. 因此, $m_{1i} \leq 0$ 和 $m_{2i} \leq 0$ 不可能同时成立.

本节最后给出文中模型的几个特殊情形的最优结果.

推论 4.1 假设不考虑时滞因素的影响, 即 $B_1(t) = B_2 = 0$ 以及一些相关的参数如 δ , A 和 θ 取值为 0, 则相应的最优策略为:

(i) 当 $\mu_2 \geq 0$ 和 $\eta_2 > 0$, 或者 $-r_i(\lambda_{2i} + \lambda_{0i})^{-1} < \mu_2 < 0$ 和 $0 < \Delta_1(t, i) < \eta_2 < \Delta_2(t, i)$ 时,

$$(q^*, u^*) = \left(\frac{m_{1i}}{\gamma(t, i)} e^{-\int_t^T r_0(s) ds}, \frac{m_{2i}}{\gamma(t, i)} e^{-\int_t^T r_0(s) ds} \right);$$

(ii) 当 $-1 < \mu_2 \leq -r_i(\lambda_{2i} + \lambda_{0i})^{-1}$ 和 $\eta_2 > 0$, 或者 $-r_i(\lambda_{2i} + \lambda_{0i})^{-1} < \mu_2 < 0$ 和 $0 < \Delta_1(t, i) < \Delta_2(t, i) \leq \eta_2$ 时,

$$(q^*, u^*) = \left(\frac{\eta_2 a_{1i}}{\gamma(t, i)(\sigma_{0i}^2 + \xi_{1i}^2)} e^{-\int_t^T r_0(s) ds}, 0 \right);$$

(iii) 当 $-r_i(\lambda_{2i} + \lambda_{0i})^{-1} < \mu_2 < 0$ 和 $0 < \eta_2 \leq \Delta_1(t, i) \leq \Delta_2(t, i)$ 时,

$$(q^*, u^*) = \left(0, \frac{r_i + a_{2i}}{\gamma(t, i)(\sigma_{1i}^2 + \xi_{2i}^2)} e^{-\int_t^T r_0(s) ds} \right).$$

进一步, 如果我们也不考虑 Markov 调节的影响, 以及假设风险厌恶系数为常数 γ , 风险资产与盈余索赔过程也不相互依赖, 即 $\lambda_0 = 0$, 那么最优再保险策略与最优投资策略为

$$\begin{cases} q^* = \frac{\eta_2 \lambda_1 \mu_1}{\gamma(\sigma_0^2(t) + \lambda_1 \beta_1)} e^{-\int_t^T r_0(s) ds}, \\ u^* = \frac{r_1(t) - r_0(t) + \lambda_2 \mu_2}{\gamma(\sigma_1^2(t) + \lambda_2 \beta_2)} e^{-\int_t^T r_0(s) ds}, \end{cases}$$

相应的值函数则为

$$V(t, x) = x e^{\int_t^T r_0(s) ds} - \eta \lambda_1 \mu_1 \int_t^T e^{\int_s^T r_0(u) du} ds + \frac{1}{2\gamma} \int_t^T \chi(s) ds,$$

其中

$$\chi(t) = \frac{(\eta_2 \lambda_1 \mu_1)^2}{\sigma_0^2(t) + \lambda_1 \beta_1} + \frac{(r_1(t) - r_0(t) + \lambda_2 \mu_2)^2}{\sigma_1^2(t) + \lambda_2 \beta_2},$$

这与文献 [26, 定理 2] 的结论一致.

5 数值分析

本节主要探讨不同参数对最优策略的影响. 不失一般性, 我们仅对定理 4.3(i) 进行分析讨论, 对于定理 4.3(ii) 和 4.3(iii), 可以类似地进行分析. 假设 $l = 2$, 即市场里存在两种状态, 牛市和熊市, 分别对应我们例子中的状态 1 和 2. 设 $\theta = 0.37$, $A = 0.6$, $\delta = 1$. 在以下例子中, 除非另有说明, 否则参数的值由表 1 给出.

从表 1 可以看出, 牛市状态下风险资产的收益率 r_{1i} 大于熊市状态下的收益率, 而风险厌恶系数 γ_i 的值却是相反的. 从实际金融市场来看, 这样取值是合理的. 另外, 高收益意味着高风险. 因此, 在牛市状态下风险资产的波动率 σ_{1i} 大于熊市市场的波动率.

