张量空间上的线性互补问题

献给越民义教授 100 华诞

李夏, 黄正海*

天津大学数学学院, 天津 300350

E-mail: lixia666@tju.edu.cn, huangzhenghai@tju.edu.cn

收稿日期: 2020-02-24; 接受日期: 2020-04-10; 网络出版日期: 2020-09-09; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 11871051) 资助项目

摘要 借助于一类张量收缩积, 本文定义一类张量空间上的线性互补问题, 简称张量线性互补问题. 当所涉及的张量变量退化为向量时, 所考虑的问题退化为经典的线性互补问题. 对此, 首先讨论张量收缩积的一些性质, 然后建立张量线性互补问题的理论与算法. 具体地, 讨论张量线性互补问题的等价模型、可行性与可解性理论、解集的凸性等, 提出一个求解张量线性互补问题的外梯度算法, 在一定条件下证明算法的收敛性, 并给出初步的数值实验结果.

关键词 张量 张量收缩积 线性互补问题 外梯度法

MSC (2010) 主题分类 90C33, 65K10

1 引言

众所周知, Euclid 空间上的有限维变分不等式和互补问题因其广泛应用而被深入研究 (参见文献 [1–3]). 张量 (或称为超矩阵) 是矩阵的高维度推广. 在目前大数据时代, 越来越多的数据以张量的形式进行存储, 如彩色图像和灰度图像视频等, 因而, 张量及其相关问题得到了大量的研究 (参见文献 [4, 5]). 近年来, 作为经典互补问题的推广, 利用张量定义的一类互补问题, 称为张量互补问题, 得到了快速的发展, 在理论方面 (包括解集的非空紧性 [6–12]、解的唯一存在性 [13–18]、严格可行性 [15, 19]、解的界估计 [20, 21]、误差界理论 [22, 23]、稳定性分析 [24, 25] 和解集的连通性 [26] 等)、算法方面 [27–34] 和应用方面 [35] 都取得了很多成果, 详见文献 [36–38]. 另外, 利用张量定义的其他类型的变分不等式和互补问题最近也得到了研究, 包括多项式互补问题 [39–42]、随机互补问题 [43]、张量集合上的互补问题 [44]、张量变分不等式 [45]、多项式变分不等式 [46] 和广义多项式互补问题 [47] 等. 应当注意到, 以上提到的利用张量定义的相关问题都是以向量为变量的.

最近, Gowda 和 Sossa [48] 研究了一类有限维 Hilbert 空间上的变分不等式并取得了一些很好的理论结果. 基于此, 文献 [49] 进行了跟进并取得了进一步的成果. 当变量取为张量时, 由此可得到

英文引用格式: Li X, Huang Z H. Linear complementarity problem over tensor spaces (in Chinese). Sci Sin Math, 2020, 50: 1169–1182, doi: 10.1360/SSM-2020-0050

张量空间上变分不等式的一些理论结果. 此外, 文献 [50, 51] 研究了张量空间上的变分不等式, 讨论了解的基本性质和解集稳定性等, 并给出在寡头垄断市场博弈模型方面的应用. 然而, 在文献 [50, 51] 中对应用问题所建立的数学模型中, 涉及的变量是张量的元素而不是张量自身, 没有显式地给出以张量为变量的数学模型. 基于文献 [48, 49], 借助于一类张量收缩积 (称为 $J(p)$ 模式乘积), 文献 [52] 考察了一类张量空间上的仿射变分不等式, 特别地, 将一类寡头垄断市场博弈问题建模为一类以张量为变量的变分不等式, 即得到张量空间上仿射变分不等式的应用.

受以上研究的启发, 借助于 $J(p)$ 模式乘积, 本文定义并讨论一类张量空间上的线性互补问题, 简称张量线性互补问题. 首先, 讨论 $J(p)$ 模式乘积的基本性质, 包括最基本的交换律、结合律和二次张量函数的导数等. 然后, 探讨张量线性互补问题的理论与求解方法, 主要包括问题的等价模型、可行性与可解性的关系、严格可行性相关结果、涉及的张量为 (半) 正定时解集的相关性质等, 以及半正定张量对应的张量线性互补问题的外梯度算法、算法的收敛性等.

本文余下内容的结构如下: 第 2 节主要介绍基本概念及相关理论结果; 第 3 节讨论 $J(p)$ 模式乘积的性质; 第 4 节讨论张量线性互补问题的理论和算法; 第 5 节对本文的内容进行总结.

2 预备知识

首先介绍本文使用的符号. 假设 i, j, k, l, m, n, p 和 q 为正整数, 除非特殊说明, 总假设 $m, n \geq 2$. 令 $[n]$ 表示集合 $\{1, 2, \dots, n\}$. 使用 $\emptyset$ 表示空集, $\mathbb{R}$ 表示所有实数的集合, $\mathbb{R}^n$ 表示所有 n 维实向量的集合. 一个 m 阶 $n_1 \times n_2 \times \dots \times n_m$ 维实张量 $\mathcal{A}$ 被记作 $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_{i_1 i_2 \dots i_m})$, 其中 $\mathcal{A}_{i_1 i_2 \dots i_m} \in \mathbb{R}$ 且 $i_j \in [n_j]$ ($j \in [m]$). 令 $\mathcal{O}$ 表示适当阶数和维数的一个零张量. 任给两个 m 阶 $n_1 \times n_2 \times \dots \times n_m$ 维实张量 $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_{i_1 i_2 \dots i_m})$ 和 $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_{i_1 i_2 \dots i_m})$, 两者的内积定义为 $\langle \mathcal{A}, \mathcal{B} \rangle = \sum_{i_1=1}^{n_1} \sum_{i_2=1}^{n_2} \dots \sum_{i_m=1}^{n_m} \mathcal{A}_{i_1 i_2 \dots i_m} \mathcal{B}_{i_1 i_2 \dots i_m}$, 并定义张量范数

$$\|\mathcal{A}\| = \left(\sum_{i_1=1}^{n_1} \sum_{i_2=1}^{n_2} \dots \sum_{i_m=1}^{n_m} \mathcal{A}_{i_1 i_2 \dots i_m}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.1)$$

特别地, 当 $n_1 = \dots = n_m = n$ 时, 称 $\mathcal{A}$ 是一个 m 阶 n 维实张量. 若实张量 $\mathcal{A}$ 的任意一个元素都大于或等于 0, 则称 $\mathcal{A}$ 是非负的; 若实张量 $\mathcal{A}$ 的任意一个元素都大于 0, 则称 $\mathcal{A}$ 是正的. 令 $\mathbb{R}^{[m, n]}$ 表示所有 m 阶 n 维实张量的集合, $\mathbb{R}_+^{[m, n]}$ 表示所有 m 阶 n 维非负实张量的集合, $\mathbb{R}_{++}^{[m, n]}$ 表示所有 m 阶 n 维正实张量的集合. 令 $\Pi_{\mathbb{K}}$ 表示到集合 $\mathbb{K}$ 上的正交投影. 先给出如下定义:

定义 2.1 令 $\mathcal{A}$ 是一个 m 阶 $n_1 \times n_2 \times \dots \times n_m$ 维张量, $\mathcal{B}$ 是一个 p 阶 $\hat{n}_1 \times \hat{n}_2 \times \dots \times \hat{n}_p$ 维张量, 且 $p \leq m$. 设存在 p 个单调递增的不同整数 $\hat{j}_1, \hat{j}_2, \dots, \hat{j}_p \in [m]$, 使得对于任意的 $k \in [p]$ 都有 $n_{\hat{j}_k} = \hat{n}_k$. 设 $J(p) := \{\hat{j}_1, \hat{j}_2, \dots, \hat{j}_p\}$ 和 $I(p) := \{\hat{i}_1, \hat{i}_2, \dots, \hat{i}_{m-p}\}$ 是集合 $[m]$ 的一个分割 (即 $I(p) \cup J(p) = [m]$ 且 $I(p) \cap J(p) = \emptyset$), 并且 $I(p)$ 的元素是单调递增的. 张量 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 的 $J(p)$ 模式乘积 (记为 $\mathcal{A} \times_{J(p)} \mathcal{B}$) 是一个 $m-p$ 阶 $n_{\hat{i}_1} \times n_{\hat{i}_2} \times \dots \times n_{\hat{i}_{m-p}}$ 维张量, 且对于任意的 $i_{\hat{i}_1} \in [n_{\hat{i}_1}], i_{\hat{i}_2} \in [n_{\hat{i}_2}], \dots, i_{\hat{i}_{m-p}} \in [n_{\hat{i}_{m-p}}]$, 其元素定义为

$$(\mathcal{A} \times_{J(p)} \mathcal{B})_{i_{\hat{i}_1} i_{\hat{i}_2} \dots i_{\hat{i}_{m-p}}} = \sum_{i_{\hat{j}_1}=1}^{\hat{n}_1} \sum_{i_{\hat{j}_2}=1}^{\hat{n}_2} \dots \sum_{i_{\hat{j}_p}=1}^{\hat{n}_p} \mathcal{A}_{\text{sort}\{i_{\hat{i}_1}, i_{\hat{i}_2}, \dots, i_{\hat{i}_{m-p}}, i_{\hat{j}_1}, i_{\hat{j}_2}, \dots, i_{\hat{j}_p}\}} \mathcal{B}_{i_{\hat{j}_1} i_{\hat{j}_2} \dots i_{\hat{j}_p}},$$

其中 $\text{sort}\{i_{\hat{i}_1}, i_{\hat{i}_2}, \dots, i_{\hat{i}_{m-p}}, i_{\hat{j}_1}, i_{\hat{j}_2}, \dots, i_{\hat{j}_p}\}$ 表示指标 $i_{\hat{i}_1}, i_{\hat{i}_2}, \dots, i_{\hat{i}_{m-p}}, i_{\hat{j}_1}, i_{\hat{j}_2}, \dots, i_{\hat{j}_p}$ 按照其下标 (即 $\hat{i}_1, \hat{i}_2, \dots, \hat{i}_{m-p}, \hat{j}_1, \hat{j}_2, \dots, \hat{j}_p$) 从小到大的顺序而进行的排序.

在定义 2.1 中, 使用了一个指标的排列算子 sort . 对此, 举例解释如下: 若 $m = 5$, $J(p) = \{\hat{j}_1, \hat{j}_2\}$, $I(p) = \{\hat{i}_1, \hat{i}_2, \hat{i}_3\}$, 且 $\hat{i}_1 < \hat{j}_1 < \hat{i}_2 < \hat{i}_3 < \hat{j}_2$, 则 $\text{sort}\{i_{\hat{i}_1}, i_{\hat{i}_2}, i_{\hat{i}_3}, i_{\hat{j}_1}, i_{\hat{j}_2}\} = i_{\hat{i}_1} i_{\hat{j}_1} i_{\hat{i}_2} i_{\hat{i}_3} i_{\hat{j}_2}$; 若 $m = 5$, $J(p) = \{\hat{j}_1, \hat{j}_2\}$, $I(p) = \{\hat{i}_1, \hat{i}_2, \hat{i}_3\}$, 且 $\hat{j}_1 < \hat{i}_1 < \hat{j}_2 < \hat{i}_2 < \hat{i}_3$, 则 $\text{sort}\{i_{\hat{i}_1}, i_{\hat{i}_2}, i_{\hat{i}_3}, i_{\hat{j}_1}, i_{\hat{j}_2}\} = i_{\hat{j}_1} i_{\hat{i}_1} i_{\hat{j}_2} i_{\hat{i}_2} i_{\hat{i}_3}$.

