中国科学 : 数学　2019 年　第 49 卷　第 3 期 : 553 ∼ 580
SCIENTIA SINICA Mathematica
论　文

《中国科学》杂志社
SCIENCE CHINA PRESS
CrossMark
click for updates

单模随机网络的有限逼近

献给王梓坤教授 90 华诞

向开南

南开大学数学科学学院, 基础数学和组合数学重点实验室, 天津 300071
E-mail: kainanxiang@nankai.edu.cn

收稿日期: 2017-04-19; 接受日期: 2017-11-30; 网络出版日期: 2019-03-18
国家自然科学基金 (批准号: 11671216) 资助项目

摘要　随机图极限理论是一个十分活跃且充满挑战性的研究领域, 关于单模随机网络有限逼近的 Aldous-Lyons 猜想是该领域的一个核心重大问题, 本论文是关于它的一个综述.

关键词　图极限　局部极限　单模随机网络　有限逼近

MSC (2010) 主题分类　60C05, 60K99, 05C80

1　引言

随机图 (概率组合) 的开创者是 Erdös 和 Rényi. 目前 Bollobás、Alon、Lovász、Wigderson、Janson、Rödl 和 Frieze 等 10 多位国际数学家大会 1 小时和 45 分钟报告人都在从事这方面的研究. 最近 4 届国际数学家大会, 每届均有 2 人作关于随机图的邀请报告, 其中包括 1 个 1 小时报告.

随机图极限一方面诞生于 Schramm (参见文献 [1, 2]、[3, 第 4 节] 和 [4]) 和 Aldous 等 (参见文献 [5,6]) 的研究中; 关于随机图的极限亦可参见文献 [7,8]. 另一方面诞生于顶尖组合图论学者 Lovász 和 Bollobás 等最近的研究中 (参见文献 [9–21] 和脚注 1)). 注意在信息与计算机科学、统计物理和生物等学科中存在着大量各种各样的巨型离散结构 (图结构); 而 (随机) 图极限可以用来研究这些巨型离散结构的渐近行为、各种巨型离散结构间的 “相似性” 与 “接近度”、极限离散结构上的随机过程与概率模型 (随机游走、渗流等其他统计物理/力学模型). 图极限对概率论、图论组合和统计物理均具有十分重大的理论意义及应用价值, 例如, 对诸多统计物理模型 (离散结构上的概率模型) 而言, 归一化的配分函数的对数的极限, 即它们的热力学极限, 实际上是一种关于赋权图的图极限.

(随机) 图极限理论是一个充满挑战的极具发展前景的研究领域 (参见文献 [17]). 由 Lovász 等发起, 2014 和 2017 年匈牙利布达佩斯的 Renyi 研究所两次举办了名为 Graph Limits, Groups and Stochastic Processes 的暑期学校 [2]. 这两个暑期学校的专题反映出图极限具有强劲的生命力.

1) Lovász L. Graph homomorphisms: Open problems. Preprint, 2008
2) 见 http://www.renyi.hu/conferences/grgrst/ 和 http://www.renyi.hu/conferences/grgrst17/

英文引用格式: Xiang K. Finite approximation for unimodular random networks (in Chinese). Sci Sin Math, 2019, 49: 553–580, doi: 10.1360/N012017-00073

© 2019《中国科学》杂志社

图极限有两种重要的极端情形: 稠密图极限和极端稀疏图极限. 前者主要为图论组合学者所感兴趣, 稀疏图极限 (现实网络往往是稀疏图) 则同时为概率、图论组合学者所感兴趣 (这方面的研究还比较欠缺); 概率学者尤其对极端稀疏图极限感兴趣. 通常人们误以为稀疏图极限会比稠密图极限简单, 但事实证明并非如此. (极端) 稀疏图极限主要由 Benjamini 和 Schramm [1] (也可参见文献 [8])、Aldous 和 Steele [5]、Aldous 和 Lyons [6]、Bollobás 和 Riordan [9,10] (也可参见文献 [22]) 所发展. Aldous 和 Schramm 等 [1,2,4–6] 研究的是极端稀疏图极限; 其中有十分重要的 Aldous-Lyons 猜想 (参见文献 [6, 第 1500 页的问题 10.1]):

任一单模随机图 (网络) 均是某有限图 (网络) 序列的随机弱极限 (即局部极限),

其中网络是指顶点与边具有标记的图, 是图的一种推广. 此猜想在一定意义上由 Lovász [18] 命名, 参见文献 [18, 猜想 7.2] 和 [17, 猜想 19.8]. 对此猜想的理解, 参见文献 [6, 第 1458–1501 页]、[18, 第 7.2.1 小节]、[17, 第 357–359 页]、[10, 第 3 和 7 节]、[22, 第 2574 页] 和 [23, 第 14 章] 等.

