广义 Bézier 面片参数的优化

温汇彪, 李亚娟, 邓重阳*

(杭州电子科技大学理学院 杭州 310018)
(dcy@hdu.edu.cn)

摘要: Várady 等在 2016 年用广义重心坐标和二元 Bernstein 基函数构造了广义 Bézier 面片, 该面片具有简单的控制网格和良好的几何特征, 但其基函数的参数关于广义重心坐标是非线性的. 首先将广义 Bézier 面片的非线性参数优化为线性参数, 为面片几何性质的分析提供了便利; 然后证明新面片在相邻曲面公共边界处具有与原曲面相同的拼接条件; 最后对比计算新旧局部参数消耗的时间, 表明参数的优化减少了计算时间. 通过多个几何实例, 说明面片的几何特性几乎没有改变.

关键词: 优化参数; 广义 Bézier 面片; 面片拼接

中图法分类号: TP391.41 **DOI:** 10.3724/SP.J.1089.2021.18684

Optimization for Parameters of Generalized Bézier Patch

Wen Huibiao, Li Yajuan, and Deng Chongyang*

(School of Science, Hangzhou Dianzi University, Hangzhou 310018)

Abstract: In 2016, Várady, et al. introduced the generalized Bézier patch (GB-patch) using generalized barycentric coordinates and bivariate Bernstein functions. GB-patch has a simple control structure and wonderful geometric properties, but the parameters of Bernstein basis functions are rational polynomial of generalized barycentric coordinates. The linear form of generalized barycentric coordinates is used as parameters of the GB-patch. So, it is convenient to analyze the geometric properties of the patch. Furthermore, it is proved that the new GB-patch has the same blending condition as the original GB-patch between the shared boundary of adjacent patches. Next, the time complexity of the new GB-patch is compared to original GB-patch, which shows that the calculating time is reduced. Finally, several geometric examples are presented to show that the geometric characteristics of the patch are almost the same as those of the original ones.

Key words: optimized parameters; generalized Bézier patch; blending patches

如何将平面多边形域上的点映射到三维空间生成多边形曲面早已引起人们的广泛关注, 20 世纪 80 年代后, 这方面的研究如雨后春笋. 文献[1-3]从控制网格出发, 根据广义重心坐标^[4]构造多边形面片, 并保持了传统 Bézier 面片^[5]的几何特征; 文

献[6-9]从边界曲线等方面着手构造多边形曲面. 近些年, 许多学者^[10-11]开始关注域多边形的形状, 使其能够更好地适应曲面设计的需求.

1989 年, Loop 等^[3]引入平面凸多边形域内的广义重心坐标提出 S 面片, 用广义重心坐标多元多

收稿日期: 2020-09-28; 修回日期: 2020-12-22. 基金项目: 国家自然科学基金(61872121, 61761136010, 61502128); 浙江省自然科学基金(LQ17A010009). 温汇彪(1995—), 男, 硕士研究生, 主要研究方向为 CAGD&CG; 李亚娟(1977—), 女, 博士, 副教授, 硕士生导师, CCF 会员, 主要研究方向为 CAGD&CG; 邓重阳(1976—), 男, 博士, 教授, 博士生导师, CCF 会员, 论文通讯作者, 主要研究方向为 CAGD&CG.

项式替换传统 Bernstein 基函数中的二元多项式; 再根据特定的拓扑规则构造控制网格, 可以实现相邻曲面边界导数一致. 但是, S 面片所需控制点的数量非常庞大, 如八边 3 次 S 面片需要 120 个控制点, 这也就造成 S 面片在实际应用上的局限. 2018 年, Hettinga 等^[2]对 S 面片进行修改, 提出 Gregory S 面片, 极大地提高了面片的自由度, 但是控制点的数量依旧很大.

广义 Bézier (generalized Bézier, GB) 面片^[1]的提出, 既满足相邻面片连续性的要求, 又极大地缩减了控制点的个数 (八边 3 次 GB 面片仅需要 33 个控制点). 相比其他构造方法^[3,8], GB 面片还简化了相邻面片间光滑拼接的条件.

GB 面片虽然相对于 S 面片等控制点的数量有极大的改进, 但是在数值计算方面还有些许不足, 尤其是局部参数 (将非负重心坐标参数化^[12-13]) 的计算. 无论是改进后的 GB 面片^[2,14]还是在应用^[15]中, 都没有充分简化参数. 本文对 GB 面片的局部参数进行优化, 并证明优化的局部参数生成的 GB 面片边界具有与文献^[1]相同的拼接条件.

