

# 超声兰姆波二次谐波发生效应的理论、实验及应用研究进展

李卫彬<sup>1</sup>, 项延训<sup>2</sup>, 邓明晰<sup>3\*</sup>

1. 厦门大学航空航天学院, 厦门 361102;
2. 华东理工大学机械与动力工程学院, 上海 200237;
3. 重庆大学航空航天学院, 重庆 400044

\* 联系人, E-mail: [mxden@cqu.edu.cn](mailto:mxden@cqu.edu.cn)

2021-07-21 收稿, 2021-10-21 修回, 2021-10-22 接受, 2021-10-25 网络版发表

国家自然科学基金(12134002, 12074050, 11974295, 11834008)资助

**摘要** 材料退化或微损伤的早期无损检测和评价可以保障关键结构的安全服役。因此, 开展缺陷演化的早期评价, 甚至缺陷产生前的早期检测是非常重要的。通常, 线性超声检测方法对材料微观缺陷不敏感。非线性超声技术被广泛认为可以表征材料微观结构变化。二次谐波发生效应作为超声传播过程中的一种典型非线性声学效应, 可以用来评价材料的性能退化程度和检测早期的微缺陷。此外, 超声兰姆波被广泛应用于大型工业结构的健康监测及材料的无损检测和评价。基于超声兰姆波的无损检测方法能够检测出结构不可达或隐蔽区域, 并具有低成本、高效率的优势。兰姆波二次谐波结合了兰姆波的优点和二次谐波对微损伤的高敏感特性, 近年来受到越来越多的关注和研究。然而, 由于兰姆波的频散和多模式特性, 一般认为兰姆波传播过程中不存在强烈的非线性效应, 实验上也很难对兰姆波二次谐波进行观察与测量。近年来, 虽然兰姆波二次谐波的理论和实验研究取得了重要的进展, 但该领域仍存在一系列科学和技术难题。本文系统梳理了超声兰姆波二次谐波发生效应的理论研究历程, 综述了兰姆波二次谐波的实验研究进展以及在不同类型损伤评价中的应用, 讨论了超声兰姆波二次谐波近年来研究中出现的争议问题, 最后展望了兰姆波二次谐波的未来研究重点及发展趋势。

**关键词** 兰姆波, 二次谐波, 相速度匹配, 群速度, 无损评价

兰姆波是由英国科学家Lamb<sup>[1]</sup>于1917年最先预测存在, 随后被实验证实在板状固体结构中传播的一类超声导波。当垂直于超声传播方向的结构截面尺寸与超声波波长相当或者小于超声波波长时, 超声波在空间有限的介质内会反复地反射并产生复杂的叠加和干涉, 这样就产生了一种与传播介质几何形状有关的超声传播模式<sup>[2,3]</sup>。相对于体波, 利用超声兰姆波可以对固体板材进行长距离快速检测。超声兰姆波检测技术是一种可对结构件中不可达或隐蔽区域进行检测的有

效方法, 既可检测试件表面缺陷, 也可对试件内部损伤进行检测与评价。兰姆波因具有灵活的激发和检测方式, 且能携带大量检测所需信息, 作为一种有效的检测手段已被广泛应用<sup>[4]</sup>。

兰姆波具有多模式和频散特性。在不同的频率下, 超声兰姆波在传播介质中会呈现出不同的传播速度和声场特征<sup>[2-4]</sup>。此外, 每个频率下至少有两个不同的兰姆波模式。建立传播模式的兰姆波频散曲线图是分析兰姆波传播特征的主要途径, 也是确定基频兰姆波频

**引用格式:** 李卫彬, 项延训, 邓明晰. 超声兰姆波二次谐波发生效应的理论、实验及应用研究进展. 科学通报, 2022, 67: 583–596

Li W B, Xiang Y X, Deng M X. Advances in theoretical, experimental and applied studies on second-harmonic generation of ultrasonic Lamb waves (in Chinese). Chin Sci Bull, 2022, 67: 583–596, doi: [10.1360/TB-2021-0723](https://doi.org/10.1360/TB-2021-0723)

率及相速度/群速度的基本依据<sup>[4]</sup>。传播模式的兰姆波频散方程通过同时满足波动方程和边界条件推导获得, 可以利用数值迭代法求解频散方程以获得兰姆波的频散曲线图<sup>[4]</sup>。

传播介质中微小的缺陷也能导致明显的超声非线性效应。近年来, 人们开始尝试将超声传播过程中的非线性效应应用在超声无损检测领域。这种利用超声传播过程中的非线性效应来表征材料微观结构变化、检测材料微损伤的方法被称为非线性超声检测技术。二次谐波的发生是一种典型的声学非线性现象<sup>[5]</sup>。二次谐波发生的物理机理可以解释为当基频超声波在介质中传播时, 如果介质内部存在不连续的质点振动(介质内微损伤、微组织不均匀等), 会导致超声波波形发生畸变, 从而产生二倍频的二次谐波信号。通过测量二次谐波信号的振幅即可表征和评价传播介质材料的微损伤<sup>[5~7]</sup>。

鉴于非线性超声检测方法的高灵敏度和兰姆波检测技术的优越性, 研究兰姆波二次谐波理论及检测方法具有重要的科学意义和工程价值。但是, 兰姆波传播过程中所引起的非线性相互作用异常复杂。通常情况下, 兰姆波二次谐波不存在显著或强烈的非线性效应, 在实验中也难以对相应的非线性效应进行观察与测量<sup>[8]</sup>。20世纪80年代后期开始, 考虑到超声传播过程中的非线性效应可以更加深刻地揭示材料和结构的性质, 以及兰姆波的检测优势, 关于兰姆波二次谐波的研究获得了越来越多的关注。国内外学者在兰姆波二次谐波发生和传播理论方面的研究获得了突破, 给出了随传播距离具有积累效应的兰姆波二次谐波的发生条件<sup>[8~12]</sup>。在此理论研究的基础上, 国内外学者系统开展了兰姆波二次谐波的实验和检测应用研究, 获得了很多研究成果<sup>[13~16]</sup>。本文系统梳理了近年来超声兰姆波二次谐波发生效应的理论研究历程, 综述了兰姆波二次谐波的实验研究进展以及在不同类型损伤评价中的应用, 讨论了超声兰姆波二次谐波研究中出现的争议问题, 展望了兰姆波二次谐波的未来研究重点及发展趋势。

## 1 兰姆波二次谐波发生与传播理论

兰姆波二次谐波发生与传播理论是开展兰姆波二次谐波实验研究和检测应用的基础。目前, 分析兰姆波二次谐波发生与传播的主要方法包括基于部分波(partial waves)方法和界面非线性声反射技术分析研究共

振条件下兰姆波积累二次谐波声场的解析方法, 以及基于二阶微扰理论和导波的模式展开分析方法。

### 1.1 界面非线性声反射和部分波方法

固体界面非线性声反射理论在非频散的Rayleigh波和Stoneley波的非线性效应理论分析中率先获得广泛的关注和深入研究<sup>[17~19]</sup>。Deng<sup>[20]</sup>采用二阶微扰近似方法并结合界面非线性声反射理论, 对二维平面波管中的声波非线性效应进行了分析和研究, 获得了二次谐波的解析解。对于固体板中传播的超声导波二次谐波, Deng<sup>[21]</sup>根据导波的部分波方法和固体界面非线性声反射理论, 对水平剪切(shear horizontal, SH)板波的二次谐波发生效应进行了理论分析。根据部分波理论, SH板波由满足边界条件且质点振动方向平行于固体板表面的两个部分横波耦合而成, 单个体横波产生的二次谐波是纵波模式, 不具有空间积累增长性质。但是, 有研究分析, 如果板内两个体横波传播方向满足一定条件(或SH板波的相速度满足一定条件), 则构成SH板波的两个部分体横波相互作用所产生的二次谐波可能存在积累增长效应<sup>[21]</sup>。Deng<sup>[22,23]</sup>采用界面非线性声反射技术, 分别研究了单层和多层固体板中SH板波二次谐波的发生与传播, 推导获得了SH板波积累二次谐波声场的解析解, 发现其与兰姆波积累二次谐波的声场具有类似的性质。该研究表明, 尽管单个体横波不具有强烈的二次谐波发生效应(不具有空间积累增长效应), 但是, 当SH板波相速度等于板材纵波声速时, SH板波的二次谐波可以存在强烈的非线性效应, 表现为其二次谐波振幅随传播距离积累增长。

固体板中的兰姆波由满足边界条件的纵波和横波耦合而成。如图1所示, 对于单层固体板中一个给定的兰姆波模式, 按照导波的部分波分析方法, 可将其视为由满足表面应力为零边界条件的2个部分体横波( $\mathbf{U}_{T1}$ 和 $\mathbf{U}_{T2}$ )及2个部分体纵波( $\mathbf{U}_{L1}$ 和 $\mathbf{U}_{L2}$ )耦合叠加而成<sup>[9]</sup>。 $\theta_T$ 和 $\theta_L$ 是部分波波矢 $\mathbf{K}_{Tn}$ 和 $\mathbf{K}_{Ln}(n=1,2)$ 与y轴的夹角, 兰姆波沿z轴方向传播。