基于如下事实, Aldous-Lyons 猜想是随机图极限理论中十分基本且相当重要的问题. (i) 与稠密图相比, 稀疏图极限理论发展得不够完善. 原因在于还不清楚相关的极限对象如何刻画 (这诞生了所论猜想), 以及相关的收敛是一种局部性质、不保持图的某些整体性质. (ii) 注意在稀疏图极限理论中, 图 (网络) 序列的收敛往往是前述随机弱极限 (即局部极限) 的加强. (iii) 诸多无穷图上的统计物理模型通过有限图序列上相应模型取局部极限来定义. (iv) Aldous-Lyons 猜想的解决能推出任一可数群都是可图 (sofic) 的, 这能导致几个重要猜想的解决; 而 “每一可数群是可图群 (sofic group)?” 是可数群论中的核心问题.

Aldous-Lyons 猜想已出现在众多的文献 (论文、ICM 报告、书) 之中 (参见文献 [24, 第 4 段], [17, 第 19.1.3 小节], [6, 第 1458 页], [4, 第 1 节], [25, 第 2 页], [10, 第 7 节], [26, 第 4 页], [23, 第 14.1 小节], [27, 第 636 页], [28, 第 1.2 和 2.2 小节]).

注意单模随机网络的研究与保测测度化等价关系 (measured equivalence relation, MER) 的研究有着紧密联系. 单模随机网络起源于图上群 (作用) 不变渗流 [29] 和有限图的渐近分析等, 侧重于图极限 (graphing) 的概率方面; 而保测 MER 起源于群作用的遍历论 (参见文献 [30–34] 等), 侧重于等价关系的遍历方面. 关于不变渗流和 MER, 亦可参见文献 [35,36].

关于另一类型的随机图极限 (随机平面地图的尺度 (scaling) 极限) 见 Le Gall 等的文献 [37–42], 及 Sheffield 的文献 [43–45]. 注意 Le Gall 是因此方面的成就而在 ICM2014 作大会报告 (关于随机图极限的论文可以发表在*Ann Math*, *J AMS*, *Acta Math*, *Invent Math* 上 (参见文献 [15,16,38,39,41,43,46]), 这反映出这方面研究的质量相当高).

Aldous-Lyons 猜想对概率论和图论组合的意义不言而喻. 它的解决可以对群论起重大的推动作用, 即可推出 “任一有限生成群是可图的”, 进一步, “任一可数群是可图的”. 可图群由 Gromov [47] 1999 年引进; 诞生于他对符号动力系统中的 Gottschalk 满射 (surjunctivity) 猜想 (由 Gottschalk [48] 提出) 的研究; 名字 “可图” 由 Weiss [49] 所取. 在可数群理论中, 有如下两个重要的未决问题 [50]: 任一可数群都是可图群? 都是超线性 (hyperlinear) 群? 注意可图群是超线性群. 这两个问题的肯定答案分别推出 Gottschalk 满射猜想对任一可数群成立, 算子理论中有 30 多年历史的 Connes 嵌入猜想对群 von Neumann 代数成立 (弱形式的 Connes 嵌入猜想成立) [50]. Connes 嵌入猜想 [51] 是算子理论中最重要的猜想之一, 与算子代数版本的 Hilbert 第 17 问题等价; 关于它的研究近况参见文献 [52–55]. 因此, Aldous-Lyons 猜想的成立可以推出任一可数群是可图群; 从而, 自动推出 Gottschalk 满射猜想对任一可数群成立, Connes 嵌入猜想对群 von Neumann 代数成立. Aldous-Lyons 猜想不仅引起了概率学者

的关注, 也吸引了诸如 Lovász 和 Bollobás 等 (参见文献 [10,18]) 顶尖组合图论学者的极大兴趣.

Aldous-Lyons 猜想十分的扑朔迷离.

