中微子为主膨胀宇宙中的空洞

高建功　沈天增　张慧生
（新疆工学院，乌鲁木齐）

最近对星系分布的观测发现，在宇宙空间存在着尺度为 40—100 Mpc 的巨大空间[1]．在持续膨胀的宇宙图景中，非辐射物质的成团过程自然地伴随着普通物质密度很低的区域的形成．问题在于这些区域的尺度能达到多大．这就是本文讨论的问题．

文献[2]中讨论了 Gamow 宇宙中，由于 Jeans 不稳定性，中微子海碎裂形成自引力体系的可能性．在早期宇宙极高温的时期，中微子质量对宇宙的物理过程不会有重要的影响．随着宇宙的膨胀，中微子能量为

$$E(\boldsymbol{p}) = (m_\nu^2 + p^2/a^2)^{1/2},$$

此处 a 是宇宙的曲率半径，p 为无标度空间度规中的空间动量的模．如果 $p^2/a^2 \gg m_\nu^2$，中微子是极端相对论的，$\rho_\nu \propto T^4$；如果 $p^2/a^2 \ll m_\nu^2$，中微子是非相对论的，$\rho_\nu \propto T^3$．这个出现在 $kT \approx m_\nu c^2$ 的转折点具有很重要的宇宙学意义．因为仅当从那时开始，Jeans 不稳定性原理对宇宙中微子开始起作用．原先均匀分布的中微子海开始碎裂成中微子团．当 m_ν 具有几个 eV 的值，这种碎裂过程就会先于星系物质的成团过程[3]．与总的宇宙膨胀相比，这些中微子团的膨胀将减慢下来，并最终停止膨胀．由于宇宙空间的持续膨胀，这些中微子团将逐渐远离．由于普通物质与这种中微子系统的引力相互作用，在中微子为主的宇宙中，普通物质的大部分包含在这种中微子体系中，并在其势阱中经历星系的形成过程．星系成团的原因可归结为这种中微子势阱的影响．另一方面，计算表明[4]，星系物质的凝聚，会对中微子体系的平衡构型产生不可忽略的影响，使体系的尺度增加．

本文就是在这种图景下估计宇宙中空洞的尺度．

我们的讨论是基于上述中微子系统应该满足的两个原则性条件：

第一个是平衡构型条件对自引力中微子体系的质量和半径所加的限制．应用充分简并的近似，可具体表为[5]

$$M = 6.4 \times 10^{15}\left(\frac{m_\nu}{10\mathrm{eV}}\right)^{-2} M_\odot, \tag{1}$$

$$R = 2.7\left(\frac{m_\nu}{10\mathrm{eV}}\right) kpc. \tag{2}$$

第二个是时空度规的几何条件．由于宇宙的大尺度结构不是 Minkowski 时空，而是一个演化着的 Friedmann 时空，我们应该考虑对一个局部质量凝聚的场加上宇宙学的边界条件．为简化计，可把这种质量凝聚看成是 Schwarzschild 型的．这样，一个 Schwarzschild 的真空区域应配接到包围它的 Friedmann 区域上[6–8]，即 Friedmann 时空中尘埃粒子轨道的一个超曲面 Σ_F 的内部被 Schwarzschild 时空的一个超曲面 Σ_s 所代替．配接处两个类时超曲面 Σ_F 和 Σ_s 的等

本文 1983 年 7 月 21 日收到．

同，把两个解的参数联系起来．由于 Σ_F 中粒子轨道是具有恒定角坐标的短程线，它们必须与 Σ_s 中类时径向短程线恒等．配接只能在下述情况下成为可能，即 Σ_s 和 Σ_F 的短程线上原时同步，使得 Σ_s 和 Σ_F 的周长在相应的原时相等．

在 Schwarzschild 度规空间

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2M}{r}} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \tag{3}$$

中，一个质量为 μ 的检验粒子的四维能量动量为

$$-\frac{E^2}{1 - \frac{2M}{r}} + \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}}\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + \frac{L^2}{r^2} + \mu^2 = 0. \tag{4}$$

引入 $\tilde{E} \equiv E/\mu$，$\tilde{L} \equiv L/\mu$，$\lambda = \tau/\mu$，此处 τ 为原时．由 (4) 式得

$$\tau = \int d\tau = \int \frac{dr}{\left[\tilde{E}^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left(1 + \frac{\tilde{L}^2}{r^2}\right)\right]^{1/2}}. \tag{5}$$

