

日冕环和日冕拱的平衡位形

胡文瑞

(中国科学院力学研究所)

摘 要

在线性场近似条件下,本文讨论了日冕环的二维平衡位形。用富利叶变换的方法,求出了问题的分析解,解释了日冕环观测结果的主要特性。沿日冕环纵向的压力分布均匀,日冕环的位形可以比无力场更稳定。由于日冕环可以储存更多的剪切场或扭转场的磁能,释放这部分磁能就可以驱动日冕环运动产生日冕瞬变过程,或者使环内的等离子体加热或加速而产生太阳耀斑。

一、前 言

用空间探测器的紫外,远紫外以及X射线波段观测太阳时发现,日冕中存在大量的环和拱状的结构。一般认为,日冕环和日冕拱是太阳大气中的基本结构形态。Priest曾经将日冕环分为五类,即简单耀斑区域,耀斑以后区域,活动区,宁静区,以及交接区内的日冕环^[1]。最近,成中杰按层次将这些环分为三类,即日冕环,过渡区环,以及日冕和过渡区中的亮斑^[2,3]。

日冕环基本是细长而致密的环圈,其根部常常可证认出位于色球层和过渡区。环内等离子体的温度为 2×10^6 K,密度为 3×10^9 /厘米³,而且温度和密度沿着环的方向分布均匀。在日面上观测,环的长度约为30—60",而半径约为5—7.5",所以长宽比约为4—10,为细长体。环内的压力比周围的压力要大40%左右。一般认为,太阳磁场的位形与日冕环的结构密切相关,但环内磁场位形的观测资料很少。观测还特别表明,没有证据表明在热的日冕环内部存在有冷的核心。

自从天空实验室的观测结果提出日冕环的重要性以后,人们进行了大量分析和研究工作。一类问题是讨论日冕环的静力学平衡性质,包括环内外的热力学参数和磁场的分布。另一类问题涉及日冕环的热力学性质,加热过程等,这个问题与日冕加热过程有关。此外,还有日冕环内等离子体的运动性质,日冕环的稳定性,以及其起源和演化等。本文主要讨论环的二维静力学平衡问题。

二、二维模型

Hood 和 Priest 曾经讨论了一维轴对称细长体的平衡位形^[4]。当日冕环被看成是细长

体时, 日冕环可近似地看成是一根细长的轴对称直磁力线管. 胡文瑞曾一般地讨论过这类磁力线管的二维静力学平衡关系^[5], 它可以描述日冕环两个根部附近的关系, 但不能很好地代表顶部的情况. 为了讨论沿日冕环的纵向以及其横向的平衡关系, 讨论直角坐标系中的二维模型. 假设所有参数沿 z 方向均匀, 环位于 x, y 的上半平面 ($x \geq 0$), $x = 0$ 对应于环根部的平面. 这实际是一种拱形的分布, 它可以代表日冕拱, 或者看作是三维日冕环的一种二维近似.

日冕环的静力学平衡方程可表示为

$$-\nabla p + \frac{1}{4\pi} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} - \rho \mathbf{g} = 0. \quad (2.1)$$

日冕环内的热力学压力的量级约为 $p \simeq 2$ 达因/厘米². 如果日冕环内的磁场为 10 高斯, 则磁压 $B^2/8\pi \simeq 4$ 达因/厘米², 与热力学压力同数量级. 太阳附近的重力加速度 $g = 2.74 \times 10^4$ 厘米/秒², 如果取日冕环内的 $n \simeq 3 \times 10^9$ /厘米³, 取日冕环的典型半径为 $a \simeq 7 \times 10^8$ 厘米, 则 $\rho g a \simeq 10^{-2}$ 达因/厘米². 所以, 重力项的影响比压力和磁力项要小得多, 可以忽略不计. 这样, 方程 (2.1) 简化为

$$\nabla p = \frac{1}{4\pi} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}. \quad (2.2)$$

磁场无源条件为

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (2.3)$$

日冕环的平衡位形完全由 (2.2) 和 (2.3) 决定.