Aldous 和 Lyons 曾在一 2004 年预印本中对此猜想给出了证明, 而后发现该证明是错误的, 参见文献 [56, 第 494 页第 8–10 行]. Aldous 和 Lyons 认为此猜想的答案不明朗. 一个重要的原因是此猜想正面的答案与群论中的一个信念, 存在非可图可数群, 相冲突; 尽管到目前为止还没发现任一非可图可数群 (参见文献 [34,50]). Lovász 和 Bollobás 认为对度有界的单模随机图 (网络), 此猜想成立 (参见文献 [10,17,18]); 此情形下的 Aldous-Lyons 猜想仍可推出 "任一可数群是可图群"、Gottschalk 满射猜想和弱形式的 Connes 嵌入猜想. 由文献 [57, 定理 3.4] 知, 任给 $d \geqslant 2$, 对 d- 正则树上的不变网络, Aldous-Lyons 猜想成立; 尽管在此文中 d 为偶数, 但其证明适用所有的 d. Elek [58] 借鉴文献 [57] 中一个关于双曲平面的圆填充的想法, 证明了此猜想对任一度有界的单模随机树成立. Elek 和 Lippner [34] 将文献 [58] 的结论推广至网络. 最近 Benjamini 等 [59] 利用不变渗流重证了 Elek 的结论 (参见文献 [34,58]): Aldous-Lyons 猜想对支撑在树上的单模随机网络成立. 此外, Schramm [4] 证明了超有限情形的 Aldous-Lyons 猜想成立 (注意, 文献 [6, 定理 8.5(iv)] 推出此猜想对稍强的超有限 (即顺从的 (amenable)) 单模概率成立). Angel 等 [28] 证明了 Aldous-Lyons 猜想对单连通单模地图成立.

关于可数群, Gromov 有一句著名的论断:

"Any statement on the class of countable groups is either trivial or false."

此论断可解读为: 对所有可数群成立的结论是平凡的. 注意 Aldous-Lyons 猜想、Gottschalk 满射猜想和弱形式的 Connes 嵌入猜想任一成立都将驳斥 Gromov 的上述论断; 文献 [60,61] 在一定程度上已驳斥了它. 从概率论角度, 如下的结论及猜想在一定意义上不支持 Gromov 的论断:

(1) 无穷 Cayley 图上的简单随机游走是超扩散的 (参见文献 [23,62]);

(2) 每个无穷 Cayley 图均有一个不变的随机完美匹配 (参见文献 [63]);

(3) 猜想: 设 Γ 是一个有限生成的无穷群且不是整数群 $\mathbb{Z}^1$ 的有限扩张, 则 Γ 的任一 Cayley 图上的临界 Bernoulli 渗流不存在无穷连通分支.

回顾 Hilbert 第 17 问题有肯定答案, 而 Connes 嵌入猜想是算子代数版本的 Hilbert 第 17 问题. 综上所述, Aldous-Lyons 猜想应成立.

Aldous-Lyons 猜想的成立将解决 Gottschalk 满射猜想与弱形式的 Connes 嵌入猜想, 以及可数群理论中的 10 多个重要问题 (参见文献 [50]), 对稀疏图极限理论能做出重大贡献 (参见文献 [9,10,17,18]), 改进与单模随机网络相关的大量概率结论 (参见文献 [5,6,56,64] 等). 这是这个猜想散发出的巨大魅力. Aldous-Lyons 猜想的扑朔迷离性昭示着它的神秘魅力, 吸引着有志者去征服它.

2 Aldous-Lyons 猜想 [6]: 单模随机网络 (图) 的有限逼近

2.1 网络 (Network)

令 Ξ 是 Polish 空间, $G=(V,E)$ 是重边图 (multi-graph). 令

$$\varphi_V : V \to \Xi, \quad \varphi_E : E \to \Xi^2 \tag{2.1}$$

为两个映射. 称具有标记 (mark) 空间 Ξ 及标记映射 φ_V 和 φ_E 的图 $G=(V,E)$ 为一网络, 其中

(i) $\forall v \in V$, $\varphi_V(v) \in \Xi$ 为 v 的标记;

(ii) $\forall e\in E$, $\varphi_E(e)=(S,T)\in\Xi^2$ 为 e 的标记.

注意在许多情形下可自然地视每条边 e 被赋予了两个标记 S 和 T, 一个端点一个标记; 通常 Ξ 可选为 Baire 空间 $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ ($\mathbb{N}$: 自然数集), 因为任一不可数 Polish 空间 Borel 同构于 Baire 空间 $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ (Kuratowski 定理). 除非需要它们, 通常略去标记映射 φ_V 和 φ_E. 视图为网络的特殊情形: 所有的标记均为某一给定的标记.