1 GB 面片

1.1 Wachspress 重心坐标

给定一凸多边形的 n 个顶点 $v_i, i=0, \dots, n-1$, 这些顶点按图 1a 所示逆时针顺序循环排列, 即 $v_i = v_{i+n}$. 对于多边形内任意一点 p , 如果存在 n 个关于 p 的函数 $\phi_i(p), i=0, \dots, n-1$, 使 p 可以表示为多边形顶点的加权和 $\sum_{i=0}^{n-1} \phi_i(p) v_i = p$, 且满足:

- (1) 非负性, $\phi_i(p) \geq 0$;
- (2) 单位分解性, $\sum_{i=0}^{n-1} \phi_i(p) = 1$;
- (3) 在多边形边界上线性插值;
- (4) 在顶点处满足 Lagrange 性质, 即 $\phi_i(v_j) = \delta_{ij}$. 当 $i \neq j$ 时, $\delta_{ij} = 0$; $i = j$ 时, $\delta_{ij} = 1$. 称这些函

图 1 域多边形内各符号的几何表示

数组成的数组为这点关于该多边形的广义重心坐标, 这个多边形称为域多边形.

Wachspress 重心坐标^[4]是一种根据三角形面积定义的广义重心坐标. 令 A_i 和 B_i 分别表示 $\triangle p v_i v_{i+1}$ 和 $\triangle v_{i-1} v_i v_{i+1}$ 的有向面积, $i=0, \dots, n-1$, 如图 1b 所示. Wachspress 重心坐标为

$$\phi_i(p) = \frac{\omega_i(p)}{\sum_{j=0}^{n-1} \omega_j(p)}.$$

其中, $\omega_i(p) = B_i \prod_{j \neq i-1, i} A_j(p)$.

1.2 GB 面片的定义

GB 面片就是 n 个 Bézier 带的线性组合. 例如, 图 2 中由虚线框内控制网格生成的曲面就是该边的 Bézier 带, 圆形控制点决定了面片角点的位置和边角处的切平面及曲率, 菱形点与面片的边界曲线及其跨界导矢有关, 三角形点则决定了面片内部的光滑程度, 五边形点用于调整面片的内部形状. 面片每边上的 d 次 Bézier 带都是由 $l \times (d+1)$ 个控制点生成的, 其中, $l = \lfloor (d+1)/2 \rfloor$ 表示控制点的层数, 4 次 Bézier 带有 $2 \times 5 = 10$ 个控制点, 5 次 Bézier 带有 $3 \times 6 = 18$ 个控制点. 每个 Bézier 带都用传统 Bernstein 多项式定义为

$$P_i^d(s_i, h_i) = \sum_{j=0}^d \sum_{k=0}^{l-1} \mu_{j,k}^i Q_{j,k}^{d,i} B_j^d(s_i) B_k^d(h_i).$$

其中, $Q_{j,k}^{d,i}$ 表示第 $i (i=0, 1, \dots, n-1)$ 个 Bézier 带的第 k 层第 j 个控制点, 这里的 i 与域多边形的边 $v_i v_{i+1}$ 相对应; 变量 s_i, h_i 是局部参数, 将会在本小节最后给出具体定义; $\mu_{j,k}^i$ 的引入使每个 Bézier 带只由其对应的控制点生成, 即每条边的控制点只对其生成的 Bézier 带有影响. 当 $k < 2$ 时, $\mu_{j,k}^i$ 定义为

$$\mu_{j,k}^i = \begin{cases} \frac{h_{i-1}}{h_{i-1} + h_i}, & j < 2 \\ 1, & 2 \leq j \leq d-2 \\ \frac{h_{i+1}}{h_{i+1} + h_i}, & \text{其他} \end{cases}$$

此处, 规定 $0/0=0$; $k \geq 2$ 且 $j < l$ 时, $\mu_{j,k}^i$ 定义为

$$\mu_{j,k}^i = \begin{cases} 0, & j < k \\ \frac{1}{2}, & j = k \\ 1, & \text{其他} \end{cases}$$