构成基频兰姆波模式的4个部分体波在固体板的上、下表面来回入射/反射并沿板向前传播。因板材的体弹性非线性效应, 板内的4个部分体波将发生非常复杂的非线性自作用及非线性互作用(包括横波自作用、纵波自作用, 以及不同横波与纵波之间的互作用等), 在板内产生14个二倍频的彻体驱动力, 进而在板内产生相应的14个二倍频驱动体声波, 且其中2个二倍

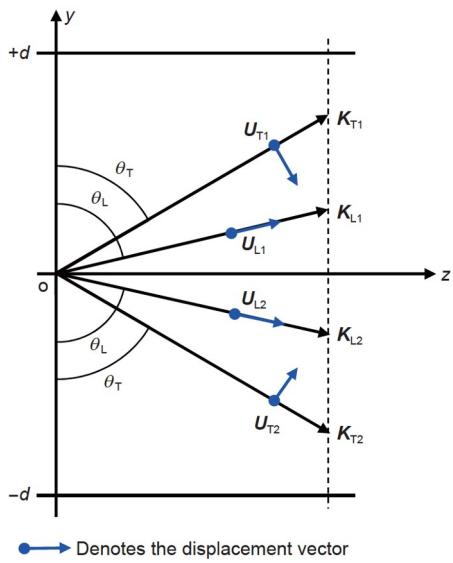


图 1 (网络版彩色)兰姆波的部分体波场<sup>[9]</sup>  
Figure 1 (Color online) Partial bulk wave fields of Lamb wave<sup>[9]</sup>

频驱动体声波包含空间积累增长项<sup>[9]</sup>. 向板上下表面入射的各个部分体声波将产生相应的反射二次谐波. 基于界面非线性声反射技术, Deng<sup>[9]</sup>发现了满足相位匹配条件的所有反射二次谐波的形式解(将其视为二阶非齐次波动方程的通解), 其对应的二倍频应力张量包含积累项而另一些项则无积累项. 根据在板表面二次谐波应力为零的边界条件, 即可确定板内各个反射二次谐波之解析解.

在实际应用中, 人们关注具有积累效应的二次谐波. 在这种情形下, 基频波与二次谐波发生效应之间是同步的, 能获得较显著的二次谐波信号, 有利于实验测量观察. Deng<sup>[8,9]</sup>严格推导出满足边界条件及初始条件、物理意义清晰且便于声场数值计算的兰姆波积累二次谐波声场的解析解. 根据所推得的兰姆波积累二次谐波声场的解析解, 揭示出其若干重要特性: (1) 无论基频兰姆波的声场是对称或反对称, 其积累二次谐波声场均呈对称分布; (2) 对称与反对称基频兰姆波的二次谐波同时具有积累效应; (3) 二次谐波声场的畸变程度随传播距离积累增长, 而且对于同一个可发生积累二次谐波的基频兰姆波模式, 激发源所处位置不同, 积累二次谐波的声场分布也不相同; (4) 基频模式阶次提高, 板内部的声场畸变程度愈加复杂.

## 1.2 导波模式展开分析方法

采用界面非线性声反射技术分析兰姆波二次谐波

发生与传播, 可以比较清晰直观地展现兰姆波二次谐波在固体板中发生的物理过程. 但是, 该方法在分析积累二次谐波的发生条件时, 要求基频兰姆波与二倍频兰姆波的相速度严格相等, 对于基频兰姆波与二倍频兰姆波相速度近似相等的情况, 该方法在数学上处理起来比较困难. 实际中, 基频兰姆波与二倍频兰姆波近似满足相速度匹配更普遍, 讨论这种近似匹配情况更符合实际情形. 此外, 该方法处理横截面形状不规则结构中的超声导波二次谐波发生与传播情形也非常困难.

采用导波模式展开分析方法是解决这些局限的有效手段. 需要说明的是, 基于互易原理的模式展开分析方法只适用于线性超声导波情形. 分析兰姆波二次谐波时, 采用了二阶微扰近似方法, 将兰姆波二次谐波看成一个二阶微扰修正(忽略三阶及以上效应), 二次谐波与基频兰姆波不发生相互耦合. 在此情形下, 非线性波动方程可以化为两个线性方程, 即非线性波动方程在二阶微扰近似下仍是线性的. 因此, 在已知二倍频激发源的情况下, 导波模式展开方法可以应用于兰姆波二次谐波的理论分析.

Deng<sup>[10]</sup>及de Lima和Hamilton<sup>[11]</sup>各自独立地采用导波激发的模式展开分析方法, 推导出更为一般的兰姆波二次谐波声场之解析解. 兰姆波二次谐波声场可以表示为

$$\mathbf{U}_2 = \frac{1}{2} \sum_m A_m(z) \mathbf{U}_m(y) \exp(-j2\omega t), \quad (1)$$

式中,  $\mathbf{U}_2$ 表示兰姆波的二次谐波声场,  $\mathbf{U}_m(y)$ 是 $m$ 模式二倍频兰姆波,  $A_m(z)$ 为 $m$ 模式二倍频兰姆波的模式展开系数. 在基频兰姆波的激发源位置( $z=0$ ), 二次谐波声场  $\mathbf{U}_2=0$ .  $m$ 模式二倍频兰姆波的模式展开系数可通过微分方程求解. 据二倍频兰姆波模式展开系数的表达式可知, 当基频兰姆波与二倍频兰姆波的相速度相等(同步条件)且两者之间存在耦合效应时, 兰姆波二次谐波的幅值随传播距离的增加而线性递增, 即兰姆波二次谐波具有随传播距离积累增长的效应.

基于二阶微扰理论和导波模式展开方法可分析获得兰姆波声场的解析解, 进而得到兰姆波存在强烈非线性效应所必须满足的条件<sup>[10,11]</sup>. 根据兰姆波二次谐波的模式展开解析解, 可揭示兰姆波存在强烈非线性效应的物理实质及其二次谐波的声场特性. 该理论研究结果可给出更为全面的解析结论, 包括: (1) 基频兰姆波与某个二倍频兰姆波模式之间的耦合程度决定了该二倍频兰姆波模式展开系数的大小; 无论兰姆波的

对称性如何，构成其二次谐波的各个二倍频兰姆波模式均是对称的，即兰姆波的二次谐波声场具有对称性。⑵当基频兰姆波与某个二倍频兰姆波模式的相速度严格相等时，该二倍频兰姆波模式将随传播距离线性积累增长，其他二倍频兰姆波模式的相速度与基频兰姆波的相速度相差较大，由于拍效应，可忽略它们对总的二次谐波声场的贡献。这一结果与共振条件下获得的兰姆波积累二次谐波声场的解析解相同。⑶当基频兰姆波与某个二倍频兰姆波模式的相速度近似相等时，该二倍频兰姆波模式在相应的临界距离内仍将随传播距离积累增长。⑷当基频兰姆波与二倍频兰姆波模式的相速度相差较大时，二倍频兰姆波模式的振幅随传播距离表现出显著的“拍”效应，使二次谐波的发生效率迅速降低。简言之，要使基频兰姆波存在强烈的非线性效应，首先，应尽可能满足相速度匹配条件（共振条件）；其次，要求基频波传输至二倍频兰姆波的能量不为零。关于各个二倍频兰姆波模式对基频兰姆波二次谐波声场的贡献大小，可根据确定二倍频兰姆波模式展开系数的模式方程进行严格计算<sup>[10]</sup>。

需要指出的是，关于兰姆波二次谐波声场对称性（即只存在对称模式的兰姆波二次谐波），在研究过程中出现了争议，本文将进一步讨论和厘清这个问题。

## 2 超声兰姆波二次谐波实验研究

理论分析发现，在满足一定条件下，兰姆波可以存在强烈的非线性效应，即其二次谐波幅度可随传播距离积累增长。由于随传播距离表现出“拍”效应的兰姆波二次谐波难以通过实验测量，具有积累效应的兰姆

波二次谐波是实验研究的重点，也是兰姆波二次谐波检测应用的选择条件。

目前，学者主要基于SNAP(study of nonlinear acoustic phenomenon)非线性超声测量系统对超声兰姆波的二次谐波发生效应开展实验研究。计算机与SNAP检测系统相连接，可用来设置激励信号的频率、周期、相位等参数以及对接收到的信号作简单的处理。该系统激励出高能射频脉冲信号，随后经衰减器进行降噪处理，再经由压电纵波换能器和可变角度楔块组成的斜劈换能器将射频脉冲信号激励进入被测试件。此处纵波换能器产生的纵波信号在进入被测试件后发生波形转换，从而在试件中产生超声兰姆波信号。超声兰姆波信号在试件中传播一定距离后，被由纵波压电换能器和可变角度楔块组成的信号接收端接收，然后回到检测系统进行信号分析<sup>[24,25]</sup>。示波器可以实时地在屏幕上显示激励通道和接收通道信号的波形，同时能对信号进行简单的运算，比如通过求平均的方式尽可能地降低噪声对接收信号的干扰。

