多目标优化问题的 Pascoletti-Serafini 标量化方法

献给越民义教授 100 华诞

唐莉萍^{1,2}, 杨新民^{3*}, 高英³

1. 重庆工商大学数学与统计学院, 重庆 400047;

2. 重庆工商大学社会经济应用统计重庆市重点实验室, 重庆 400047;

3. 重庆师范大学数学科学学院, 重庆 401331

E-mail: tanglipings@163.com, xmyang@cqnu.edu.cn, gaoying5324@163.com

收稿日期: 2020-02-22; 接受日期: 2020-04-03; 网络出版日期: 2020-09-09; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11991024, 11971084, 11701057 和 11771064)、重庆市自然科学基金 (批准号: cstc2018jcyj-yszxX0009 和 cstc2019jcyj-zdxmX0016)、重庆市高等学校巴渝学者青年学者计划和重庆市教育委员会科学技术研究计划 (批准号: KJQN201800806) 资助项目

摘要 非线性标量化方法是研究非凸多目标优化问题的一个重要途径. 目前 Pascoletti-Serafini 标量化方法是处理非凸多目标优化问题的有力工具之一. 但绝大部分结果是针对多目标优化问题的弱有效解和有效解建立的. 因此, 本文深入研究 Akbari 等 (2018) 提出的 3 类改进的 Pascoletti-Serafini 标量化方法, 主要考虑在什么条件下可以建立非凸多目标优化问题真有效解的非线性标量化刻画. 通过限制相应标量化问题中的参数范围, 获得了非凸多目标优化问题弱有效解、有效解和真有效解的充分和必要条件. 此外, 举例说明了主要结果.

关键词 多目标优化 Pascoletti-Serafini 方法 真有效解 非线性标量化

MSC (2010) 主题分类 90C26, 90C29, 90C30

1 引言

在工程设计、经济管理和交通运输等诸多领域中, 大量的问题需要同时面临多个目标或多个准则做优化决策. 这类问题的数学模型是在一定约束条件下极小化或极大化一个向量值目标函数, 即多目标优化问题^[1-3]. 由于向量序关系不是全序, 即向量空间中不同元素之间并非都可比较大小, 因此, 多目标优化中首要且最基本的问题是如何定义解. 经典的 Pareto 有效解 (简称为有效解) 就是利用“找不到比之更好的就是最好的”的思想提出来的^[4-6]. 有效解的概念较好地刻画了多目标优化问题的“最优性”, 其在多目标优化理论及应用研究中发挥了十分重要的作用 (参见文献 [2, 3, 7, 8]). 但是, 有

英文引用格式: Tang L P, Yang X M, Gao Y. The Pascoletti-Serafini scalarization scheme for multiobjective optimization problems (in Chinese). Sci Sin Math, 2020, 50: 1249–1270, doi: 10.1360/SSM-2020-0047

效解具有一些不好的性质, 例如, 1951 年, Kuhn 和 Tucker^[6] 发现有效解可能不具有标量化性质 (即多目标优化问题的有效解有时可能无法利用相应的标量化问题的最优解进行刻画); 此外, 多目标优化问题的有效解集一般比较大. 因此, 许多学者提出了各种类型的真有效解对有效解进行限制. 其中最具代表性的真有效解是 Geoffrion^[9] 于 1968 年基于有限权衡 (trade-off) 提出的一类真有效解. 我们称其为 Geoffrion 真有效解, 简称为真有效解. 在凸性条件下, Geoffrion^[9] 证明了多目标优化问题的真有效解与对应的数值优化问题的最优解等价. 该数值优化问题的目标函数是多目标优化问题的各目标函数的线性加权和. 这一方法就是传统意义下的线性加权和法, 通常称其为线性标量化方法. 然而, 该方法仅适用于凸性或者广义凸性条件下的多目标优化问题, 参见文献 [10].

为求解非凸多目标优化问题, 涌现出许多非线性标量化方法, 如 ϵ -约束法^[11]、加权 Chebyshev 范数法^[12,13]、Pascoletti-Serafini 法^[14] 和混合法^[15] 等. 近年来, 许多学者通过对约束添加松弛变量或者剩余变量并在目标函数中进行惩罚, 进而提出较一般的标量化方法以便获得非凸多目标优化问题的真有效解^[16-21]. 例如, Ehrgott 和 Ruzika^[18] 基于上述思想, 针对 ϵ -约束法提出了改进的 ϵ -约束法, 并获得了多目标优化问题的 (弱、真) 有效解. 受他们工作的启发, Rastegar 和 Khorram^[21] 基于线性加权和法及 ϵ -约束法构造了一类较广的混合型标量化方法, 从而刻画了非凸多目标优化问题的近似 (弱、真) 有效解. 该类标量化方法包含了线性加权和法^[9]、 ϵ -约束法^[11]、混合法^[15] 和改进的 ϵ -约束法^[18]. 赵克全等^[22] 利用松弛变量和广义 Chebyshev 范数的推广形式提出了一类新的标量化优化方法, 通过调整几类参数范围获得了非凸多目标优化问题 (弱、真) 有效解的非线性标量化刻画.

注意到, Pascoletti-Serafini 法的几何意义是负序锥在某一参考点处沿着序锥的相对内部方向移动, 直到与多目标优化问题目标函数的像集的交为单点集. 因此, 利用 Pascoletti-Serafini 法更容易设计出求解多目标优化问题的有效算法. Eichfelder^[2,23] 基于 Pascoletti-Serafini 法通过参数控制给出了多目标优化问题的自适应解法, 并成功应用于放射治疗. Bortz 等^[24] 利用 Pascoletti-Serafini 法对化学工程中的多目标优化问题进行了求解. Vallerio 等^[25] 借助特殊的 Pascoletti-Serafini 法提出了一类求解多目标优化控制问题的交互式方法. Dolatnezhadsomarin 和 Khorram^[26] 结合 ϵ -约束法和 Pascoletti-Serafini 法提出了一种求解双目标优化问题的有效方法. 但经典的 Pascoletti-Serafini 法不能获得多目标优化问题的真有效解. 因此, 许多学者进一步研究 Pascoletti-Serafini 法, 提出了更广的 Pascoletti-Serafini 标量化方法^[27-29]. 例如, Khaledian 等^[27] 提出了一类广义的 Pascoletti-Serafini 标量化方法, 从而建立了多目标优化问题的近似 (弱、真) 有效解的标量化刻画. Akbari 等^[28] 基于 Ehrgott 和 Ruzika^[18] 的思想对 Pascoletti-Serafini 法进行了修订, 提出了 3 类标量化方法. 这些标量化方法涵盖了 ϵ -约束法^[11,18]、加权 Chebyshev 范数法^[12] 和 Pascoletti-Serafini 法^[14].

然而, 我们注意到文献 [28] 中存在不足. 一方面, 文献 [28] 中有些定理不一定成立, 如定理 4.5, 该定理的条件相互矛盾. 因此, 如何提出适当的条件使得文献 [28] 中的结论成立是值得探讨的问题. 另一方面, 文献 [28] 中有些定理的证明不正确, 例如, 在定理 4.6 的证明过程中, μ 和 r 的选取不能保证标量化问题 (MPS(a, r, μ)) 的最优性. 鉴于此, 我们一方面针对上述提到的文献 [28] 中存在的不足作修订, 另一方面将进一步深化文献 [28] 中所提出的 3 类改进的 Pascoletti-Serafini 标量化方法, 主要建立 3 类改进的 Pascoletti-Serafini 标量化问题与非凸多目标优化问题之间解的关系, 希望获得非凸多目标优化问题 (弱、真) 有效解的刻画.

本文的主要内容包括深入研究 Akbari 等^[28] 提出的 3 类改进的 Pascoletti-Serafini 标量化方法, 即弹性 Pascoletti-Serafini 标量化方法、改良 Pascoletti-Serafini 标量化方法和复合型 Pascoletti-Serafini 标量化方法. 利用我们改进的标量化方法, 不仅获得了非凸多目标优化问题弱有效解、有效解和真有效解的非线性标量化刻画, 而且修正了文献 [28] 存在的不足.

2 预备知识

用 $\mathbb{R}^n$ 表示 n 维 Euclid 空间, $\mathbf{0}_n$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 的零向量. 记 $\mathbb{R}_{\geq}^n := \{x \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0, \forall i = 1, 2, \dots, n\}$. $\mathbb{R}_{\geq}^n$ 的拓扑内部和拓扑边界分别记为 $\text{int}\mathbb{R}_{\geq}^n$ 和 $\text{bd}\mathbb{R}_{\geq}^n$, 即

$$\begin{aligned}\text{int}\mathbb{R}_{\geq}^n &= \{y \in \mathbb{R}_{\geq}^n : y_i > 0, \forall i = 1, 2, \dots, n\}, \\ \text{bd}\mathbb{R}_{\geq}^n &= \{y \in \mathbb{R}_{\geq}^n : \text{至少存在一个 } i_0 \in \{1, 2, \dots, n\} \text{ 使得 } y_{i_0} = 0\}.\end{aligned}$$

由 $\mathbb{R}_{\geq}^n$ 诱导出 $\mathbb{R}^n$ 的偏序 $\leq$, 即对于 $x, y \in \mathbb{R}^n$, 有 $x \leq y \Leftrightarrow y - x \in \mathbb{R}_{\geq}^n$. 并记

$$\begin{aligned}x < y &\Leftrightarrow y - x \in \text{int}\mathbb{R}_{\geq}^n, \\ x \leq y &\Leftrightarrow y - x \in \mathbb{R}_{\geq}^n \setminus \{0\}, \\ x \not\leq y &\Leftrightarrow y - x \notin \mathbb{R}_{\geq}^n \setminus \{0\}.\end{aligned}$$

考虑一般的非凸多目标优化问题

$$(\text{MOP}) \quad \min_{x \in \mathcal{X}} f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_p(x))^T,$$

其中 $\emptyset \neq \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$, $f = (f_1, f_2, \dots, f_p)^T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$. 记 $f(\mathcal{X})$ 为 $\mathcal{X}$ 在 f 下的像. 假设 $f(\mathcal{X})$ 有界. 多目标优化问题的 (弱、真) 有效解定义如下:

定义 2.1 ^[16] 设 $\bar{x} \in \mathcal{X}$.

(i) 称 $\bar{x}$ 是 (MOP) 的有效解, 如果不存在 $x \in \mathcal{X}$ 使得 $f(x) \leq f(\bar{x})$. 记 (MOP) 的有效解集为 $\mathcal{X}_E$.

(ii) 称 $\bar{x}$ 是 (MOP) 的弱有效解, 如果不存在 $x \in \mathcal{X}$ 使得 $f(x) < f(\bar{x})$. 记 (MOP) 的弱有效解为 $\mathcal{X}_{WE}$.

定义 2.2 ^[9] 设 $\bar{x} \in \mathcal{X}$. 称 $\bar{x}$ 是 (MOP) 的真有效解, 如果 $\bar{x}$ 是 (MOP) 的有效解, 且存在常数 $M > 0$ 使得对任意满足 $f_i(x) < f_i(\bar{x})$ 的 $x \in \mathcal{X}$ 和 $i \in \{1, 2, \dots, p\}$, 都存在满足 $f_j(x) > f_j(\bar{x})$ 的 $j \in \{1, 2, \dots, p\}$, 使得

$$\frac{f_i(\bar{x}) - f_i(x)}{f_j(x) - f_j(\bar{x})} \leq M.$$

记 (MOP) 的真有效解集为 $\mathcal{X}_{PE}$.

由上述定义易知, 多目标优化问题的真有效解一定是其有效解, 多目标优化问题的有效解一定是其弱有效解, 即

$$\mathcal{X}_{PE} \subseteq \mathcal{X}_E \subseteq \mathcal{X}_{WE}.$$

对于一般的数值优化问题:

$$(\text{SP}) \quad \min_{x \in \mathcal{X}} g(x),$$

其中 $g : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$. (SP) 的最优解定义如下:

定义 2.3 称 $\bar{x} \in \mathcal{X}$ 是 (SP) 的最优解, 如果对任意的 $x \in \mathcal{X}$ 都有 $g(\bar{x}) \leq g(x)$.

3 弹性 Pascoletti-Serafini 标量化方法

Pascoletti 和 Serafini^[14] 提出了经典的 Pascoletti-Serafini 标量化问题:

$$\begin{aligned} (\text{PS}(a, r)) \quad & \min t \\ & \text{s.t. } a + tr - f(x) \in \mathbb{R}_{\leq}^p, \\ & x \in \mathcal{X}, \quad t \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

其中 $a \in \mathbb{R}^p$ 且 $r \in \mathbb{R}_{\leq}^p \setminus \{\mathbf{0}_p\}$.