为了更好地理解 $J(p)$ 模式乘积的概念, 举例解释如下: 令 $\mathcal{A}$ 是一个 6 阶 $n_1 \times n_2 \times n_3 \times n_4 \times n_5 \times n_6$ 维张量, $\mathcal{B}$ 是一个 3 阶 $n_1 \times n_3 \times n_4$ 维张量, $J(p) = \{1, 3, 4\}$ 且 $I(p) = \{2, 5, 6\}$, 则 $\mathcal{A} \times_{J(p)} \mathcal{B}$ 是一个 3 阶 $n_2 \times n_5 \times n_6$ 维张量, 且对任意的 $i_2 \in [n_2]$, $i_5 \in [n_5]$, $i_6 \in [n_6]$, 都有

$$(\mathcal{A} \times_{J(p)} \mathcal{B})_{i_2 i_5 i_6} = \sum_{i_1=1}^{n_1} \sum_{i_3=1}^{n_3} \sum_{i_4=1}^{n_4} \mathcal{A}_{i_1 i_2 i_3 i_4 i_5 i_6} \mathcal{B}_{i_1 i_3 i_4}.$$

特别地, 当 $m = 2$, $p = 1$, $J(p) = \{2\}$ 时, $J(p)$ 模式乘积就退化为普通的矩阵与向量之间的乘积. 此外, 当 $p = m$, $J(p) = [m]$ 时, $\mathcal{A} \times_{J(p)} \mathcal{B}$ 等价于内积 $\langle \mathcal{A}, \mathcal{B} \rangle$.

注 2.1 (i) 设 $J(p) = [m] \setminus [m-p]$, 则 $I(p) = [m-p]$. 对于任意的 $l \in I(p)$ 都有 $\hat{i}_l = l$, 并且对于任意的 $k \in J(p)$ 都有 $\hat{j}_k = k$. 因此, 对于任意的 $i_l \in [n_l]$ ($l \in I(p)$), 都有

$$(\mathcal{A} \times_{J(p)} \mathcal{B})_{i_1 i_2 \cdots i_{m-p}} = \sum_{i_{m-p+1}=1}^{\hat{n}_1} \sum_{i_{m-p+2}=1}^{\hat{n}_2} \cdots \sum_{i_m=1}^{\hat{n}_p} \mathcal{A}_{i_1 i_2 \cdots i_{m-p} i_{m-p+1} i_{m-p+2} \cdots i_m} \mathcal{B}_{i_{m-p+1} i_{m-p+2} \cdots i_m}.$$

此时, $\mathcal{A} \times_{J(p)} \mathcal{B}$ 是一个 $m-p$ 阶 $n_1 \times \cdots \times n_{m-p}$ 维张量. 在这种情形下, 将 $\mathcal{A} \times_{J(p)} \mathcal{B}$ 简记为 $\mathcal{AB}$.

(ii) 设 $J(p) = [p]$, 则 $I(p) = [m] \setminus [p]$. 对于任意的 $l \in I(p)$ 都有 $\hat{i}_l = l$, 并且对于任意的 $k \in J(p)$ 都有 $\hat{j}_k = k$. 因此, 对于任意的 $i_l \in [n_l]$ ($l \in I(p)$), 都有

$$(\mathcal{A} \times_{J(p)} \mathcal{B})_{i_{p+1} i_{p+2} \cdots i_m} = \sum_{i_1=1}^{\hat{n}_1} \sum_{i_2=1}^{\hat{n}_2} \cdots \sum_{i_p=1}^{\hat{n}_p} \mathcal{A}_{i_1 i_2 \cdots i_p i_{p+1} i_{p+2} \cdots i_m} \mathcal{B}_{i_1 i_2 \cdots i_p}.$$

此时, $\mathcal{A} \times_{J(p)} \mathcal{B}$ 是一个 $m-p$ 阶 $n_{p+1} \times \cdots \times n_m$ 维张量. 在这种情形下, 将 $\mathcal{A} \times_{J(p)} \mathcal{B}$ 简记为 $\mathcal{A} * \mathcal{B}$.

在以下的张量积性质的讨论中, 只考虑 $J(p) = [m] \setminus [m-p]$ 的情形.

命题 2.1 令 $\mathcal{A}$ 是一个 m 阶 $n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_m$ 维张量, $\mathcal{B}$ 是一个 p 阶 $\hat{n}_1 \times \hat{n}_2 \times \cdots \times \hat{n}_p$ 维张量, 且 m 和 p 满足 $p \leq m$. 设 $\alpha \in \mathbb{R}$, 对于任意的 $k \in [p]$, 都有 $n_{m-p+k} = \hat{n}_k$, 则

$$(\mathcal{A} + \mathcal{B})\mathcal{X} = \mathcal{AX} + \mathcal{BX}, \quad \mathcal{A}(\mathcal{X} + \mathcal{Y}) = \mathcal{AX} + \mathcal{AY}, \quad (\alpha\mathcal{A})\mathcal{X} = \alpha(\mathcal{AX}), \quad \mathcal{A}(\alpha\mathcal{X}) = \alpha(\mathcal{AX}).$$

证明 由定义 2.1 可得

$$\begin{aligned} ((\mathcal{A} + \mathcal{B})\mathcal{X})_{i_1 \cdots i_{m-p}} &= \sum_{j_1=1}^{\hat{n}_1} \cdots \sum_{j_p=1}^{\hat{n}_p} (\mathcal{A} + \mathcal{B})_{i_1 \cdots i_{m-p} j_1 \cdots j_p} \mathcal{X}_{j_1 \cdots j_p} \\ &= \sum_{j_1=1}^{\hat{n}_1} \cdots \sum_{j_p=1}^{\hat{n}_p} \mathcal{A}_{i_1 \cdots i_{m-p} j_1 \cdots j_p} \mathcal{X}_{j_1 \cdots j_p} + \sum_{j_1=1}^{\hat{n}_1} \cdots \sum_{j_p=1}^{\hat{n}_p} \mathcal{B}_{i_1 \cdots i_{m-p} j_1 \cdots j_p} \mathcal{X}_{j_1 \cdots j_p} \\ &= (\mathcal{AX})_{i_1 \cdots i_{m-p}} + (\mathcal{BX})_{i_1 \cdots i_{m-p}}, \\ ((\alpha\mathcal{A})\mathcal{X})_{i_1 \cdots i_{m-p}} &= \sum_{j_1=1}^{\hat{n}_1} \cdots \sum_{j_p=1}^{\hat{n}_p} (\alpha\mathcal{A})_{i_1 \cdots i_{m-p} j_1 \cdots j_p} \mathcal{X}_{j_1 \cdots j_p} \\ &= \alpha \sum_{j_1=1}^{\hat{n}_1} \cdots \sum_{j_p=1}^{\hat{n}_p} \mathcal{A}_{i_1 \cdots i_{m-p} j_1 \cdots j_p} \mathcal{X}_{j_1 \cdots j_p} \\ &= \alpha(\mathcal{AX})_{i_1 \cdots i_{m-p}}. \end{aligned}$$

这两个式子表明, 命题 2.1 中的第 1 和 3 个等式成立. 其他两式证明类似. $\square$

定义 2.2 令 $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{[2m,n]}$ 且 $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{R}^{[m,n]}$. 如果对于任意的 $\mathcal{X} \in \mathbb{K}$, 都有 $\mathcal{X}(\mathcal{A}\mathcal{X}) \geq 0$, 则称 $\mathcal{A}$ 在 $\mathbb{K}$ 上是半正定的. 如果对于任意的 $\mathcal{X} \in \mathbb{K} \setminus \mathcal{O}$, 都有 $\mathcal{X}(\mathcal{A}\mathcal{X}) > 0$, 则称 $\mathcal{A}$ 在 $\mathbb{K}$ 上是正定的. 当 $\mathbb{K} = \mathbb{R}^{[m,n]}$ 时, 简称 $\mathcal{A}$ 是半正定的或者正定的.

显然, 由以上定义可得, 不存在奇数阶 (半) 正定张量. 下面的定义来自文献 [50, 定义 4.3].

定义 2.3 给定集合 $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{R}^{[m,n]}$ 和映射 $F: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{R}^{[m,n]}$, 如果对于任意的张量 $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \in \mathbb{K}$, 都有 $\langle F(\mathcal{Y}) - F(\mathcal{X}), \mathcal{Y} - \mathcal{X} \rangle \geq 0$, 则称 F 在 $\mathbb{K}$ 上是单调的. 当 $\mathbb{K} = \mathbb{R}^{[m,n]}$ 时, 简称 F 是单调的.

3 $J(p)$ 模式乘积的性质

本节讨论 $J(p)$ 模式乘积的性质. 下面的结果表明 $J(p)$ 模式乘积的结合律不成立.

命题 3.1 令 $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{[m,n]}$, $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{[p,n]}$, $\mathcal{C} \in \mathbb{R}^{[q,n]}$, 且 $p \geq q$, $m \geq p + q$, 则 $(\mathcal{A}\mathcal{B})\mathcal{C} \neq \mathcal{A}(\mathcal{B}\mathcal{C})$.

证明 由定义 2.1 知, $(\mathcal{A}\mathcal{B})\mathcal{C}$ 是一个 $m - p - q$ 阶 n 维张量, 而 $\mathcal{A}(\mathcal{B}\mathcal{C})$ 是一个 $m - p + q$ 阶 n 维张量. 显然, $(\mathcal{A}\mathcal{B})\mathcal{C} \neq \mathcal{A}(\mathcal{B}\mathcal{C})$. 命题得证. $\square$

注 3.1 当 $\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{B}$ 阶数相同时, 若 $\mathcal{A} \times_{J(p)} \mathcal{B}$ 适定 (即 $\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{B}$ 可进行 $J(p)$ 模式乘积), 则有 $\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{A}$. 当 $\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{B}$ 的阶数不同且 $\mathcal{A} \times_{J(p)} \mathcal{B}$ 适定时, 因 $\mathcal{A}$ 的阶数高于 $\mathcal{B}$ 的阶数, 故乘积中不能交换两者位置.

下面结合块对称张量^[53]来讨论 $J(p)$ 模式乘积的性质.