以在厚度为1.35 mm的201不锈钢板材中开展兰姆波二次谐波的实验研究为例<sup>[26]</sup>。首先从理论上确定适当的激发频率和基频兰姆波模式，使其满足兰姆波具有强烈非线性效应的发生条件。一般应在开展兰姆波二次谐波实验研究前，对实验激发和传播的兰姆波模式进行验证。据理论预测，为保证兰姆波具有强烈的非线性效应，应激励出中心频率为3.85 MHz、群速度为3.52 mm/μs的基频兰姆波模式。将激励与接收换能器距离分别设置为30和40 mm，两个不同传播距离下兰姆波的时域信号如图2(a)所示。在时域上，两个信号接收

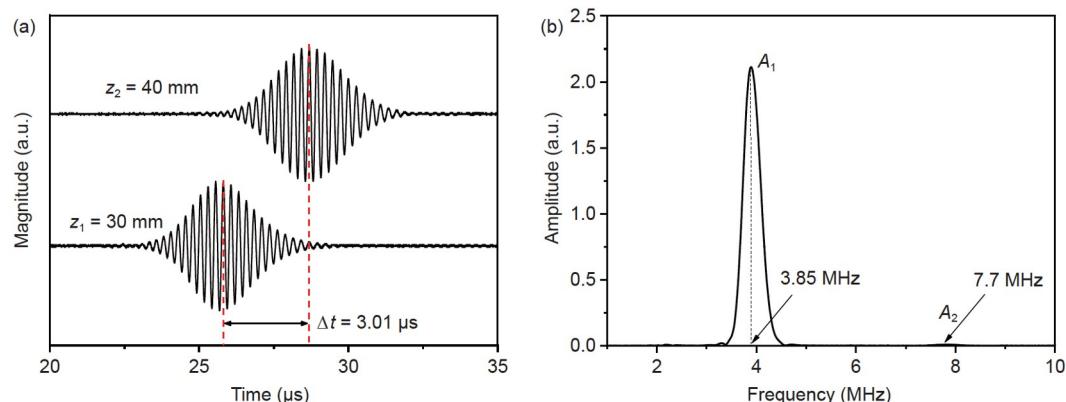


图 2 (网络版彩色) 不同传播距离下的时域超声信号(a)，以及基频和二倍频信号的中心频率(b)<sup>[26]</sup>

**Figure 2** (Color online) Two time-domain signals detected under different propagation distances (a), and central frequencies of primary and second harmonic waves (b)<sup>[26]</sup>

时间相差3.01 μs, 通过计算可得其群速度约为3.35 mm/μs。对接收的时域信号进行快速傅里叶变换, 相应的幅频曲线如图2(b)所示。据此不难发现, 接收的超声兰姆波信号主要包括基频模式和二倍频二次谐波, 基频波的中心频率为3.85 MHz, 二次谐波的频率为7.7 MHz。将以上结果与该试件材料中预期兰姆波模式的群速度3.52 mm/μs加以比较, 二者相差仅5.7%。因此, 可以确认该信号就是想要激励的基频兰姆波模式。

但是, 兰姆波的二次谐波信号很微弱, 其振幅通常比基频波信号小2~3个数量级。在超声测量过程中, 信号噪声、仪器激励电压输出不稳定性等都会明显影响二次谐波信号的采集。在采集的信号中, 基波信号占主导, 不利于二次谐波信号分析。Li等人<sup>[26]</sup>探索了一种基于相位反转的兰姆波二次谐波实验测量方法。需说明的是, 相位反转方法已在非线性超声体波的研究中得到应用。将该方法用于兰姆波的二次谐波测量, 还需满足基频和二倍频兰姆波相速度相匹配的条件。在满足相速度匹配和非零能流的条件下, 超声兰姆波二次谐波的幅值正比于波的传播距离, 即具有空间积累效应。基频波和二次谐波分量的位移 $\mathbf{U}_1$ 和 $\mathbf{U}_2$ 可以分别表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_1 &= \mathbf{U}_1(y)\exp(j(kz - \omega t)), \\ \mathbf{U}_2 &= \mathbf{U}_2(y)\exp(j(kz - \omega t)), \end{aligned} \quad (2)$$

其中,  $\mathbf{U}_1(y)$ 和 $\mathbf{U}_2(y)$ 分别为基频和二次谐波的场函数,  $\mathbf{U}_2(y)$ 正比于 $\mathbf{U}_1(y)$ 的平方值。平板表面上的基频波和二次谐波的幅值可分别表示为

$$\begin{aligned} A_1 &= \left\| \mathbf{U}_1(y) \Big|_{y=d} \right\|, \\ A_2 &= \left\| \mathbf{U}_2(y) \Big|_{y=d} \right\| z. \end{aligned} \quad (3)$$

在仅考虑基频波和二次谐波存在的条件下, 兰姆波在相位为0和π时的位移分别表示为

$$\begin{aligned} U^{(0)} &= A_1 \exp(j(kz - \omega t)) + A_2 \exp(j(2kz - 2\omega t)), \\ U^{(\pi)} &= A_1 \exp(j(kz - \omega t + \pi)) + A_2 \exp(j(2kz - 2\omega t + 2\pi)). \end{aligned} \quad (4)$$

将同等条件下接收到的相位为0与相位为π的兰姆波信号进行线性叠加, 得到

$$\bar{U} = U^{(0)} + U^{(\pi)} = 2A_2 \exp(j(2kz - 2\omega t)), \quad (5)$$

其中,  $\bar{U}$ 是将0相位与π相位超声导波信号叠加之后留下来的二次谐波信号。

从式(5)可以发现, 两个反相位的信号相互叠加后

只余下二次谐波分量, 且幅值为原来二次谐波信号的两倍。以上推导从理论上说明, 相位反转技术可以有效地提高兰姆波二次谐波信噪比, 同时滤除基频波分量, 凸显二次谐波。该方法可以有效地提高二次谐波的信噪比, 提高测量效率。

Deng等人<sup>[24,27]</sup>借助SNAP非线性声学测量系统率先开展了兰姆波二次谐波的实验研究, 设计并制作了满足实验要求的斜劈超声换能器, 用一个斜劈超声换能器激发所需的基频超声兰姆波时域信号, 用另一个斜劈超声换能器接收基频兰姆波及其二次谐波信号。采用上述所提及的非线性超声兰姆波实验测量方法, 分别测量了固体板表面超声兰姆波二次谐波振幅随传播距离的关系曲线, 实验结果均显示, 二次谐波振幅随传播距离积累增长。Bermes等人<sup>[28]</sup>采用斜劈式超声换能器激励基频超声兰姆波信号, 利用激光干涉仪接收基频和二倍频兰姆波信号, 研究了在两种型号不同的铝板中S1模式兰姆波二次谐波发生效率与激励电压、传播距离变化的关系, 实验证实了相匹配兰姆波模式可以产生具有积累效应的二次谐波。需要说明的是, 他们的实验设计存在明显的漏洞: 在该实验方案中, 采用激光干涉仪接收基频波和二次谐波信号, 根据其所选定的兰姆波模式的波结构分析, 此实验采用的基频兰姆波模式和兰姆波二次谐波的法向位移分量为零, 而采用的激光干涉仪只能有效接收固体板表面法向位移。所以, 此实验方案理论上无法有效检测相匹配的基频兰姆波和二倍频的二次谐波信号。

Matlack等人<sup>[29]</sup>、Li等人<sup>[30]</sup>和Li等人<sup>[31]</sup>分别采用可变角度超声探头实验测量了满足相匹配条件的不同模式兰姆波二次谐波发生效率。研究发现, 虽然这些不同模式的兰姆波二次谐波幅度均随传播距离的增大而增大, 但它们增长的效率是不同的, 说明不同相匹配模式的兰姆波二次谐波发生效率也是不同的。这些研究结果证实, 在满足相匹配的兰姆波模式中, 其二次谐波对材料非线性的敏感程度也是不同的。对于满足相匹配条件的不同兰姆波模式, 其二次谐波发生效率的实验证实了可以进一步优化选择对材料非线性更敏感的兰姆波模式, 以开展兰姆波二次谐波的检测应用研究<sup>[31]</sup>。针对实验测量中如何选择兰姆波发生强烈非线性效应的条件, Bermes等人<sup>[28]</sup>认为, 基频与二倍频兰姆波还需满足群速度匹配。事实上, 这一条件并无必要<sup>[27]</sup>, 本文将详细说明。