注 2.1 (i) 边标记映射 φ_E 可作如下理解: $\forall x,y\in V$, $x\sim y$, 视 $\{x,y\}$ 是从 x 到 y 的有向边, $\{y,x\}$ 是从 y 到 x 的有向边. 有向边全体记为 $\overrightarrow{E}$. 通过适当的方式, 可将 φ_E 视为映射 $\varphi_{\overrightarrow{E}}:\overrightarrow{E}\to\Xi$. 反之, 亦可由 $\varphi_{\overrightarrow{E}}$ 很自然地得到 φ_E.

(ii) 通过选取适当的标记空间 Ξ', 可将 (2.1) 中的映射换为

$$\varphi_V:V\to\Xi',\quad \varphi_E:E\to\Xi'. \tag{2.2}$$

反之, 可将 (2.2) 中的映射换为 (2.1) 中的形式:

$$\varphi_V:V\to\Xi',\quad \overline{\varphi}_E=(\varphi_E,\varphi_E):E\to\Xi'^2.$$

因此, 用 (2.1) 或 (2.2) 来定义网络, 本质上是同一回事.

2.2 单模图 (Unimodular graph)

(i) 令 G 是一个图, H 是它的一个子图. 令

$$\partial_V H=\{v\in H: v \text{ 与 } H \text{ 之外的某顶点相邻}\}: \text{(内部) 顶点边界}.$$

称 G 为 (顶点) 顺从的, 若存在 $\{H_n\}_{n=1}^{\infty}\subseteq V(G)$ 满足 $\lim_{n\to\infty}\frac{|\partial_V H_n|}{|V(H_n)|}=0$, 其中 $|\cdot|$ 表示集合的势, 称 $\{H_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 Følner 序列. 若不存在 Følner 序列, 则称 G 为非顺从的. 称一个有限生成群为顺从的, 若它的某一 (等价地, 所有的) Cayley 图是顺从的. 注意任一有限生成 Abel 群为顺从的.

回顾: 称一个有限生成群 Γ 是 von Neumann 顺从的, 若存在 $L^\infty(\Gamma)$ 上的一个不变均值, 即存在一线性映射 $m:L^\infty(\Gamma)\to\mathbb{R}^1$ 使得对任意的 $f\in L^\infty(\Gamma)$, 有

$$m(f)\in[\inf(f),\sup(f)],\ m(f_\gamma)=m(f),\quad \forall\gamma\in\Gamma,\quad \text{其中 } f_\gamma(\cdot)=f(\gamma\cdot).$$

Γ 是 von Neumann 顺从的当且仅当存在其上的一个有限可加不变概率. 很有意思的是 von Neumann 顺从的与顺从的是同一回事. Kesten [65] 证明了有限生成群 Γ 是顺从的当且仅当其任一 Cayley 图的谱半径等于 1.

(ii) $G_1=(V_1,E_1)$, $G_2=(V_2,E_2)$ 两个图.

• 同态 $\phi:G_1\to G_2$ 是指这样的一对映射 $\phi_V:V_1\to V_2$ 和 $\phi_E:E_1\to E_2$, 它们满足: $\forall e\in E_1$, ϕ_V 将 e 的端点映成 $\phi_E(e)$ 的端点.

• 当 ϕ_V 和 ϕ_E 均为双射时, 同态 ϕ 称为同构. 特别地, 当 $G_1=G_2$ 时, 它称为自同构. 图 G 的自同构全体在复合运算下构成一个群 $\mathrm{Aut}(G)$ (G 的自同构群).

(iii) 设 $\Gamma\subseteq\mathrm{Aut}(G)$. Γ 在 G 上的作用是可迁的是指在 $V(G)$ 中只有一条 Γ- 轨道. Γ 在 G 上的作用是拟可迁的是指在 $V(G)$ 中有有限条 Γ- 轨道. 称 G 为可迁的 (拟可迁的), 若 $\mathrm{Aut}(G)$ 在 G 上的作用是可迁的 (拟可迁的). 注意 Cayley 图是可迁图.

(iv) 上述 (ii) 和 (iii) 中的概念可自然地延拓至网络, 此时需要求映射保持顶点和边的标记.