在直角坐标系中, 对于二维问题可由 (2.3) 式引入磁势函数

$$B_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad B_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (2.4)$$

将关系 (2.4) 代入 (2.2), 就得到三个分量方程为

$$-B_x \frac{\partial B_x}{\partial x} + B_y \Delta \psi = 4\pi \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (2.5)$$

$$-B_x \frac{\partial B_x}{\partial y} - B_y \Delta \psi = 4\pi \frac{\partial p}{\partial y}, \quad (2.6)$$

$$-\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial B_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial B_x}{\partial x} = 0. \quad (2.7)$$

由 (2.7) 式立即得到.

$$B_x = G(\psi), \quad (2.8)$$

即横向磁场沿每个磁面保持常数. 这个结果与无力场时的结果相同^[6]. 将 (2.8) 代入 (2.5) 和 (2.6), 就可得到

$$-\left[G \frac{dG}{d\psi} + \Delta \psi \right] \frac{\partial \psi}{\partial x} = 4\pi \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (2.9)$$

$$-\left[G \frac{\partial G}{\partial \psi} + \Delta \psi \right] \frac{\partial \psi}{\partial y} = 4\pi \frac{\partial p}{\partial y}. \quad (2.10)$$

由 (2.9) 和 (2.10) 立即导出

$$p = p(\psi), \quad (2.11)$$

即压力沿每根磁力线保持不变。将 (2.11) 代入 (2.9) 或 (2.10) 就得到方程

$$\Delta\phi + G \frac{dG}{d\phi} = -4\pi \frac{dp}{d\phi}, \quad (2.12)$$

其中拉普拉斯算子 $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ 。日冕环的平衡位形就化为在给定边界条件之下求解二阶偏微分方程 (2.12)。

三、线性场近似

横向场函数关系 (2.8) 需要由其他物理条件确定。在无力场问题中, 常常做线性场近似^[7]。线性场近似下, 关系 (2.8) 可简化为

$$G(\phi) = \alpha^* \phi, \quad (3.1)$$

其中 α^* 为常数。如果我们在这里也作同样的线性场近似, 则方程 (2.12) 简化为

$$\Delta\phi + \alpha^2 \phi = -4\pi \frac{dp}{d\phi}. \quad (3.2)$$

将方程 (3.2) 式无量纲化, 记

$$\begin{cases} \varphi = \frac{\phi}{\phi_0}, \quad \xi = \frac{x}{l}, \quad \eta = \frac{y}{l}, \quad P = \frac{p}{p_0}, \\ \alpha = \alpha^* l, \quad \beta = \frac{p_0}{\phi_0^2 / 8\pi l^2}, \end{cases} \quad (3.3)$$

其中 ϕ_0, p_0 为磁势和压力的典型值, l 为一个典型的长度。这样, (3.2) 式的无量纲形式为

$$\Delta\varphi + \alpha^2 \varphi = -\frac{\beta}{2} \frac{dP(\varphi)}{d\varphi}. \quad (3.4)$$

再讨论压力分布。为了模拟日冕环内的压力比它外面的高, 假设

$$P(\varphi) = p_0 + p_1 \varphi + p_2 \varphi^2, \quad (3.5)$$

其中 $p_i (i = 0, 1, 2)$ 为无量纲常数。适当选择 p_i 值就可以得到合理的压力分布。将 (3.5) 式代入方程 (3.4), 不难得到

$$\Delta\varphi + \alpha_1^2 \varphi = -\beta p_1 / 2, \quad (3.6)$$

其中系数

$$\alpha_1^2 = \alpha^2 + \beta p_2. \quad (3.7)$$

(3.6) 式表明, 如果 $p_1 = 0$, 日冕环内的磁场位形与无力场相似, 只是无力因子 α 代之为 $\sqrt{\alpha^2 + \beta p_2}$ 。若 p_2 为正, 则相应的扭转或剪切增强; 否则减弱。

再讨论边界条件。由于日冕环是一种闭合形态, 如果磁场大体沿日冕环的方向延伸, 磁场位形应是一种闭场。不失一般性, 可将日冕环的边界条件表示为

$$\begin{cases} \varphi(0, \eta) = 0, & \varphi(a, \eta) = 0, \\ \varphi(\xi, 0) = f(\xi), & \varphi(\xi, 1) = 0, \end{cases} \quad (3.8)$$

其中 $f(\xi)$ 应具有双极磁场的特征。这样, 日冕环的问题就化为在边界条件 (3.8) 下, 求解

方程 (3.6).