关于兰姆波二次谐波实验信号分析处理, 其方法

与超声体波二次谐波相似，主要是分析和提取不同于初始激励频率的二次谐波信号。目前主要的方式是通过快速傅里叶变换将测量的时域信号转为频域信号<sup>[32~34]</sup>。也有学者利用短时傅里叶变换方法处理测量信号，实现对兰姆波基波及其二次谐波的时频域信号分析<sup>[35~37]</sup>。焦敬品等人<sup>[38]</sup>发展了一种基于动态小波指纹的超声信号分析方法，研究了小波基函数及分析尺度对超声非线性效应提取效果的影响。该方法优选对结构早期损伤敏感的小波基函数以及尺度范围，可应用于二次谐波及混频非线性超声检测信号分析。江念等人<sup>[39]</sup>提出采用双树复小波系数层间相关性初步降噪，后用贝叶斯最大后验估计对各分量信号继续降噪，从而实现基频波与二次谐波幅值的有效提纯。Lim 等人<sup>[40]</sup>使用连续小波变换对声调制非线性信号降噪、滤波，提取频谱图的特征进而表征裂纹损伤。陈斌等人<sup>[41]</sup>利用希尔伯特-黄变换(Hilbert-Huang transform, HHT)方法分析奥氏体钢中的非线性超声信号，对去噪后的信号提取瞬时幅值和非线性系数以表征微缺陷的尺寸。需要指出的是，不同信号处理方法分别具有不同的优缺点，在选择非线性超声信号分析处理方法时，要综合考虑被测试件参数、超声传播信号等。

### 3 超声兰姆波二次谐波的检测应用

众所周知，材料的三阶弹性常数与其微组织结构、内部组分或缺陷等因素密切相关。即使在早期损伤阶段，材料的三阶弹性常数仍可发生较显著的变化。超声兰姆波的非线性效应主要取决于板材的材料参数、界面特性、兰姆波的频散关系，以及基频兰姆波模式的声场特性等。对于给定无损伤(完好)的固体板材，选择适当的激发频率和超声兰姆波模式，使其满足超声兰姆波发生强烈非线性效应的条件。此时，超声兰姆波的积累二次谐波信号与板材的二阶及三阶弹性常数、界面性质、兰姆波的频散关系等密切相关。在利用兰姆波二次谐波对固体板结构进行损伤评价的研究中，主要采用满足内部共振条件(选择相匹配模式)，产生具有积累效应兰姆波二次谐波。也有研究采用近似满足内部共振条件的兰姆波模式开展检测应用<sup>[42,43]</sup>。

#### 3.1 基于兰姆波二次谐波的疲劳损伤检测

在板材承受疲劳载荷作用的初期(早期疲劳损伤阶段)，即使板材的二阶弹性常数以及兰姆波的频散关系变化很小甚至无变化，板材的三阶弹性常数仍可发生

较明显的改变，使积累二次谐波的振幅发生较显著的变化。另一方面，若疲劳使兰姆波频散关系发生一定程度的改变，那么原本满足积累二次谐波发生的共振条件将不再满足，这将使积累二次谐波的发生效率显著降低。此外，超声兰姆波的积累二次谐波与基频兰姆波的振幅平方成正比，由疲劳导致的影响基频兰姆波声场特性(包括频散、衰减和模式转换等)的诸因素，均可对超声兰姆波的二次谐波发生效应产生更加显著的影响。据此得出结论，采用超声兰姆波的积累二次谐波发生效应，可更为准确地评价板材的疲劳损伤程度。Deng 和 Pei<sup>[44]</sup>深入研究了固体板材疲劳损伤对超声兰姆波非线性效应可能产生的影响，提出了一种准确评价板材早期疲劳损伤的非线性超声兰姆波方法，并实验研究证明了其可行性和有效性。对于普通板材(如普通铝板)，早期的疲劳损伤使其三阶弹性常数发生变化，同时也使兰姆波的频散关系发生了改变，原本(在无损伤状态下)满足的共振条件不再满足，如此使兰姆波积累二次谐波的发生效率迅速降低(这是由相位失配所致)。这一变化趋势不同于非频散的声纵波或声表面波二次谐波的变化趋势，导致二次谐波与疲劳损伤(载荷循环次数)的关系曲线呈十分敏感且单调减小的变化趋势，据此可准确评价板材的早期疲劳损伤。对于性能优异的板材(如航空铝板材)，在早期疲劳损伤阶段，板材的线性声学参数几乎不变(即兰姆波的频散关系几乎不变，亦即兰姆波积累二次谐波发生所需的共振条件在早期疲劳损伤阶段一直是成立的)，但其三阶弹性常数将有较明显的增大，使兰姆波积累二次谐波的发生效率增强(这一变化趋势与非频散的超声纵波或表面波二次谐波的变化趋势一致)，导致兰姆波的二次谐波随载荷循环次数的增加而有较明显的增大。此外，对于不同疲劳损伤程度的固体板材，Pruell 等人<sup>[45]</sup>分别测量出超声兰姆波在其中传播时所发生的积累二次谐波的幅频特性曲线，得到兰姆波二次谐波应力波因子与疲劳损伤(载荷循环次数)的关系曲线。实验研究再次证明了超声兰姆波二次谐波在准确评价板材的早期疲劳损伤方面具有可行性和有效性。

#### 3.2 基于兰姆波二次谐波的固体板表面/界面特性评价

固体板结构的界面性质可用界面法向、切向劲度系数予以表征，界面劲度系数的变化将导致兰姆波频散关系发生改变，并由此可对界面性质进行定征。若界

面薄层的力学性质仅发生微小变化，或界面劲度系数的改变甚小，不足以引起兰姆波频散关系发生较明显的改变，用超声兰姆波方法定征固体板的界面性质将存在一定的局限性。但是，界面性质的变化将改变基频兰姆波传播时在界面处所产生的二倍频面驱动应力张量，如此将改变起主导作用的二倍频兰姆波模式的展开系数。更为重要的是，界面性质细微变化导致的兰姆波频散关系的微小改变，使共振条件(即相速度匹配条件)不再满足，将显著降低起主导作用二倍频兰姆波模式的发生效率，进而导致兰姆波二次谐波信号迅速减小<sup>[46-48]</sup>。利用这一效应，可准确评价固体板材结构界面性质的细微变化。此外，氧化或腐蚀等将使板状结构的表面性质发生变化，从而在固体板的表面形成厚度远小于超声波波长的覆层。对于一些不能直接观察板状结构表面性质发生改变的场合(如压力容器内表面)，要准确定征其表面性质是非常困难的。一方面，表面覆层的厚度、面积、密度和弹性常数等将对伴随基频兰姆波传播所发生的二次谐波振幅产生影响；另一方面，表面性质的变化将影响兰姆波的频散特性，而频散特性的变化将显著地改变二次谐波振幅随传播距离的积累增长程度<sup>[49]</sup>。从上述两个方面考虑，固体板结构的表面性质即使发生较小的变化，也将对兰姆波二次谐波发生效应产生较显著的影响。

Deng<sup>[49]</sup>用单层厚度为40 μm、宽度为1.1 cm的透明薄膜紧贴于铝板表面，以此来模拟板表面形成的覆层。因透明薄膜的厚度、密度和弹性常数等与铝板相

比甚小，贴薄膜的方式可模拟固体板表面性质发生微小变化的情形。在兰姆波传播的路径上，分别贴1~8片透明薄膜，所贴透明薄膜片数描述了表面性质发生变化的面颊，亦即形成覆层的面积。图3给出了铝板表面性质发生变化时兰姆波基频波和二次谐波的曲线。结果显示，对于基频波幅度，黏接薄膜前后的变化不是十分明显，而相应的二次谐波幅度则有比较显著的变化。研究结果证实，兰姆波二次谐波发生效应可用于对固体板表面性质的微小变化进行准确定征。

### 3.3 基于兰姆波二次谐波的金属高温热损伤评价

金属高温损伤/老化宏观上表现为机械性能的退化，微观上则体现为微组织的改变。Xiang等人<sup>[50,51]</sup>研究了微观组织结构与非线性超声之间相互作用的理论模型，建立了材料性能退化与非线性超声参量之间的定量关系。在机理研究的基础上，Xiang等人<sup>[52]</sup>开展了基于兰姆波二次谐波的奥氏体Fe-Cr-Ni不锈钢材料的高温损伤评价。研究表明，兰姆波二次谐波和材料高温损伤程度之间存在一个“上升-平稳-下降”的关系，如图4所示。据此，他们构建了兰姆波二次谐波与工程材料高温热损伤之间的映射关系。