命题 3.2 令 $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_{i_1 \dots i_m}) \in \mathbb{R}^{[m,n]}$, $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_{i_1 \dots i_p}) \in \mathbb{R}^{[p,n]}$, $\mathcal{C} = (\mathcal{C}_{i_1 \dots i_q}) \in \mathbb{R}^{[q,n]}$, 且 $m = p + q$. 若对于所有的 $i_k, j_l \in [n]$ ($k \in [p]$, $l \in [q]$), 都有 $\mathcal{A}_{i_1 i_2 \dots i_p j_1 j_2 \dots j_q} = \mathcal{A}_{j_1 j_2 \dots j_q i_1 i_2 \dots i_p}$, 则 $(\mathcal{A}\mathcal{B})\mathcal{C} = (\mathcal{A}\mathcal{C})\mathcal{B}$.

证明 结合命题的条件和定义 2.1 可得

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}\mathcal{B})\mathcal{C} &= \sum_{j_1, j_2, \dots, j_q=1}^n \left(\sum_{i_1, i_2, \dots, i_p=1}^n \mathcal{A}_{j_1 j_2 \dots j_q i_1 i_2 \dots i_p} \mathcal{B}_{i_1 i_2 \dots i_p} \right) \mathcal{C}_{j_1 j_2 \dots j_q} \\ &= \sum_{j_1, j_2, \dots, j_q=1}^n \left(\sum_{i_1, i_2, \dots, i_p=1}^n \mathcal{A}_{i_1 i_2 \dots i_p j_1 j_2 \dots j_q} \mathcal{B}_{i_1 i_2 \dots i_p} \right) \mathcal{C}_{j_1 j_2 \dots j_q} \\ &= \sum_{i_1, i_2, \dots, i_p=1}^n \left(\sum_{j_1, j_2, \dots, j_q=1}^n \mathcal{A}_{i_1 i_2 \dots i_p j_1 j_2 \dots j_q} \mathcal{C}_{j_1 j_2 \dots j_q} \right) \mathcal{B}_{i_1 i_2 \dots i_p} \\ &= (\mathcal{A}\mathcal{C})\mathcal{B}. \end{aligned}$$

故命题得证. $\square$

命题 3.3 令 $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_{i_1 \dots i_m}) \in \mathbb{R}^{[m,n]}$, $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_{i_1 \dots i_p}) \in \mathbb{R}^{[p,n]}$, $\mathcal{C} = (\mathcal{C}_{i_1 \dots i_p}) \in \mathbb{R}^{[p,n]}$, 且 $m > 2p$. 若对于所有的 $i_l, j_s, k_t \in [n]$ ($l \in [m - 2p]$, $s \in [p]$, $t \in [p]$), 都有 $\mathcal{A}_{i_1 \dots i_{m-2p} j_1 \dots j_p k_1 \dots k_p} = \mathcal{A}_{i_1 \dots i_{m-2p} k_1 \dots k_p j_1 \dots j_p}$, 则 $(\mathcal{A}\mathcal{B})\mathcal{C} = (\mathcal{A}\mathcal{C})\mathcal{B}$.

证明 结合命题的条件和定义 2.1 可得, 对于任意的 $i_l \in [n]$ ($l \in [m - 2p]$), 有

$$\begin{aligned} ((\mathcal{A}\mathcal{B})\mathcal{C})_{i_1 \dots i_{m-2p}} &= \sum_{j_1, \dots, j_p=1}^n \left(\sum_{k_1, \dots, k_p=1}^n \mathcal{A}_{i_1 \dots i_{m-2p} j_1 \dots j_p k_1 \dots k_p} \mathcal{B}_{k_1 \dots k_p} \right) \mathcal{C}_{j_1 \dots j_p} \\ &= \sum_{j_1, \dots, j_p=1}^n \left(\sum_{k_1, \dots, k_p=1}^n \mathcal{A}_{i_1 \dots i_{m-2p} k_1 \dots k_p j_1 \dots j_p} \mathcal{B}_{k_1 \dots k_p} \right) \mathcal{C}_{j_1 \dots j_p} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k_1, \dots, k_p=1}^n \left(\sum_{j_1, \dots, j_p=1}^n \mathcal{A}_{i_1 \dots i_{m-2p} k_1 \dots k_p j_1 \dots j_p} \mathcal{C}_{j_1 \dots j_p} \right) \mathcal{B}_{k_1 \dots k_p} \\
&= ((\mathcal{A}\mathcal{C})\mathcal{B})_{i_1 \dots i_{m-2p}}.
\end{aligned}$$

故命题得证. $\square$

命题 3.4 令 $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_{i_1 i_2 \dots i_{2m}}) \in \mathbb{R}^{[2m, n]}$ 且 $\mathcal{X} = (\mathcal{X}_{i_1 i_2 \dots i_m}) \in \mathbb{R}^{[m, n]}$. 若对于所有的 $i_k, j_l \in [n]$ ($k, l \in [m]$), 都有 $\mathcal{A}_{i_1 i_2 \dots i_m j_1 j_2 \dots j_m} = \mathcal{A}_{j_1 j_2 \dots j_m i_1 i_2 \dots i_m}$, 则 $\mathcal{A}\mathcal{X} = \mathcal{A} * \mathcal{X}$, 其中符号 $*$ 的定义见注 2.1.

证明 结合命题的条件和定义 2.1 可得, 对于任意的 $i_k \in [n]$ ($k \in [m]$), 有

$$\begin{aligned}
(\mathcal{A}\mathcal{X})_{i_1 i_2 \dots i_m} &= \sum_{j_1, j_2, \dots, j_m=1}^n \mathcal{A}_{i_1 i_2 \dots i_m j_1 j_2 \dots j_m} \mathcal{X}_{j_1 j_2 \dots j_m} \\
&= \sum_{j_1, j_2, \dots, j_m=1}^n \mathcal{A}_{j_1 j_2 \dots j_m i_1 i_2 \dots i_m} \mathcal{X}_{j_1 j_2 \dots j_m} = (\mathcal{A} * \mathcal{X})_{i_1 i_2 \dots i_m}.
\end{aligned}$$

故命题得证. $\square$

推论 3.1 在命题 3.4 的条件下, 有 $\nabla[\mathcal{X}(\mathcal{A}\mathcal{X})] = 2\mathcal{A}\mathcal{X}$, 其中 ∇ 表示梯度映射.

证明 由梯度映射的定义, 对于任意的 $\hat{i}_k \in [n]$ ($k \in [m]$), 有

$$\begin{aligned}
(\nabla[\mathcal{X}(\mathcal{A}\mathcal{X})])_{\hat{i}_1 \dots \hat{i}_m} &= \frac{\partial[\sum_{i_1, \dots, i_m=1}^n \mathcal{X}_{i_1 \dots i_m} (\sum_{j_1, \dots, j_m=1}^n \mathcal{A}_{i_1 \dots i_m j_1 \dots j_m} \mathcal{X}_{j_1 \dots j_m})]}{\partial \mathcal{X}_{\hat{i}_1 \dots \hat{i}_m}} \\
&= \sum_{j_1, \dots, j_m=1}^n \mathcal{A}_{\hat{i}_1 \dots \hat{i}_m j_1 \dots j_m} \mathcal{X}_{j_1 \dots j_m} + \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^n \mathcal{X}_{i_1 \dots i_m} \mathcal{A}_{i_1 \dots i_m \hat{i}_1 \dots \hat{i}_m} \\
&= (\mathcal{A}\mathcal{X})_{\hat{i}_1 \dots \hat{i}_m} + (\mathcal{A} * \mathcal{X})_{\hat{i}_1 \dots \hat{i}_m},
\end{aligned}$$

即 $\nabla[\mathcal{X}(\mathcal{A}\mathcal{X})] = \mathcal{A}\mathcal{X} + \mathcal{A} * \mathcal{X}$. 再由命题 3.4, 可得推论成立. $\square$

注 3.2 若 $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{[m, n]}$ 中元素的值在下标任意置换下保持不变, 则称 $\mathcal{A}$ 是对称的. 显然, 如果 $\mathcal{A}$ 是对称的, 则命题 3.2–3.4 和推论 3.1 中有关 $\mathcal{A}$ 的块对称性要求都满足, 相关结果也都成立.

给定 $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{[m, n]}$ 和 $k \in [n]$, 若对于任意的 $i_j \in [k]$ ($j \in [m]$), 都有 $\mathcal{A}_{i_1 i_2 \dots i_m}^{(k)} = \mathcal{A}_{i_1 i_2 \dots i_m}$, 则称 $\mathcal{A}^{(k)} = (\mathcal{A}_{i_1 i_2 \dots i_m}^{(k)})$ 是 $\mathcal{A}$ 的第 k 阶顺序主子张量. 下面的结论给出对称 (半) 正定张量的必要性条件.

命题 3.5 若 $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{[2m, n]}$ 是对称 (半) 正定的, 则其任意偶数阶顺序主子张量也是 (半) 正定的.

证明 设 $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{[2m, n]}$ 是对称半正定的, 则对于任意一个 $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{[m, n]}$, 都有 $\mathcal{X}(\mathcal{A}\mathcal{X}) \geq 0$. 对于任意的 $k \in [n]$, 令 $\mathcal{A}^{(2k)}$ 表示 $\mathcal{A}$ 的第 $2k$ 阶顺序主子张量, 且 $\mathcal{X}^{(k)}$ 表示 $\mathcal{X}$ 的第 k 阶顺序主子张量. 由 $\mathcal{X}$ 的任意性, 可取 $\mathcal{X}$ 中除 $\mathcal{X}^{(k)}$ 的元素外所有其他元素为 0, 则有

$$\mathcal{X}^{(k)}(\mathcal{A}^{(2k)}\mathcal{X}^{(k)}) = \mathcal{X}(\mathcal{A}\mathcal{X}) \geq 0.$$

这表明 $\mathcal{A}^{(2k)}$ 是半正定的. $\mathcal{A}$ 是对称正定的情形, 证明过程类似. 故命题得证. $\square$

下面结合对角张量特别是单位张量来讨论 $J(p)$ 模式乘积的性质.

定义 3.1 令 $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_{i_1 i_2 \dots i_m}) \in \mathbb{R}^{[m, n]}$. 如果元素 $\mathcal{A}_{i_1 i_2 \dots i_m}$ 的下标满足 $i_1 = i_2 = \dots = i_m$, 则称 $\mathcal{A}_{i_1 i_2 \dots i_m}$ 是 $\mathcal{A}$ 的一个对角元. 如果 $\mathcal{A}$ 除对角元外其他的元素都为 0, 则称 $\mathcal{A}$ 是一个对角张量.

定义 3.2 如果 $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{[m, n]}$ 是一个对角张量且每一个对角元都等于 1, 则称 $\mathcal{A}$ 是一个单位张量.

以下用 $\mathcal{I}_{m,n}$ 来表示 m 阶 n 维的单位张量.

注 3.3 令 $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{[m,n]}$ 且 $q > m \geq p$. 由定义 2.1 可得 $\mathcal{A}\mathcal{I}_{p,n}$ 的阶数小于 $\mathcal{A}$ 的阶数, 故 $\mathcal{A}\mathcal{I}_{p,n} \neq \mathcal{A}$. 此外, 因 $\mathcal{I}_{q,n}$ 是一个单位张量, 故对于任意的 $j \in [n]$, 都有

$$(\mathcal{I}_{q,n}\mathcal{A})_{jj\dots j} = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_m=1}^n (\mathcal{I}_{q,n})_{jj\dots j i_1 i_2 \dots i_m} \mathcal{A}_{i_1 i_2 \dots i_m} = \mathcal{A}_{jj\dots j}.$$

因此, $\mathcal{I}_{q,n}\mathcal{A}$ 是一个 $q-m$ 阶 n 维对角张量且 $\mathcal{I}_{q,n}\mathcal{A}$ 的 n 个对角元等于 $\mathcal{A}$ 的 n 个对角元.