(v) 回顾: 一局部紧群是单模的 (unimodular) 是指它的左不变 Haar 测度也是右不变的. 特别地, 任一离散可数群是单模的. 设 G 是一图, 赋予 $\mathrm{Aut}(G)$ 如下的弱拓扑: $\mathrm{Aut}(G)$ 在 G 上的作用所生成的拓扑; 即此拓扑为使 $\mathrm{Aut}(G)$ 在 G 上的作用是连续的最小的此类型拓扑. 称 G 是单模的, 若 $\mathrm{Aut}(G)$ 是单模的. 注意 Cayley 图和拟可迁的顺从的图是单模图. 但并不是所有的可迁图都是单模图, 如祖母图 (grandmother graph, 如文献 [17, 第 341 页]) 和 Diestel-Leader 图 (由文献 [66] 引入, 参见文献 [67, 第 7 章的例 7.2]). 由文献 [68] 知 Diestel-Leader 图不拟等距同构于任一 Cayley 图.

2.3 带根网络 (Rooted network)

(i) 称具有一显著顶点 o 的网络 G 为带根网络, o 称为根. 两个带根网络之间的带根同构是指保持网络同构且将一网络的根变为另一网络的根的网络同构. 一般不区分带根网络与它的同构类.

G : 图; $\overline{G}$: 具有底图 (underlying graph) G 的网络;

$[\overline{G}, o]$: 与 $(\overline{G}, o)$ 带根同构的带根同构类.

(ii) 令

$$\mathcal{G}_* = \{\text{带根连通局部有限网络的带根同构类}\}.$$

在 $\mathcal{G}_*$ 上定义如下的度量 dist:

$$\mathrm{dist}((G_1, o_1), (G_2, o_2)) = \frac{1}{1+\alpha},$$

其中

$$\alpha = \sup\Big\{r > 0 : \exists\, B_{G_1}(o_1, \lfloor r\rfloor) \text{ 到 } B_{G_2}(o_2, \lfloor r\rfloor) \text{ 之间的一底图带根同构,}$$
$$\text{使得每对相应的标记之间的距离 } \leqslant \frac{1}{r}\Big\},$$

$B_{G_i}(o_i, \lfloor r\rfloor)$ 是 G_i 中以 o_i 为心的半径为 $\lfloor r\rfloor$ 的球, $\lfloor r\rfloor$ 表示 r 的整数部分.

关于此距离, $\mathcal{G}_*$ 是完备可分的. 对 $\mathcal{G}_*$ 上的概率 μ 和 μ_n, 当 μ_n 弱收敛到 μ 时, 记 $\mu_n \Rightarrow \mu$. 易知此收敛不依赖拓扑空间 Ξ 上相容距离的选取. 任给 $\mathcal{G}_*$ 上的概率 μ, 令

$$\overline{\deg}(\mu) = \text{根的度关于 } \mu \text{ 的期望}. \tag{2.3}$$

任给 $t \in \mathbb{N}$, 令

$$\mathcal{G}_{*t} = \{[G, o] \in \mathcal{G}_* : G \text{ 的每个顶点到 } o \text{ 的距离} \leqslant t\}.$$

用 $\mathbb{Q}$ 表示有理数集. 任给 $r \in \mathbb{Q} \cap (0, 1]$ 和 $\alpha \in \mathcal{G}_{*t}$, 令

$$T_r(\mathcal{G}_*, \alpha) = \Big\{[G, o] \in \mathcal{G}_* : \mathrm{dist}((G, o), \alpha) < r \wedge \frac{1}{1+t}\Big\}.$$

显然, $T_r(\mathcal{G}_*, \alpha)$ 是 $\mathcal{G}_*$ 中的开集. 易知任给 $\mathcal{G}_*$ 上的概率序列 $\{\mu_n\}_{n\geqslant 1}$ 和概率 μ, 有

$$\mu_n \Rightarrow \mu \text{ 当且仅当 } \liminf_{n\to\infty} \mu_n(T_r(\mathcal{G}_*, \alpha)) \geqslant \mu(T_r(\mathcal{G}_*, \alpha)), \quad \forall\, T_r(\mathcal{G}_*, \alpha). \tag{2.4}$$

若标记空间 Ξ 是离散的且赋予其离散距离, 任给 $\alpha \in \mathcal{G}_{*t}$, 记

$$T(\mathcal{G}_*, \alpha) = \{[G, o] \in \mathcal{G}_* : B_G(o, t) \text{ 带根同构于 } \alpha\},$$

则 $T(\mathcal{G}_*,\alpha)$ 是 $\mathcal{G}_*$ 中的开 - 闭集, 从而,

$$\mu_n \Rightarrow \mu \text{ 当且仅当 } \lim_{n\to\infty}\mu_n(T(\mathcal{G}_*,\alpha))=\mu(T(\mathcal{G}_*,\alpha)),\quad \forall T(\mathcal{G}_*,\alpha), \tag{2.5}$$

这与文献 [10,18] 中的关于极端稀疏图的局部极限一致.