### 3.4 基于兰姆波二次谐波的塑性评价

金属材料在疲劳裂纹形成之前存在塑性变形阶段。材料初期的塑性变形不足以引起传播的超声兰姆波线性声学参数的变化，但金属塑性变形的程度直接对应

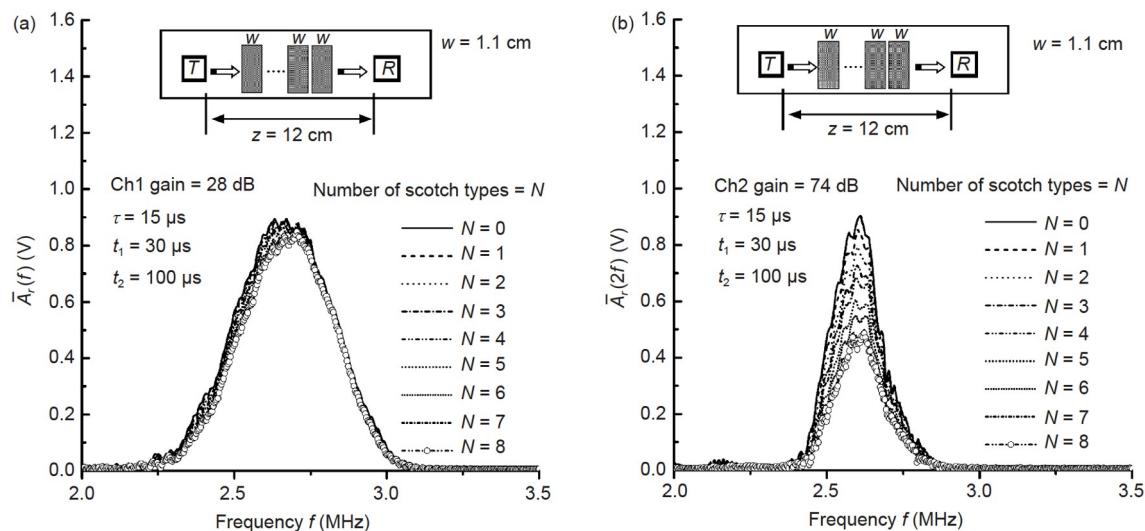


图3 铝板表面存在不同覆层面积时基频波(a)和二次谐波(b)幅度变化曲线<sup>[49]</sup>

Figure 3 Amplitude-frequency curves of fundamental (a) and second harmonic (b) waves in aluminum plates with different coating areas<sup>[49]</sup>

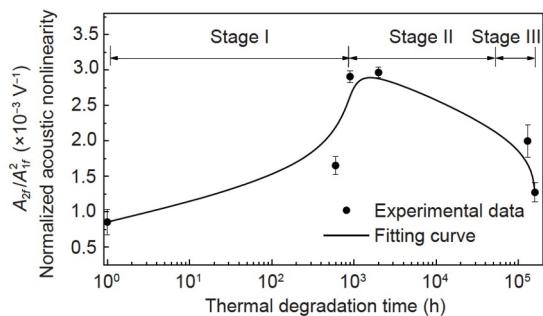


图 4 奥氏体不锈钢老化过程与非线性兰姆波之间的关系<sup>[52]</sup>  
Figure 4 Correlation of the austenite steel aging process versus nonlinear Lamb waves<sup>[52]</sup>

于金属材料微损伤的积累，而材料内部的微损伤对兰姆波二次谐波发生效应有显著的影响。Pruell 等人<sup>[35,36]</sup>利用满足相匹配条件的兰姆波模式，研究了材料的累积塑性变形对兰姆波非线性效应的影响。他们利用疲劳拉伸实验改变不同金属板构件的塑性变形程度，使用 1 个作为参考的未变形试件和 5 个塑性变形程度不同的试件，其中最大程度的塑性变形都远低于试件发生紧缩所达到的塑性变形，因此塑性变形被认为均匀分布于整个试件。研究结果证实，积累塑性变形导致兰姆波的二次谐波幅度逐渐增大。该研究证实了兰姆波二次谐波可用于检测由塑性变形诱发的材料微损伤。

### 3.5 基于兰姆波二次谐波的材料蠕变损伤评价

在材料高温老化早期阶段，析出相的作用使位错形成大角度弯曲，此时可用共格模型予以分析。随着析出相的逐渐变多，析出相和基体位错之间的错配程度加剧，导致材料微观组织缺陷增多<sup>[52]</sup>。Xiang 等人<sup>[53]</sup>将表征材料微观组织变化的参数变化量引入非线性超声兰姆波的表达式，构建了超声兰姆波二次谐波与材料微观组织相互作用的理论模型，并通过对奥氏体 Fe-Cr-Ni 不锈钢的高温损伤、Ti60 钛合金蠕变损伤的兰姆波二次谐波测量，验证了兰姆波二次谐波和材料高温损伤程度之间存在关系，如图 5 所示。研究结果证实，兰姆波二次谐波可以有效检测材料高温热损伤、蠕变损伤。

### 3.6 基于兰姆波二次谐波的复合材料板热疲劳和冲击损伤的检测

复合材料板具有比强度、比刚度高，抗疲劳性、耐腐蚀性好，材料力学性能可设计，易于整体成形等优点，被广泛应用于各类工业结构件中。但是，复合材料

结构由于不同材料的热膨胀系数差异，热疲劳载荷会导致复合材料结构内部出现微损伤(如纤维断裂、分层、脱黏等)。此外，即使低速、低能的冲击，也会导致复合材料基体开裂、纤维断裂等内部微损伤。复合材料热疲劳或冲击损伤演化过程中，宏观缺陷与损伤形成之前通常经历材料微观结构变化以及微损伤的起始积累，复合材料结构中微损伤的扩展具有所谓的“突然失效”特征。开展兰姆波二次谐波对复合材料评价研究，可有效检测复合材料早期损伤。Li 等人<sup>[54,55]</sup>开展了利用兰姆波二次谐波对复合材料热疲劳和冲击导致的微缺陷的早期检测研究。如图 6 所示，在碳纤维/环氧树脂复

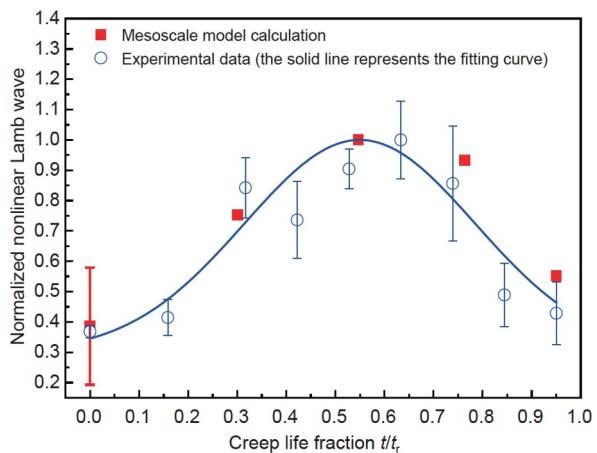


图 5 (网络版彩色)兰姆波非线性随蠕变寿命分数变化的理论和实验结果<sup>[53]</sup>

Figure 5 (Color online) Theoretical and experimental results of Lamb wave nonlinearity versus creep life fraction<sup>[53]</sup>

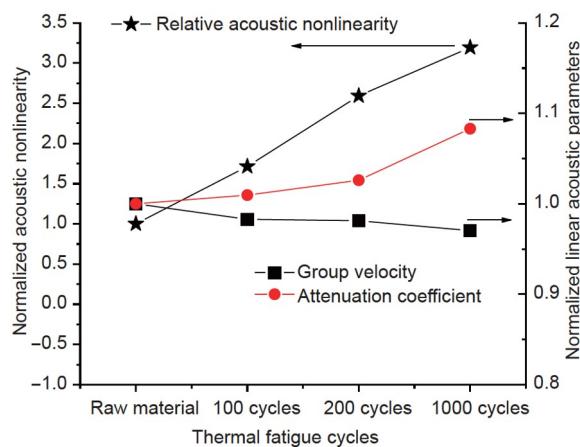


图 6 (网络版彩色)不同热疲劳循环下复合材料中兰姆波的线性和非线性声学参数<sup>[54]</sup>

Figure 6 (Color online) Linear and nonlinear acoustic parameters of Lamb waves in composites under different thermal fatigue cycles<sup>[54]</sup>

合材料中引入不同周期的热疲劳，实验测量复合材料板不同热疲劳周期下的兰姆波非线性系数的变化。研究结果证实，兰姆波线性声学参数(群速度和衰减系数)对复合材料热疲劳早期阶段是不敏感的，而兰姆波二次谐波可以有效表征复合材料热疲劳损伤的早期阶段。

Rauter等人<sup>[66]</sup>在碳纤维复合材料板中引入低速、低能冲击，随着冲击能量的增加，兰姆波非线性参数也随之明显增加。研究结果证实，利用该方法检测复合材料试件，相比于超声兰姆波幅值衰减的线性测量方法，非线性方法对损伤的检测分辨率更高。

## 4 讨论

### 4.1 兰姆波二次谐波声场对称性问题

在固体板中传播的兰姆波存在对称模式和反对称模式。对于兰姆波的二次谐波声场，Deng<sup>[10]</sup>、de Lima 和 Hamilton<sup>[11]</sup>、Chillara 和 Lissenden<sup>[57]</sup>以及 Srivastava 和 di Scalea<sup>[58]</sup>都研究了其对称性问题。在这些研究中，一个共同的结论是对称的基频兰姆波模式将产生对称的兰姆波二次谐波。存在争议的问题是，反对称基频兰姆波模式所产生的兰姆波二次谐波是否对称？de Lima 和 Hamilton<sup>[11]</sup>认为，反对称基频兰姆波模式只会产生反对称的兰姆波二次谐波。与此相反，Deng<sup>[10]</sup>及 Chillara 和 Lissenden<sup>[57]</sup>、Srivastava 和 di Scalea<sup>[58]</sup>通过理论分析与仿真研究，均证实了反对称基频兰姆波模式所产生的二次谐波声场只能是对称的。因此，无论基频兰姆波模式的对称性如何，所产生的二次谐波声场均呈空间对称分布。