命题 3.6 令 $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_{i_1 i_2 \dots i_m}) \in \mathbb{R}^{[m,n]}$ 且 $q > m > p$. 若 $\mathcal{A}\mathcal{I}_{p,n} = \mathcal{O}$, 则对于所有的 $i_k \in [n]$ ($k \in [m-p]$), 都有 $\sum_{i=1}^n \mathcal{A}_{i_1 i_2 \dots i_{m-p} i i \dots i} = 0$. 若 $\mathcal{I}_{q,n}\mathcal{A} = \mathcal{O}$, 则对于所有的 $j \in [n]$, 都有 $\mathcal{A}_{jj\dots j} = 0$.

证明 由命题的条件, 对于任意的 $i_k \in [n]$ ($k \in [m-p]$), 有

$$0 = (\mathcal{A}\mathcal{I}_{p,n})_{i_1 i_2 \dots i_{m-p}} = \sum_{j_1, j_2, \dots, j_p=1}^n \mathcal{A}_{i_1 i_2 \dots i_{m-p} j_1 j_2 \dots j_p} (\mathcal{I}_{p,n})_{j_1 j_2 \dots j_p} = \sum_{i=1}^n \mathcal{A}_{i_1 i_2 \dots i_{m-p} i i \dots i}.$$

此外, 结合注 3.3, 对于所有的 $j \in [n]$, 有

$$0 = (\mathcal{I}_{q,n}\mathcal{A})_{jj\dots j} = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_m=1}^n (\mathcal{I}_{q,n})_{jj\dots j i_1 i_2 \dots i_m} \mathcal{A}_{i_1 i_2 \dots i_m} = \mathcal{A}_{jj\dots j}.$$

故命题得证. □

注 3.4 由 $\mathcal{I}_{q,n}\mathcal{A} = \mathcal{O}$ 或 $\mathcal{A}\mathcal{I}_{p,n} = \mathcal{O}$ 不能推出 $\mathcal{A} = \mathcal{O}$.

下面讨论 $J(p)$ 模式乘积与分块张量相关的一个性质.

命题 3.7 令 $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{[m,n]}$, $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{[p,n]}$, 且 $m > p$. 设 $\mathcal{A}$ 可分解成两个子张量块 $\mathcal{A}^1$ 和 $\mathcal{A}^2$, 其中 $\mathcal{A}^1$ 是一个 m 阶 $n \times \dots \times n \times l \times \dots \times l$ 维张量 (后 p 个维数为 l) 且 $\mathcal{A}^2$ 是一个 m 阶 $n \times \dots \times n \times (n-l) \times \dots \times (n-l)$ 维张量 (后 p 个维数为 $n-l$). 设 $\mathcal{B}$ 也可分解为两个子张量块 $\mathcal{B}^1 \in \mathbb{R}^{[p,l]}$ 和 $\mathcal{B}^2 \in \mathbb{R}^{[p,n-l]}$, 则 $\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{A}^1\mathcal{B}^1 + \mathcal{A}^2\mathcal{B}^2$.

证明 根据命题中的条件和定义 2.1, 对于任意的 $i_l \in [n]$ ($l \in [m-p]$), 都有

$$\begin{aligned} & (\mathcal{A}\mathcal{B})_{i_1 i_2 \dots i_{m-p}} \\ &= \sum_{j_1, j_2, \dots, j_p=1}^n \mathcal{A}_{i_1 i_2 \dots i_{m-p} j_1 j_2 \dots j_p} \mathcal{B}_{j_1 j_2 \dots j_p} \\ &= \sum_{j_1, j_2, \dots, j_p=1}^l \mathcal{A}_{i_1 i_2 \dots i_{m-p} j_1 j_2 \dots j_p} \mathcal{B}_{j_1 j_2 \dots j_p} + \sum_{j_1, j_2, \dots, j_p=l}^n \mathcal{A}_{i_1 i_2 \dots i_{m-p} j_1 j_2 \dots j_p} \mathcal{B}_{j_1 j_2 \dots j_p} \\ &= \sum_{j_1, j_2, \dots, j_p=1}^l (\mathcal{A}^1)_{i_1 i_2 \dots i_{m-p} j_1 j_2 \dots j_p} (\mathcal{B}^1)_{j_1 j_2 \dots j_p} + \sum_{k_1, k_2, \dots, k_p=1}^{n-l} (\mathcal{A}^2)_{i_1 i_2 \dots i_{m-p} k_1 k_2 \dots k_p} (\mathcal{B}^2)_{k_1 k_2 \dots k_p} \\ &= (\mathcal{A}^1\mathcal{B}^1 + \mathcal{A}^2\mathcal{B}^2)_{i_1 i_2 \dots i_{m-p}}. \end{aligned}$$

故命题得证. □

两个 m 阶 n 维实张量 $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_{i_1 i_2 \dots i_m})$ 和 $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_{i_1 i_2 \dots i_m})$ 的 Hadamard 乘积定义为

$$\mathcal{A} \odot \mathcal{B} := (\mathcal{A}_{i_1 i_2 \dots i_m} \mathcal{B}_{i_1 i_2 \dots i_m}) \in \mathbb{R}^{[m,n]}, \quad \forall i_k \in [n], \quad \forall k \in [m].$$

注 3.5 令 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{C}$ 是 m 阶 n 维实张量, $\mathcal{B}$ 和 $\mathcal{D}$ 是 p 阶 n 维实张量, 且 $m \geq p$, 则有

$$(\mathcal{A}\mathcal{B}) \odot (\mathcal{C}\mathcal{D}) \neq (\mathcal{A} \odot \mathcal{C})(\mathcal{B} \odot \mathcal{D}).$$

事实上, 对于任意的 $i_l \in [n]$ ($\forall l \in [m-p]$), 都有元素

$$((\mathcal{A} \odot \mathcal{C})(\mathcal{B} \odot \mathcal{D}))_{i_1 i_2 \dots i_{m-p}} = \sum_{j_1, j_2, \dots, j_p=1}^n \mathcal{A}_{i_1 i_2 \dots i_{m-p} j_1 j_2 \dots j_p} \mathcal{C}_{i_1 i_2 \dots i_{m-p} j_1 j_2 \dots j_p} \mathcal{B}_{j_1 j_2 \dots j_p} \mathcal{D}_{j_1 j_2 \dots j_p}$$

是 n^p 项乘积元素的求和, 且元素

$$\begin{aligned} & ((\mathcal{A}\mathcal{B}) \odot (\mathcal{C}\mathcal{D}))_{i_1 i_2 \dots i_{m-p}} \\ &= (\mathcal{A}\mathcal{B})_{i_1 i_2 \dots i_{m-p}} (\mathcal{C}\mathcal{D})_{i_1 i_2 \dots i_{m-p}} \\ &= \left(\sum_{j_1, j_2, \dots, j_p=1}^n \mathcal{A}_{i_1 i_2 \dots i_{m-p} j_1 j_2 \dots j_p} \mathcal{B}_{j_1 j_2 \dots j_p} \right) \left(\sum_{k_1, k_2, \dots, k_p=1}^n \mathcal{C}_{i_1 \dots i_{m-p} k_1 \dots k_p} \mathcal{D}_{k_1 \dots k_p} \right) \end{aligned}$$

是 $(n^p)^2$ 项乘积元素的求和. 因此, $(\mathcal{A}\mathcal{B}) \odot (\mathcal{C}\mathcal{D})$ 和 $(\mathcal{A} \odot \mathcal{C})(\mathcal{B} \odot \mathcal{D})$ 的对应元素一般不等.

4 张量线性互补问题

4.1 基本模型和基本理论

借助于 $J(p)$ 模式乘积, 定义张量线性互补问题如下:

定义 4.1 令 $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{[2m, n]}$ 和 $\mathcal{Q} \in \mathbb{R}^{[m, n]}$. 张量线性互补问题就是寻找一个张量 $\mathcal{X} \in \mathbb{R}_+^{[m, n]}$ 使得

$$\mathcal{A}\mathcal{X} + \mathcal{Q} \in \mathbb{R}_+^{[m, n]} \quad \text{且} \quad \langle \mathcal{A}\mathcal{X} + \mathcal{Q}, \mathcal{X} \rangle = 0.$$

以下将此问题记作 $\text{LCP}(\mathcal{A}, \mathcal{Q})$, 并且将其解集记为 $\text{SOL}(\mathcal{A}, \mathcal{Q})$.

类似于文献 [54] 中函数单调性与凸性关系的证明, 可得如下结论:

引理 4.1 令 $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{R}^{[m, n]}$, 则映射 $F: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{R}^{[m, n]}$ 在 $\mathbb{K}$ 上是凸的当且仅当 ∇F 在 $\mathbb{K}$ 上是单调的.

命题 4.1 令 $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{[2m, n]}$ 且 $\mathcal{Q} \in \mathbb{R}^{[m, n]}$. 若 $\mathcal{A}$ 是对称半正定的, 则 $\text{LCP}(\mathcal{A}, \mathcal{Q})$ 等价于以下优化问题:

$$\min F(\mathcal{X}) = \frac{1}{2} \mathcal{X}(\mathcal{A}\mathcal{X}) + \mathcal{Q}\mathcal{X} \quad \text{s.t.} \quad \mathcal{X} \in \mathbb{R}_+^{[m, n]}. \quad (4.1)$$

证明 由 $(\nabla(\mathcal{Q}\mathcal{X}))_{i_1 i_2 \dots i_m} = \partial(\mathcal{Q}\mathcal{X})/\partial \mathcal{X}_{i_1 i_2 \dots i_m} = \mathcal{Q}_{i_1 i_2 \dots i_m}$ 可知, $\nabla(\mathcal{Q}\mathcal{X}) = \mathcal{Q}$. 结合推论 3.1 可得, 对于任意的 $\mathcal{X} \in \mathbb{R}_+^{[m, n]}$, 都有 $\nabla F(\mathcal{X}) = \mathcal{A}\mathcal{X} + \mathcal{Q}$. 一方面, 设 $\hat{\mathcal{X}}$ 是问题 (4.1) 的一个最优解, 则由问题 (4.1) 的 KKT (Karush-Kuhn-Tucker) 条件可得, 存在 $\mathcal{Y} \in \mathbb{R}_+^{[m, n]}$ 使得 $\mathcal{A}\hat{\mathcal{X}} + \mathcal{Q} - \mathcal{Y} = \mathcal{O}$ 且 $\langle \hat{\mathcal{X}}, \mathcal{Y} \rangle = 0$. 故 $\hat{\mathcal{X}} \in \text{SOL}(\mathcal{A}, \mathcal{Q})$. 另一方面, 设 $\hat{\mathcal{X}} \in \text{SOL}(\mathcal{A}, \mathcal{Q})$, 则 $\hat{\mathcal{X}}$ 满足问题 (4.1) 的 KKT 条件. 由于 $\mathcal{A}$ 是半正定的, 所以, 对于任意的 $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \in \mathbb{R}^{[m, n]}$, 都有

$$\langle \nabla F(\mathcal{Y}) - \nabla F(\mathcal{X}), \mathcal{Y} - \mathcal{X} \rangle = \langle \mathcal{A}(\mathcal{Y} - \mathcal{X}), \mathcal{Y} - \mathcal{X} \rangle = (\mathcal{Y} - \mathcal{X})[\mathcal{A}(\mathcal{Y} - \mathcal{X})] \geq 0.$$