在研究标量化问题 $(\text{PS}(a, r))$ 的最优解与 (MOP) 的有效解之间的关系时, 可能会出现两种情形. 第一种情形, 当利用标量化问题 $(\text{PS}(a, r))$ 的最优解获得 (MOP) 的有效解 $\bar{x}$ 时, 解必须满足约束条件 $f_i(\bar{x}) \leq a_i + tr_i, \forall i \in \{1, 2, \dots, p\}$. 但是, 如果 (MOP) 是非凸优化问题或者离散优化问题时, 可能对某个 $i_0 \in \{1, 2, \dots, p\}$, 有 $f_{i_0}(\bar{x}) < a_{i_0} + tr_{i_0}$. 第二种情形, 当利用 (MOP) 的有效解 $\hat{x}$ 获得标量化问题 $(\text{PS}(a, r))$ 的最优解时, 根据有效解的定义可知, 可能存在某个 $j_0 \in \{1, 2, \dots, p\}$ 使得 $f_{j_0}(\hat{x}) > a_{j_0} + tr_{j_0}$. 针对第二种情形, Akbari 等^[28] 通过添加剩余变量提出了下列标量化问题, 称其为弹性 Pascoletti-Serafini 标量化问题:

$$\begin{aligned} (\text{FPS}(a, r, \mu)) \quad & \min t + \sum_{i=1}^p \mu_i s_i \\ & \text{s.t. } a + tr - f(x) + s \in \mathbb{R}_{\leq}^p, \\ & x \in \mathcal{X}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad s \in \mathbb{R}_{\leq}^p, \end{aligned}$$

其中 $a \in \mathbb{R}^p, \mu \in \mathbb{R}_{\leq}^p$ 且 $r \in \mathbb{R}_{\leq}^p \setminus \{\mathbf{0}_p\}$. 事实上, 弹性 Pascoletti-Serafini 标量化问题 $(\text{FPS}(a, r, \mu))$ 可以看成是从 Pascoletti-Serafini 标量化问题 $(\text{PS}(a, r))$ 的可行域的外部搜索最优解的一种方法. 鉴于经典的 Pascoletti-Serafini 标量化方法在非凸多目标优化问题研究过程中的重要性^[2, 23, 25] 以及文献^[28] 对弹性 Pascoletti-Serafini 标量化方法作的初步研究, 接下来深入探讨 $(\text{FPS}(a, r, \mu))$ 的最优解与 (MOP) 的 (弱、真) 有效解间的关系.

定理 3.1 若 $(\bar{x}, \bar{s}, \bar{t})$ 是 $(\text{FPS}(a, r, \mu))$ 的最优解, 则 $\bar{x}$ 是 (MOP) 的弱有效解且

$$a + \bar{t}r - f(\bar{x}) + \bar{s} \in \text{bd}\mathbb{R}_{\leq}^p. \quad (3.1)$$

证明 由文献^[28] 定理 3.1 知, $\bar{x}$ 是 (MOP) 的弱有效解. 下面证明 $a + \bar{t}r - f(\bar{x}) + \bar{s} \in \text{bd}\mathbb{R}_{\leq}^p$. 反设 $a + \bar{t}r - f(\bar{x}) + \bar{s} \notin \text{bd}\mathbb{R}_{\leq}^p$, 则 $a + \bar{t}r - f(\bar{x}) + \bar{s} \in \text{int}\mathbb{R}_{\leq}^p$, 故存在正实数 t_0 使得 $a + (\bar{t} - t_0)r - f(\bar{x}) + \bar{s} \in \mathbb{R}_{\leq}^p$. 从而 $(\bar{x}, \bar{s}, \bar{t} - t_0)$ 是 $(\text{FPS}(a, r, \mu))$ 的可行解, 且

$$(\bar{t} - t_0) + \sum_{i=1}^p \mu_i \bar{s}_i < \bar{t} + \sum_{i=1}^p \mu_i \bar{s}_i,$$

这与 $(\bar{x}, \bar{s}, \bar{t})$ 是 $(\text{FPS}(a, r, \mu))$ 的最优解矛盾. 因此, (3.1) 成立. $\square$

注 3.1 当 $\bar{x}$ 是 (MOP) 的弱有效解时, 对任意的 $r \in \text{int}\mathbb{R}_{\leq}^p$, 即使 $\mu > 0$, $(\bar{x}, \mathbf{0}_p, 0)$ 也可能不是 $(\text{FPS}(a, r, \mu))$ 的最优解, 其中 $a = f(\bar{x})$. 见下面例子.

例 3.1 考虑一个双目标优化问题, 其可行域为

$$\mathcal{X} = \{x = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 \geq 1, x_1 \geq -1, x_2 \geq -1\},$$

目标函数为 $f(x) = x$. 显然, $\bar{x} = (1, 0)^T \in \mathcal{X}$ 是该双目标优化问题的弱有效解.

现取 $a = f(\bar{x})$, $r = (r_1, r_2)^T \in \text{int}\mathbb{R}_{\geq}^2$, $\mu = (\mu_1, \mu_2)^T \in \text{int}\mathbb{R}_{\geq}^2$, 其中 μ_2 满足 $\mu_2 < \min\{\frac{1}{2r_1}, \frac{1}{2r_2}\}$, 则对应的标量化问题 $(\text{FPS}(a, r, \mu))$ 为

$$\begin{aligned} \min \quad & t + \sum_{i=1}^2 \mu_i s_i \\ \text{s.t.} \quad & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}, \\ & x \in \mathcal{X}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad s \in \mathbb{R}_{\geq}^2. \end{aligned}$$

取

$$\hat{x} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^T \in \mathcal{X}, \quad \hat{s} = (0, 1)^T \in \mathbb{R}_{\geq}^2, \quad \hat{t} = \max\left\{-\frac{1}{2r_1}, -\frac{1}{2r_2}\right\}.$$

容易验证 $(\hat{x}, \hat{s}, \hat{t})$ 是标量化问题 $(\text{FPS}(a, r, \mu))$ 的可行解, 且

$$\hat{t} + \sum_{i=1}^2 \mu_i \hat{s}_i = \hat{t} + \mu_2 = -\min\left\{\frac{1}{2r_1}, \frac{1}{2r_2}\right\} + \mu_2 < 0,$$

其中 0 是标量化问题 $(\text{FPS}(a, r, \mu))$ 在可行解 $(\bar{x}, \mathbf{0}_2, 0)$ 处的目标函数值, 即 $(\bar{x}, \mathbf{0}_2, 0)$ 不是 $(\text{FPS}(a, r, \mu))$ 的最优解.

然而, 当限制参数 μ 时, 可以通过 (MOP) 的弱有效解获得弹性 Pascoletti-Serafini 标量化问题 $(\text{FPS}(a, r, \mu))$ 的最优解.

定理 3.2 若 $\bar{x}$ 是 (MOP) 的弱有效解, 则对任意的 $r = (r_1, r_2, \dots, r_p)^T \in \text{int}\mathbb{R}_{\geq}^p$, 存在

$$\mu = \left(\frac{1}{r_1}, \frac{1}{r_2}, \dots, \frac{1}{r_p}\right)^T \in \text{int}\mathbb{R}_{\geq}^p$$

使得 $(\bar{x}, \mathbf{0}_p, 0)$ 是 $(\text{FPS}(a, r, \mu))$ 的最优解, 其中 $a = f(\bar{x})$.

证明 任取 $r = (r_1, r_2, \dots, r_p)^T \in \text{int}\mathbb{R}_{\geq}^p$. 令 $\mu = (\frac{1}{r_1}, \frac{1}{r_2}, \dots, \frac{1}{r_p})^T \in \text{int}\mathbb{R}_{\geq}^p$. 容易验证 $(\bar{x}, \mathbf{0}_p, 0)$ 是 $(\text{FPS}(a, r, \mu))$ 的可行解. 设 (x, s, t) 是 $(\text{FPS}(a, r, \mu))$ 的可行解, 则对每个 s_i , 其最小可能取值为 $\max\{0, f_i(x) - f_i(\bar{x}) - tr_i\}$. 为简单起见, 令

$$s_i = \max\{0, f_i(x) - f_i(\bar{x}) - tr_i\}, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, p\}.$$

考虑下面两种情形:

情形 1 $t \geq 0$. 由于 $\mu \in \text{int}\mathbb{R}_{\geq}^p$ 且 $s \in \mathbb{R}_{\geq}^p$, 显然, $t + \sum_{i=1}^p \mu_i s_i \geq 0$.

情形 2 $t < 0$. 定义集合

$$I := \{i \in \{1, 2, \dots, p\} : f_i(x) - f_i(\bar{x}) - tr_i > 0\}.$$

因为 $\bar{x}$ 是 (MOP) 的弱有效解, 所以, $I \neq \emptyset$ 且至少存在一个 $i_0 \in \{1, 2, \dots, p\}$ 使得 $f_{i_0}(x) \geq f_{i_0}(\bar{x})$, 这意味着 $i_0 \in I$. 从而,

$$t + \sum_{i=1}^p \mu_i s_i = t + \sum_{i \in I} \mu_i (f_i(x) - f_i(\bar{x}) - tr_i)$$

$$\begin{aligned}
&\geq t + \mu_{i_0}(f_{i_0}(x) - f_{i_0}(\bar{x}) - tr_{i_0}) \\
&= \frac{1}{r_{i_0}}(f_{i_0}(x) - f_{i_0}(\bar{x})) \\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

综上可知, 对 $(\text{FPS}(a, r, \mu))$ 的任意可行解 (x, s, t) , 有

$$t + \sum_{i=1}^p \mu_i s_i \geq 0 = 0 + \sum_{i=1}^p \mu_i \cdot 0,$$

即对任意的 $r = (r_1, r_2, \dots, r_p)^T \in \text{int}\mathbb{R}_{\geq}^p$, 存在 $\mu = (\frac{1}{r_1}, \frac{1}{r_2}, \dots, \frac{1}{r_p})^T$ 使得 $(\bar{x}, \mathbf{0}_p, 0)$ 是 $(\text{FPS}(a, r, \mu))$ 的最优解, 其中 $a = f(\bar{x})$. $\square$

注 3.2 由定理 3.2 的证明可知, 对任意的 $r = (r_1, r_2, \dots, r_p)^T \in \text{int}\mathbb{R}_{\geq}^p$, 只需选择 $\mu \in \mathbb{R}_{\geq}^p$ 使得每个分量满足 $r_i \mu_i \geq 1$, 即可使得 $(\bar{x}, \mathbf{0}_p, 0)$ 是 $(\text{FPS}(a, r, \mu))$ 的最优解, 其中 $a = f(\bar{x})$.

根据定义 2.1(i) 可知, $\bar{x} \in \mathcal{X}$ 是 (MOP) 的有效解当且仅当

$$(f(\bar{x}) - \mathbb{R}_{\geq}^p) \cap f(\mathcal{X}) = \{f(\bar{x})\}.$$

由定理 3.1 知, 如果 $(\bar{x}, \bar{s}, \bar{t})$ 是 $(\text{FPS}(a, r, \mu))$ 的最优解, 则 $\bar{x}$ 是 (MOP) 的弱有效解且 $a + \bar{t}r - f(\bar{x}) + \bar{s} \in \text{bd}\mathbb{R}_{\geq}^p$. 从而, 当 $(\bar{x}, \bar{s}, \bar{t})$ 是 $(\text{FPS}(a, r, \mu))$ 的最优解时, 若 $\bar{x} \in \mathcal{X}$ 是 (MOP) 的有效解, 则必有

$$(a + \bar{t}r + \bar{s} - \text{bd}\mathbb{R}_{\geq}^p) \cap (f(\bar{x}) - \text{bd}\mathbb{R}_{\geq}^p) \cap f(\mathcal{X}) = \{f(\bar{x})\}.$$

那么, 反之是否成立呢? 下面定理表明其逆仍然成立. 故我们给出 (MOP) 的有效解的完备刻画.