### 4.2 兰姆波二次谐波积累效应是否需要群速度匹配

为了产生随传播距离积累增长的兰姆波二次谐波，一般认为基频与二倍频兰姆波须满足相速度匹配且存在非零能量流<sup>[10,11]</sup>。Bermes等人<sup>[28]</sup>和Biwa等人<sup>[59]</sup>认为，基频与二倍频兰姆波还需满足群速度匹配才能产生具有积累效应的二次谐波。Bermes等人<sup>[28]</sup>认为，群速度失配会导致实验中基频波和二次谐波的分离。针对这一问题，Deng等人<sup>[27]</sup>从理论上分析了产生具有积累效应的兰姆波二次谐波，并不需要满足群速度匹配条件。他们选择基频与二倍频兰姆波相速度匹配但群速度失配的模式，从实验上观察到兰姆波的二次谐波的确可随传播距离积累增长。研究结果表明，满足相速度匹配和非零能流条件，就可以获得随传播距离积累增长的兰

姆波二次谐波。Xiang等人<sup>[60]</sup>通过仿真和实验讨论了群速度失配条件下积累二次谐波的发生效应。目前已从理论、仿真和实验上证实，在群速度失配的条件下也可产生具有积累效应的兰姆波二次谐波。

### 4.3 近似相匹配条件下兰姆波二次谐波的发生与传播

根据给定波导中的兰姆波频散曲线，可以找到满足相匹配条件的兰姆波模式。频散曲线基于给定的材料弹性常数计算获得。因此，材料弹性常数的变化将导致相匹配条件的改变。一方面，实际测试板材的弹性常数与理论计算频散曲线使用的参数存在误差。另一方面，材料微损伤、材料性能退化等也会不可避免地影响材料弹性常数的改变。因此，分析和理解近似相匹配条件下兰姆波二次谐波的发生效应更具有实际意义。Zhu等人<sup>[61]</sup>详细探讨了近似满足相匹配条件下的兰姆波二次谐波的发生与传播问题。近似相匹配条件下(基频兰姆波与兰姆波二次谐波相速度近似相等)，兰姆波二次谐波声场幅度和传播距离的关系是与  $\sin(Dkz)/Dk$  有关的函数，其中  $D = (c^{(2\omega)} - c^{(\omega)})/c^{(2\omega)}$ ， $c^{(\omega)}$  与  $c^{(2\omega)}$  分别表示基频兰姆波和二次谐波的相速度， $D$  表示相速度失配的程度。 $D=0$  表示严格满足相速度匹配条件。在相速度近似匹配条件下，兰姆波二次谐波振幅在一定传播距离内仍然具有积累效应。邓明晰<sup>[8]</sup>详细论述了满足相速度近似匹配条件下兰姆波二次谐波的空间积累增长效应，给出了其呈现积累增长效应的临界距离与相速度失配程度之间的关系。de Lima 和 Hamilton<sup>[11]</sup>利用导波模式展开分析方法，分析了相速度近似匹配条件下兰姆波二次谐波振幅表达式，得到了相同的结论。

需说明的是，严格满足相速度匹配条件下，兰姆波二次谐波在平板中的位移场无法向位移分量，主要是切向位移分量呈积累效应。而在微小的相速度失配条件下，兰姆波二次谐波的法向位移分量会显著出现积累增长效应。由于实验中更容易测量获得法向位移分量，因此适当的相速度失配可能更有利以接触方式测量兰姆波二次谐波。

### 4.4 影响兰姆波二次谐波激励效果的因素

如前所述，在测量兰姆波二次谐波时，激励适当的基频兰姆波模式对提高兰姆波二次谐波发生效应的效率至关重要。基于相速度匹配的兰姆波二次谐波的非

线性特征, 可对兰姆波二次谐波的发生效率进行预测<sup>[31]</sup>. 一般认为, 兰姆波二次谐波的幅值与基频波幅值平方的比( $A_2/A_1^2$ )越高, 其发生效率越高. 但在实验中, 不能将兰姆波二次谐波的发生效率作为唯一考虑因素. 需要考虑的因素还包括: (1) 激励频率. 通常二次谐波的幅度会随激励信号频率的增大而增大, 但高频率的基频兰姆波不可避免地会导致其传播衰减急剧增加, 这将导致二次谐波的衰减更加显著. 此外, 很难激励单个纯净的高频高阶兰姆波模式. (2) 激励的兰姆波模式相速度和群速度的差异. 如果选择的兰姆波模式相速度和群速度的差异过大, 会导致基频兰姆波波形幅度在传播过程迅速减小, 从而影响二次谐波的发生和测量. 因此, 相速度和群速度差异较小的兰姆波模式更有利二次谐波的激励效果. 此外, 针对相速度和群速度差异较大的兰姆波, 其二次谐波应在较短的传播距离内进行测量. (3) 兰姆波模式的声场特性也是影响兰姆波二次谐波激励效果的因素之一. 兰姆波及其二次谐波在波导表面的法向位移分量比切向位移分量更容易激励和测量, 因此, 法向位移分量更大的兰姆波及其二次谐波模式激励和测量效果更好. 需要注意的是, 由于兰姆波二次谐波幅度与基频波幅度平方成正比, 因此能否有效激励出基频兰姆波对兰姆波二次谐波的发生与测量都十分重要.

#### 4.5 兰姆波二次谐波检测方法的局限

兰姆波二次谐波检测方法的主要优势是测量设置相对简单, 可以快速实现对板结构整体或区域的评价. 但是, 也存在一些局限: (1) 二次谐波法测量的非线性值包含从信号激励换能器到信号接收换能器之间区域的非线性, 因此这项技术无法准确判定在这个检测区域内诱发非线性响应的局部损伤位置, 无法对局部损伤进行定位检测评价. (2) 在基于二次谐波法的非线性导波检测中, 信号发生器、功率放大器、超声换能器等都会导致波形畸变而诱发二次谐波的产生, 称为仪器的非线性, 耦合剂也会带来很强的非线性. 如何有效区分非线性的来源仍然是困扰基于二次谐波法非线性

超声检测技术的主要问题之一. 不能区分非线性响应的来源, 很难量化损伤诱发的超声非线性.

针对兰姆波二次谐波评价方法的局限, 国内外学者近年来开展了混频效应的非线性超声导波检测方法<sup>[62-67]</sup>. 该方法的主要优势包括: (1) 充分利用兰姆波多模式和频散特性, 基于不同频率下超声兰姆波的波速不同, 控制两个不同频率兰姆波声束混叠区域在被测试件中扫查, 实现对局部损伤的定位检测; (2) 因为混频非线性效应只发生于两个兰姆波在试件传播混叠过程中, 所以这种混频非线性效应可以只描述所在传播介质中混叠区域的非线性, 突破了基于二次谐波法的非线性兰姆波检测方法无法有效区分非线性来源的局限. 此外, 非线性兰姆波结合层析成像方法<sup>[68,69]</sup>、深度学习等<sup>[70]</sup>也具有解决兰姆波二次谐波检测方法这些局限的潜力.

### 5 总结与展望

本文系统梳理了超声兰姆波二次谐波理论、实验和检测应用的研究历程. 兰姆波因其频散和多模特性, 通常情况下并不存在强烈的非线性效应. 近年来的研究结果表明, 在满足非零能流和相速度匹配或近似匹配条件下, 将产生具有积累效应的兰姆波二次谐波. 在理论分析的基础上, 选择适当的兰姆波模式, 在实验中可成功测量具有积累效应的兰姆波二次谐波. 利用满足相匹配模式的兰姆波二次谐波, 可以对板状结构进行损伤的早期评价. 此外, 基于兰姆波二次谐波的评价方法存在无法有效区分非线性源、无法对局部损伤进行定位检测等难题, 开展非线性兰姆波混频方法可有效突破这些局限.

需要说明的是, 本文并未论述微损伤、微缺陷诱发兰姆波二次谐波发生的物理机理. 构建微缺陷诱发兰姆波二次谐波的物理机理模型, 需考虑结构材料性质、缺陷或损伤类型等诸多因素. 构建兰姆波二次谐波与材料微损伤或结构微缺陷的关系模型, 对于量化评价材料损伤程度、预测结构剩余寿命等具有重要的科学意义和工程应用价值.