$k \geq 2$ 且 $j \geq l$ 时, $\mu_{j,k}^i$ 定义为

图2 五边不同次 GB 面片控制网格

此时, 所有 Bézier 带上的加权 Bernstein 多项式之和不为 1. 所以引入一个中心控制点 C (图 2 中的五边形控制点), 定义为点集 $\{Q_{l,i-1}^{d,i}\}_{i=0}^{n-1}$ 的位置平均点, 即 $C = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} Q_{l,i-1}^{d,i}$. 将所有相关量相加, 得到 GB 面片

$$P = \sum_{i=0}^{n-1} P_i^d(s_i, h_i) + \left(1 - \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{l-1} \sum_{j=0}^d \mu_{j,k}^i B_j^d(s_i) B_k^d(h_i) \right) C.$$

其中, h_i 称为平面域多边形内点 p 关于第 i 条边的距离参数

$$h_i = h_i(p) = 1 - \phi_{i+1}(p) - \phi_i(p) \quad (1)$$

s_i 称为点 p 关于第 i 条边的边参数

$$s_i = s_i(p) = \frac{\phi_{i+1}(p)}{\phi_i(p) + \phi_{i+1}(p)} \quad (2)$$

ϕ_i 表示域多边形内点 p 关于顶点 v_i 的 Wachspress 重心坐标分量. 距离参数关于广义重心坐标是线性的, 并且有以下性质:

- (1) 对于域多边形第 i 条边上的点, $\phi_i + \phi_{i+1} = 1$, 距离参数等于 0;
- (2) 对于第 $i-1$ 条边上的点, $\phi_{i+1} = 0$, $h_i = 1 - \phi_i$ 是关于 ϕ_i 的线性函数;
- (3) 第 $i+1$ 条边上点的距离参数 h_i 是关于 ϕ_{i+1} 的线性函数;
- (4) 对于其余边上的点, 有 $\phi_{i+1} = \phi_i = 0$, $h_i = 1$.

1.3 边参数的新定义

根据式(2)不难发现, 在不相邻边上边参数的定义没有意义, 局部参数无法表示域多边形的边界信息. 因此, Várady 等^[1]又定义了新的边参数

$$s_i = \frac{\sin(\theta_{i+1})h_{i-1}^\perp}{\sin(\theta_{i+1})h_{i-1}^\perp + \sin(\theta_i)h_{i+1}^\perp} \quad (3)$$

其中, $h_{i-1}^\perp$ 表示点 p 到第 $i-1$ 条边的距离, θ_i 表示

$\angle v_{i-1}v_i v_{i+1}$, 如图 1a 所示. 此时, 边参数 s_i 满足以下条件:

- (1) 对于域多边形第 i 条边上的点, $s_i \in [0, 1]$;
- (2) 对于域多边形第 $i+1$ 条边上的点, $s_i = 1$;
- (3) 对于域多边形第 $i-1$ 条边上的点, $s_i = 0$;
- (4) 对于域多边形内其余的点, $s_i \in (0, 1)$.

2 参数的优化

2.1 局部参数的优化

虽然文献[1]通过引入新变量调整了边参数的定义, 但其仍然是非线性的. 本文对边参数进行优化, 令

$$s_i = \phi_{i+1} + \phi_{i+2} \quad (4)$$

这时, 边参数关于广义重心坐标是线性的, 并且有以下性质:

- (1) 对于域多边形第 i 条边上的点, $\phi_{i+2} = 0$, $s_i = \phi_{i+1}$, 是关于 ϕ_{i+1} 的线性函数;
- (2) 对于第 $i+1$ 条边上的点, $\phi_{i+1} + \phi_{i+2} = 1$, $s_i = 1$;
- (3) 对于第 $i+2$ 条边上的点, 是关于 ϕ_{i+2} 的线性函数;
- (4) 其余边上边参数等于 0;
- (5) 域多边形内其余点的边参数 $s_i \in (0, 1)$.

此时, 局部参数 $(s_i, h_i) \in [0, 1] \times [0, 1]$, 与传统张量积 Bernstein 基函数^[16]的定义域完全相同, 且 2 个局部参数都是关于域多边形内一点重心坐标的线性函数.

新定义的局部参数可以表示域内所有点的信息, 包括不相邻边上的点. 域多边形内的点关于第 i 条边的局部参数等值线如图 3 所示, 图 3a 中的虚线表示式(3)生成的边参数的等值线, 图 3b 中的虚线由式(4)生成, 2 张图中的实线均表示距离参数. 原边参数只在第 $i-1$ 条边上值为 0, 在不相邻边上的值按逆时针方向递增; 而优化后的边参数则在第 $i, i+1, i+2$ 条边上值不为 0.