定理 3.3 设 $(\bar{x}, \bar{s}, \bar{t})$ 是 $(\text{FPS}(a, r, \mu))$ 的最优解, 则 $\bar{x}$ 是 (MOP) 的有效解当且仅当

$$(a + \bar{t}r + \bar{s} - \text{bd}\mathbb{R}_{\geq}^p) \cap (f(\bar{x}) - \text{bd}\mathbb{R}_{\geq}^p) \cap f(\mathcal{X}) = \{f(\bar{x})\}. \quad (3.2)$$

证明 只需证明充分性. 由定理 3.1 知, 如果 $(\bar{x}, \bar{s}, \bar{t})$ 是 $(\text{FPS}(a, r, \mu))$ 的最优解, 则 $\bar{x}$ 是 (MOP) 的弱有效解且 (3.1) 成立. 假设 $\bar{x}$ 不是 (MOP) 的有效解, 则存在 $\hat{x} \in \mathcal{X}$ 使得 $f(\hat{x}) \leq f(\bar{x})$, 即存在 $k_0 \in \text{bd}\mathbb{R}_{\geq}^p \setminus \{0\}$ 使得

$$f(\hat{x}) = f(\bar{x}) - k_0. \quad (3.3)$$

由 (3.1) 知, 存在 $k \in \text{bd}\mathbb{R}_{\geq}^p$ 使得

$$f(\bar{x}) = a + \bar{t}r + \bar{s} - k. \quad (3.4)$$

结合 (3.3) 和 (3.4), 可得

$$a + \bar{t}r + \bar{s} - (k + k_0) = f(\hat{x}). \quad (3.5)$$

下面, 说明

$$k_0 + k \in \text{bd}\mathbb{R}_{\geq}^p. \quad (3.6)$$

假设 $k_0 + k \in \text{int}\mathbb{R}_{\geq}^p$. 根据 (3.5) 可得 $f(\hat{x}) \in a + \bar{t}r + \bar{s} - \text{int}\mathbb{R}_{\geq}^p$, 即 $a + \bar{t}r + \bar{s} - f(\hat{x}) \in \text{int}\mathbb{R}_{\geq}^p$. 类似定理 3.1 的证明, 存在正实数 t_0 使得 $(\hat{x}, \bar{s}, \bar{t} - t_0)$ 是 $(\text{FPS}(a, r, \mu))$ 的可行解, 且

$$(\bar{t} - t_0) + \sum_{i=1}^p \mu_i \bar{s}_i < \bar{t} + \sum_{i=1}^p \mu_i \bar{s}_i.$$

这与 $(\bar{x}, \bar{s}, \bar{t})$ 是 $(\text{FPS}(a, r, \mu))$ 的最优解矛盾. 因此, (3.6) 成立. 再结合 (3.3) 和 (3.5), 有

$$f(\hat{x}) \in (a + \bar{t}r + \bar{s} - \text{bd}\mathbb{R}_{\geq}^p) \cap (f(\bar{x}) - \text{bd}\mathbb{R}_{\geq}^p) \cap (f(\mathcal{X}) \setminus \{f(\bar{x})\}).$$

这与 (3.2) 矛盾. 故 $\bar{x}$ 是 (MOP) 的有效解. □

注 3.3 定理 3.3 提供了一个通过 $(\text{FPS}(a, r, \mu))$ 的最优解检验 (MOP) 的有效解的准则.

根据定理 3.2, 对 (MOP) 的有效解可建立如下的必要条件.

定理 3.4 若 $\bar{x}$ 是 (MOP) 的有效解, 则对任意的 $r = (r_1, r_2, \dots, r_p)^T \in \text{int}\mathbb{R}_{\geq}^p$, 存在

$$\mu = \left(\frac{1}{r_1}, \frac{1}{r_2}, \dots, \frac{1}{r_p} \right)^T \in \text{int}\mathbb{R}_{\geq}^p$$

使得 $(\bar{x}, \mathbf{0}_p, 0)$ 是 $(\text{FPS}(a, r, \mu))$ 的最优解, 其中 $a = f(\bar{x})$.

注 3.4 在上述定理中, r 必须在 $\text{int}\mathbb{R}_{\geq}^p$ 中选取. 如果 r 取自于 $\text{bd}\mathbb{R}_{\geq}^p \setminus \{\mathbf{0}_p\}$, 则将不会存在 $\mu \in \mathbb{R}_{\geq}^p$ 使得 $(\bar{x}, \mathbf{0}_p, 0)$ 是 $(\text{FPS}(a, r, \mu))$ 的最优解, 其中 $a = f(\bar{x})$. 下面举例说明.

例 3.2 考虑一个双目标优化问题, 其可行域为 $\mathcal{X} = \{x = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2 : x_2 = -x_1^3, x_1 \in \mathbb{R}\}$, 目标函数为 $f(x) = x$. 容易验证 $\bar{x} = (0, 0)^T \in \mathcal{X}$ 是该双目标优化问题的有效解. 考虑下面两种情形:

情形 1 $r = (r_1, 0)^T \in \text{bd}\mathbb{R}_{\geq}^2 \setminus \{\mathbf{0}_2\}$. 令 $a = f(\bar{x})$. 任取 $\mu = (\mu_1, \mu_2)^T \in \mathbb{R}_{\geq}^2$, 则对应的标量化问题 $(\text{FPS}(a, r, \mu))$ 为

$$\begin{aligned} \min \quad & t + \sum_{i=1}^2 \mu_i s_i \\ \text{s.t.} \quad & \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_1^3 \end{pmatrix} \leq t \begin{pmatrix} r_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}, \\ & x_1 \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad s \in \mathbb{R}_{\geq}^2. \end{aligned}$$

取

$$\hat{x} = (-(r_1\mu_2 + 1)^{-\frac{1}{2}}, (r_1\mu_2 + 1)^{-\frac{3}{2}})^T \in \mathcal{X}, \quad \hat{s} = (0, (r_1\mu_2 + 1)^{-\frac{3}{2}})^T \in \mathbb{R}_{\geq}^2, \quad \hat{t} = -\frac{(r_1\mu_2 + 1)^{-\frac{1}{2}}}{r_1}.$$

显然, $(\hat{x}, \hat{s}, \hat{t})$ 是 $(\text{FPS}(a, r, \mu))$ 的可行解, 且

$$\hat{t} + \sum_{i=1}^2 \mu_i \hat{s}_i = \frac{(r_1\mu_2 + 1)^{-\frac{1}{2}}}{r_1} [r_1\mu_2(r_1\mu_2 + 1)^{-1} - 1] < 0,$$

其中 0 是 $(\text{FPS}(a, r, \mu))$ 在可行解 $(\bar{x}, \mathbf{0}_2, 0)$ 处的目标函数值.

情形 2 $r = (0, r_2)^T \in \text{bd}\mathbb{R}_{\geq}^2 \setminus \{\mathbf{0}_2\}$. 令 $a = f(\bar{x})$. 任取 $\mu = (\mu_1, \mu_2)^T \in \mathbb{R}_{\geq}^2$, 则对应的标量化问题 $(\text{FPS}(a, r, \mu))$ 为

$$\min \quad t + \sum_{i=1}^2 \mu_i s_i$$

$$\begin{aligned} \text{s.t. } \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_1^3 \end{pmatrix} &\leq t \begin{pmatrix} 0 \\ r_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}, \\ x_1 &\in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad s \in \mathbb{R}_{\geq}^2. \end{aligned}$$

取

$$\hat{x} = ((r_2\mu_1 + 1)^{\frac{1}{2}}, -(r_2\mu_1 + 1)^{\frac{3}{2}})^T \in \mathcal{X}, \quad \hat{s} = ((r_2\mu_1 + 1)^{\frac{1}{2}}, 0)^T \in \mathbb{R}_{\geq}^2, \quad \hat{t} = -\frac{(r_2\mu_1 + 1)^{\frac{3}{2}}}{r_2}.$$

容易验证 $(\hat{x}, \hat{s}, \hat{t})$ 是 $(\text{FPS}(a, r, \mu))$ 的可行解, 且

$$\hat{t} + \sum_{i=1}^2 \mu_i \hat{s}_i = -\frac{(r_2\mu_1 + 1)^{\frac{1}{2}}}{r_2} < 0,$$

其中 0 是 $(\text{FPS}(a, r, \mu))$ 在可行解 $(\bar{x}, \mathbf{0}_2, 0)$ 处的目标函数值.

结合上述两种情形可知, 对任意的 $r \in \text{bd}\mathbb{R}_{\geq}^2 \setminus \{\mathbf{0}_2\}$, 不存在 $\mu \in \mathbb{R}_{\geq}^2$ 使得 $(\bar{x}, \mathbf{0}_2, 0)$ 是对应标量化问题 $(\text{FPS}(a, r, \mu))$ 的最优解, 其中 $a = f(\bar{x})$. 因此, 上述定理改进了文献 [28, 定理 3.4].

下面引理对建立多目标优化问题 (MOP) 真有效解的充分条件起着重要作用.

引理 3.1 设 $(\bar{x}, \bar{s}, \bar{t})$ 是 $(\text{FPS}(a, r, \mu))$ 的最优解. 如果 $\mu > \mathbf{0}_p$ 且 $\bar{s} > \mathbf{0}_p$, 则 $f(\bar{x}) = a + \bar{t}r + \bar{s}$, 即对每个 $i \in \{1, 2, \dots, p\}$, 有 $f_i(\bar{x}) = a_i + \bar{t}r_i + \bar{s}_i$.

证明 反设存在某个 $i_0 \in \{1, 2, \dots, p\}$ 使得 $f_{i_0}(\bar{x}) < a_{i_0} + \bar{t}r_{i_0} + \bar{s}_{i_0}$. 注意到 $\bar{s} > \mathbf{0}_p$, 则存在正实数 δ_{i_0} 使得 $\bar{s}_{i_0} - \delta_{i_0} \geq 0$ 且 $f_{i_0}(\bar{x}) \leq a_{i_0} + \bar{t}r_{i_0} + (\bar{s}_{i_0} - \delta_{i_0})$. 定义

$$\hat{s}_i := \begin{cases} \bar{s}_{i_0} - \delta_{i_0}, & i = i_0, \\ \bar{s}_i, & i \neq i_0. \end{cases} \quad (3.7)$$

显然, $(\bar{x}, \hat{s}, \bar{t})$ 是 $(\text{FPS}(a, r, \mu))$ 的可行解. 因为 $\mu_i > 0$ ($i \in \{1, 2, \dots, p\}$) 且 $\delta_{i_0} > 0$, (3.7) 蕴涵

$$\bar{t} + \sum_{i=1}^p \mu_i \hat{s}_i = \bar{t} + \sum_{i=1}^p \mu_i \bar{s}_i - \mu_{i_0} \delta_{i_0} < \bar{t} + \sum_{i=1}^p \mu_i \bar{s}_i,$$

与 $(\bar{x}, \bar{s}, \bar{t})$ 是 $(\text{FPS}(a, r, \mu))$ 的最优解矛盾. $\square$

基于引理 3.1, 给出 (MOP) 的真有效解的充分条件.

定理 3.5 设 $(\bar{x}, \bar{s}, \bar{t})$ 是 $(\text{FPS}(a, r, \mu))$ 的最优解. 如果 $\mu > \mathbf{0}_p$ 且 $\bar{s} > \mathbf{0}_p$, 则 $\bar{x}$ 是 (MOP) 的真有效解.