因此, ∇F 是单调的. 进一步, 由引理 4.1 可得 F 是凸的. 因此, $\hat{\mathcal{X}}$ 是问题 (4.1) 的一个最优解. 综上所述, $\text{LCP}(\mathcal{A}, \mathcal{Q})$ 等价于问题 (4.1). $\square$

定义 4.2 若存在 $\mathcal{X} \in \mathbb{R}_+^{[m,n]}$ 使得 $\mathcal{A}\mathcal{X} + \mathcal{Q} \in \mathbb{R}_+^{[m,n]}$, 则称 $\text{LCP}(\mathcal{A}, \mathcal{Q})$ 是可行的. 若存在 $\mathcal{X} \in \mathbb{R}_{++}^{[m,n]}$ 使得 $\mathcal{A}\mathcal{X} + \mathcal{Q} \in \mathbb{R}_{++}^{[m,n]}$, 则称 $\text{LCP}(\mathcal{A}, \mathcal{Q})$ 是严格可行的.

注 4.1 容易得到存在 $\mathcal{X} \in \mathbb{R}_{++}^{[m,n]}$ 使得 $\mathcal{A}\mathcal{X} \in \mathbb{R}_{++}^{[m,n]}$ 当且仅当存在 $\mathcal{Z} \in \mathbb{R}_+^{[m,n]}$ 使得 $\mathcal{A}\mathcal{Z} \in \mathbb{R}_{++}^{[m,n]}$. 事实上, 一方面, 显然, 前者可推出后者. 另一方面, 设后者成立, 即存在 $\mathcal{Z}^0 \in \mathbb{R}_+^{[m,n]}$ 使得 $\mathcal{A}\mathcal{Z}^0 \in \mathbb{R}_{++}^{[m,n]}$. 令 $\mathcal{E}_{mn}$ 表示每个元素都为 1 的 m 阶 n 维张量. 因 $\mathcal{A}\mathcal{Z}$ 在张量 $\mathcal{Z}^0$ 处连续, 则存在充分小的正标量 λ , 使得 $\mathcal{Z}^0 + \lambda\mathcal{E}_{mn} \in \mathbb{R}_{++}^{[m,n]}$ 且 $\mathcal{A}(\mathcal{Z}^0 + \lambda\mathcal{E}_{mn}) \in \mathbb{R}_{++}^{[m,n]}$. 由此可推出前者成立.

问题 (4.1) 是张量空间上的二次规划问题. 类似于文献 [55, 定理 2.1], 可证明 Frank-Wolfe 定理成立.

命题 4.2 令 $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{[2m,n]}$ 和 $\mathcal{Q} \in \mathbb{R}^{[m,n]}$. 若 $\mathcal{A}$ 是对称半正定的且 $\text{LCP}(\mathcal{A}, \mathcal{Q})$ 是可行的, 则它是可解的.

证明 由命题 4.1 的证明知, $\frac{1}{2}\mathcal{X}(\mathcal{A}\mathcal{X}) + \mathcal{Q}\mathcal{X}$ 是凸的, 所以, (4.1) 是一个凸二次规划问题. 由于 $\mathcal{A}$ 是半正定的且 $\mathcal{X} \in \mathbb{R}_+^{[m,n]}$, 所以, $\frac{1}{2}\mathcal{X}(\mathcal{A}\mathcal{X}) + \mathcal{Q}\mathcal{X}$ 必存在一个下界. 又由于 $\text{LCP}(\mathcal{A}, \mathcal{Q})$ 是可行的, 所以, 由 Frank-Wolfe 定理可得问题 (4.1) 有最优解. 再结合命题 4.1, 有 $\text{SOL}(\mathcal{A}, \mathcal{Q}) \neq \emptyset$. 故命题得证. $\square$

命题 4.3 $\text{LCP}(\mathcal{A}, \mathcal{O})$ 是严格可行的当且仅当对于任意的 $\mathcal{Q} \in \mathbb{R}^{[m,n]}$, $\text{LCP}(\mathcal{A}, \mathcal{Q})$ 都是可行的.

证明 充分性 设对于任意的 $\mathcal{Q} \in \mathbb{R}^{[m,n]}$, $\text{LCP}(\mathcal{A}, \mathcal{Q})$ 都是可行的. 特别地, 取 $\mathcal{Q}^0 \in \mathbb{R}^{[m,n]}$ 且满足 $-\mathcal{Q}^0 \in \mathbb{R}_{++}^{[m,n]}$. 对于 $\text{LCP}(\mathcal{A}, \mathcal{Q}^0)$ 的任意一个可行解 $\mathcal{Z}$, 都有 $\mathcal{Z} \in \mathbb{R}_+^{[m,n]}$ 且 $\mathcal{A}\mathcal{Z} + \mathcal{Q}^0 \in \mathbb{R}_+^{[m,n]}$, 故 $\mathcal{A}\mathcal{Z} \geq -\mathcal{Q}^0 \in \mathbb{R}_{++}^{[m,n]}$. 再结合注 4.1, 可推出 $\text{LCP}(\mathcal{A}, \mathcal{O})$ 是严格可行的.

必要性 设 $\text{LCP}(\mathcal{A}, \mathcal{O})$ 是严格可行的, 则存在 $\mathcal{Z} \in \mathbb{R}_{++}^{[m,n]}$ 使得 $\mathcal{A}\mathcal{Z} \in \mathbb{R}_{++}^{[m,n]}$. 对于任意给定的 $\mathcal{Q}^0 \in \mathbb{R}^{[m,n]}$, 都能找到充分大的正标量 λ , 使得 $\lambda\mathcal{Z} \in \mathbb{R}_{++}^{[m,n]}$ 且满足 $\mathcal{A}(\lambda\mathcal{Z}) = \lambda(\mathcal{A}\mathcal{Z}) \geq -\mathcal{Q}^0$, 即 $\mathcal{A}(\lambda\mathcal{Z}) + \mathcal{Q}^0 \in \mathbb{R}_+^{[m,n]}$. 因此, $\text{LCP}(\mathcal{A}, \mathcal{Q}^0)$ 是可行的. $\square$

命题 4.4 若 $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{[2m,n]}$ 是正定的, 则对于任意的 $\mathcal{Q} \in \mathbb{R}^{[m,n]}$, $\text{LCP}(\mathcal{A}, \mathcal{Q})$ 都是严格可行的.

证明 采用反证法. 设 $\text{LCP}(\mathcal{A}, \mathcal{Q})$ 不是严格可行的, 即不存在 $\mathcal{X} \in \mathbb{R}_{++}^{[m,n]}$ 使得 $\mathcal{A}\mathcal{X} + \mathcal{Q} \in \mathbb{R}_{++}^{[m,n]}$, 则存在 $\mathcal{Z} \in \mathbb{R}_{++}^{[m,n]}$ 使得 $\mathcal{A}\mathcal{Z} + \mathcal{Q} \in \mathbb{R}^{[m,n]} \setminus \mathbb{R}_{++}^{[m,n]}$. 由此可推出 $\langle \mathcal{A}\mathcal{Z}, \mathcal{Z} \rangle \leq -\mathcal{Q}\mathcal{Z} \leq 0$, 这与 $\mathcal{A}$ 的正定性矛盾. 故 $\text{LCP}(\mathcal{A}, \mathcal{Q})$ 是严格可行的. $\square$

命题 4.5 给定 $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{[2m,n]}$ 和 $\mathcal{Q} \in \mathbb{R}^{[m,n]}$, 则下面两个结论是等价的:

- (i) $\text{SOL}(\mathcal{A}, \mathcal{Q})$ 是凸集;
- (ii) 对于任意两个 $\mathcal{X}^1, \mathcal{X}^2 \in \text{SOL}(\mathcal{A}, \mathcal{Q})$, 都有 $\langle \mathcal{X}^1, \mathcal{A}\mathcal{X}^2 + \mathcal{Q} \rangle = \langle \mathcal{X}^2, \mathcal{A}\mathcal{X}^1 + \mathcal{Q} \rangle = 0$.

证明 (i) $\Rightarrow$ (ii). 设 $\text{SOL}(\mathcal{A}, \mathcal{Q})$ 是凸集, 且 $\mathcal{X}^1$ 和 $\mathcal{X}^2$ 是 $\text{LCP}(\mathcal{A}, \mathcal{Q})$ 的任意两个解. 对于任意的 $\lambda \in (0, 1)$, 令 $\mathcal{X} = \lambda\mathcal{X}^1 + (1 - \lambda)\mathcal{X}^2$, 则由解集的凸性可得 $\mathcal{X} \in \text{SOL}(\mathcal{A}, \mathcal{Q})$. 因此, 结合命题 2.1 和 $\langle \mathcal{X}^1, \mathcal{A}\mathcal{X}^1 + \mathcal{Q} \rangle = \langle \mathcal{X}^2, \mathcal{A}\mathcal{X}^2 + \mathcal{Q} \rangle = 0$, 有

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \mathcal{X}, \mathcal{A}\mathcal{X} + \mathcal{Q} \rangle = \langle \lambda\mathcal{X}^1 + (1 - \lambda)\mathcal{X}^2, \mathcal{A}[\lambda\mathcal{X}^1 + (1 - \lambda)\mathcal{X}^2] + \mathcal{Q} \rangle \\ &= \lambda(1 - \lambda)(\langle \mathcal{X}^1, \mathcal{A}\mathcal{X}^2 + \mathcal{Q} \rangle + \langle \mathcal{X}^2, \mathcal{A}\mathcal{X}^1 + \mathcal{Q} \rangle), \end{aligned}$$

由此可得 $\langle \mathcal{X}^1, \mathcal{A}\mathcal{X}^2 + \mathcal{Q} \rangle + \langle \mathcal{X}^2, \mathcal{A}\mathcal{X}^1 + \mathcal{Q} \rangle = 0$. 此外, 由于 $\mathcal{X}^1, \mathcal{X}^2 \in \text{SOL}(\mathcal{A}, \mathcal{Q})$, 故有

$$\langle \mathcal{X}^1, \mathcal{A}\mathcal{X}^2 + \mathcal{Q} \rangle \geq 0 \quad \text{且} \quad \langle \mathcal{X}^2, \mathcal{A}\mathcal{X}^1 + \mathcal{Q} \rangle \geq 0.$$

综上, 可推出 $\langle \mathcal{X}^1, \mathcal{A}\mathcal{X}^2 + \mathcal{Q} \rangle = \langle \mathcal{X}^2, \mathcal{A}\mathcal{X}^1 + \mathcal{Q} \rangle = 0$.