图3 第 i 条边优化前后局部参数的等值线

2.2 面片的拼接

参数曲面的实用性在很大程度上取决于面片拼接的效果,因此,有许多致力于这一方面的工作^[17-19].下面讨论优化参数对面片拼接的影响.

Várady 等^[1]已证明:GB 面片与传统的张量积 Bézier 面片^[16]一样,都具有相同几何作用的 2 层控制点,决定着面片与四边 Bézier 面片以及其他 GB 面片连接的光滑程度.

定理 1. 域多边形上优化参数生成的 GB 面片的光滑(G^1)拼接条件为:2 个控制网格公共边界两侧的对接线必须共线.

证明.由于本文只优化了域多边形内点的边参数,因此只需证明优化后的边参数不会改变相邻面片的拼接条件及面片内部的光滑性.

GB 面片定义为有理多项式的表示形式,在面片内部总是可以达到 C^∞ 连续的,且优化后的局部参数关于广义重心坐标是线性的,在域多边形内的二阶导矢是相容的,故新局部参数生成的 GB 面片内部是光滑的,因此只需考虑面片的边界情况.

优化后的边参数与原边参数相比只在不相邻边上点的值不同,在相邻边上点的新旧边参数值相同.在域多边形任意的第 i 条边上都有 $h_i = 0$,不相邻边上 $h_i = 1$,故不相邻的边界曲线只是关于

s_i 的表达式 $r_i^d(s_i) = \sum_{j=0}^d \mu_{j,k}^i Q_{j,0}^{d,i} B_j^d(s_i) B_0^d(h_i)$. 然

而, $B_0^d(h_i) = (1-h_i)^d$ 中始终包含项 $1-h_i$, 其值为 0,故对于第 i 条边界曲线,不相邻边上的点在曲线上的值始终为 0,其跨界导矢亦为 0,其中, $l \notin \{i-1, i, i+1\}$.

第 i 条边界曲线是关于 s_i 的一元函数,即

$$r_i^d(s_i) = \sum_{j=0}^d Q_{j,0}^{d,i} B_j^d(s_i).$$

与张量积面片的边界曲线表达式完全一致,其跨界导矢为 $t_i^d(s_i) = \sum_{j=0}^d d(Q_{j,1}^{d,i} - Q_{j,0}^{d,i}) B_j^d(s_i)$. 故面片的边界导数与局部参数的优化无关,GB 面片仍可与张量积 Bézier 面片以及其他 GB 面片光滑拼接.

证毕.

图 4 和图 5 所示为优化的局部参数生成的五边 GB 面片与张量积 Bézier 面片和六边 GB 面片的拼接情况及相应的等值线,其中,白色曲线为 2 个面片的公共边界曲线.下文中 GB 面片均表示由优化的局部参数生成的面片.

图 4 五边 GB 面片与 Bézier 面片的拼接及其等值线

图 5 GB 面片的拼接及其等值线

3 数值算例

本节先通过几个例子对新老局部参数在数值计算性能方面进行比较,再通过几个实例展示新局部参数生成的 GB 面片的部分几何特性,以表明优化前后局部参数生成的 GB 面片具有相同的几何性质.

3.1 局部参数数值计算性能的比较

由于式(2)定义的边参数比优化后的边参数多了一次除法运算,因此在时间性能方面不及式(4).故本文只比较式(1)(3)和式(1)(4)的计算时间.

在不同域多边形内采样若干点,分别计算这些点优化前后的局部参数所消耗的时间及其比值,如表 1~表 3 所示.其中, s_{new} 为计算新局部参数消耗的时间, s_{Varady} 为计算文献[1]中参数消耗的时间, $s_{\text{new}}/s_{\text{Varady}}$ 表示二者的比值.计算结果均是在

表 1 101×101 个点新旧局部参数耗时及其比值

域多边形	耗时/s		$s_{\text{new}}/s_{\text{Varady}}$
	s_{new}	s_{Varady}	
四边形	0.0893×10^2	0.1286×10^2	0.6944
五边形	0.1363×10^2	0.1877×10^2	0.7262
六边形	0.1960×10^2	0.2769×10^2	0.7078
七边形	0.2758×10^2	0.3895×10^2	0.7081
八边形	0.3762×10^2	0.5167×10^2	0.7281