证明 由文献 [28, 定理 3.3] 知, $\bar{x}$ 是 (MOP) 的有效解. 接下来证明 $\bar{x}$ 是 (MOP) 的真有效解. 反设 $\bar{x}$ 不是 (MOP) 的真有效解. 取一序列 $\{M_k : k \in \mathbb{N}\} : \lim_{k \rightarrow \infty} M_k = +\infty$, 其中 $\mathbb{N}$ 是正整数集. 对每个 M_k , 存在满足 $f_i(x^k) < f_i(\bar{x})$ 的 $x^k \in \mathcal{X}$ 和 $i \in \{1, 2, \dots, p\}$ 使得对每个满足 $f_j(x^k) > f_j(\bar{x})$ 的 $j \in \{1, 2, \dots, p\}$, 有

$$\frac{f_i(\bar{x}) - f_i(x^k)}{f_j(x^k) - f_j(\bar{x})} > M_k. \quad (3.8)$$

定义集合

$$J'(k) := \{j \in \{1, 2, \dots, p\} : f_j(x^k) < f_j(\bar{x})\}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

显然, 对任意的 $k \in \mathbb{N}$, $J'(k) \neq \emptyset$. 记 $P = \{1, 2, \dots, p\}$. 定义映射 $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow 2^P$ 为 $\varphi(k) = J'(k)$, $k \in \mathbb{N}$, 即映射 φ 将一个无限集映射到一个有限集. 由于每个 $J'(k)$ 非空, 故存在 $\mathbb{N}$ 的一个无限子集 $\mathbb{N}'$ 和 P 的一个子集 P_l , 使得对任意的 $k \in \mathbb{N}'$, 有 $\varphi(k) = J'(k) = P_l$, 即存在 $\mathbb{N}$ 的一个无限子集 $\mathbb{N}'$ 使得对任意的 $k \in \mathbb{N}'$, $J'(k)$ 是非空常数集. 定义集合

$$J(k) := \{j \in \{1, 2, \dots, p\} : f_j(x^k) > f_j(\bar{x})\}, \quad k \in \mathbb{N}'.$$

类似上述证明过程, 存在 $\mathbb{N}'$ 的一个无限子集 $\mathbb{N}''$ 使得对任意的 $k \in \mathbb{N}''$, $J(k)$ 是非空常数集. 于是, 不失一般性, 假设对任意的 $k \in \mathbb{N}$, $J'(k)$ 和 $J(k)$ 均是非空常数集. 故令

$$J' := \{j \in \{1, 2, \dots, p\} : f_j(x^k) < f_j(\bar{x}), \forall k \in \mathbb{N}\},$$

$$J := \{j \in \{1, 2, \dots, p\} : f_j(x^k) > f_j(\bar{x}), \forall k \in \mathbb{N}\},$$

则 $J' \neq \emptyset$ 且 $J \neq \emptyset$. 选择满足 (3.8) 的 $i \in J'$. 由于 $f(\mathcal{X})$ 有界, 则有界集 $\{f_i(\bar{x}) - f_i(x^k)\}$ 存在收敛子列. 不失一般性, 假设

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (f_i(\bar{x}) - f_i(x^k)) = d_0, \quad (3.9)$$

其中 $d_0 \geq 0$. 结合 (3.8) 和 (3.9), 有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (f_j(x^k) - f_j(\bar{x})) = 0. \quad (3.10)$$

根据引理 3.1, (3.9) 和 (3.10) 分别变为

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (a_i + \bar{t}r_i + \bar{s}_i - f_i(x^k)) = d_0, \quad (3.11)$$

和

$$\lim_{k \rightarrow \infty} [f_j(x^k) - (a_j + \bar{t}r_j + \bar{s}_j)] = 0. \quad (3.12)$$

考虑下面两种情形:

情形 1 $d_0 > 0$. 取实数 δ 满足 $0 < \delta < d_0$ 和

$$\bar{s}_i - \delta \geq 0. \quad (3.13)$$

令 ϵ 满足

$$0 < \epsilon < \frac{\delta \cdot \min_{1 \leq j \leq p} \mu_j}{2|J| \cdot \max_{1 \leq j \leq p} \mu_j}, \quad (3.14)$$

其中 $|J|$ 表示集合 J 的元素个数, 则由 (3.11) 和 (3.12) 知, 存在正整数 K 使得对任意的 $k > K$, 有

$$f_i(x^k) < a_i + \bar{t}r_i + \bar{s}_i - \delta + \epsilon, \quad (3.15)$$

$$f_j(x^k) < a_j + \bar{t}r_j + \bar{s}_j + \epsilon. \quad (3.16)$$

选取某个 $k' > K$, 并定义

$$\hat{s}_j := \begin{cases} \bar{s}_j - \delta + \epsilon, & j = i, \\ \bar{s}_j + \epsilon, & j \in J, \\ \bar{s}_j, & j \notin J \cup \{i\}. \end{cases} \quad (3.17)$$

结合 (3.13) 和 (3.15)–(3.17), 易知 $(x^{k'}, \hat{s}, \bar{t})$ 是 $(\text{FPS}(a, r, \mu))$ 的可行解, 且

$$\bar{t} + \sum_{j=1}^p \mu_j \hat{s}_j = \bar{t} + \sum_{j=1}^p \mu_j \bar{s}_j + \left[\epsilon \left(\sum_{j \in J} \mu_j + \mu_i \right) - \delta \mu_i \right].$$

由 (3.14), 有

$$\bar{t} + \sum_{j=1}^p \mu_j \hat{s}_j < \bar{t} + \sum_{j=1}^p \mu_j \bar{s}_j,$$

与 $(\bar{x}, \bar{s}, \bar{t})$ 是 $(\text{FPS}(a, r, \mu))$ 的最优解矛盾.

情形 2 $d_0 = 0$. 由于 $\bar{s}_i > 0$, 因此,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [(a_i + \bar{t}r_i + \bar{s}_i) - f_i(x^k)] = \lim_{n \rightarrow \infty} (f_i(\bar{x}) - f_i(x^k)) < \bar{s}_i. \quad (3.18)$$

根据 (3.8) 和 (3.18), 对于满足

$$\epsilon < \frac{\min_{1 \leq j \leq p} \mu_j}{|J| \cdot \max_{1 \leq j \leq p} \mu_j} \quad (3.19)$$

的正数 ϵ , 存在正整数 K 使得对任意的 $k > K$, 有

$$f_j(x^k) - (a_j + \bar{t}r_j + \bar{s}_j) < \epsilon(f_i(\bar{x}) - f_i(x^k)), \quad \forall j \in J$$

和

$$0 < f_i(\bar{x}) - f_i(x^k) < \bar{s}_i. \quad (3.20)$$

选取某个大于 K 的正整数 k' , 有

$$f_j(x^{k'}) < a_j + \bar{t}r_j + [\bar{s}_j + \epsilon(f_i(\bar{x}) - f_i(x^{k'}))], \quad \forall j \in J \quad (3.21)$$

和

$$f_i(x^{k'}) = a_i + \bar{t}r_i + [\bar{s}_i - (f_i(\bar{x}) - f_i(x^{k'}))], \quad (3.22)$$

定义

$$\hat{s}_j := \begin{cases} \bar{s}_j - (f_i(\bar{x}) - f_i(x^{k'})), & j = i, \\ \bar{s}_j + \epsilon(f_i(\bar{x}) - f_i(x^{k'})), & j \in J, \\ \bar{s}_j, & j \notin J \cup \{i\}. \end{cases} \quad (3.23)$$

结合 (3.20)–(3.23) 可知, $(x^{k'}, \hat{s}, \bar{t})$ 是 $(\text{FPS}(a, r, \mu))$ 的可行解, 且

$$\bar{t} + \sum_{j=1}^p \mu_j \hat{s}_j = \bar{t} + \sum_{j=1}^p \mu_j \bar{s}_j + (f_i(\bar{x}) - f_i(x^{k'})) \left[\epsilon \sum_{j \in J} \mu_j - \mu_i \right].$$

根据 (3.19), 有

$$\bar{t} + \sum_{j=1}^p \mu_j \hat{s}_j < \bar{t} + \sum_{j=1}^p \mu_j \bar{s}_j,$$

与 $(\bar{x}, \bar{s}, \bar{t})$ 是 $(\text{FPS}(a, r, \mu))$ 的最优解矛盾.

综合上述两种情形, $\bar{x}$ 是 (MOP) 的真有效解. □

注 3.5 上述关于 (MOP) 真有效解的充分条件是由 Akbari 等^[28] 给出的. 然而, 文献 [28] 中的证明存在缺陷. 事实上, 当正数 M 任意取定时, 存在满足 $f_i(x) < f_i(\bar{x})$ 的 $x \in \mathcal{X}$ 和 $i \in \{1, 2, \dots, p\}$. 从而, 存在正实数 d 使得 $f_i(\bar{x}) = f_i(x) + d$. 注意到 d 依赖 M . 但是, Akbari 等下一步令

$$M = 2|J|d \cdot \frac{\max_{1 \leq j \leq p} \mu_j}{\delta \min_{1 \leq j \leq p} \mu_j}.$$

显然, 这是不合理的. 而我们给出了合理的证明.

下面例子表明定理 3.5 中的条件 $\mu > \mathbf{0}_p$ 和 $\bar{s} > \mathbf{0}_p$ 缺一不可, 否则定理 3.5 的结论不一定成立.

例 3.3 考虑一个双目标优化问题 $\min_{x \in \mathcal{X}} f(x) = (f_1(x), f_2(x))^T$, 其可行域为 $\mathcal{X} = [0, 1] \subset \mathbb{R}$, $f_1(x) = -x$, $f_2(x) = x^2$. 取

$$a = (0, 0)^T \in \mathbb{R}_{\geq}^2, \quad r = (1, 1)^T \in \text{int}\mathbb{R}_{\geq}^2, \quad \mu = (1, 1)^T \in \text{int}\mathbb{R}_{\geq}^2,$$

则对应的标量化问题 $(\text{FPS}(a, r, \mu))$ 为

$$\begin{aligned} & \min t + s_1 + s_2 \\ & \text{s.t.} \begin{pmatrix} -x \\ x^2 \end{pmatrix} \leq t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}, \\ & x \in \mathcal{X}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad s \in \mathbb{R}_{\geq}^2. \end{aligned}$$

考虑两种情形: 若 $-x - s_1 \geq x^2 - s_2$, 则

$$t + s_1 + s_2 \geq -x - s_1 + s_1 + s_2 = -x + s_2 \geq x^2 + s_1 \geq 0; \quad (3.24)$$

若 $-x - s_1 < x^2 - s_2$, 则

$$t + s_1 + s_2 \geq x^2 - s_2 + s_1 + s_2 = x^2 + s_1 \geq 0. \quad (3.25)$$

现令 $\bar{x} = 0 \in \mathcal{X}$, $\bar{s} = (0, 0)^T \in \mathbb{R}_{\geq}^2$, $\bar{t} = 0$. 结合 (3.24) 和 (3.25), 易知 $(\bar{x}, \bar{s}, \bar{t})$ 是标量化问题 $(\text{FPS}(a, r, \mu))$ 的最优解. 然而 $\bar{x} = 0$ 不是该双目标优化问题的真有效解.

定理 3.2 和 3.4 给出了 $\bar{x}$ 是 (MOP) 的 (弱) 有效解的必要条件: 存在 $r \in \text{int}\mathbb{R}_{\geq}^p$ 和 $\mu \in \text{int}\mathbb{R}_{\geq}^p$ 使得 $(\bar{x}, \mathbf{0}_p, 0)$ 是 $(\text{FPS}(a, r, \mu))$ 的最优解, 其中 $a = f(\bar{x})$. 进一步地, 如果 $\bar{x}$ 加强为 (MOP) 的真有效解, 则存在 $r \in \mathbb{R}_{\geq}^p \setminus \{\mathbf{0}_p\}$ 和 $\mu \in \mathbb{R}_{\geq}^p$ 使得 $(\bar{x}, \mathbf{0}_p, 0)$ 是 $(\text{FPS}(a, r, \mu))$ 的最优解, 其中 $a = f(\bar{x})$. 这里的 r 可以选取为 $\mathbb{R}_{\geq}^p$ 边界上的非零向量. 见下面定理.

定理 3.6 若 $\bar{x}$ 是 (MOP) 的真有效解, 则存在 $r \in \mathbb{R}_{\geq}^p \setminus \{\mathbf{0}_p\}$ 和 $\mu \in \text{int}\mathbb{R}_{\geq}^p$ 使得 $(\bar{x}, \mathbf{0}_p, 0)$ 是 $(\text{FPS}(a, r, \mu))$ 的最优解, 其中 $a = f(\bar{x})$.

证明 情形 1 $r \in \text{int}\mathbb{R}_{\geq}^p$. 根据定理 3.2 可知, 存在 $\mu \in \text{int}\mathbb{R}_{\geq}^p$ 使得 $(\bar{x}, \mathbf{0}_p, 0)$ 是 $(\text{FPS}(a, r, \mu))$ 的可行解, 其中 $a = f(\bar{x})$.

情形 2 $r \in \text{bd}\mathbb{R}_{\geq}^p \setminus \{\mathbf{0}_p\}$. 因为 $\bar{x}$ 是 (MOP) 的真有效解, 所以存在某个正实数 M 使得对满足 $f_i(x) < f_i(\bar{x})$ 的每个 $x \in \mathcal{X}$ 和 $i \in \{1, 2, \dots, p\}$, 都存在满足 $f_j(x) > f_j(\bar{x})$ 的某个 $j \in \{1, 2, \dots, p\}$ 使得

$$\frac{f_i(\bar{x}) - f_i(x)}{f_j(x) - f_j(\bar{x})} \leq M. \quad (3.26)$$

不失一般性, 假设 $M \geq p$.