5.1 时滞参数对最优策略的影响

不失一般性, 本小节将在牛市状态下探讨时滞参数对最优策略的影响. 由假设 (A₃), 可得

$$B_1(t) = \frac{\theta[r_0(t) + A + \theta(1 - e^{-A\delta})]}{\theta + (\int_{-\delta}^0 e^{As} ds)^{-1}} \quad \text{和} \quad B_2 = \theta e^{-A\delta}.$$

因此, 最优再保险策略 q^* 和最优投资策略 u^* 可以改写为

$$\begin{cases} q^* = \frac{m_{1i}}{\gamma(t, i)} e^{-\int_t^T \Psi(\theta, A, \delta) ds}, \\ u^* = \frac{m_{2i}}{\gamma(t, i)} e^{-\int_t^T \Psi(\theta, A, \delta) ds}, \end{cases}$$

其中

$$\Psi(\theta, A, \delta) = r_0(t) - \frac{r_0(t)}{1 + \theta^{-1} A(1 - e^{-A\delta})^{-1}}.$$

不难发现, $\Psi(\theta, A, \delta)$ 分别是关于时滞参数 θ 和 δ 的单调递减函数. 也就是有

$$\begin{cases} \frac{\partial \Psi(\theta, A, \delta)}{\partial \theta} < 0, \\ \frac{\partial \Psi(\theta, A, \delta)}{\partial \delta} < 0. \end{cases}$$

所以,

$$\frac{\partial q^*}{\partial \theta} > 0, \quad \frac{\partial u^*}{\partial \theta} > 0, \quad \frac{\partial q^*}{\partial \delta} > 0, \quad \frac{\partial u^*}{\partial \delta} > 0.$$

另外, 令 $h(A) = A(1 - e^{-A\delta})^{-1}$, 由于对任意正的常数 A 和 δ , $e^{A\delta} > A\delta + 1$ 恒成立, 则有

$$\frac{dh(A)}{dA} = \frac{1 - (A\delta + 1)e^{-A\delta}}{(1 - e^{-A\delta})^2} > 0.$$

表 1 参数假设

参数	T	η_1	η_2	μ_1	μ_2	β_1	β_2
	15	2.0	2.5	0.5	0.05	1	0.015
参数	γ_i	r_{1i}	σ_{1i}	σ_{0i}	λ_{1i}	λ_{2i}	λ_{0i}
状态 1	0.5	0.60	0.75	0.30	2	2	1
状态 2	1.0	0.35	0.50	0.35	5	4	2

因此, 我们有 $\frac{\partial \Psi(\theta, A, \delta)}{\partial A} > 0$, 从而得到

$$\frac{\partial q^*}{\partial A} < 0 \quad \text{和} \quad \frac{\partial u^*}{\partial A} < 0.$$

所以, 最优再保险策略和最优投资策略分别关于时滞参数 θ 和 δ 单调递增, 而关于参数 A 单调递减, 这与图 1 所示一致.

图 1 (网络版彩图) 参数 θ 、 δ 和 A 对 q^* 和 u^* 的影响

以上结论与实际金融市场里的现象是一致的. 当 θ 增加时, 综合滞后财富 $Y(T)$ 在终端财富衡量中占有更大的权重, 因此保险公司承担的总风险减小. 此外, 随着 δ 的增加, 对过去财富值进行考量的时间区间拉长, 也就是说, 保险公司获得了更多的历史信息, 可以更好地观察市场. 因此, 当 δ 增大时, 保险公司的总风险减小. 故保险公司倾向于在每项索赔中保留更大的份额, 并对风险资产进行更多投资. 此外, 从时滞财富 $Y(t)$ 的定义来看, 我们可以发现, A 的取值越大, 意味着较早时间的财富值所占的权重越小 (e^{As} 在 $[-\delta, 0]$ 区间里是一个衰减因子). 在这种情形下, 保险公司更依赖于当前时刻的财富. 也就是说, 保险公司在做决策时, 财富 $X(T)$ 的影响更大, 从而导致更大的风险. 因此, 保险公司将保留较少的份额, 并减少对风险资产的投资.