### 参考文献

- 1 Lamb H. On waves in an elastic plate. Proc R Soc London Ser A-Math Phys Eng Sci, 1917, 93: 114-128
- 2 Worlton D C. Experimental confirmation of Lamb waves at megacycle frequencies. J Appl Phys, 1961, 32: 967-971
- 3 Viktorov I A. Rayleigh and Lamb Waves, Physical Theory and Applications. New York: Plenum Press, 1967

- 4 Achenbach J D. Wave Propagation in Elastic Solids. New York: Elsevier, 1975
- 5 Nagy P B. Fatigue damage assessment by nonlinear ultrasonic material characterization. *Ultrasonics*, 1998, 36: 275–381
- 6 Jhang K Y. Applications of nonlinear ultrasonics to the NDE of material degradation. *IEEE Trans Ultrason Ferroelect Freq Contr*, 2000, 47: 540–548
- 7 Cantrell J H, Yost W T. Nonlinear ultrasonic characterization of fatigue microstructures. *Int J Fatigue*, 2001, 23: 487–490
- 8 Deng M X. Nonlinear Lamb Waves in Solid Plate (in Chinese). Beijing: Science Press, 2006 [邓明晰. 固体板中的非线性兰姆波. 北京: 科学出版社, 2006]
- 9 Deng M X. Cumulative second-harmonic generation of Lamb-mode propagation in a solid plate. *J Appl Phys*, 1999, 85: 3051–3058
- 10 Deng M X. Analysis of second-harmonic generation of Lamb modes using a modal analysis approach. *J Appl Phys*, 2003, 94: 4152–4159
- 11 de Lima W J N, Hamilton M F. Finite-amplitude waves in isotropic elastic plates. *J Sound Vib*, 2003, 265: 819–839
- 12 Liu Y L, Hu N, Deng M X, et al. Nonlinear Lamb waves in plate/shell structure (in Chinese). *Adv Mech*, 2017, 47: 201714 [刘瑶璐, 胡宁, 邓明晰, 等. 板壳结构中的非线性兰姆波. 力学进展, 2017, 47: 201714]
- 13 Zhang J F, Xuan F Z, Xiang Y X. Evaluation of material damage using nonlinear ultrasonic wave (in Chinese). *Chin Sci Bull*, 2016, 61: 1536–1550 [张剑锋, 轩福珍, 项延训. 材料损伤的非线性超声评价研究进展. 科学通报, 2016, 61: 1536–1550]
- 14 Zhou Z G, Liu S M. Nonlinear ultrasonic techniques used in nondestructive testing: A review (in Chinese). *J Mech Eng*, 2011, 47: 2–11 [周正干, 刘斯明. 非线性无损检测技术的研究、应用和进展. 机械工程学报, 2011, 47: 2–11]
- 15 Deng M X, Pei J F. Nondestructive evaluation of fatigue damage in solid plates using nonlinear ultrasonic Lamb wave method (in Chinese). *Acta Acust*, 2008, 33: 360–369 [邓明晰, 裴俊峰. 无损评价固体板材疲劳损伤的非线性超声兰姆波方法. 声学学报, 2008, 33: 360–369]
- 16 Gao G J, Liu C, Hu N, et al. Response of second-harmonic generation of Lamb wave propagation to microdamage thickness in a solid plate. *Wave Motion*, 2020, 96: 102557
- 17 Shui Y, Solodov I Y. Nonlinear properties of Rayleigh and Stoneley waves in solids. *J Appl Phys*, 1988, 64: 6155–6165
- 18 Qian Z W. Second order harmonics of surface waves in isotropic solids. *J Sound Vib*, 1995, 187: 369–379
- 19 Zabolotskaya E A. Nonlinear propagation of plane and circular Rayleigh waves in isotropic solids. *J Acoust Soc Am*, 1992, 91: 2569–2575
- 20 Deng M X. Propagation of finite amplitude acoustic waves in a two-dimensional rectangular duct. *J Sound Vib*, 1998, 218: 791–798
- 21 Deng M X. Second-harmonic properties of horizontally polarized shear modes in an isotropic plate. *Jpn J Appl Phys*, 1996, 35: 4004–4010
- 22 Deng M X. Second-harmonic generation accompanying nonlinear reflection of shear waves in an isotropic layered structure. *J Appl Phys*, 1997, 82: 1026–1030
- 23 Deng M X. Cumulative second-harmonic generation accompanying nonlinear shear horizontal mode propagation in a solid plate. *J Appl Phys*, 1998, 84: 3500–3505
- 24 Deng M X, Wang P, Lü X. Experimental verification of cumulative growth effect of second harmonics of Lamb wave propagation in an elastic plate. *Appl Phys Lett*, 2005, 86: 124104
- 25 Bermes C, Kim J Y, Qu J, et al. Experimental characterization of material nonlinearity using Lamb waves. *Appl Phys Lett*, 2007, 90: 021901
- 26 Li W, Hu S, Deng M X. Combination of phase matching and phase-reversal approaches for thermal damage assessment by second harmonic Lamb waves. *Materials*, 2018, 11: 1961
- 27 Deng M X, Xiang Y, Liu L. Time-domain analysis and experimental examination of cumulative second-harmonic generation by primary Lamb wave propagation. *J Appl Phys*, 2011, 109: 113525
- 28 Bermes C, Kim J Y, Qu J, et al. Nonlinear Lamb waves for the detection of material nonlinearity. *Mech Syst Signal Proc*, 2008, 22: 638–646
- 29 Matlack K H, Kim J Y, Jacobs L J, et al. Experimental characterization of efficient second harmonic generation of Lamb wave modes in a nonlinear elastic isotropic plate. *J Appl Phys*, 2011, 109: 014905
- 30 Li M, Deng M X, Gao G, et al. Mode pair selection of circumferential guided waves for cumulative second-harmonic generation in a circular tube. *Ultrasonics*, 2018, 82: 171–177
- 31 Li W, Chen B, Cho Y. Nonlinear feature of phase matched Lamb waves in solid plate. *Appl Acoust*, 2020, 160: 107124
- 32 Kim J Y, Jacobs L J, Qu J, et al. Experimental characterization of fatigue damage in a nickel-base superalloy using nonlinear ultrasonic waves. *J Acoust Soc Am*, 2006, 120: 1266–1273
- 33 Shan S, Cheng L, Li P. Adhesive nonlinearity in Lamb-wave-based structural health monitoring systems. *Smart Mater Struct*, 2016, 26: 025019
- 34 Jhang K Y, Lissenden C, Solodov I, et al. Measurement of Nonlinear Ultrasonic Characteristics. Berlin: Springer, 2020
- 35 Pruell C, Kim J Y, Qu J, et al. Evaluation of plasticity driven material damage using Lamb waves. *Appl Phys Lett*, 2007, 91: 231911
- 36 Pruell C, Kim J Y, Qu J, et al. A nonlinear-guided wave technique for evaluating plasticity-driven material damage in metal plate. *NDT E Int*, 2009, 42: 199–203
- 37 Zuo P, Zhou Y, Fan Z. Numerical and experimental investigation of nonlinear ultrasonic Lamb waves at low frequency. *Appl Phys Lett*, 2016, 109: 021902