由于方程 (3.6) 是线性的, 而边值又是给在矩形边界上, 可以用富利叶变换的方法求解. 令

$$\varphi_n(\eta) = \int_0^a \varphi(\xi, \eta) \sin\left(\frac{n\pi\xi}{a}\right) d\xi, \quad (3.9)$$

并且记

$$\begin{cases} a_n = \int_0^a (-\beta p_1) \sin\left(\frac{n\pi\xi}{a}\right) d\xi = (-1)^{n+1} 2\beta p_1 \left(\frac{a}{n\pi}\right), \\ f_n = \int_0^a f(\xi) \sin\left(\frac{n\pi\xi}{a}\right) d\xi, \end{cases} \quad (3.10)$$

则方程 (3.6) 和边界条件 (3.8) 化为

$$\begin{cases} \frac{d^2\varphi_n}{d\eta^2} + \left[\alpha_1^2 - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2\right] \varphi_n = a_n \\ \varphi_n(0) = f_n, \quad \varphi_n(1) = 0. \end{cases} \quad (3.11)$$

$$\varphi_n(0) = f_n, \quad \varphi_n(1) = 0. \quad (3.12)$$

经过适当运算, 不难得出上式的解. 当

$$\lambda_n^2 = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 - \alpha_1^2 > 0 \quad (3.13)$$

时, 方程 (3.11) 和边界条件 (3.12) 的解为

$$\varphi_n(\eta) = f_n \frac{\text{sh}[\lambda_n(1-\eta)]}{\text{sh}(\lambda_n)} + \frac{a_n \text{sh}[\lambda_n(1-\eta)] + \text{sh}(\lambda_n\eta) - \text{sh}(\lambda_n)}{\lambda_n^2 \text{sh}(\lambda_n)}. \quad (3.14)$$

而当满足条件

$$\gamma_n^2 = \alpha_1^2 - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 > 0 \quad (3.15)$$

时, 问题的解为

$$\varphi_n(\eta) = f_n \frac{\sin[\gamma_n(1-\eta)]}{\sin(\gamma_n)} - \frac{a_n \sin[\gamma_n(1-\eta)] + \sin(\gamma_n\eta) - \sin(\gamma_n)}{\gamma_n^2 \sin(\gamma_n)}. \quad (3.16)$$

利用富利叶变换的反演, 由 (3.14) 式和 (3.16) 式不难得到方程 (3.6) 和边界条件 (3.8) 的解为

$$\begin{aligned} \varphi(\xi, \eta) = & \frac{2}{a} \sum_{n=0}^N \left\{ f_n \frac{\sin[\gamma_n(1-\eta)]}{\sin(\gamma_n)} \right. \\ & \left. - \frac{a_n \sin[\gamma_n(1-\eta)] + \sin(\gamma_n\eta) - \sin(\gamma_n)}{\gamma_n^2 \sin(\gamma_n)} \right\} \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \\ & + \frac{2}{a} \sum_{n=N+1}^{\infty} \left\{ f_n \frac{\text{sh}[\lambda_n(1-\eta)]}{\text{sh}(\lambda_n)} \right. \\ & \left. + \frac{a_n \text{sh}[\lambda_n(1-\eta)] + \text{sh}(\lambda_n\eta) - \text{sh}(\lambda_n)}{\lambda_n^2 \text{sh}(\lambda_n)} \right\} \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right), \end{aligned} \quad (3.17)$$

其中 N 为不超过 $\alpha_1\pi/a$ 的最大整数; 当 $\alpha_1^2 < 0$ 时, N 为零. 将解式 (3.17) 代入压力分布关系 (3.5), 就确定了热力学压力.