注意类似文献 [59, 定理 3.1] 可证, 当标记空间有限时, $\mathcal{G}_*$ 上的单模概率族 $\{\mu_i\}_{i\in I}$ 在如下条件下是胎紧的: 随机变量族 $\{\deg_{G_i}(o_i)\}_{i\in I}$ 一致可积, 其中 $\{[G_i,o_i]\}_{i\in I}$ 是相应的随机带根网络族.

(iii) 令 $\mathcal{G}_{\mathbb{N}}$ 表示所有以 1 为根以 $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ 为标记空间的 $\mathbb{N}$ 上的网络, 则 $\mathcal{G}_*$ 中的任一元素均有一典型表示, 即存在一连续映射 $f:\mathcal{G}_*\to\mathcal{G}_{\mathbb{N}}$. 为给出此连续映射, 赋予 $\mathcal{G}_{\mathbb{N}}$ 如下的全序 $\preceq$:

(a) 赋予 $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ 和 $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ 字典顺序, 使它们均成为全序空间.

(b) 为使边与 $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ 中的元素等同, 视网络的边为有向边, 视 i 与 j 之间的边在 i 处的标记为有向边 (i,j) 的标记.

(c) 任给两个不同网络 $G_1,G_2\in\mathcal{G}_{\mathbb{N}}$.

• 若 $E(G_1)\neq E(G_2)$, 则 G_1 和 G_2 中含 $E(G_1)\Delta E(G_2)$ 中最小边的网络为小的网络.

• 若 $E(G_1)=E(G_2)$, 但 $V(G_1)$ 与 $V(G_2)$ 的标记不全一样, G_1 和 G_2 中在标记不同的最小顶点处具有小标记的网络为小的网络.

• 若 $E(G_1)=E(G_2)$, $V(G_1)$ 与 $V(G_2)$ 的标记一样, 但 $E(G_1)$ 与 $E(G_2)$ 的标记不全一样, 则在标记不同的最小有向边上具有小标记的网络为小的网络.

任给 $G\in\mathcal{G}_*$: 存在唯一 $G_{\text{smallest}}\in\mathcal{G}_{\mathbb{N}}$, 使 G_{smallest} 与 G 同构且满足

$$\forall G'\in\mathcal{G}_{\mathbb{N}},\quad G' \text{ 与 } G \text{ 同构, 则 } G_{\text{smallest}}\preceq G'.$$

典型表示如下: $f:G\in\mathcal{G}_*\to G_{\text{smallest}}\in\mathcal{G}_{\mathbb{N}}$.

(iv) $\forall$ 网络 G (可能不连通), $\forall x\in V(G)$, 令

$$G_x=\{x \text{ 在 } G \text{ 中的连通分支}\}.$$

若 μ 是 $V(G)$ 上的概率, 则 μ 自然地诱出 $\mathcal{G}_*$ 上的一个概率, 仍记之为 μ:

$$\mu([G_x,x])=\sum_{y\in V(G)}\mu(y)I_{\{(G_y,y)\in[G_x,x]\}}.$$

• 对有限网络 G, 令 $U(G)$ 表示按上述方式得到的 $\mathcal{G}_*$ 上的概率, 此时 μ 为 $V(G)$ 上的均匀分布.

• 设 G_n 是有限网络, μ 是 $\mathcal{G}_*$ 上的一个概率. 称 G_n 的随机弱极限 (random weak limit) [6] 是 μ, 若

$$U(G_n)\Rightarrow\mu.$$

此时若存在一个固定的可迁网络 G 使得 $\mu(\{[G,o]\})=1$ 对某 $o\in V(G)$ 成立, 则称 G_n 的随机弱极限是 G.