5.2 市场参数对最优策略的影响

现在探讨不同市场参数对最优策略的影响. 图 2 表明最优再保险策略和最优投资策略随着时间 t 的增大而增大. 另外, 不难发现, 熊市市场下的最优策略 q^* 和 u^* 要小于牛市市场下的最优策略. 这是一个合理现象, 因为熊市市场意味着经济形势不好, 风险较大, 因此保险公司宁愿减少对风险资产的投资, 且自身保留较少份额的保险业务. 图 3 显示了最优策略 q^* 和 u^* 随着 γ 的增大而减少. 由于保险公司是风险厌恶的, 故风险厌恶系数 γ 越大, 保险公司越厌恶风险, 从而对每项索赔的自留份额和风险资产的投资金额就越少.

图 4 探讨了参数 λ_{0i} 在两种不同市场状态下对 q^* 和 u^* 的影响. 在这个数值例子中, 设

$$\mu_2 = 0.05.$$

我们可以看出, 当 λ_{0i} 增大时, q^* 单调递减而 u^* 却单调递增. 这是因为 λ_{0i} 越大, 意味着平均跳的次数越多或者跳的幅度越大, 因此保险公司将转移更多的风险给再保险公司, 自留更少的保险业务. 对于金融市场来说, 由于是正跳, 此时股票价格上涨, 故保险公司将投入更多的金额到风险资产中.

图 5 刻画的是参数 η_2 在状态 1 下对 q^* 的影响. 当 η_2 增大时, 最优再保险策略 q^* 的值也将增大. 这说明, 随着再保费的增加, 保险公司将购买较少的再保险, 自身更愿意在每项索赔中保留更大的份额. 图 6 展示了参数 μ_2 对最优投资策略 u^* 的影响. 从图 6 中可以发现, μ_2 越大, 保险公司将投入越多的金额到风险资产中. 这是实际金融市场中的一种自然现象.

图 2 (网络版彩图) q^* 和 u^* 在两种不同状态下的值

图 3 (网络版彩图) 参数 γ 对 q^* 和 u^* 的影响

图 4 (网络版彩图) 参数 λ_{0i} 对 q^* 和 u^* 的影响

图 5 (网络版彩图) 参数 η_2 在状态 1 下对 q^* 的影响 图 6 (网络版彩图) 参数 μ_2 在状态 1 下对 u^* 的影响

6 总结

本文站在保险公司的角度考虑了一个最大化均值 - 方差效用下的最优再保险与最优投资问题. 与以往文献相比, 本文中的盈余过程和风险资产的价格过程分别由复合 Poisson 过程及跳扩散过程刻画,

并且这两个跳过程之间是相互依赖的. 文中还把时滞效应和市场机制转换考虑进来, 同时假设卖空是不允许的. 这使得最优问题的求解变得更加困难. 在博弈论框架下, 运用随机控制理论和相应的广义 HJB 方程, 本文对最优化问题分 5 种不同情形分别进行讨论, 并分别得到了每种情形下的均衡策略和值函数的显式表达.

基于本文的风险模型, 关于再保险与投资的最优问题还有很多方面值得我们进一步探讨. 一方面, 我们可以假设风险厌恶系数不仅依赖于时间与市场状态, 同时还依赖于初始财富值; 另一方面, 我们可以考虑资产在交易时收取固定或者比例交易费用带来的影响. 所有这些问题都更具挑战性.

致谢 衷心感谢评审专家们对本文所提出的宝贵意见.