- 38 Jiao J P, Lü H T, Meng X J, et al. Identification of nonlinear ultrasonic effects using method of dynamic wavelet fingerprint (in Chinese). *Acta Acust*, 2017, 5: 560–570 [焦敬品, 吕洪涛, 孟祥吉, 等. 超声非线性效应标准的动态小波指纹分析方法. 声学学报, 2017, 5: 560–570]
- 39 Jiang N, Wang Z B, Jin Y, et al. Application of pulse-inversion technique and wavelet transform for nonlinear ultrasonic nondestructive testing (in Chinese). *Instrum Tech Sensor*, 2015, 12: 97–99 [江念, 王召巴, 金永, 等. 脉冲反转和小波变换在非线性超声检测中的应用. 仪表技术与传感器, 2015, 12: 97–99]
- 40 Lim H J, Kim Y, Sohn H, et al. Reliability improvement of nonlinear ultrasonic modulation based fatigue crack detection using feature-level data fusion. *Smart Struct Syst*, 2017, 20: 683–696
- 41 Chen B, Yang P, Shi K R. Application of Hilbert-Huang transforms for nonlinear ultrasonic nondestructive testing (in Chinese). *J Tsinghua Univ*, 2006, 46: 1369–1372 [陈斌, 杨平, 施克仁. Hilbert-Huang 变换在非线性超声无损检测中的应用. 清华大学学报, 2006, 46: 1369–1372]
- 42 Wan X, Tse P W, Xu G H, et al. Analytical and numerical studies of approximate phase velocity matching based nonlinear S0 mode Lamb waves for the detection of evenly distributed microstructural changes. *Smart Mater Struct*, 2016, 25: 045023
- 43 Chillara V K, Lissenden C J. Review of nonlinear ultrasonic guided wave nondestructive evaluation: Theory, numerics, and experiments. *Opt Eng*, 2015, 55: 011002
- 44 Deng M X, Pei J. Assessment of accumulated fatigue damage in solid plates using nonlinear Lamb wave approach. *Appl Phys Lett*, 2007, 90: 121902
- 45 Pruell C, Kim J Y, Qu J, et al. Evaluation of fatigue damage using nonlinear guided waves. *Smart Mater Struct*, 2009, 18: 035003
- 46 Deng M, Wang P, Lü X. Influences of interfacial properties on second-harmonic generation of Lamb waves propagating in layered planar structures. *J Phys D-Appl Phys*, 2006, 39: 3018–3025
- 47 Deng M X. Analysis of second-harmonic generation of Lamb waves propagating in layered planar structures with imperfect interfaces. *Appl Phys Lett*, 2006, 88: 221902
- 48 Chen H, Deng M X, Hu N, et al. Analysis of second-harmonic generation of low-frequency dilatational Lamb waves in a two-layered composite plate. *Chin Phys Lett*, 2018, 35: 114302
- 49 Deng M X. Characterization of surface properties of a solid plate using nonlinear Lamb wave approach. *Ultrasonics*, 2006, 44: e1157–e1162
- 50 Xiang Y, Deng M X, Xuan F Z, et al. Cumulative second-harmonic analysis of ultrasonic Lamb waves for ageing behavior study of modified-HP austenite steel. *Ultrasonics*, 2011, 51: 974–981
- 51 Xiang Y, Deng M X, Xuan F Z, et al. Effect of precipitate-dislocation interactions on generation of nonlinear Lamb waves in creep-damaged metallic alloys. *J Appl Phys*, 2012, 111: 104905
- 52 Xiang Y, Deng M X, Xuan F, et al. Experimental study of thermal degradation in ferritic Cr-Ni alloy steel plates using nonlinear Lamb waves. *NDT E Int*, 2011, 44: 768–774
- 53 Xiang Y, Deng M X, Xuan F Z. Creep damage characterization using nonlinear ultrasonic guided wave method: A mesoscale model. *J Appl Phys*, 2014, 115: 044914
- 54 Li W, Cho Y, Achenbach J D. Detection of thermal fatigue in composites by second harmonic Lamb waves. *Smart Mater Struct*, 2012, 21: 085019
- 55 Li W, Jiang J, Qing X, et al. Assessment of low-velocity impact damage in composites by measure of second harmonic guided waves with phase-reversal approach. *Sci Prog*, 2020, 103: 36850419881079
- 56 Rauter N, Lammering R, Kühnrich T. On the detection of fatigue damage in composites by use of second harmonic guided waves. *Compos Struct*, 2016, 152: 247–258
- 57 Chillara V K, Lissenden C J. Interaction of guided wave modes in isotropic weakly nonlinear elastic plates: Higher harmonic generation. *J Appl Phys*, 2012, 111: 124909
- 58 Srivastava A, di Scalea F L. On the existence of antisymmetric or symmetric Lamb waves at nonlinear higher harmonics. *J Sound Vib*, 2009, 323: 932–943
- 59 Biwa S, Nakajima S, Ohno N. On the acoustic nonlinearity of solid-solid contact with pressure dependent interface stiffness. *J Appl Mech-Trans ASME*, 2004, 71: 508–515
- 60 Xiang Y, Zhu W, Deng M, et al. Generation of cumulative second-harmonic ultrasonic guided waves with group velocity mismatching: Numerical analysis and experimental validation. *EPL*, 2016, 116: 34001
- 61 Zhu Y, Zeng X, Deng M X, et al. Mode selection of nonlinear Lamb wave based on approximate phase velocity matching. *NDT E Int*, 2019, 102: 295–303
- 62 Li W, Deng M X, Hu N, et al. Theoretical analysis and experimental observation of frequency mixing response of ultrasonic Lamb waves. *J Appl Phys*, 2018, 124: 044901
- 63 Li W, Xu Y, Hu N, et al. Numerical and experimental investigations on second-order combined harmonic generation of Lamb wave mixing. *AIP Adv*, 2020, 10: 045119
- 64 Li W, Lan Z, Hu N, et al. Modeling and simulation of backward combined harmonic generation induced by one-way mixing of longitudinal

- ultrasonic guided waves in a circular pipe. *Ultrasonics*, 2021, 113: 106356
- 65 Sun M, Xiang Y, Deng M X, et al. Experimental and numerical investigations of nonlinear interaction of counter-propagating Lamb waves. *Appl Phys Lett*, 2019, 114: 011902
- 66 Jiao J, Meng X, He C, et al. Nonlinear Lamb wave-mixing technique for micro-crack detection in plates. *NDT E Int*, 2017, 85: 63–71
- 67 Li W, Xu Y, Hu N, et al. Impact damage detection in composites using a guided wave mixing technique. *Meas Sci Technol*, 2020, 31: 014001
- 68 Li W, Cho Y. Combination of nonlinear ultrasonics and guided wave tomography for imaging the micro-defects. *Ultrasonics*, 2016, 65: 87–95
- 69 Andreades C, Fierro G P M, Meo M. A nonlinear ultrasonic SHM method for impact damage localisation in composite panels using a sparse array of piezoelectric PZT transducers. *Ultrasonics*, 2020, 108: 106181
- 70 Wang J, Liang J, Cheng J, et al. Deep learning based image reconstruction algorithm for limited-angle translational computed tomography. *PLoS One*, 2020, 15: e0226963

Summary for “超声兰姆波二次谐波发生效应的理论、实验及应用研究进展”

## Advances in theoretical, experimental and applied studies on second-harmonic generation of ultrasonic Lamb waves

Weibin Li<sup>1</sup>, Yanxun Xiang<sup>2</sup> & Mingxi Deng<sup>3\*</sup>

<sup>1</sup> School of Aerospace Engineering, Xiamen University, Xiamen 361102, China;

<sup>2</sup> School of Mechanical and Power Engineering, East China University of Science and Technology, Shanghai 200237, China;

<sup>3</sup> College of Aerospace Engineering, Chongqing University, Chongqing 400044, China

\* Corresponding author, E-mail: [mxdeng@cqu.edu.cn](mailto:mxdeng@cqu.edu.cn)

Nondestructive evaluation and testing of material degradation or micro-damages in an early stage are essential for the maintenance of the safety-critical structures. Therefore, it is important to detect defects in a very early stage or even better to detect changes in the microstructure before the defect initiation even occurs. Linear ultrasonic characteristics are not sufficiently sensitive to the kind of microscopic degradation of the material. However, on the other hand, even very small imperfections can produce very significant excess nonlinearity, which can be orders of magnitude higher than the intrinsic nonlinearity of the intact material. The excess nonlinearity is produced mainly by the strong local nonlinearity of microcracks. In order to assess the damage in components at an early stage, the use of nonlinear acoustics has been shown to be the leading and one of the most promising techniques. Second harmonic generation is a typical acoustic nonlinear effect of ultrasonic waves, which can be used to assess the material degradation and detect the micro-defects in their early stages. Furthermore, ultrasonic Lamb wave has been widely used in large-scale industrial structures for health monitoring and material nondestructive testing. The possibility to inspect inaccessible or hidden areas and great cost-effectiveness are the key advantages of ultrasonic Lamb wave-based damage detection approaches. Second harmonic Lamb wave, which combines the advantages of Lamb waves and the high sensitivity of second harmonic waves to microdamage, is drawing increasing attention in recent years. The measurement of second harmonic Lamb waves is investigated as a promising feature extraction technique to characterize material nonlinearity in plate-like structures. However, the second harmonic fields of Lamb waves are much more complex due to the dispersion and multi-mode nature of propagating Lamb waves. In general, the effect of second harmonic generation is often very small and can easily be overlooked experimentally. Consequently, proper mode tuning with physically based features is essential to enhance the efficiency of second harmonic Lamb wave generation and reception. In experimental work, it is also difficult to observe and measure the second harmonic Lamb waves. Although significant development has been made in theoretical analysis and experimental investigation of second Lamb waves, the use of second harmonic Lamb wave for structural damage assessments is still limited by a series of scientific and technical difficulties. In this paper, the theoretical and experimental advances concerning second harmonic Lamb wave are systematically reviewed. First, theoretical analysis of second harmonic Lamb waves based on nonlinear reflection of acoustic waves is reviewed. Then, a general approach of perturbation method and normal modal expansion for theoretical study of the second harmonic Lamb waves propagation in a plate is introduced. The physical insight of nonlinear features among different Lamb modes is clarified. As revealed in these pieces of theoretical work, the second harmonic modes of Lamb waves display an accumulative effect when conditions of phase matching and non-zero power transfer from the fundamental mode to the second harmonic mode are satisfied. The conditions for strong nonlinear effect of Lamb wave are discussed. Experimental observation and measurement of second harmonic Lamb waves are reviewed. Cumulative effect and efficiency of second harmonic generation of Lamb waves are discussed. The guideline for choosing the Lamb modes with higher sensitivity to material nonlinearity is provided. Based on the theoretical and experimental studies, the applications of second harmonic Lamb waves for material damage evaluation are summarized. In addition, some obscure understanding and disputed issues during the study in this research area are clarified. Finally, prospective priorities and research trends of second harmonic Lamb waves are discussed.

**Lamb wave, second harmonic, phase velocity matching, group velocity, nondestructive testing**

doi: [10.1360/TB-2021-0723](https://doi.org/10.1360/TB-2021-0723)