如果压力项系数 $a_n = 0$, 解 (3.17) 式就和双极无力场的结果相似^[8].

四、计算结果

把日冕环看成是磁力线管,则磁势的边界条件可以给做^[8]

$$f(\xi) = \begin{cases} 0, & 0 \leq \xi < \xi_1 \\ \frac{\xi - \xi_1}{\xi_2 - \xi_1}, & \xi_1 \leq \xi \leq \xi_2 \\ 1, & \xi_2 \leq \xi \leq a - \xi_2 \\ \frac{\xi - (a - \xi_1)}{\xi_1 - \xi_2}, & a - \xi_2 \leq \xi \leq a - \xi_1 \\ 0, & a - \xi_1 < \xi \leq a \end{cases} \quad (4.1)$$

由变换(3.10),不难得到函数(4.1)的富利叶系数为

$$\begin{cases} f_{2n} = 0, \\ f_{2n+1} = \frac{2}{\xi_2 - \xi_1} \left[\frac{a}{(2n+1)\pi} \right]^2 \left\{ \sin \left[\frac{(2n+1)\pi\xi_2}{a} \right] - \sin \left[\frac{(2n+1)\pi\xi_1}{a} \right] \right\}. \end{cases} \quad (4.2)$$

在我们的计算中,取 $a = 2$, $\xi_1 = 0.5$, $\xi_2 = 0.6$. 所以,日冕环的根部位于 $0.5 \leq \xi \leq 0.6$ 和 $1.4 \leq \xi \leq 1.5$, 而且日冕环延伸于 $0 \leq \eta \leq 1$ 的空间中.

从磁势的边值分布(4.1)可以看出,在日冕环根部的磁势值迅速从0变到1,而环两边的值分别为0和1. 为了表示日冕环内部的热力学压力比外部大约增加40%,可以将(3.5)式表示为

$$\begin{aligned} P(\phi) &= 1 + 1.6\phi(1 - \phi) \\ &= 1 + 1.6\phi - 1.6\phi^2, \end{aligned} \quad (4.3)$$

其中日冕环外的压力取为典型的压力.

边值(4.1)如图1中的实线所示,这时的日冕环根部落在 $\xi_1 \leq \xi \leq \xi_2$ 和 $a - \xi_2 \leq$

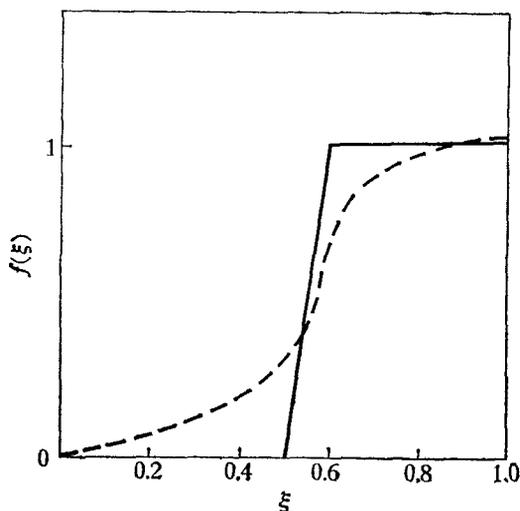


图1 边值函数 $f(\xi)$ 的分布图

$\xi \leq a - \xi_1$ 中,在此两根部以外,磁势分布均匀,没有磁力线浮出或流入 $\eta = 0$ 平面. 实际的情况可能并非如此,在日冕环根部以外仍可能有磁力线进出. 由于函数(4.1)的梯度变化很大,用富利叶级数(3.10)和(4.2)展开时,需要比较多的项数和精确度才能很好逼近这个函数. 如果将富利叶级数作适当的截断, $f(\xi)$ 的近似分布如图1中的虚线所示. 这种分布在日冕环根部以外仍有磁场,但日冕环内的压力较高. 本文的计算取后一种情况.