回顾随机弱极限亦称为分布极限 (distributional limit) [1]、局部 (弱) 极限 (local (weak) limit) [5] 和 Benjamini-Schramm 极限 [17], 甚至左收敛 (left-convergence) [11]. 称为局部极限原因如下: 若 (G_n) 具有局部极限 μ, 则由 G_n 的两个不交版本构成的图 H_n 亦具有局部极限 μ. 再例如, 对 $d\geqslant 3$, 随机 d- 正则图序列与随机 d- 正则二部图序列的局部极限均为 d- 正则树. 这没有反应出图的整体结构.

在图 (网络) 序列的各种收敛中, 随机弱极限是最基本的一种收敛, 若干其他收敛往往是它的强化, 参见文献 [69].

2.4 $\mathcal{G}_*$ 上的单模概率

类似于 $\mathcal{G}_*$, 定义 $\mathcal{G}_{**}$ 为具有显著有序顶点对的局部有限连通网络的同构类, 赋予 $\mathcal{G}_{**}$ 和 $\mathcal{G}_*$ 类似的拓扑. 记 $\mathcal{G}_{**}$ 上的函数 f 为 $f(G,x,y)$.

令 μ 是 $\mathcal{G}_*$ 上的概率. 称 μ 是单模的 (参见文献 [6]), 若它满足质量运输原则 (mass-transport principle): 任给 Borel 函数 $f:\mathcal{G}_{**}\to[0,\infty)$,

$$\int_{\mathcal{G}_*}\sum_{x\in V(G)}f(G,o,x)d\mu([G,o])=\int_{\mathcal{G}_*}\sum_{x\in V(G)}f(G,x,o)d\mu([G,o]). \tag{2.6}$$

令 $\mathcal{U}$ 表示 $\mathcal{G}_*$ 上的单模 Borel 概率测度全体. 注意 $f(G,x,y)$ 可称为 x 送给 y 的质量. 名字取为单模有两个原因:

(i) 网络单模自同构群的推广.

(ii) 质量运输原则表示赋予 $\mathcal{G}_{**}$ 的两个测度相等:

$$\text{左测度 }\mu_L:\int_{\mathcal{G}_{**}}fd\mu_L=\int_{\mathcal{G}_*}\sum_{x\in V(G)}f(G,o,x)d\mu([G,o]),$$

$$\text{右测度 }\mu_R:\int_{\mathcal{G}_{**}}fd\mu_R=\int_{\mathcal{G}_*}\sum_{x\in V(G)}f(G,x,o)d\mu([G,o]),$$

μ 是单模的当且仅当 $\mu_L=\mu_R$.

图的质量运输原则由 Häggström[70] 引入, 在文献 [71] 中得以大力发展及运用; Benjamini 和 Schramm[1] 引入了一般形式的质量运输原则. 而后 Aldous 和 Steele[5] 用不同的术语—对合不变 (involution invariant) 考虑了质量运输原则的特殊形式: (2.6) 对支撑在

$$\{(G,x,y):x\sim y\}$$

上的 f 成立. Aldous 和 Lyons[6] 证明了单模性与对合不变性是等价的, 见下面的命题 2.1.

命题 2.1 [6] $\mathcal{G}_*$ 上的概率 μ 是对合不变的 $\Leftrightarrow$ μ 是单模的.

命题 2.2 设 μ 是 $\mathcal{G}_*$ 上的概率, 随机带根网络 $[G,o]$ 具有分布 μ. 令 w 是 o 的等可能选取的随机邻居,

$$d\widetilde{\mu}([G,o])=\deg(o)d\mu([G,o]). \tag{2.7}$$

(i) 则 μ 是单模的当且仅当在 $\mathbb{P}$ 下, $[G,o,w]$ 和 $[G,w,o]$ 在 $\mathcal{G}_{**}$ 上具有相同的分布即像测度 (注意此分布不一定是概率测度), 其中 $\mathbb{P}$ 是测度, 在 $\mathbb{P}$ 下, $[G,o]$ 具有分布 $\widetilde{\mu}$; 给定 $[G,o]$, w 是 o 的等可能选取的随机邻居. 显然, $[G,o,w]$ 与 $[G,w,o]$ 在 $\mathcal{G}_{**}$ 上具有相同的分布 $\Rightarrow$ $[G,w]$ 具有分布 $\widetilde{\mu}$.