令 r 的非零分量等于 M , 且令 $\mu = (M, M, \dots, M)^T \in \text{int}\mathbb{R}_{\geq}^p$. 显然, $(\bar{x}, \mathbf{0}_p, 0)$ 是 $(\text{FPS}(a, r, \mu))$ 的可行解, 其中 $a = f(\bar{x})$. 现任取 $(\text{FPS}(a, r, \mu))$ 的可行解 (x, t, s) . 考虑如下两种情形:

情形 2.1 $t \geq 0$. 因为 $\mu \in \text{int}\mathbb{R}_{\geq}^p$ 且 $s \in \mathbb{R}_{\geq}^p$, 所以, $t + \sum_{i=1}^p \mu_i s_i \geq 0$.

情形 2.2 $t < 0$. 注意到 $r \in \mathbb{R}_{\geq}^p \setminus \{\mathbf{0}_p\}$, 则存在某个 $i \in \{1, 2, \dots, p\}$ 使得 $r_i > 0$. 从而,

$$t \geq \frac{f_i(x) - f_i(\bar{x}) - s_i}{r_i},$$

且

$$\begin{aligned} t + \sum_{i=1}^p \mu_i s_i &\geq \frac{f_i(x) - f_i(\bar{x}) - s_i}{r_i} + \sum_{i=1}^p \mu_i s_i \\ &= \frac{f_i(x) - f_i(\bar{x})}{r_i} + \left(\mu_i - \frac{1}{r_i}\right)s_i + \sum_{j \neq i} \mu_j s_j. \end{aligned} \quad (3.27)$$

如果 $f_i(x) - f_i(\bar{x}) \geq 0$, 则由 (3.27) 和 $\mu_i = r_i = M \geq p$, 有 $t + \sum_{i=1}^p \mu_i s_i \geq 0$. 如果 $f_i(x) - f_i(\bar{x}) < 0$, 则由 (3.26) 可知, 存在满足 $f_j(x) > f_j(\bar{x})$ 的某个 j 使得

$$f_i(x) - f_i(\bar{x}) \geq -M(f_j(x) - f_j(\bar{x})). \quad (3.28)$$

注意到 $t < 0$, 有 $f_j(x) - f_j(\bar{x}) - tr_j > 0$ 且 $s_j \geq f_j(x) - f_j(\bar{x}) - tr_j$. 结合 (3.27) 和 (3.28), 可得

$$\begin{aligned} t + \sum_{i=1}^p \mu_i s_i &\geq -\frac{M}{r_i}(f_j(x) - f_j(\bar{x})) + \left(\mu_i - \frac{1}{r_i}\right)s_i + \sum_{j \neq i} \mu_j s_j \\ &\geq -\frac{M}{r_i}(f_j(x) - f_j(\bar{x})) + \left(\mu_i - \frac{1}{r_i}\right)s_i + \mu_j s_j \\ &\geq -\frac{M}{r_i}(f_j(x) - f_j(\bar{x})) + \left(\mu_i - \frac{1}{r_i}\right)s_i + \mu_j(f_j(x) - f_j(\bar{x}) - tr_j) \\ &\geq -\frac{M}{r_i}(f_j(x) - f_j(\bar{x})) + \left(\mu_i - \frac{1}{r_i}\right)s_i + \mu_j(f_j(x) - f_j(\bar{x})) \\ &= \left(\mu_j - \frac{M}{r_i}\right)(f_j(x) - f_j(\bar{x})) + \left(\mu_i - \frac{1}{r_i}\right)s_i \\ &= (M - 1)(f_j(x) - f_j(\bar{x})) + \left(M - \frac{1}{M}\right)s_i \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

综上所述, 存在 $r \in \text{bd}\mathbb{R}_{\geq}^p \setminus \{\mathbf{0}_p\}$ 和 $\mu \in \text{int}\mathbb{R}_{\geq}^p$ 使得 $(\bar{x}, \mathbf{0}_p, 0)$ 是 $(\text{FPS}(a, r, \mu))$ 的最优解, 其中 $a = f(\bar{x})$. $\square$

注 3.6 值得注意的是, 在文献 [28, 定理 3.6] 的证明中, Akbari 等取

$$\mu_i := M, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, p\} \quad (3.29)$$

和

$$r_i := \begin{cases} \frac{1}{M}, & i \notin \{j : f_j(x) < f_j(\bar{x})\}, \\ 0, & i \in \{j : f_j(x) < f_j(\bar{x})\}, \end{cases} \quad (3.30)$$

其中 M 是真有效解定义中的正常数. 显然, 这里的 r 依赖于 x 的选择. 因此, r 的选取不一定能够保证 $(\bar{x}, \mathbf{0}_p, 0)$ 是 $(\text{FPS}(a, r, \mu))$ 的最优解, 其中 $a = f(\bar{x})$. 见如下例子.

例 3.4 考虑一个双目标优化问题, 其可行域为

$$\mathcal{X} = \{x = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2 : x_2 = -2x_1, x_1 \in \mathbb{R}\}$$

且目标函数为 $f(x) = x$. 显然, $\bar{x} = (0, 0)^T \in \mathcal{X}$ 是该双目标优化问题的真有效解且真有效解常数 $M = 2$.

现取 $x = (-1, 2)^T \in \mathcal{X}$. 由 (3.29) 和 (3.30) 易知, $\mu = (2, 2)^T \in \mathbb{R}_{\geq}^2$, $r = (0, \frac{1}{2})^T \in \mathbb{R}_{\geq}^2$, $a = f(\bar{x})$. 对应的标量化问题 $(\text{FPS}(a, r, \mu))$ 为

$$\begin{aligned} \min \quad & t + 2s_1 + 2s_2 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}, \\ & x \in \mathcal{X}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad s \in \mathbb{R}_{\geq}^2. \end{aligned}$$

令

$$\hat{x} = (1, -2)^T \in \mathcal{X}, \quad \hat{s} = (1, 0)^T \in \mathbb{R}_{\geq}^2, \quad \hat{t} = -4.$$

显然, $(\hat{x}, \hat{s}, \hat{t})$ 是 $(\text{FPS}(a, r, \mu))$ 的可行解, 且 $\hat{t} + 2s_1 + 2s_2 = -2 < 0$, 其中 0 是 $(\text{FPS}(a, r, \mu))$ 在可行解 $(\bar{x}, \mathbf{0}_2, 0)$ 处的目标函数值. 这表明 $(\bar{x}, \mathbf{0}_2, 0)$ 不是此时对应的标量化问题 $(\text{FPS}(a, r, \mu))$ 的最优解.

本节最后, 利用表 1 和 2 总结 (MOP) 的 (弱、真) 有效解与弹性 Pascoletti-Serafini 标量化问题 $(\text{FPS}(a, r, \mu))$ 的最优解间的关系.

表 1 (MOP) 的 (弱、真) 有效解的充分条件

相关定理	参数和条件	结论
定理 3.1	$r \geq \mathbf{0}_p$ 且 $\mu \geq \mathbf{0}_p$	$\bar{x} \in \mathcal{X}_{WE}$
定理 3.3	$r \geq \mathbf{0}_p, \mu \geq \mathbf{0}_p$ 且 $(a + \bar{t}r + \bar{s} - \text{bd}\mathbb{R}_{\geq}^p) \cap (f(\bar{x}) - \text{bd}\mathbb{R}_{\geq}^p) \cap f(\mathcal{X}) = \{f(\bar{x})\}$	$\bar{x} \in \mathcal{X}_E$
定理 3.5	$r \geq \mathbf{0}_p, \mu > \mathbf{0}_p$ 且 $\bar{s} > \mathbf{0}_p$	$\bar{x} \in \mathcal{X}_{PE}$

表 2 (MOP) 的 (弱、真) 有效解的必要条件

相关定理	解的类型	$(\text{FPS}(a, r, \mu))$ 的最优解
定理 3.2	$\bar{x} \in \mathcal{X}_{WE}$	对任意的 $r > \mathbf{0}_p$, 存在 $\mu > \mathbf{0}_p$ 使得 $(\bar{x}, \mathbf{0}_p, 0)$ 是 $\text{FPS}(a, r, \mu)$ 的最优解, 其中 $a = f(\bar{x})$
定理 3.4	$\bar{x} \in \mathcal{X}_E$	对任意的 $r > \mathbf{0}_p$, 存在 $\mu > \mathbf{0}_p$ 使得 $(\bar{x}, \mathbf{0}_p, 0)$ 是 $\text{FPS}(a, r, \mu)$ 的最优解, 其中 $a = f(\bar{x})$
定理 3.6	$\bar{x} \in \mathcal{X}_{PE}$	存在 $r \geq \mathbf{0}_p$ 和 $\mu > \mathbf{0}_p$ 使得 $(\bar{x}, \mathbf{0}_p, 0)$ 是 $\text{FPS}(a, r, \mu)$ 的最优解, 其中 $a = f(\bar{x})$

4 改良 Pascoletti-Serafini 标量化方法

正如第 3 节分析的第一种情形: 当利用标量化问题 $(\text{PS}(a, r))$ 的最优解获得 (MOP) 的 (弱) 有效解 $\bar{x}$ 时, 解必须满足约束条件 $f_i(\bar{x}) \leq a_i + tr_i, \forall i \in \{1, 2, \dots, p\}$. 但是, 如果 (MOP) 是非凸优化问题或者离散优化问题时, 可能对某个 $i_0 \in \{1, 2, \dots, p\}$, 有 $f_{i_0}(\bar{x}) < a_{i_0} + tr_{i_0}$. Akbari 等^[28] 通过添加松弛变量提出了改良 Pascoletti-Serafini 标量化问题:

$$\begin{aligned} (\text{MPS}(a, r, \mu)) \quad & \min t - \sum_{i=1}^p \mu_i s_i \\ \text{s.t.} \quad & a + tr - f(x) - s \in \mathbb{R}_{\geq}^p, \\ & x \in \mathcal{X}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad s \in \mathbb{R}_{\geq}^p, \end{aligned}$$

其中 $a \in \mathbb{R}^p, \mu \in \mathbb{R}_{\geq}^p, r \in \mathbb{R}_{\geq}^p \setminus \{\mathbf{0}_p\}$ 是给定的参数. 事实上, 改良 Pascoletti-Serafini 标量化问题 $(\text{MPS}(a, r, \mu))$ 可以看成是从 Pascoletti-Serafini 标量化问题 $(\text{PS}(a, r))$ 的可行域的内部搜索最优解的一种方法. 由于文献 [28] 对改良 Pascoletti-Serafini 标量化问题 $(\text{MPS}(a, r, \mu))$ 的研究存在不足, 接下来一方面修正其不足, 另一方面深入探讨 $(\text{MPS}(a, r, \mu))$ 的最优解与 (MOP) 的 (弱、真) 有效解间的关系. 首先, 通过 $(\text{MPS}(a, r, \mu))$ 的最优解获得 (MOP) 的弱有效解的充分和必要条件.

定理 4.1 若 $(\bar{x}, \bar{s}, \bar{t})$ 是 $(\text{MPS}(a, r, \mu))$ 的最优解, 则 $\bar{x}$ 是 (MOP) 的弱有效解且 $a + \bar{t}r - f(\bar{x}) - \bar{s} \in \text{bd}\mathbb{R}_{\geq}^p$.

证明 类似定理 3.1 的证明, 故省略. □

定理 4.2 若 $\bar{x}$ 是 (MOP) 的弱有效解, 则对任意的 $r \in \text{int}\mathbb{R}_{\geq}^p, (\bar{x}, \mathbf{0}_p, 0)$ 是 $(\text{MPS}(a, r, \mu))$ 的最优解, 其中 $a = f(\bar{x})$ 且 $\mu = \mathbf{0}_p$.

证明 任取 $(\text{MPS}(a, r, \mu))$ 的可行解 (x, s, t) . 下面证明 $t \geq 0$. 假设 $t < 0$. 由于 (x, s, t) 是 $(\text{MPS}(a, r, \mu))$ 的最优解且 $r \in \text{int}\mathbb{R}_{\geq}^p$, 因此有

$$0 \geq -s_j \geq f_j(x) - f_j(\bar{x}) - tr_j > f_j(x) - f_j(\bar{x}), \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, p\}.$$

从而, $f(x) < f(\bar{x})$, 这与 $\bar{x}$ 是 (MOP) 的弱有效解矛盾. 因此, $t \geq 0$. 这意味着 $(\bar{x}, \mathbf{0}_p, 0)$ 是 $(\text{MPS}(a, r, \mu))$ 的最优解, 其中 $a = f(\bar{x})$ 且 $\mu = \mathbf{0}_p$. □

注 4.1 在定理 4.2 中, 参数 μ 必须取为 $\mathbf{0}_p$. 否则, 定理 4.2 不一定成立. 见如下例子.