(ii) $\Rightarrow$ (i). 上述 (i) $\Rightarrow$ (ii) 的证明过程逆推依然成立. 故命题得证. $\square$

命题 4.6 给定 $A \in \mathbb{R}^{[2m,n]}$ 和 $Q \in \mathbb{R}^{[m,n]}$. 若 A 是半正定的, 则下列结论是正确的:

(i) 对于任意两个 $x^1, x^2 \in \text{SOL}(A, Q)$, 都有 $\langle x^1, Ax^2 + Q \rangle = \langle x^2, Ax^1 + Q \rangle = 0$;

(ii) 若 A 是对称的, 则对于任意两个 $x^1, x^2 \in \text{SOL}(A, Q)$, 都有 $Ax^1 = Ax^2$.

证明 (i) 由于 x^1 和 x^2 是 $\text{LCP}(A, Q)$ 的两个解, 所以, $\langle x^1, Ax^2 + Q \rangle \geq 0$, $\langle x^2, Ax^1 + Q \rangle \geq 0$, $\langle x^1, Ax^1 + Q \rangle = \langle x^2, Ax^2 + Q \rangle = 0$. 再结合 A 的半正定性和命题 2.1, 可推出

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle x^1 - x^2, A(x^1 - x^2) \rangle \\ &= \langle x^1 - x^2, Ax^1 + Q - (Ax^2 + Q) \rangle \\ &= \langle x^1, Ax^1 + Q \rangle - \langle x^1, Ax^2 + Q \rangle - \langle x^2, Ax^1 + Q \rangle + \langle x^2, Ax^2 + Q \rangle \\ &= -\langle x^1, Ax^2 + Q \rangle - \langle x^2, Ax^1 + Q \rangle \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

因此, $\langle x^1, Ax^2 + Q \rangle = \langle x^2, Ax^1 + Q \rangle = 0$.

(ii) 对于 $\text{LCP}(A, Q)$ 的任意一个解 x 和 $\text{LCP}(A, Q)$ 的一个任意给定的解 x^1 , 由 (i) 的证明可推出 $\langle x - x^1, A(x - x^1) \rangle \equiv 0$. 将 $\langle x - x^1, A(x - x^1) \rangle$ 看成一个以 x 为变量的函数, 结合 A 的对称性, 由推论 3.1 可推出该函数相对于 x 的梯度始终为 O , 即

$$O = \nabla[\langle x - x^1, A(x - x^1) \rangle] = 2A(x - x^1).$$

因此, $Ax = Ax^1$. 再利用 x^1 的任意性可得, 对于 $\text{LCP}(A, Q)$ 的任意两个解 x^1 和 x^2 , 都有 $Ax^1 = Ax^2$. 故命题得证. $\square$

推论 4.1 给定 $A \in \mathbb{R}^{[2m,n]}$ 和 $Q \in \mathbb{R}^{[m,n]}$. 若 A 是半正定的, 则 $\text{SOL}(A, Q)$ 是凸集.

证明 此结论可以由命题 4.5 和 4.6(i) 推出. $\square$

4.2 求解 $\text{LCP}(A, Q)$ 的外梯度法

借鉴文献 [56] 中改进的 Tseng 外梯度法 (extragradient method), 提出算法 1.

算法 1 求解 $\text{LCP}(A, Q)$ 的外梯度法

初始化: 给定标量 $\alpha > 1$, 且令 $\tau := \frac{1}{\alpha \|A\|}$. 任取初始迭代点 $x^0 \in \mathbb{R}_+^{[m,n]}$. 令 $k := 0$.

第 1 步: 计算 $y^k = \Pi_{\mathbb{R}_+^{[m,n]}}[x^k - \tau(Ax^k + Q)]$. 若 $y^k = x^k$, 则停止. 否则, 转到第 2 步.

第 2 步: 计算 $x^{k+1} = y^k - \tau A(y^k - x^k)$. 令 $k := k + 1$, 返回到第 1 步.

以下用 $\mathcal{K}$ 来表示迭代指标的集合.

引理 4.2 令 $\mathbb{K}$ 是 $\mathbb{R}^{[m,n]}$ 的一个非空闭凸子集, 则对于任意的 $z \in \mathbb{K}$, 都有

$$\langle z - \Pi_{\mathbb{K}}(x), \Pi_{\mathbb{K}}(x) - x \rangle \geq 0.$$

命题 4.7 令 A 是半正定的且序列 $\{x^k\}$ 由算法 1 产生, 则对于任意的 $\hat{x} \in \text{SOL}(A, Q)$, 都有

$$\|x^{k+1} - \hat{x}\|^2 \leq \|x^k - \hat{x}\|^2 - \left(1 - \frac{1}{\alpha^2}\right) \|x^k - y^k\|^2, \quad \forall k \in \mathcal{K}. \quad (4.2)$$

证明 从算法 1 的第 1 步知, 对任意的 $k \in \mathcal{K}$, 都有 $\mathcal{Y}^k = \Pi_{\mathbb{R}_+^{[m,n]}}[\mathcal{X}^k - \tau(\mathcal{A}\mathcal{X}^k + \mathcal{Q})]$. 故由 $\hat{\mathcal{X}} \in \text{SOL}(\mathcal{A}, \mathcal{Q})$ 和引理 4.2 得

$$\langle \hat{\mathcal{X}} - \mathcal{Y}^k, \mathcal{Y}^k - [\mathcal{X}^k - \tau(\mathcal{A}\mathcal{X}^k + \mathcal{Q})] \rangle \geq 0, \quad \forall k \in \mathcal{K},$$

即

$$\langle \mathcal{Y}^k - \hat{\mathcal{X}}, \mathcal{X}^k - \mathcal{Y}^k \rangle \geq \tau \langle \mathcal{Y}^k - \hat{\mathcal{X}}, \mathcal{A}\mathcal{X}^k + \mathcal{Q} \rangle, \quad \forall k \in \mathcal{K}. \quad (4.3)$$

对任意的 m 阶 $n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_m$ 维张量 $\mathcal{A}$ 和 p 阶 $\hat{n}_1 \times \hat{n}_2 \times \cdots \times \hat{n}_p$ 维张量 $\mathcal{B}$ (其中 m 和 p 满足 $p \leq m$), 若 $\mathcal{AB}$ 是适定的, 则由 (2.1) 有

$$\begin{aligned} \|\mathcal{AB}\|^2 &= \sum_{i_1=1}^{n_1} \sum_{i_2=1}^{n_2} \cdots \sum_{i_{m-p}=1}^{n_{m-p}} \left(\sum_{j_1=1}^{\hat{n}_1} \sum_{j_2=1}^{\hat{n}_2} \cdots \sum_{j_p=1}^{\hat{n}_p} \mathcal{A}_{i_1 \cdots i_{m-p} j_1 \cdots j_p} \mathcal{B}_{j_1 j_2 \cdots j_p} \right)^2 \\ &\leq \sum_{i_1=1}^{n_1} \cdots \sum_{i_{m-p}=1}^{n_{m-p}} \left(\sum_{j_1=1}^{\hat{n}_1} \sum_{j_2=1}^{\hat{n}_2} \cdots \sum_{j_p=1}^{\hat{n}_p} \mathcal{A}_{i_1 \cdots i_{m-p} j_1 \cdots j_p}^2 \right) \left(\sum_{j_1=1}^{\hat{n}_1} \sum_{j_2=1}^{\hat{n}_2} \cdots \sum_{j_p=1}^{\hat{n}_p} \mathcal{B}_{j_1 j_2 \cdots j_p}^2 \right) \\ &\leq \left(\sum_{i_1=1}^{n_1} \sum_{i_2=1}^{n_2} \cdots \sum_{i_m=1}^{n_m} \mathcal{A}_{i_1 i_2 \cdots i_m}^2 \right) \left(\sum_{j_1=1}^{\hat{n}_1} \sum_{j_2=1}^{\hat{n}_2} \cdots \sum_{j_p=1}^{\hat{n}_p} \mathcal{B}_{j_1 j_2 \cdots j_p}^2 \right) \\ &= \|\mathcal{A}\|^2 \|\mathcal{B}\|^2. \end{aligned}$$

因此, $\|\mathcal{AB}\| \leq \|\mathcal{A}\| \|\mathcal{B}\|$. 利用这一结论可得

$$\|\mathcal{A}(\mathcal{Y}^k - \mathcal{X}^k)\|^2 \leq \|\mathcal{A}\|^2 \|\mathcal{Y}^k - \mathcal{X}^k\|^2, \quad \forall k \in \mathcal{K}. \quad (4.4)$$

因为 $\mathcal{A}$ 是半正定的, 所以有

$$\langle \mathcal{A}(\mathcal{Y}^k - \hat{\mathcal{X}}), \mathcal{Y}^k - \hat{\mathcal{X}} \rangle \geq 0, \quad \forall k \in \mathcal{K}. \quad (4.5)$$

由 $\hat{\mathcal{X}} \in \text{SOL}(\mathcal{A}, \mathcal{Q})$ 和 $\mathcal{Y}^k \in \mathbb{R}_+^{[m,n]}$ 可推出

$$\langle \mathcal{A}\hat{\mathcal{X}} + \mathcal{Q}, \hat{\mathcal{X}} \rangle = 0 \quad \text{和} \quad \langle \mathcal{A}\hat{\mathcal{X}} + \mathcal{Q}, \mathcal{Y}_k \rangle \geq 0, \quad \forall k \in \mathcal{K}. \quad (4.6)$$