图2是 $\beta = 0.1$ 时 $\alpha = 0$ 和 $\alpha = 2$ 时的日冕环的二维位形. 图3和图4分

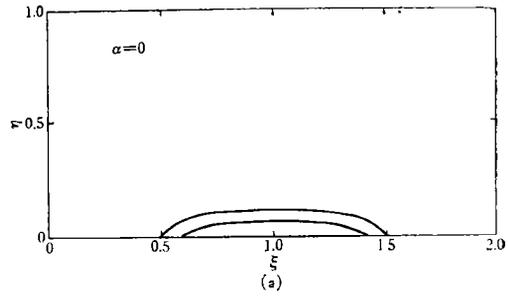
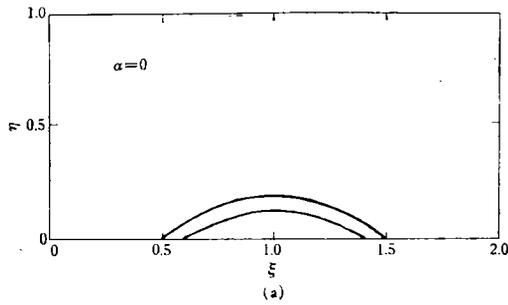


图2 $\beta = 0.1$ 时的日冕环位形
(a) $\alpha = 0$ (b) $\alpha = 2$

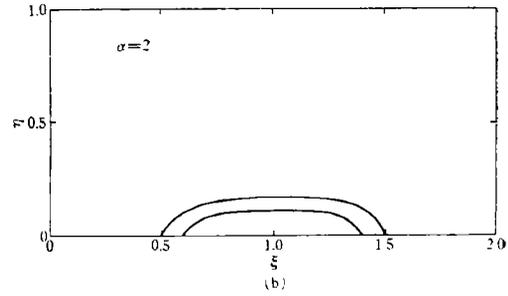
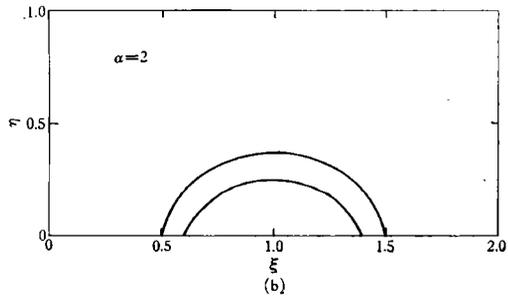


图3 $\beta = 1$ 时的日冕环位形
(a) $\alpha = 0$ (b) $\alpha = 2$

别是 $\beta = 1$ 和 $\beta = 2$ 时的日冕位形。这些结果表明,对于相同的 β 值,当 α 增大时,日冕环顶部的位置上升;对于相同的 α 值,当 β 值增大时,日冕环顶部的位置下降。这表明,当剪切磁场或者扭转磁场的分量比较大时,为了维持静力学的平衡位形,日冕环向上升,因而纵向尺度将要增加。而当热力学压力相对于磁压增大时,日冕环的平衡位形将会下降,而且日冕环的顶部相对地比较平坦(曲率半径比较大)。这表明,日冕环的平衡位形不仅与根部的边值有关系,而且还与环的切剪程度,以及环的压力分布等因素有密切的关系,特别是 β 值的大小对平衡位形具有很大的影响。

五、讨 论

无力场的磁场位形已有许多研究。线性无力场问题可以描述为

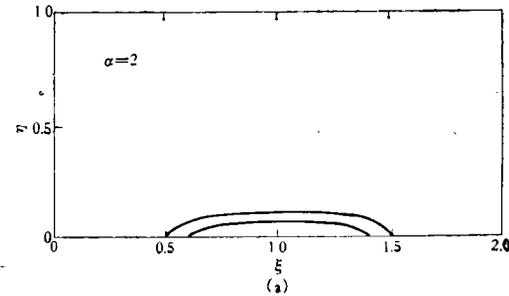
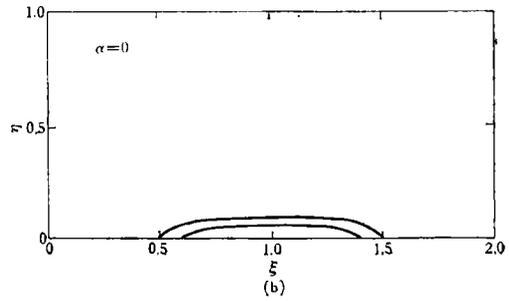