例 4.1 考虑一个双目标优化问题, 其可行域为 $\mathcal{X} = \{x = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2 : x_2 = -x_1^3, x_1 \in \mathbb{R}\}$, 目标函数为 $f(x) = x$. 显然, $\bar{x} = (0, 0)^T \in \mathcal{X}$ 是该双目标优化问题的弱有效解. 取 $a = f(\bar{x}), \mu = (\mu_1, \mu_2)^T \in \mathbb{R}_{\geq}^2 \setminus \{\mathbf{0}_2\}, r = (r_1, r_2)^T \in \text{int}\mathbb{R}_{\geq}^2$, 则对应的标量化问题 $(\text{MPS}(a, r, \mu))$ 为

$$\begin{aligned} \min \quad & t - \sum_{i=1}^2 \mu_i s_i \\ \text{s.t.} \quad & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}, \\ & x \in \mathcal{X}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad s \in \mathbb{R}_{\geq}^2. \end{aligned}$$

情形 1 $\sum_{i=1}^2 \mu_i r_i > 1$. 取 $\hat{x} = (0, 0)^T \in \mathcal{X}$, $\hat{s} = (r_1, r_2)^T \in \mathbb{R}_{\geq}^2$, $\hat{t} = 1$. 易知 $(\hat{x}, \hat{s}, \hat{t})$ 是 $(\text{MPS}(a, r, \mu))$ 的可行解, 且

$$\hat{t} - \sum_{i=1}^2 \mu_i r_i < 0,$$

其中 0 是 $(\text{MPS}(a, r, \mu))$ 在可行解 $(\bar{x}, \mathbf{0}_2, 0)$ 处的目标函数值.

情形 2 $\sum_{i=1}^2 \mu_i r_i \leq 1$.

情形 2.1 $\mu \in \text{int}\mathbb{R}_{\geq}^2$, 则对每个的 $i \in \{1, 2\}$, 均有 $\mu_i r_i < 1$. 取 $\hat{x} = (-s_1, s_1^3)^T \in \mathcal{X}$, $\hat{t} = \frac{s_1^3 + s_2}{r_2}$, $\hat{s} = (s_1, s_2)^T \in \mathbb{R}_{\geq}^2$ 满足 $0 < s_1^2 < \mu_1 r_2$ 且 $0 < s_2 < \frac{s_1(\mu_1 r_2 - s_1^2)}{1 - \mu_2 r_2}$. 显然, $(\hat{x}, \hat{s}, \hat{t})$ 是 $(\text{MPS}(a, r, \mu))$ 的可行解, 且

$$\begin{aligned} \hat{t} - \sum_{i=1}^2 \mu_i s_i &= \frac{s_1^3 + s_2}{r_2} - \mu_1 s_1 - \mu_2 s_2 \\ &= \frac{s_1^3 + s_2 - \mu_1 r_2 s_1 - \mu_2 r_2 s_2}{r_2} \\ &< 0, \end{aligned}$$

其中 0 是 $(\text{MPS}(a, r, \mu))$ 在可行解 $(\bar{x}, \mathbf{0}_2, 0)$ 处的目标函数值.

情形 2.2 $\mu \in \text{bd}\mathbb{R}_{\geq}^2 \setminus \{\mathbf{0}_2\}$.

如果 $\mu_2 = 0$, 那么 $\mu_1 > 0$. 该情形参见情形 2.1.

如果 $\mu_1 = 0$, 那么 $\mu_2 > 0$. 取 $\hat{x} = (s_2^{\frac{1}{3}}, -s_2)^T \in \mathcal{X}$, $\hat{t} = \frac{s_2^{\frac{1}{3}} + s_1}{r_1}$, $\hat{s} = (s_1, s_2)^T \in \mathbb{R}_{\geq}^2$ 满足 $s_2 > (\mu_2 r_1)^{-\frac{3}{2}}$ 且 $0 < s_1 < \mu_2 r_1 s_2 - s_2^{\frac{1}{3}}$. 显然, $(\hat{x}, \hat{s}, \hat{t})$ 是 $(\text{MPS}(a, r, \mu))$ 的可行解, 且

$$\begin{aligned} \hat{t} - \sum_{i=1}^2 \mu_i s_i &= \frac{s_2^{\frac{1}{3}} + s_1}{r_1} - \mu_2 s_2 \\ &= \frac{s_2^{\frac{1}{3}} + s_1 - \mu_2 r_1 s_2}{r_1} \\ &< 0, \end{aligned}$$

其中 0 是 $(\text{MPS}(a, r, \mu))$ 在可行解 $(\bar{x}, \mathbf{0}_2, 0)$ 处的目标函数值.

综上所述, 对任意的 $\mu \in \mathbb{R}_{\geq}^2 \setminus \{\mathbf{0}_2\}$, 不存在 $r \in \text{int}\mathbb{R}_{\geq}^2$ 使得 $(\bar{x}, \mathbf{0}_2, 0)$ 是 $(\text{MPS}(a, r, \mu))$ 的最优解, 其中 $a = f(\bar{x})$.

类似定理 3.3, 利用 $(\text{MPS}(a, r, \mu))$ 的最优解, 可获得 (MOP) 有效解的一个判别准则.

定理 4.3 设 $(\bar{x}, \bar{s}, \bar{t})$ 是 $(\text{MPS}(a, r, \mu))$ 的最优解, 则 $\bar{x}$ 是 (MOP) 的有效解当且仅当

$$(a + \bar{t}r - \bar{s} - \text{bd}\mathbb{R}_{\geq}^p) \cap (f(\bar{x}) - \text{bd}\mathbb{R}_{\geq}^p) \cap f(\mathcal{X}) = \{f(\bar{x})\}.$$

基于定理 4.2, 可通过 (MOP) 的有效解获得 $(\text{MPS}(a, r, \mu))$ 的最优解.

定理 4.4 若 $\bar{x}$ 是 (MOP) 的有效解, 则对任意的 $r \in \mathbb{R}_{\geq}^p \setminus \{\mathbf{0}_p\}$, $(\bar{x}, \mathbf{0}_p, 0)$ 是 $(\text{MPS}(a, r, \mu))$ 的最优解, 其中 $a = f(\bar{x})$ 且 $\mu = \mathbf{0}_p$.

证明 任取 $(\text{MPS}(a, r, \mu))$ 的可行解 (x, t, s) . 类似定理 4.2 的证明, 有 $t \geq 0$. 故对任意的 $r \in \mathbb{R}_{\geq}^p \setminus \{\mathbf{0}_p\}$, $(\bar{x}, \mathbf{0}_p, 0)$ 是 $(\text{MPS}(a, r, \mu))$ 的最优解, 其中 $a = f(\bar{x})$ 且 $\mu = \mathbf{0}_p$. $\square$

引理 4.1 设 $(\bar{x}, \bar{s}, \bar{t})$ 是 $(\text{MPS}(a, r, \mu))$ 的最优解. 如果 $\mu > \mathbf{0}_p$, 则 $f(\bar{x}) = a + \bar{t}r - \bar{s}$, 即对任意的 $i \in \{1, 2, \dots, p\}$, 有 $f_i(\bar{x}) = a_i + \bar{t}r_i - \bar{s}_i$.

证明 类似引理 3.1 的证明, 故省略. $\square$

值得注意的是, 文献 [28, 定理 4.5] 在 $\mu > \mathbf{0}_p$ 和 $a + \bar{t}r - f(\bar{x}) - \bar{s} \in \text{int}\mathbb{R}_{\geq}^p$ 的条件下给出 (MOP) 的真有效解的充分条件. 然而, 由定理 4.1 知, 条件 $a + \bar{t}r - f(\bar{x}) - \bar{s} \in \text{int}\mathbb{R}_{\geq}^p$ 与 $(\bar{x}, \bar{s}, \bar{t})$ 是 $(\text{MPS}(a, r, \mu))$ 的最优解矛盾. 因此, 文献 [28, 定理 4.5] 的条件不能保证 (MOP) 的真有效性. 然而, 当 $\mu > \mathbf{0}_p$ 且 $\bar{s} > \mathbf{0}_p$ 时, 可以获得真有效解的充分条件.

定理 4.5 设 $(\bar{x}, \bar{s}, \bar{t})$ 是 $(\text{MPS}(a, r, \mu))$ 的最优解. 如果 $\mu > \mathbf{0}_p$ 且 $\bar{s} > \mathbf{0}_p$, 则 $\bar{x}$ 是 (MOP) 的真有效解.

证明 类似定理 3.5 的证明, 故省略. $\square$

下面定理是 (MOP) 真有效解的必要条件.

定理 4.6 若 $\bar{x}$ 是 (MOP) 的真有效解, 则存在 $r \in \mathbb{R}_{\geq}^p \setminus \{\mathbf{0}_p\}$ 和 $\mu \in \mathbb{R}_{\geq}^p \setminus \{\mathbf{0}_p\}$ 使得 $(\bar{x}, \mathbf{0}_p, 0)$ 是 $(\text{MPS}(a, r, \mu))$ 的最优解, 其中 $a = f(\bar{x})$.

证明 令 r 的非零分量等于 $\frac{1}{M}$, 且

$$\mu_j := \begin{cases} \frac{1}{M}, & r_j > 0, \\ 0, & r_j = 0, \end{cases} \quad (4.1)$$

其中 M 是真有效解定义中的正常数. 不失一般性, 假设 $M \geq p + 1$.

任取 $(\text{MPS}(a, r, \mu))$ 的可行解 (x, t, s) . 对每个 $-s_i$, 其最小可能取值是 $\min\{0, f_i(x) - f_i(\bar{x}) - tr_i\}$. 因此, 为简单起见, 假设

$$-s_i = \min\{0, f_i(x) - f_i(\bar{x}) - tr_i\}, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, p\}. \quad (4.2)$$

由定理 4.4 知 $t \geq 0$. 定义集合 $I = \{i \in \{1, 2, \dots, p\} : f_i(x) - f_i(\bar{x}) - tr_i < 0\}$. 考虑下面两种情形.

情形 1 $I = \emptyset$. 此时,

$$0 \geq -s_i \geq f_i(x) - f_i(\bar{x}) - tr_i \geq 0, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, p\}.$$

从而, $t - \sum_{i=1}^p \mu_i s_i = t \geq 0$.

情形 2 $I \neq \emptyset$. 接下来考虑两种子情形.

情形 2.1 对任意的 $i \in I$, 有 $f_i(x) \geq f_i(\bar{x})$, 则由 (4.2), 有

$$\begin{aligned} t - \sum_{i=1}^p \mu_i s_i &= t + \sum_{i \in I} \mu_i (f_i(x) - f_i(\bar{x}) - tr_i) \\ &= \left(1 - \sum_{i \in I} \mu_i r_i\right)t + \sum_{i \in I} \mu_i (f_i(x) - f_i(\bar{x})) \\ &\geq \left(1 - \frac{1}{M}\right)t + \sum_{i \in I} \mu_i (f_i(x) - f_i(\bar{x})) \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

情形 2.2 至少存在一个 $i_0 \in I$ 使得 $f_{i_0}(x) < f_{i_0}(\bar{x})$. 首先证明存在满足 $f_{j_0}(x) > f_{j_0}(\bar{x})$ 的某个 $j_0 \in \{1, 2, \dots, p\}$ 使得

$$f_i(x) - f_i(\bar{x}) \geq -M(f_{j_0}(x) - f_{j_0}(\bar{x})), \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, p\}. \quad (4.3)$$

事实上, 由于 $\bar{x}$ 是真有效解, 则对任意满足 $f_i(x) < f_i(\bar{x})$ 的 $i \in \{1, 2, \dots, p\}$, 存在满足 $f_j(x) > f_j(\bar{x})$ 的 j , 使得

$$\frac{f_i(\bar{x}) - f_i(x)}{f_j(x) - f_j(\bar{x})} \leq M,$$

即

$$f_i(\bar{x}) - f_i(x) \leq M(f_j(x) - f_j(\bar{x})), \quad \forall i \in \{i \in \{1, 2, \dots, p\} : f_i(\bar{x}) > f_i(x)\}.$$

令 $f_{j_0}(x) - f_{j_0}(\bar{x}) = \max_{j \in \{1, 2, \dots, p\}} (f_j(x) - f_j(\bar{x}))$, 则

$$f_i(\bar{x}) - f_i(x) \leq M(f_{j_0}(x) - f_{j_0}(\bar{x})), \quad \forall i \in \{i \in \{1, 2, \dots, p\} : f_i(\bar{x}) > f_i(x)\}, \quad (4.4)$$

且

$$f_j(\bar{x}) - f_j(x) \leq 0 \leq M(f_{j_0}(x) - f_{j_0}(\bar{x})), \quad \forall j \in \{j \in \{1, 2, \dots, p\} : f_i(\bar{x}) \leq f_i(x)\}. \quad (4.5)$$

结合 (4.4) 和 (4.5), 易得 $f_i(\bar{x}) - f_i(x) \leq M(f_{j_0}(x) - f_{j_0}(\bar{x})), \forall i \in \{1, 2, \dots, p\}$. 故存在满足 $f_{j_0}(x) > f_{j_0}(\bar{x})$ 的某个 $j_0 \in \{1, 2, \dots, p\}$ 使得 (4.3) 成立.