如果只讨论径向运动（$\tilde{L} = 0$），且注意到 $\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = 0$ 的半径 $R_i = \frac{2M}{1 - \tilde{E}^2}$，则有

$$\tau = \int d\tau = \int \frac{dr}{\left[2\frac{M}{r} - 2\frac{M}{R_i}\right]^{1/2}}. \tag{6}$$

这个积分的参数形式是

$$\begin{cases} r = \dfrac{R_i}{2}(1 + \cos\eta), \\ \tau = \dfrac{R_i}{2}\left(\dfrac{R}{2M}\right)^{1/2}(\eta + \sin\eta). \end{cases} \tag{7}$$

均匀各向同性宇宙的 Friedmann 度规为

$$ds^2 = -dT^2 + a^2(T)[d\chi^2 + \sin^2\chi(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)], \tag{8}$$

$a(T)$ 由旋轮线方程给出

$$\begin{cases} a = \dfrac{1}{2} a_m(1 + \cos\eta), \\ T = \dfrac{1}{2} a_m(\eta + \sin\eta). \end{cases} \tag{9}$$

考虑到静质量不为零的中微子使宇宙封闭，我们有[7]

$$a_m = \frac{\Omega_0 a_0}{\Omega_0 - 1}, \tag{10}$$

$$a_0^{-2} = (\Omega_0 - 1)H_0^2, \tag{11}$$

此处下标“0”表示现在的宇宙参数，H_0 为 Hubble 常数，Ω_0 为宇宙密度参数．对封闭宇宙 $\Omega_0 > 1$，$a_0/a(t) = z + 1$.

设上述两种度规在 Schwarzschild 坐标 r_e 处配接，则由 $2\pi r_e = 2\pi a \sin\chi$，$\tau_0 = T$，得

$$r_e = \frac{(2MH_0/\Omega_0)^{1/3}}{H_0(z + 1)}. \tag{12}$$

对于一个从均匀分布的宇宙中分裂出的 Schwarzschild 质量 M，一方面，由于体系尺度的

增大,其半径 R' 总是大于(3)式中的 R,另一方面,配接半径 r_e 总是大于 R'. 回溯此质量凝聚分裂后的过程,越是接近此质量分裂出来的时期,r_e 越接近 R',R' 越接近 R. 作为极限情况,可以认为,在凝聚质量M分裂的时期,$r_e = R$. 这样,由(1)、(2)和(12),可以推出上述凝聚质量 M 分裂出来的时期:

$$z + 1 = \frac{M^{1/3}}{R}\left(\frac{2}{H_0^2\Omega_0}\right)^{1/3}. \tag{13}$$

随着宇宙的膨胀,碎裂成团的中微子体系包含着大部分普通物质逐渐远离,在其身后形成普通物质密度很低的区域——空洞. 假设宇宙是均匀膨胀的,这些区域尺度 l_ν 的数量级应取 $2a_0\sin\chi = 2r_e(z+1)$,即

$$l_\nu \sim 2a_0\sin\chi = 50\left(\frac{1.2}{\Omega_0}\right)^{1/3}\left(\frac{m_\nu}{10\,\mathrm{ev}}\right)^{-2/3}\left(\frac{H_0}{55\,km\cdot s^{-1}\mathrm{Mpc}^{-1}}\right)^{-2/3}\mathrm{Mpc}.$$

这个结果是从上述模型中两个原则性条件得到的. 这两个条件是必要而非充分的. 因此,可以认为本文的估算值是空洞尺度的上限.

参 考 文 献

[1] Kirshner, R. P. et al., *Astrophys. J.*, **248** (1981), L57; Davis, M. et al., *Astrophys. J.*, **253** (1982), 423.
[2] 高建功, Ruffini, R., 科学通报, **26** (1981), 20:1237.
[3] 陆琰、方励之, Report at the 3rd Marcel Grossmann Meeting on General Relativity, Shanghai, China, Aug. 30—Sept. 3, 1982.
[4] Crollalanza, A., 高建功, Ruffini, R., Report at the Academia Sinica-Max Planck Society Workshop on High Energy Astrophysics, Nanjing, China, 1982.
[5] 高建功, Ruffini, R., 天体物理学报, 1981, 1:19.
[6] Einstein, A., Strauss, E. G., *Rev. Mod. Phys.*, 17 (1945), 120.
[7] Misner, C. W., Wheeler, J. A. & Throne, K. S., *Gravitation*, Freeman, New York, 1973.
[8] Weinberg, S., *Grovitation and Cosmology*, J. Wiley, New York, 1972. (中译本: 温伯格,引力论和宇宙论,科学出版社, 1980).