图4 $\beta = 2$ 时的日冕环位形
(a) $\alpha = 0$ (b) $\alpha = 2$

$$\begin{cases} \Delta\varphi + \alpha^2\varphi = 0, \\ \varphi|_{\Gamma} = \varphi_{\Gamma}. \end{cases} \quad (5.1)$$

其中 Γ 为问题的边界, φ_{Γ} 为磁势的边值. 对于日冕环的平衡位形, 必须考虑压力梯度的影响. 将 (4.3) 式代入 (3.6) 式, 对于 (5.1) 的同样边值, 日冕环平衡位形的方程可以表示为

$$\begin{cases} \Delta\varphi + (\alpha^2 - 1.6\beta)\varphi = -1.6\beta, \\ \varphi|_{\Gamma} = \varphi_{\Gamma}. \end{cases} \quad (5.2)$$

当 $\beta \rightarrow 0$ 时, (5.2) 式就化简为 (5.1) 式. (5.2) 式表明, 当压力相对不小 ($\beta \simeq 1$) 时, 压力项对于位形分布有很大的影响. 可以将线性日冕环场的 (5.2) 式分解为两部分之和. 记

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2, \quad (5.3)$$

它们分别满足关系

$$\begin{cases} \Delta\varphi_1 + (\alpha^2 - 1.6\beta)\varphi_1 = 0, \\ \varphi_1|_{\Gamma} = \varphi_{\Gamma}; \end{cases} \quad (5.4)$$

和

$$\begin{cases} \Delta\varphi_2 + (\alpha^2 - 1.6\beta)\varphi_2 = -1.6\beta, \\ \varphi_2|_{\Gamma} = 0. \end{cases} \quad (5.5)$$

方程 (5.4) 与线性无力场方程 (5.1) 相似, 只是零阶项的常系数 $\alpha^2 - 1.6\beta$ 与 α^2 不同. (5.1) 中的无力因子 α 反映了剪切场的大小. 可以证明, 当 α 超过某个临界值时, 位形不稳定. 方程 (5.4) 中的等效系数 $\alpha_1^2 = \alpha^2 - 1.6\beta$ 比 α 小, 当 β 不小时 α_1^2 的值减小较多, 甚至可能为负. 所以, 方程 (5.4) 的解比线性无力场 (5.1) 更为稳定. 这意味着, 当压力相对不小时 ($\beta \simeq 1$), 日冕环中可以维持更大的剪切场; 因而在同样的纵场边值条件下, 可以储存更多的能量. (5.5) 式代表源项的影响, 它描述均匀压力梯度 $\frac{dP}{d\psi} = 1.6\beta > 0$ 的作用. 这样, 方程 (5.2) 就可以看成是较弱的等效剪切场 $\alpha_1^2 = \alpha^2 - 1.6\beta$ 和均匀压力梯度作用下的平衡位形. 由于等效剪切场比实际剪切场小, 故位形趋于更稳定; 均匀压力梯度的影响使某些模式趋于稳定, 另一些模式可能不稳定.

观测表明, 太阳耀斑经常发生在日冕环中. 在无力场的耀斑理论中认为, 由于磁场的剪切和扭转, 可以在活动区中储存爆发耀斑所需要的磁能. 根据前边的分析, 在日冕环中可能储存更多的剪切或扭转磁场的能量. 如果 α 随时间缓慢地增加, 则剪切磁场也逐渐增强. 由于 $\alpha_1^2 < \alpha^2$, 这使 α 可以增加到的更大的值, 而整个位形仍维持稳定. 剪切场的磁能密度为

$$W_{Hx} = \alpha^2 \iiint_V \phi^2 dx dy dz, \quad (5.6)$$

其中 V 为日冕环的相应体积. W_{Hx} 随 α 的增大而急剧增大, 当这部分能量转变为耀斑能量时, 足以供应更大耀斑的需要. 这也可以解释为什么太阳耀斑更容易出现在日冕环中.