所以, 对任意的 $k \in \mathcal{K}$, 都有

$$\begin{aligned} &\|\mathcal{X}^{k+1} - \hat{\mathcal{X}}\|^2 \\ &= \|\mathcal{Y}^k - \tau \mathcal{A}(\mathcal{Y}^k - \mathcal{X}^k)\| - \hat{\mathcal{X}}\|^2 \\ &= \|\mathcal{Y}^k - \hat{\mathcal{X}}\|^2 + \tau^2 \|\mathcal{A}(\mathcal{Y}^k - \mathcal{X}^k)\|^2 - 2\tau \langle \mathcal{A}(\mathcal{Y}^k - \mathcal{X}^k), \mathcal{Y}^k - \hat{\mathcal{X}} \rangle \\ &= \|\mathcal{X}^k - \hat{\mathcal{X}}\|^2 + \|\mathcal{X}^k - \mathcal{Y}^k\|^2 - 2\langle \mathcal{X}^k - \hat{\mathcal{X}}, \mathcal{X}^k - \mathcal{Y}^k \rangle \\ &\quad + \tau^2 \|\mathcal{A}(\mathcal{Y}^k - \mathcal{X}^k)\|^2 - 2\tau \langle \mathcal{A}(\mathcal{Y}^k - \mathcal{X}^k), \mathcal{Y}^k - \hat{\mathcal{X}} \rangle \\ &= \|\mathcal{X}^k - \hat{\mathcal{X}}\|^2 + \|\mathcal{X}^k - \mathcal{Y}^k\|^2 - 2\langle \mathcal{X}^k - \mathcal{Y}^k, \mathcal{X}^k - \mathcal{Y}^k \rangle - 2\langle \mathcal{Y}^k - \hat{\mathcal{X}}, \mathcal{X}^k - \mathcal{Y}^k \rangle \\ &\quad + \tau^2 \|\mathcal{A}(\mathcal{Y}^k - \mathcal{X}^k)\|^2 - 2\tau \langle \mathcal{A}(\mathcal{Y}^k - \mathcal{X}^k), \mathcal{Y}^k - \hat{\mathcal{X}} \rangle \\ &\leq \|\mathcal{X}^k - \hat{\mathcal{X}}\|^2 - \left(1 - \frac{1}{\alpha^2}\right) \|\mathcal{X}^k - \mathcal{Y}^k\|^2 - 2\tau \langle \mathcal{Y}^k - \hat{\mathcal{X}}, \mathcal{A}\mathcal{X}^k + \mathcal{Q} \rangle - 2\tau \langle \mathcal{A}(\mathcal{Y}^k - \mathcal{X}^k), \mathcal{Y}^k - \hat{\mathcal{X}} \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \|\mathcal{X}^k - \hat{\mathcal{X}}\|^2 - \left(1 - \frac{1}{\alpha^2}\right) \|\mathcal{X}^k - \mathcal{Y}^k\|^2 - 2\tau \langle \mathcal{A}\mathcal{Y}^k + \mathcal{Q}, \mathcal{Y}^k - \hat{\mathcal{X}} \rangle \\
&= \|\mathcal{X}^k - \hat{\mathcal{X}}\|^2 - \left(1 - \frac{1}{\alpha^2}\right) \|\mathcal{X}^k - \mathcal{Y}^k\|^2 - 2\tau \langle \mathcal{A}(\mathcal{Y}^k - \hat{\mathcal{X}}), \mathcal{Y}^k - \hat{\mathcal{X}} \rangle - 2\tau \langle \mathcal{A}\hat{\mathcal{X}} + \mathcal{Q}, \mathcal{Y}^k - \hat{\mathcal{X}} \rangle \\
&\leq \|\mathcal{X}^k - \hat{\mathcal{X}}\|^2 - \left(1 - \frac{1}{\alpha^2}\right) \|\mathcal{X}^k - \mathcal{Y}^k\|^2,
\end{aligned}$$

其中第一个不等式使用了 $\tau = \frac{1}{\alpha\|\mathcal{A}\|}$ 、(4.3) 和 (4.4), 最后一个不等式使用了 (4.5) 和 (4.6). $\square$

定理 4.1 设 $\mathcal{A}$ 是半正定的且 $\text{LCP}(\mathcal{A}, \mathcal{Q})$ 是可行的. 令序列 $\{\mathcal{X}^k\}$ 由算法 1 产生, 则 $\{\mathcal{X}^k\}$ 收敛到 $\text{LCP}(\mathcal{A}, \mathcal{Q})$ 的一个解.

证明 由假设条件和命题 4.2 知 $\text{SOL}(\mathcal{A}, \mathcal{Q}) \neq \emptyset$. 不妨设 $\hat{\mathcal{X}}$ 是 $\text{LCP}(\mathcal{A}, \mathcal{Q})$ 的任意一个解. 由命题 4.7 可得序列 $\{\|\mathcal{X}^k - \hat{\mathcal{X}}\|^2\}$ 是非增的, 故序列 $\{\mathcal{X}^k\}$ 是有界的. 此外, 由命题 4.7 中 (4.2) 得

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|\mathcal{X}^k - \mathcal{Y}^k\|^2 \leq \frac{\alpha^2}{\alpha^2 - 1} \|\mathcal{X}^0 - \hat{\mathcal{X}}\|^2.$$

因此, $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathcal{X}^k - \mathcal{Y}^k\|^2 = 0$. 再结合 $\{\mathcal{X}^k\}$ 的有界性可推出序列 $\{\mathcal{Y}^k\}$ 是有界的.

因为序列 $\{\mathcal{X}^k\}$ 是有界的, 故它一定存在一个收敛的子序列 $\{\mathcal{X}^{n_k}\}$. 设该子序列收敛到 $\mathcal{X}$ 并记该子序列的指标集为 $\mathcal{K}'$. 现在证明 $\mathcal{X} \in \text{SOL}(\mathcal{A}, \mathcal{Q})$.

首先, 由算法 1 的第 1 步知, 对任意的 $n_k \in \mathcal{K}'$, 都有 $\mathcal{Y}^{n_k} \in \mathbb{R}_+^{[m, n]}$. 再结合 $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathcal{X}^{n_k} - \mathcal{Y}^{n_k}\|^2 = 0$ 及 $\{\mathcal{X}^{n_k}\}$ 收敛到 $\mathcal{X}$, 可推出 $\mathcal{X} \in \mathbb{R}_+^{[m, n]}$.

其次, 由算法 1 的第 1 步知, 对任意的 $n_k \in \mathcal{K}'$, 都有 $\mathcal{Y}^{n_k} = \Pi_{\mathbb{R}_+^{[m, n]}}[\mathcal{X}^{n_k} - \tau(\mathcal{A}\mathcal{X}^{n_k} + \mathcal{Q})]$. 由引理 4.2 得, 对于任意的 $\mathcal{Z} \in \mathbb{R}_+^{[m, n]}$, 都有

$$\begin{aligned}
0 &\leq \langle \mathcal{Z} - \mathcal{Y}^{n_k}, \mathcal{Y}^{n_k} - [\mathcal{X}^{n_k} - \tau(\mathcal{A}\mathcal{X}^{n_k} + \mathcal{Q})] \rangle \\
&= \langle \mathcal{Z} - \mathcal{Y}^{n_k}, \mathcal{Y}^{n_k} - \mathcal{X}^{n_k} \rangle + \tau \langle \mathcal{Z} - \mathcal{Y}^{n_k}, \mathcal{A}\mathcal{X}^{n_k} + \mathcal{Q} \rangle \\
&= \langle \mathcal{Z} - \mathcal{Y}^{n_k}, \mathcal{Y}^{n_k} - \mathcal{X}^{n_k} \rangle + \tau \langle \mathcal{X}^{n_k} - \mathcal{Y}^{n_k}, \mathcal{A}\mathcal{X}^{n_k} + \mathcal{Q} \rangle + \tau \langle \mathcal{Z} - \mathcal{X}^{n_k}, \mathcal{A}\mathcal{X}^{n_k} + \mathcal{Q} \rangle, \quad \forall n_k \in \mathcal{K}'.
\end{aligned}$$

令 $n_k \rightarrow \infty$, 结合 $\tau > 0$, $\lim_{n_k \rightarrow \infty} \|\mathcal{X}^{n_k} - \mathcal{Y}^{n_k}\| = 0$ 和 $\lim_{n_k \rightarrow \infty} \mathcal{X}^{n_k} = \mathcal{X}$ 可得

$$\langle \mathcal{Z} - \mathcal{X}, \mathcal{A}\mathcal{X} + \mathcal{Q} \rangle \geq 0, \quad \forall \mathcal{Z} \in \mathbb{R}_+^{[m, n]}. \quad (4.7)$$

一方面, 分别取 $\mathcal{Z} = \mathcal{O}$ 和 $\mathcal{Z} = 2\mathcal{X}$, 由 (4.7) 可推出 $\langle \mathcal{X}, \mathcal{A}\mathcal{X} + \mathcal{Q} \rangle = 0$. 另一方面, 结合以上结论与 (4.7) 可得, 对任意的 $\mathcal{Z} \in \mathbb{R}_+^{[m, n]}$, 都有 $\langle \mathcal{Z}, \mathcal{A}\mathcal{X} + \mathcal{Q} \rangle \geq 0$. 因此, $\mathcal{A}\mathcal{X} + \mathcal{Q} \in \mathbb{R}_+^{[m, n]}$.

综上可得 $\mathcal{X} \in \text{SOL}(\mathcal{A}, \mathcal{Q})$.

最后, 由命题 4.7 可得, $\{\|\mathcal{X}^k - \mathcal{X}\|^2\}$ 是一个非增有下界的序列, 因此, 序列 $\{\|\mathcal{X}^k - \mathcal{X}\|^2\}$ 收敛. 再结合 $\{\mathcal{X}^k\}$ 的子序列 $\{\mathcal{X}^{n_k}\}$ 收敛到 $\mathcal{X}$, 可推出 $\{\mathcal{X}^k\}$ 收敛到 $\text{LCP}(\mathcal{A}, \mathcal{Q})$ 的一个解 $\mathcal{X}$.

定理得证. $\square$

4.3 算法示例

下面用一个例子验证第 4.2 小节中的算法. 本例在一台笔记本电脑上进行测试, 使用 64 位的 Windows 10 操作系统, 内存大小为 8.00 G, 中央处理器为英特尔酷睿 i7-3612QM @ 2.10 GHz, 使用的软件及版本为 MATLAB 9.0.

参数 α 的取值为 2. 算法的终止条件为 $\|\mathcal{X}^k - \mathcal{Y}^k\| \leq 10^{-10}$.

表 1 算法 1 的数值结果

初始迭代点	迭代步数	运行时间 (秒)	最优解
$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	429	0.012015	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0.9 & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	518	0.013312	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 0 & 100 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	429	0.011919	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0.9 & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 100 & 0 \end{pmatrix}$	429	0.012358	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0.9 & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 100 \end{pmatrix}$	429	0.011746	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 101 \end{pmatrix}$

例 4.1 考虑 $\text{LCP}(\mathcal{A}, \mathcal{Q})$, 其中 $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_{i_1 i_2 i_3 i_4}) \in \mathbb{R}^{[4,2]}$ 的元素为 $\mathcal{A}_{1111} = \mathcal{A}_{1222} = \mathcal{A}_{2112} = \mathcal{A}_{2122} = \mathcal{A}_{2211} = 1$, $\mathcal{A}_{2121} = 10$, 其他元素均为 0; 且 $\mathcal{Q} = (\mathcal{Q}_{ij}) \in \mathbb{R}^{[2,2]}$ 的元素为 $\mathcal{Q}_{11} = \mathcal{Q}_{22} = -1$, $\mathcal{Q}_{12} = 10$, $\mathcal{Q}_{21} = -10$.

表 1 列出了使用算法 1 求解例 4.1 中 $\text{LCP}(\mathcal{A}, \mathcal{Q})$ 的计算结果, 其中初始迭代矩阵和最优解矩阵均使用了 MATLAB 中的矩阵表示法.