表2 201×201 个点新旧局部参数耗时及其比值

域多边形	耗时/s		$s_{\text{new}}/s_{\text{Varady}}$
	s_{new}	s_{Varady}	
四边形	0.3549×10^2	0.4966×10^2	0.7147
五边形	0.5373×10^2	0.7752×10^2	0.6931
六边形	0.7855×10^2	1.0764×10^2	0.7297
七边形	1.0984×10^2	1.5704×10^2	0.6994
八边形	1.4665×10^2	2.0304×10^2	0.7223

表3 301×301 个点新旧局部参数耗时及其比值

域多边形	耗时/s		$s_{\text{new}}/s_{\text{Varady}}$
	s_{new}	s_{Varady}	
四边形	0.7958×10^2	1.1858×10^2	0.6711
五边形	1.2297×10^2	1.7666×10^2	0.6961
六边形	1.8533×10^2	2.5484×10^2	0.7272
七边形	2.5560×10^2	3.5800×10^2	0.7140
八边形	3.2188×10^2	4.5720×10^2	0.7040

配置为 Intel Core i7-9750H CPU 和 8GB RAM 的 PC 机上通过 PyCharm2020.1 运行得出的。

从表 1~表 3 可以看出, $s_{\text{new}}/s_{\text{Varady}}$ 稳定在 0.67~0.73, 说明优化后的局部参数相对于文献[1]中的 2 个局部参数均具有时间上的优势。若运用到 GB 面片的计算上, 将会在时间上带来不菲的收益。

3.2 实例 1

优化后局部参数生成的面片与原 GB 面片在形状上相差不大。设原局部参数生成的多边 GB 面片为对照组, 在同一多边形域内采样 301×301 个点, 根据这些点分别计算新旧局部参数, 对比这些局部参数生成的 GB 面片上点的空间坐标值。多组实验结果表明, 域多边形内一点经新旧局部参数生成的同类型 GB 面片上的点的空间位置坐标最大差值为 $10^{-2} \sim 10^{-1}$, 说明优化后局部参数生成的面片仍维持了原 GB 面片的形状。图 6 所示为新旧局部参数生成的六边 7 次 GB 面片, 图 7 所示为其偏差的绝对值。可以看出, 随着偏差的增加, 图形

图6 新旧局部参数生成的 GB 面片

图7 新旧局部参数生成的 GB 面片的偏差图

颜色趋于红色, 而图 7 中只有个别部分为红色, 且红色部分的最大值只有 0.030。

3.3 实例 2

GB 面片控制点依旧具有可编辑和优化的特点。图 8a 所示为五边 3 次 GB 面片, 图 8b 所示为移动边界上一控制点后的 GB 面片, 可以看出面片内部没有变化; 图 8c 所示为通过移动控制网格内部控制点, 使 GB 面片在某一特定点实现插值的 2 个不同视角。

图8 五边 3 次 GB 面片的编辑与优化

3.4 实例 3

第 2.2 节已经证明, 新 GB 面片的拼接条件与原曲面相同, 可以与其他相邻的 GB 面片或 Bézier 面片实现光滑拼接。图 9 和图 10 所示为多个 GB 面片拼接的实例。图 9a 中间位置为双三次张量积 Bézier 面片, 周围是 4 个镜面对称的五边 GB 面片, 不同颜色的控制网格生成不同的面片, 且相邻面片的公共边界曲线都由不同颜色曲线表示。图 10 所示为多个 GB 面片的拼接效果图, 其中, 两侧为五边 GB 面片, 下方是张量积 Bézier 面片, 上方是六边 GB 面片, 其相邻边界用不同颜色的曲线表

示. 图 9 和图 10 的等值线图进一步证实了相邻面片在公共边界上跨界导矢一致.

图 9 相同边数 GB 面片与张量积 Bézier 面片的拼接

图 10 不同边数 GB 面片与张量积 Bézier 面片的拼接

4 结 语

本文在保持 GB 面片原有几何特征的基础上, 将 GB 面片的非线性参数优化为线性参数, 使局部参数的表达式得到简化, 提高了参数数值计算的效率, 并且在相邻曲面公共边界处具有与原曲面相同的拼接条件. 优化参数在凹多边形上的应用是今后工作的重点.