当剪切场不断增加时 (α 不断增加), 对于同样的 β 值, 日冕环的位置不断上升. 压力分布只和 ψ 有关系, 在日冕环边界处的热力学压力是固定的. 这样, 日冕环上、下边界上的

剪切场磁压的差值与 α^2 成比例, 即

$$\Delta p_{mz} = \alpha^2(\phi_{\mp}^2 - \phi_{\pm}^2), \quad (5.7)$$

其中 ϕ_{\mp} 和 ϕ_{\pm} 分别为日冕环上、下壁处之磁势函数。当 α 增大时, $\Delta p_{mz} > 0$ 并增大, 所以磁场位形需要调整, 日冕环升高。这样, 日冕环位形的变化可以分为两类。一种是由于剪切场逐渐增加, 使日冕环位形不断调整而升高, 这是一种缓慢的变化。另一种是剪切场超过一定程度时达到不稳定, 剪切场能量突然释放出来, 这是一种瞬变或突变过程。后一种过程中, 不定位形畸变后产生很大的洛伦茨力, 可以驱动日冕环产生日冕瞬变过程; 它也可能在日冕环内转换为热能或使粒子加速而产生太阳耀斑。剪切场能量的转换是一种动力学过程。

对于静力学平衡的日冕环的主要观测特性, 可以用本文的讨论给予定性的解释。由于压力沿每根磁力线保持不变, 在日冕环中的热力学压力的分布大体是均匀的, 沿纵向的变化不大。当环内密度分布均匀时, 温度分布也均匀; 在环的根部, 密度增大到色球层的数值, 则温度也很快下降到色球层的值。由于等效的 $\alpha_1^2 = \alpha^2 + p_2\beta < \alpha^2$, 所以日冕环的位形都相对地比较更加稳定。另一方面, 由于重力项在日冕环中相对地较小, 由于重力不同而引起的许多交换不稳定性过程就不重要。这也是日冕环比较稳定的原因之一。

本文是在线性场近似下, 讨论了日冕环的二维位形特征, 大体上描述了日冕环的许多观测结果。在线性近似下, 可对问题进行分析处理。关于非线性场以及一些更合理的模型, 还需要作更进一步的讨论。

作者衷心感谢成中杰博士, 他在访华期间曾详细地论述了日冕环的现象, 并进行了许多有益的讨论。

参 考 文 献

- [1] Priest, E. R., *Solar Phys.*, **58**, 57, 1978.
- [2] Cheng, C. C., *Astrophys. J.*, **238**, 743, 1980.
- [3] Cheng, C. C., Active region loops: summary of observational results, 1981年在北京的学术报告.
- [4] Hood A. W., Priest, E. R., *Astron. Astrophys.*, **77**, 233, 1979.
- [5] 胡文瑞, 中国科学, **5**, 597, 1981.
- [6] 胡文瑞, 自然, **10**, 595, 1979.
- [7] 胡文瑞, 中国科学, **1**, 69, 1977.
- [8] 马云丽, 胡文瑞, 黄山天体物理文集, 科学出版社, p. 222, 1981.

THE EQUILIBRIUM CONFIGURATION OF THE CORONA LOOP AND THE CORONA ARCHIDE

Hu Wen-rui

(*Institute of Mechanics, Academia Sinica*)

Abstract

Under the assumption of linear field, the equation of the two-dimensional configuration of corona loop or the corona archide may be given as

$$\Delta\phi + G \frac{dG}{d\phi} = -4\pi \frac{dp}{d\phi},$$

which is solved by using the method of Fourier transformation. The analytical solution is applied to explain the observational results. The theoretical results show that the pressure should be uniform along the loop, and the configuration of the loop is more stable than that of the force free field. The influence of the shear magnetic field and the pressure on the configuration are also discussed. More magnetic energy of shear or twisted magnetic field may be stored in the loop, the corona loop will be driven to produce the corona transient process or the plasma will be heated or accelerated to produce solar flares if part of the stored energy is released.