从表 1 可看出, 从不同初始点出发, 算法 1 均在很短的时间内找到问题的最优解. 因此, 算法 1 求解所考虑的问题是有效的. 另外, 从不同初始点出发, 由算法 1 得到了问题的 3 个不同的最优解

$$\hat{X}^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0.9 & 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{X}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{X}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 101 \end{pmatrix}.$$

5 结论

利用一类称作 $J(p)$ 模式乘积的张量收缩积, 本文定义并探讨了张量线性互补问题, 它是经典线性互补问题从 Euclid 向量空间到张量空间的一个自然推广. 本文对 $J(p)$ 模式乘积的性质及张量线性互补问题的理论与算法做了初步的探讨, 有很多问题值得进一步研究. 首先, 本文讨论了 $J(p)$ 模式乘积的一些基本性质, 更多的性质值得挖掘, 这些性质将为涉及 $J(p)$ 模式乘积的张量相关问题的研究提供基本工具. 其次, 经典线性互补问题的理论非常丰富, 本文只讨论了张量线性互补问题的基本理论, 需要进一步探讨和完善其理论. 第三, 本文只讨论了求解张量线性互补问题的外梯度法, 值得考察其他求解经典线性互补问题算法的有效推广. 特别地, 值得研究如何结合张量的结构设计求解张量线性互补问题的高效算法. 最后, 一个重要的课题是考察张量线性互补问题的实际应用, 并结合实际问题的特性和所涉及张量的结构设计高效的求解方法.

致谢 感谢审稿人对本文提出宝贵的修改意见.

参考文献

- 1 Cottle R W, Pang J S, Stone R E. The Linear Complementarity Problem. Philadelphia: SIAM, 1992
- 2 Facchinei F, Pang J S. Finite-Dimensional Variational Inequalities and Complementarity Problems, Volumes I and II. New York: Springer, 2003
- 3 韩继业, 修乃华, 戚厚铎. 非线性互补理论与算法. 上海: 上海科学技术出版社, 2006
- 4 Qi L, Luo Z. Tensor Analysis: Spectral Theory and Special Tensors. Philadelphia: SIAM, 2017
- 5 Qi L, Chen H, Chen Y. Tensor Eigenvalues and Their Applications. Singapore: Springer, 2018
- 6 Che M, Qi L, Wei Y. Positive-definite tensors to nonlinear complementarity problems. J Optim Theory Appl, 2016, 168: 475–487
- 7 Song Y, Mei W. Structural properties of tensors and complementarity problems. J Optim Theory Appl, 2018, 176: 289–305

- 8 Song Y, Qi L. Properties of tensor complementarity problem and some classes of structured tensors. *Ann Appl Math*, 2017, 33: 308–323
- 9 Song Y, Qi L. Strictly semi-positive tensors and the boundedness of tensor complementarity problems. *Optim Lett*, 2017, 11: 1407–1426
- 10 Wang Y, Huang Z H, Bai X L. Exceptionally regular tensors and tensor complementarity problems. *Optim Methods Softw*, 2016, 31: 815–828
- 11 Luo Z, Qi L, Xiu N. The sparsest solutions to Z -tensor complementarity problems. *Optim Lett*, 2017, 11: 471–482
- 12 Wang X, Chen H, Wang Y. Solution structures of tensor complementarity problem. *Front Math China*, 2018, 13: 935–945
- 13 Bai X L, Huang Z H, Wang Y. Global uniqueness and solvability for tensor complementarity problems. *J Optim Theory Appl*, 2016, 170: 72–84
- 14 Liu D, Li W, Vong S W. Tensor complementarity problems: The GUS-property and an algorithm. *Linear Multilinear Algebra*, 2018, 66: 1726–1749
- 15 Balaji R, Palpandi K. Positive definite and Gram tensor complementarity problems. *Optim Lett*, 2018, 12: 639–648
- 16 Wang X, Che M, Wei Y. Global uniqueness and solvability of tensor complementarity problems for $\mathcal{H}_+$ -tensors. *Numer Algorithms*, 2020, 84: 567–590
- 17 Song Y, Qi L. Tensor complementarity problem and semi-positive tensors. *J Optim Theory Appl*, 2016, 169: 1069–1078
- 18 Chen H, Qi L, Song Y. Column sufficient tensors and tensor complementarity problems. *Front Math China*, 2018, 13: 255–276
- 19 Guo Q, Zheng M M, Huang Z H. Properties of S -tensors. *Linear Multilinear Algebra*, 2019, 67: 685–696
- 20 Song Y, Yu G. Properties of solution set of tensor complementarity problem. *J Optim Theory Appl*, 2016, 170: 85–96
- 21 Mei W, Yang Q. Properties of structured tensors and complementarity problems. *J Optim Theory Appl*, 2020, 185: 99–114
- 22 Zheng M, Zhang Y, Huang Z H. Global error bounds for the tensor complementarity problem with a P -tensor. *J Ind Manag Optim*, 2019, 15: 933–946
- 23 Hu S, Wang J, Huang Z H. Error bounds for the solution sets of quadratic complementarity problems. *J Optim Theory Appl*, 2018, 179: 983–1000
- 24 Bai X L, Huang Z H, Li X. Stability of solutions and continuity of solution maps of tensor complementarity problems. *Asia-Pac J Oper Res*, 2019, 36: 1940002
- 25 Hieu V T. On the R_0 -tensors and the solution map of tensor complementarity problems. *J Optim Theory Appl*, 2019, 181: 163–183
- 26 Li Y, Huang Z H, Hu S. Connectedness of the solution set of the tensor complementarity problem. *J Math Anal Appl*, 2020, 487: 123965
- 27 Xie S L, Li D H, Xu H R. An iterative method for finding the least solution to the tensor complementarity problem. *J Optim Theory Appl*, 2017, 175: 119–136
- 28 Han L. A continuation method for tensor complementarity problems. *J Optim Theory Appl*, 2019, 180: 949–963
- 29 Zhang K, Chen H, Zhao P. A potential reduction method for tensor complementarity problems. *J Ind Manag Optim*, 2019, 15: 429–443
- 30 Du S, Zhang L. A mixed integer programming approach to the tensor complementarity problem. *J Global Optim*, 2019, 73: 789–800
- 31 Xu H R, Li D H, Xie S L. An equivalent tensor equation to the tensor complementarity problem with positive semi-definite Z -tensor. *Optim Lett*, 2019, 13: 685–694
- 32 Guan H B, Li D H. Linearized methods for tensor complementarity problems. *J Optim Theory Appl*, 2020, 184: 972–987
- 33 Zhao X, Fan J. A semidefinite method for tensor complementarity problems. *Optim Methods Softw*, 2019, 34: 758–769
- 34 Wang X, Che M, Qi L, et al. Modified gradient dynamic approach to the tensor complementarity problem. *Optim Methods Softw*, 2020, 35: 394–415
- 35 Huang Z H, Qi L. Formulating an n -person noncooperative game as a tensor complementarity problem. *Comput Optim Appl*, 2017, 66: 557–576
- 36 Huang Z H, Qi L. Tensor complementarity problems—Part I: Basic theory. *J Optim Theory Appl*, 2019, 183: 1–23
- 37 Qi L, Huang Z H. Tensor complementarity problems—Part II: Solution methods. *J Optim Theory Appl*, 2019, 183: 365–385
- 38 Huang Z H, Qi L. Tensor complementarity problems—Part III: Applications. *J Optim Theory Appl*, 2019, 183: 771–791
- 39 Gowda M S. Polynomial complementarity problems. *Pac J Optim*, 2017, 13: 227–241
- 40 Ling L, He H, Ling C. On error bounds of polynomial complementarity problems with structured tensors. *Optimization*,

- 2018, 67: 341–358
- 41 Wang J, Hu S, Huang Z H. Solution sets of quadratic complementarity problems. *J Optim Theory Appl*, 2018, 176: 120–136
- 42 Hu S, Wang J, Huang Z H. An inexact augmented Lagrangian multiplier method for solving quadratic complementary problems: An adapted algorithmic framework combining specific resolution techniques. *J Comput Appl Math*, 2019, 361: 64–78
- 43 Che M, Qi L, Wei Y. Stochastic R_0 tensors to stochastic tensor complementarity problems. *Optim Lett*, 2019, 13: 261–279
- 44 Tawhid M A, Rahmati S. Complementarity problems over a hypermatrix (tensor) set. *Optim Lett*, 2018, 12: 1443–1454
- 45 Wang Y, Huang Z H, Qi L. Global uniqueness and solvability of tensor variational inequalities. *J Optim Theory Appl*, 2018, 177: 137–152
- 46 Hieu V T. Solution maps of polynomial variational inequalities. *J Global Optim*, 2020, 77: 807–824
- 47 Zheng M M, Huang Z H, Ma X X. Nonemptiness and compactness of solution sets to generalized polynomial complementarity problems. *J Optim Theory Appl*, 2020, 185: 80–98
- 48 Gowda M S, Sossa D. Weakly homogeneous variational inequalities and solvability of nonlinear equations over cones. *Math Program*, 2019, 177: 149–171
- 49 Ma X X, Zheng M M, Huang Z H. A note on the nonemptiness and compactness of solution sets of weakly homogeneous variational inequalities. *SIAM J Optim*, 2020, 30: 132–148
- 50 Barbagallo A, Guarino Lo Bianco S. Variational inequalities on a class of structured tensors. *J Nonlinear Convex Anal*, 2018, 19: 711–729
- 51 Barbagallo A, Guarino Lo Bianco S. On ill-posedness and stability of tensor variational inequalities: Application to an economic equilibrium. *J Global Optim*, 2020, 77: 125–141
- 52 李夏, 黄正海. 张量空间上的仿射变分不等式. *中国科学: 数学*, 2020, doi: 10.1360/SCM-2019-0015
- 53 Huang Z H, Qi L. Positive definiteness of paired symmetric tensors and elasticity tensors. *J Comput Appl Math*, 2018, 338: 22–43
- 54 Karamardian S, Schaible S. Seven kinds of monotone maps. *J Optim Theory Appl*, 1990, 66: 37–46
- 55 Lee G M, Tam N N, Yen N D. *Quadratic Programming and Affine Variational Inequalities: A Qualitative Study*. New York: Springer, 2005
- 56 Thong D V, Hieu D V. Weak and strong convergence theorems for variational inequality problems. *Numer Algorithms*, 2018, 78: 1045–1060

Linear complementarity problem over tensor spaces

Xia Li & Zhenghai Huang

Abstract With the aid of a contraction product of tensors, we define a class of linear complementarity problems over tensor spaces, which is abbreviated as the tensor linear complementarity problem. When the tensor variable involved is reduced to a vector, the considered problem reduces to the classical linear complementarity problem. In this paper, we discuss certain properties of the contraction product of tensors, and study the theory and algorithm of the concerned problem. Specifically, we first discuss an equivalent model of the problem, the feasibility and solvability of the problem, and convexity of the solution set. Then we propose an extragradient method for solving the tensor linear complementarity problem, and show the convergence of the method under suitable assumptions. The preliminary numerical results are also reported.

Keywords tensor, contraction product of tensors, linear complementarity problem, extragradient method
MSC(2010) 90C33, 65K10

doi: 10.1360/SSM-2020-0050