下面说明 $r_{j_0} > 0$. 否则 $f_{j_0}(\bar{x}) + tr_{j_0} - s_{j_0} - f_{j_0}(x) = f_{j_0}(\bar{x}) - s_{j_0} - f_{j_0}(x) < 0$, 与 (x, t, s) 是 $(\text{MPS}(a, r, \mu))$ 的可行解矛盾. 从而,

$$t \geq \frac{f_{j_0}(x) - f_{j_0}(\bar{x}) + s_{j_0}}{r_{j_0}} \geq \frac{f_{j_0}(x) - f_{j_0}(\bar{x})}{r_{j_0}}. \quad (4.6)$$

结合 (4.2)、(4.3) 和 (4.6), 有

$$\begin{aligned} t - \sum_{i=1}^p \mu_i s_i &= \left(1 - \sum_{i \in I} \mu_i r_i\right) t + \sum_{i \in I} \mu_i (f_j(x) - f_j(\bar{x})) \\ &\geq \frac{1 - \sum_{i \in I} \mu_i r_i}{r_{j_0}} \cdot (f_{j_0}(x) - f_{j_0}(\bar{x})) - M \sum_{i \in I} \mu_i (f_{j_0}(x) - f_{j_0}(\bar{x})) \\ &= \left[\frac{1 - \sum_{i \in I} \mu_i r_i}{r_{j_0}} - M \sum_{i \in I} \mu_i \right] (f_{j_0}(x) - f_{j_0}(\bar{x})) \\ &\geq \left(M - \frac{p}{M} - p \right) \cdot (f_{j_0}(x) - f_{j_0}(\bar{x})) \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

综上所述, 存在 $r \in \mathbb{R}_{\geq}^p \setminus \{\mathbf{0}_p\}$ 和 $\mu \in \mathbb{R}_{\geq}^p$ 使得 $(\bar{x}, \mathbf{0}_p, 0)$ 是 $(\text{FPS}(a, r, \mu))$ 的最优解, 其中 $a = f(\bar{x})$. $\square$

注 4.2 文献 [28, 定理 4.6] 的证明过程中, Akbari 等取

$$\mu_i := \begin{cases} \frac{1}{M(p-1)}, & i \notin \{j : f_j(x) > f_j(\bar{x})\}, \\ 1, & i \in \{j : f_j(x) > f_j(\bar{x})\} \end{cases} \quad (4.7)$$

和

$$r_i := \frac{1}{p\mu_i}, \quad (4.8)$$

其中 M 是真有效解定义中的正常数. 显然, μ 和 r 依赖于 x 的选取. 因此, 此时的 μ 和 r 不一定能够保证 $(\bar{x}, \mathbf{0}_p, 0)$ 是 $(\text{MPS}(a, r, \mu))$ 的最优解, 其中 $a = f(\bar{x})$. 见如下例子.

例 4.2 考虑一个双目标优化问题, 其可行域为 $\mathcal{X} = \{x = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2 : x_2 = -2x_1, x_1 \in \mathbb{R}\}$ 且目标函数为 $f(x) = x$. 取 $\bar{x} = (0, 0) \in \mathcal{X}$. 易知 $\bar{x}$ 是该双目标优化问题的真有效解, 且正常数 $M = 2$.

取 $x = (-1, 2)^T \in \mathcal{X}$. 由 (4.7) 和 (4.8), 有 $\mu = (\frac{1}{2}, 1)^T \in \mathbb{R}_{\geq}^2$, $r = (1, \frac{1}{2})^T \in \mathbb{R}_{\geq}^2$, $a = f(\bar{x})$. 对应的标量化问题 $(\text{MPS}(a, r, \mu))$ 为

$$\begin{aligned} \min \quad & t - \frac{1}{2}s_1 - s_2 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \\ & x \in \mathcal{X}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad s \in \mathbb{R}_{\geq}^2. \end{aligned}$$

令 $\hat{x} = (1, -2)^T \in \mathcal{X}$, $\hat{t} = 1$, $\hat{s} = (0, 2)^T \in \mathbb{R}_{\geq}^2$. 显然, $(\hat{x}, \hat{t}, \hat{s})$ 是 $(\text{FPS}(a, r, \mu))$ 的可行解且

$$\hat{t} - \frac{1}{2}\hat{s}_1 - \hat{s}_2 = -1 < 0,$$

其中 0 是 $(\text{FPS}(a, r, \mu))$ 在可行解 $(\bar{x}, \mathbf{0}_2, 0)$ 处的目标函数值. 这意味着 $(\bar{x}, \mathbf{0}_2, 0)$ 不是此时对应的标量化问题 $(\text{FPS}(a, r, \mu))$ 的最优解.

表 3 和 4 总结了 (MOP) 的 (弱、真) 有效解与 $\text{MPS}(a, r, \mu)$ 的最优解间的关系.

表 3 (MOP) 的 (弱、真) 有效解的充分条件

相关定理	参数和条件	结果
定理 4.1	$r \geq \mathbf{0}_p$ 且 $\mu \geq \mathbf{0}_p$	$\bar{x} \in \mathcal{X}_{WE}$
定理 4.3	$r \geq \mathbf{0}_p$, $\mu \geq \mathbf{0}_p$ 且 $(a + \bar{t}r + \bar{s} - \text{bd}\mathbb{R}_{\geq}^p) \cap (f(\bar{x}) - \text{bd}\mathbb{R}_{\geq}^p) \cap f(\mathcal{X}) = \{f(\bar{x})\}$	$\bar{x} \in \mathcal{X}_E$
定理 4.5	$r \geq \mathbf{0}_p$, $\mu > \mathbf{0}_p$ 且 $\bar{s} > \mathbf{0}_p$	$\bar{x} \in \mathcal{X}_{PE}$

表 4 (MOP) 的 (弱、真) 有效解的必要条件

相关定理	解的类型	$(\text{MPS}(a, r, \mu))$ 的最优解
定理 4.2	$\bar{x} \in \mathcal{X}_{WE}$	存在 $\mu = \mathbf{0}_p$ 和 $a = f(\bar{x})$, 使得对任意的 $r > \mathbf{0}_p$, $(\bar{x}, \mathbf{0}_p, 0)$ 是 $(\text{MPS}(a, r, \mu))$ 的最优解
定理 4.4	$\bar{x} \in \mathcal{X}_E$	存在 $\mu \geq \mathbf{0}_p$ 和 $a = f(\bar{x})$ 使得对任意的 $r \geq \mathbf{0}_p$, $(\bar{x}, \mathbf{0}_p, 0)$ 是 $(\text{MPS}(a, r, \mu))$ 的最优解
定理 4.6	$\bar{x} \in \mathcal{X}_{PE}$	存在 $r \geq \mathbf{0}_p$, $\mu \geq \mathbf{0}_p$ 和 $a = f(\bar{x})$ 使得 $(\bar{x}, \mathbf{0}_p, 0)$ 是 $(\text{MPS}(a, r, \mu))$ 的最优解

5 复合型 Pascoletti-Serafini 标量化方法

本节考虑两类标量化问题 (FPS(a, r, μ)) 和 (MPS(a, r, μ)) 的结合. 该混合型标量化方法由 Akbari 等^[28] 提出, 称其为复合型 Pascoletti-Serafini 标量化问题. 假设 $a \in \mathbb{R}^p$, $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq}^p$, $\mu \in \mathbb{R}_{\geq}^p$ 且 $r \in \mathbb{R}_{\geq}^p \setminus \{\mathbf{0}_p\}$ 是给定的参数. 复合型 Pascoletti-Serafini 标量化问题为

$$\begin{aligned} (\text{RPS}(a, r, \lambda, \mu)) \quad & \min t + \sum_{i=1}^p \lambda_i s_i^+ - \sum_{i=1}^p \mu_i s_i^- \\ \text{s.t.} \quad & a + tr - f(x) + s^+ - s^- \in \mathbb{R}_{\geq}^p, \\ & x \in \mathcal{X}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad s^+ \in \mathbb{R}_{\geq}^p, \quad s^- \in \mathbb{R}_{\geq}^p. \end{aligned}$$

基于 Ehrgott 和 Ruzika^[18] 的工作, 注意到, 对于 (RPS(a, r, λ, μ)) 的任意可行解 (x, s^+, s^-, t) , $(x, s^+ + v, s^- + v, t)$ 仍然是 (RPS(a, r, λ, μ)) 的可行解, 其中 $v \in \mathbb{R}_{\geq}^p$. 从而,

$$t + \sum_{i=1}^p \lambda_i (s_i^+ + v_i) - \sum_{i=1}^p \mu_i (s_i^- + v_i) = t + \sum_{i=1}^p \lambda_i s_i^+ - \sum_{i=1}^p \mu_i s_i^- + \sum_{i=1}^p (\lambda_i - \mu_i) v_i.$$

这意味着 (RPS(a, r, λ, μ)) 的目标函数值依赖于 v . 这里的 v 可在 $\mathbb{R}_{\geq}^p$ 中任意取. 若 $\lambda \not\geq \mu$, 则 (RPS(a, r, λ, μ)) 的目标函数值无下界. 因此, 总假设 $\lambda \geq \mu$.

结合第 3 和 4 节, 容易建立 (RPS(a, r, λ, μ)) 的最优解与 (MOP) 的 (弱、真) 有效解间的关系. 因此省略下面结果的证明过程.

定理 5.1 若 $(\bar{x}, \bar{s}^+, \bar{s}^-, \bar{t})$ 是 (RPS(a, r, λ, μ)) 的最优解, 则 $\bar{x}$ 是 (MOP) 的弱有效解且

$$a + \bar{t}r - f(\bar{x}) + \bar{s}^+ - \bar{s}^- \in \text{bd}\mathbb{R}_{\geq}^p.$$

定理 5.2 若 $\bar{x}$ 是 (MOP) 的弱有效解, 则对任意的 $r = (r_1, r_2, \dots, r_p)^T \in \text{int}\mathbb{R}_{\geq}^p$, 存在

$$\lambda = \left(\frac{1}{r_1}, \frac{1}{r_2}, \dots, \frac{1}{r_p} \right)^T \in \text{int}\mathbb{R}_{\geq}^p$$

使得 $(\bar{x}, \mathbf{0}_p, \mathbf{0}_p, 0)$ 是 (RPS(a, r, λ, μ)) 的最优解, 其中 $a = f(\bar{x})$ 且 $\mu = \mathbf{0}_p$.

定理 5.3 若 $(\bar{x}, \bar{s}^+, \bar{s}^-, \bar{t})$ 是 (RPS(a, r, λ, μ)) 的最优解, 则 $\bar{x}$ 是 (MOP) 的有效解当且仅当

$$(a + \bar{t}r + \bar{s}^+ - \bar{s}^- - \text{bd}\mathbb{R}_{\geq}^p) \cap (f(\bar{x}) - \text{bd}\mathbb{R}_{\geq}^p) \cap f(\mathcal{X}) = \{f(\bar{x})\}.$$

定理 5.4 若 $\bar{x}$ 是 (MOP) 的有效解, 则对任意的 $r = (r_1, r_2, \dots, r_p)^T \in \text{int}\mathbb{R}_{\geq}^p$, 存在

$$\lambda = \left(\frac{1}{r_1}, \frac{1}{r_2}, \dots, \frac{1}{r_p} \right)^T \in \text{int}\mathbb{R}_{\geq}^p$$

使得 $(\bar{x}, \mathbf{0}_p, \mathbf{0}_p, 0)$ 是 (RPS(a, r, λ, μ)) 的最优解, 其中 $a = f(\bar{x})$ 且 $\mu = \mathbf{0}_p$.