参考文献(References):

- [1] Várady T, Salvi P, Karikó G. A multi-sided Bézier patch with a simple control structure[J]. *Computer Graphics Forum*, 2016, 35(2): 307-317
- [2] Hettinga G J, Kosinka J. Multisided generalisations of Gregory patches[J]. *Computer Aided Geometric Design*, 2018, 62: 166-180
- [3] Loop C T, DeRose T D. A multisided generalization of Bézier surfaces[J]. *ACM Transactions on Graphics*, 1989, 8(3):

- 204-234
- [4] Floater M S. Wachspress and mean value coordinates[M] // Fasshauer G, Schumaker L. *Approximation Theory XIV: San Antonio 2013*, vol 83. Heidelberg: Springer, 2014: 81-102
- [5] Chang Zhiyong, Wan Neng. *Computer-aided geometric modeling design*[M]. 3rd ed. Beijing: Science Press, 2013: 50-57(in Chinese)
(常智勇, 万能. *计算机辅助几何造型技术*[M]. 3 版. 北京: 科学出版社, 2013: 50-57)
- [6] Loop C T, Schaefer S. G^2 tensor product splines over extraordinary vertices[J]. *Computer Graphics Forum*, 2008, 27(5): 1373-1382
- [7] Karčiauskas K, Nguyen T, Peters J. Generalizing bicubic splines for modeling and IGA with irregular layout[J]. *Computer-Aided Design*, 2016, 70: 23-35
- [8] Warren J. Creating multi-sided rational Bézier surfaces using base points[J]. *ACM Transactions on Graphics*, 1990, 11: 127-139
- [9] Salvi P, Várady T, Rockwood A. Ribbon-based transfinite surfaces[J]. *Computer Aided Geometric Design*, 2014, 31(9): 613-630
- [10] Salvi P, Várady T. Multi-sided Bézier surfaces over concave polygonal domains[J]. *Computers & Graphics*, 2018, 74: 56-65
- [11] Várady T, Salvi P, Vaitkus M, et al. Multi-sided Bézier surfaces over curved, multi-connected domains[J]. *Computer Aided Geometric Design*, 2020, 78: 1-14
- [12] Smith J, Schaefer S. Selective degree elevation for multi-sided Bézier patches[J]. *Computer Graphics Forum*, 2015, 34(2): 609-615
- [13] Hormann K, Sukumar N. *Generalized barycentric coordinates in computer graphics and computational mechanics*[M]. Boca Raton: CRC Press, 2017: 135-146
- [14] Várady T, Salvi P, Kovács I. Enhancement of a multi-sided Bézier surface representation[J]. *Computer Aided Geometric Design*, 2017, 55: 69-83
- [15] Hettinga G J, Brals R, Kosinka J. Colour interpolants for polygonal gradient meshes[J]. *Computer Aided Geometric Design*, 2019, 74: 101769
- [16] Farin G. *Curves and surfaces for CAGD*[M]. 5th ed. San Diego: Academic Press, 2002: 245-267
- [17] Hao Ru, Liu Runtao. Joining between adjacent rational Bézier surfaces[J]. *Computer Engineering and Applications*, 2010, 46(4): 174-175+200(in Chinese)
(郝茹, 刘润涛. 双四次有理 Bézier 曲面 G^1 光滑拼接算法[J]. *计算机工程与应用*, 2010, 46(4): 174-175+200)
- [18] Zhang Juan, Tang Zhengquan, Qiu Caoyong. Explore the C^2 smooth connection of many bicubic Bézier patches[J]. *Communication on Applied Mathematics and Computation*, 2004, 18(1): 71-75(in Chinese)
(张娟, 汤正诠, 邱曹勇. 多片双三次 Bézier 曲面片的 C^2 连续拼接探讨[J]. *应用数学与计算数学学报*, 2004, 18(1): 71-75)
- [19] Liu Xueyan, Zhang Guicang. GC^1 continuity condition between adjacent rectangular and triangular Bernstein-Bézier patch[J]. *Journal of Northwest Normal University: Natural Science*, 2004, 40(2): 25-26(in Chinese)
(刘雪艳, 张贵仓. 三角域和四角域上 Bernstein-Bézier 曲面片的拼接[J]. *西北师范大学学报: 自然科学版*, 2004, 40(2): 25-26)