参考文献

- Promislow S D, Young V R. Minimizing the probability of ruin when claims follow Brownian motion with drift. *N Am Actuar J*, 2005, 9: 110–128
- Zhang X, Siu T K. On optimal proportional reinsurance and investment in a Markovian regime-switching economy. *Acta Math Sin Engl Ser*, 2012, 28: 67–82
- Liang Z, Bayraktar E. Optimal reinsurance and investment with unobservable claim size and intensity. *Insurance Math Econom*, 2014, 55: 156–166
- Liang Z, Yuen K C. Optimal dynamic reinsurance with dependent risks: Variance premium principle. *Scand Actuar J*, 2016, 2016: 18–36
- Markowitz H. Portfolio selection. *J Finance*, 1952, 7: 77–91
- Li D, Ng W L. Optimal dynamic portfolio selection: Multiperiod mean-variance formulation. *Math Finance*, 2000, 10: 387–406
- Zhou X Y. Continuous-time mean-variance portfolio selection: A stochastic LQ framework. *Appl Math Optim*, 2000, 42: 19–33
- Zhou X Y, Yin G. Markowitz's mean-variance portfolio selection with regime switching: A continuous-time model. *SIAM J Control Optim*, 2003, 42: 1466–1482
- Bäuerle N. Benchmark and mean-variance problems for insurers. *Math Methods Oper Res*, 2005, 62: 159–165
- Bai L, Zhang H. Dynamic mean-variance problem with constrained risk control for the insurers. *Math Methods Oper Res*, 2008, 68: 181–205
- Bi J, Guo J. Optimal mean-variance problem with constrained controls in a jump-diffusion financial market for an insurer. *J Optim Theory Appl*, 2013, 157: 252–275
- Bi J, Liang Z, Xu F. Optimal mean-variance investment and reinsurance problems for the risk model with common shock dependence. *Insurance Math Econom*, 2016, 70: 245–258
- Liang Z, Bi J, Yuen K C, et al. Optimal mean-variance reinsurance and investment in a jump-diffusion financial market with common shock dependence. *Math Methods Oper Res*, 2016, 84: 155–181
- Ming Z, Liang Z, Zhang C. Optimal mean-variance reinsurance with common shock dependence. *ANZIAM J*, 2016, 58: 162–181
- Wei J, Wong K C, Yam S C P, et al. Markowitz's mean-variance asset-liability management with regime switching: A time-consistent approach. *Insurance Math Econom*, 2013, 53: 281–291
- Shen Y, Zeng Y. Optimal investment-reinsurance with delay for mean-variance insurers: A maximum principle approach. *Insurance Math Econom*, 2014, 57: 1–12
- Elsanosi I, Øksendal B, Sulem A. Some solvable stochastic control problems with delay. *Stochastics*, 2000, 71: 69–89
- Chang M H, Pang T, Yang Y. A stochastic portfolio optimization model with bounded memory. *Math Oper Res*, 2011, 36: 604–619
- A C, Li Z. Optimal investment and excess-of-loss reinsurance problem with delay for an insurer under Heston's SV model. *Insurance Math Econom*, 2015, 61: 181–196
- Pang T, Hussain A. A stochastic portfolio optimization model with complete memory. *Stoch Anal Appl*, 2017, 35: 742–766
- Bai L, Cai J, Zhou M. Optimal reinsurance policies for an insurer with a bivariate reserve risk process in a dynamic setting. *Insurance Math Econom*, 2013, 53: 664–670
- Yuen K C, Liang Z, Zhou M. Optimal proportional reinsurance with common shock dependence. *Insurance Math Econom*, 2015, 64: 1–13

- 23 Zhang C, Liang Z. Portfolio optimization for jump-diffusion risky assets with common shock dependence and state dependent risk aversion. *Optimal Control Appl Methods*, 2017, 38: 229–246
- 24 Björk T, Murgoci A. A general theory of Markovian time inconsistent stochastic control problems. *SSRN Electron J*, 2010, doi: 10.2139/ssrn.1694759
- 25 Björk T, Murgoci A, Zhou X Y. Mean-variance portfolio optimization with state-dependent risk aversion. *Math Finance*, 2014, 24: 1–24
- 26 Zeng Y, Li Z, Lai Y. Time-consistent investment and reinsurance strategies for mean-variance insurers with jumps. *Insurance Math Econom*, 2013, 52: 498–507

Optimal reinsurance and investment in a Markovian regime-switching economy with delay and common shock

Caibin Zhang, Zhibin Liang & Kam Chuen Yuen

Abstract This paper studies the optimal reinsurance and investment problem for an insurer in a Markovian regime-switching economy with the delayed system, in which the market modes are divided into a finite number of regimes, and all the key parameters change according to the value of different market modes. It is assumed that the insurance risk process of the insurer is modulated by a compound Poisson process while the price process of the risky asset is governed by a jump-diffusion model, and that the two jump processes are correlated through a common shock. Under the criterion of maximizing the expected mean-variance utility of terminal wealth, explicit expressions for the optimal strategies and the value function are obtained within a game theoretic framework by using the technique of stochastic control theory and the corresponding extended Hamilton-Jacobi-Bellman equation. The existence and uniqueness of the solutions are also verified. Finally, numerical examples are presented to show the impacts of some parameters on the optimal results.

Keywords mean-variance, reinsurance and investment, dependent risk, extended Hamilton-Jacobi-Bellman equation, delay, Markovian regime-switching

MSC(2020) 62P05, 93E20, 97M30

doi: 10.1360/SCM-2017-0371