引理 5.1 设 $(\bar{x}, \bar{s}^+, \bar{s}^-, \bar{t})$ 是 (RPS(a, r, λ, μ)) 的最优解. 如果 $\lambda > \mathbf{0}_p$ 且 $\bar{s}^+ > \mathbf{0}_p$ (或者 $\mu > \mathbf{0}_p$), 那么

$$f(\bar{x}) = a + \bar{t}r + \bar{s}^+ - \bar{s}^-,$$

即对任意的 $i \in \{1, 2, \dots, p\}$, 有

$$f_i(\bar{x}) = a_i + \bar{t}r_i + \bar{s}_i^+ - \bar{s}_i^-.$$

表 5 (MOP) 的 (弱、真) 有效解的充分条件

相关定理	参数和条件	结果
定理 5.1	$r \geq \mathbf{0}_p, \lambda \geq \mathbf{0}_p$ 且 $\mu \geq \mathbf{0}_p$	$\bar{x} \in \mathcal{X}_{WE}$
定理 5.3	$r \geq \mathbf{0}_p, \lambda \geq \mathbf{0}_p, \mu \geq \mathbf{0}_p$ 且 $(a + \bar{t}r + \bar{s} - \text{bd}\mathbb{R}_{\geq}^p) \cap (f(\bar{x}) - \text{bd}\mathbb{R}_{\geq}^p) \cap f(\mathcal{X}) = \{f(\bar{x})\}$	$\bar{x} \in \mathcal{X}_E$
定理 5.5	$r \geq \mathbf{0}_p, \lambda > \mathbf{0}_p, \bar{s}^+ > \mathbf{0}_p$ 且 $\mu \geq \mathbf{0}_p$ (或者 $r \geq \mathbf{0}_p, \lambda > \mathbf{0}_p$ 且 $\mu > \mathbf{0}_p$)	$\bar{x} \in \mathcal{X}_E$
定理 5.6	$r \geq \mathbf{0}_p, \lambda > \mathbf{0}_p, \bar{s}^+ > \mathbf{0}_p$ 且 $\mu \geq \mathbf{0}_p$ (或者 $r \geq \mathbf{0}_p, \lambda > \mathbf{0}_p$ 且 $\mu > \mathbf{0}_p$)	$\bar{x} \in \mathcal{X}_{PE}$

表 6 (MOP) 的 (弱、真) 有效解的必要条件

相关定理	解的类型	(FPS(a, r, μ)) 的最优解
定理 5.2	$\bar{x} \in \mathcal{X}_{WE}$	对任意的 $r > \mathbf{0}_p$, 存在 $\lambda > \mathbf{0}_p$ 使得 $(\bar{x}, \mathbf{0}_p, \mathbf{0}_p, 0)$ 是 (FPS(a, r, μ)) 的最优解, 其中 $\mu = \mathbf{0}_p$ 且 $a = f(\bar{x})$
定理 5.4	$\bar{x} \in \mathcal{X}_E$	对任意的 $r \geq \mathbf{0}_p$, 存在 $\lambda > \mathbf{0}_p$ 使得 $(\bar{x}, \mathbf{0}_p, \mathbf{0}_p, 0)$ 是 (FPS(a, r, μ)) 的最优解, 其中 $\mu = \mathbf{0}_p$ 且 $a = f(\bar{x})$
定理 5.7	$\bar{x} \in \mathcal{X}_{PE}$	存在 $r \geq \mathbf{0}_p, \lambda \geq \mathbf{0}_p, \mu \geq \mathbf{0}_p, a = f(\bar{x})$ 使得 $(\bar{x}, \mathbf{0}_p, \mathbf{0}_p, 0)$ 是 (FPS(a, r, μ)) 的最优解

基于引理 5.1, 对 (MOP) 的有效解给出充分条件.

定理 5.5 设 $(\bar{x}, \bar{s}^+, \bar{s}^-, \bar{t})$ 是 (RPS(a, r, λ, μ)) 的最优解. 如果 $\lambda > \mathbf{0}_p$ 且 $\bar{s}^+ > \mathbf{0}_p$ (或者 $\mu > \mathbf{0}_p$), 那么 $\bar{x}$ 是 (MOP) 的有效解.

事实上, 在定理 5.5 的条件下, 可建立 (MOP) 的真有效解的充分条件.

定理 5.6 设 $(\bar{x}, \bar{s}^+, \bar{s}^-, \bar{t})$ 是 (RPS(a, r, λ, μ)) 的最优解. 如果 $\lambda > \mathbf{0}_p$ 且 $\bar{s}^+ > \mathbf{0}_p$ (或者 $\mu > \mathbf{0}_p$), 那么 $\bar{x}$ 是 (MOP) 的真有效解.

定理 5.7 若 $\bar{x}$ 是 (MOP) 的真有效解, 则存在

$$r \in \mathbb{R}_{\geq}^p \setminus \{\mathbf{0}_p\}, \quad \lambda \in \mathbb{R}_{\geq}^p, \quad \mu \in \mathbb{R}_{\geq}^p$$

使得 $(\bar{x}, \mathbf{0}_p, \mathbf{0}_p, 0)$ 是 (RPS(a, r, λ, μ)) 的最优解, 其中 $a = f(\bar{x})$.

表 5 和 6 总结了 (MOP) 的 (弱、真) 有效解与 (RPS(a, r, λ, μ)) 的最优解间的关系.

6 结论

为获得非凸多目标优化问题的真有效解, Akbari 等^[28] 对 Pascoletti-Serafini 标量化方法通过添加松弛变量或剩余变量进行了改进, 提出了新的 Pascoletti-Serafini 标量化方法, 该方法统一了 ϵ -约束法^[11,18]、加权 Chebyshev 法^[12] 和 Pascoletti-Serafini 法^[14] 等. 因此, 文献 [28] 所提出的标量化方法的模型值得深入研究.

本文在适当条件下探讨了多目标优化问题的 (弱、真) 有效解与对应的标量化问题的最优解间的等价关系. 事实上, 我们主要通过限制对应的标量化问题中的参数范围获得了多目标优化问题的 (弱、

真) 有效解的标量化刻画, 并举例说明文献 [28] 中存在的不足. 本文的标量化结果更合理且证明过程更直接. 在未来的工作中, 我们将基于本文方法, 提出一些有效求解非凸多目标优化问题的算法.

致谢 衷心感谢审稿专家提出的宝贵意见. 同时也感谢编委在处理本文时所付出的辛勤劳动.

参考文献

- White D J. A bibliography on the applications of mathematical programming multiple-objective methods. *J Oper Res Soc*, 1990, 41: 669–691
- Eichfelder G. *Adaptive Scalarization Methods in Multiobjective Optimization*. Berlin: Springer, 2008
- Jahn J. *Vector Optimization: Theory, Application, and Extensions*. Berlin: Springer, 2011
- Pareto V. *Cours d'Économie Politique*. Geneva: Droz, 1896
- Koopmans T C. Analysis of production as an efficient combination of activities. In: Koopmans T C, ed. *Activity Analysis of Production and Allocation*. New York: John Wiley & Sons, 1951
- Kuhn H W, Tucker A W. Nonlinear programming. In: *Proceeding of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*. Berkeley: University of California Press, 1951, 481–492
- Chen G Y, Huang X X, Yang X Q. *Vector Optimization: Set-Valued and Variational Analysis*. Berlin: Springer, 2006
- Göpfert A, Riahi H, Tammer C, et al. *Variational Methods in Partially Ordered Spaces*. New York: Springer, 2006
- Geoffrion A M. Proper efficiency and the theory of vector maximization. *J Math Anal Appl*, 1968, 22: 618–630
- 杨新民, 陈光亚. 向量优化问题的线性标量化方法和 Lagrange 乘子研究. *中国科学: 数学*, 2020, 50: 253–268
- Chankong V, Haimes Y Y. *Multiobjective Decision Making: Theory and Methodology*. New York: North-Holland, 1983
- Bowman V J. On the relationship of the Tchebycheff norm and the efficient frontier of multiple-criteria objectives. In: Thieriez H, Zionts S, eds. *Multiple Criteria Decision Making*. Berlin: Springer, 1976, 76–85
- Steuer R E, Choo E U. An interactive weighted Tchebycheff procedure for multiple objective programming. *Math Program*, 1983, 26: 326–344
- Pascoletti A, Serafini P. Scalarizing vector optimization problems. *J Optim Theory Appl*, 1984, 42: 499–524
- Huang X X, Yang X Q. On characterizations of proper efficiency for nonconvex multiobjective optimization. *J Global Optim*, 2002, 23: 213–231
- Ehrgott M. *Multicriteria Optimization*. Berlin: Springer, 2005
- Engau A, Wiecek M M. Generating ε -efficient solutions in multiobjective programming. *European J Oper Res*, 2007, 177: 1566–1579
- Ehrgott M, Ruzika S. Improved ε -constraint method for multiobjective programming. *J Optim Theory Appl*, 2008, 138: 375–396
- Ghaznavi-ghosoni B A, Khorram E. On approximating weakly/properly efficient solutions in multi-objective programming. *Math Comput Modelling*, 2011, 54: 3172–3181
- Ghaznavi-ghosoni B A, Khorram E, Soleimani-damaneh M. Scalarization for characterization of approximate strong/weak/proper efficiency in multi-objective optimization. *Optimization*, 2013, 62: 703–720
- Rastegar N, Khorram E. A combined scalarizing method for multiobjective programming problems. *European J Oper Res*, 2014, 236: 229–237
- 赵克全, 杨新民, 夏远梅. 多目标优化问题的完全标量化. *中国科学: 数学*, 2019, doi: 10.1360/SCM-2019-0004
- Eichfelder G. An adaptive scalarization method in multiobjective optimization. *SIAM J Optim*, 2009, 19: 1694–1718
- Bortz M, Burger J, Asprion N, et al. Multi-criteria optimization in chemical process design and decision support by navigation on Pareto sets. *Comput Chem Eng*, 2014, 60: 354–363
- Vallerio M, Vercammen D, Van Impe J, et al. Interactive NBI and (E)NNC methods for the progressive exploration of the criteria space in multi-objective optimization and optimal control. *Comput Chem Eng*, 2015, 82: 186–201
- Dolatnezhadsomarin A, Khorram E. Two efficient algorithms for constructing almost even approximations of the Pareto front in multi-objective optimization problems. *Eng Optim*, 2019, 51: 567–589
- Khaledian K, Khorram E, Karimi B. Characterizing ε -properly efficient solutions. *Optim Methods Softw*, 2015, 30: 583–593
- Akbari F, Ghaznavi M, Khorram E. A revised Pascoletti-Serafini scalarization method for multiobjective optimization problems. *J Optim Theory Appl*, 2018, 178: 560–590
- Ghaznavi M, Akbari F, Khorram E. Optimality conditions via a unified direction approach for (approximate) efficiency in multiobjective optimization. *Optim Methods Softw*, 2019, 99: 1–26

The Pascoletti-Serafini scalarization scheme for multiobjective optimization problems

Liping Tang, Xinmin Yang & Ying Gao

Abstract The nonlinear scalarization technique is an important approach to study nonconvex multiobjective optimization problems. At present, Pascoletti-Serafini scalarization scheme is one of the powerful tools to deal with nonconvex multiobjective optimization problems. However, most of these results are established for weak efficiency and efficiency to multiobjective optimization problems. Consequently, this paper is devoted to further investigation on the modifications of the Pascoletti-Serafini method, which are proposed by Akbari et al. (2018). We are interested in establishing relationships between (weakly, properly) efficient solutions of a general nonconvex multiobjective optimization problem and optimal solutions of the related scalarized problem under appropriate assumptions. For this purpose, necessary and sufficient conditions to (weakly, properly) efficient solutions of a general nonconvex multiobjective optimization problem are achieved via restricting the ranges of the parameters involved in the corresponding scalarization problem. Furthermore, some examples are given to illustrate our main results.

Keywords multiobjective optimization, Pascoletti-Serafini method, properly efficient solution, nonlinear scalarization

MSC(2010) 90C26, 90C29, 90C30

doi: 10.1360/SSM-2020-0047