(ii) 若 $0<\overline{\deg}(\mu)=\mu[\deg(o)]<\infty$, 则令

$$\widetilde{\mu}_1=\frac{\widetilde{\mu}}{\overline{\deg}(\mu)}, \tag{2.8}$$

于是, μ 是单模的当且仅当在 $\mathbb{P}_1$ 下, $[G,o,w]$ 与 $[G,w,o]$ 在 $\mathcal{G}_{**}$ 上具有相同的分布 (此时分布是概率测度), 这里 $\mathbb{P}_1$ 是概率, 在 $\mathbb{P}_1$ 下, $[G,o]$ 具有分布 $\widetilde{\mu}_1$; 给定 $[G,o]$, w 是 o 的等可能选取的随机邻居. 显然, $[G,o,w]$ 与 $[G,w,o]$ 在 $\mathcal{G}_{**}$ 上具有相同的分布 $\Rightarrow$ $[G,w]$ 具有分布 $\widetilde{\mu}_1$.

注 2.2 (i) 设 $[G,o]$ 是随机带根网络, $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ 是 G 上从 o 出发的简单随机游走. 称 $[G,o]$ 是平稳的, 若对任意的 $n\in\mathbb{N}$, $[G,o]$ 与 $[G,X_n]$ 同分布. 称 $[G,o]$ 是可逆转的 (reversible), 若

$$\text{对任意的 } n\in\mathbb{N},\quad [G,X_0,X_1] \text{ 与 } [G,X_1,X_0] \text{ 同分布.}$$

注意可逆转性可推出平稳性. 命题 2.2(ii) 中的 $\widetilde{\mu}_1$ 实际上是可逆转的随机带根网络, 从而更是平稳随机带根网络, 参见文献 [72].

(ii) MER. 设 X 为拓扑空间, μ 是其上的概率, R 是 X^2 中的可测子集且定义 X 上的一个使等价类数目有限或可数的等价关系. 称 (X,μ,R) 为 MER. $\forall\, x\in X$, 用 $[x]$ 表示 x 的 R- 等价类. 称 R 保测, 如果

$$\int_X \sum_{y\in[x]} f(x,y)d\mu(x)=\int_X \sum_{y\in[x]} f(y,x)d\mu(x),\quad \forall\, f:X^2\to[0,\infty] \text{ 可测.}$$

称 Φ 为 R 的图极限, 若 Φ 为 X^2 中的可测子集且包含 Φ 的最小等价关系是 R. 图极限 Φ 可诱导 X 上的一个图结构:

$$x,y\in X,\quad x\sim y \text{ 当且仅当 } (x,y)\in\Phi \text{ 或 } (y,x)\in\Phi.$$

用 $\Phi(x)$ 表示由图极限 Φ 在 $[x]$ 上诱导出的以 x 为根的子图. 任给可测映射 $\psi:X\to\Xi$, $\phi:X^2\to\Xi$, 视 $\psi(x)$ 为 x 的标记, $\phi(x,y)$ 为边 xy 在 x 处的标记, 则 $\Phi(x)$ 是随机带根网络, 其分布是单模的当且仅当 R 是保测的.

反之, 设 μ 是 $\mathcal{G}_*$ 上的概率, (G,o) 具有分布 μ. 将 G 的所有标记增加一相互独立的 $[0,1]$ 上的均匀标记作为每个标记的第二个坐标, 则可得 $\mathcal{G}_*$ 上的概率 ν. 令 $\mathcal{G}_{\#}\subset\mathcal{G}_*$ 表示所有标记均不同的带根网络, 则 ν 集中在 $\mathcal{G}_{\#}$ 上. 定义

$$R\subset\mathcal{G}_{\#}^2,\quad R:=\{\text{同构但不带根同构的带根网络对}\};$$
$$\Phi\subset R,\quad \Phi=\{\text{同构 (非带根) 的带根网络对, 在 (唯一的) 同构映射下它们的根是邻居}\},$$

则 $(\mathcal{G}_{\#},\nu,R)$ 是 MER, Φ 是 R 的图极限. R 是保测的当且仅当 μ 是单模的. 若用 Prj 表示忘记标记的第二个坐标的映射, 则 $\mu=\nu\circ\mathrm{Prj}^{-1}$.

可见单模随机网络的研究与保测 MER 的研究有着实质性的交叠. 单模随机网络起源于图上群 (作用) 不变渗流 [29] 和有限图的渐近分析等, 侧重于图极限的概率方面; 而保测 MER 起源于群作用的遍历论 (参见文献 [30–34] 等), 侧重于等价关系的遍历方面. 关于不变渗流和 MER, 亦可参见文献 [35,36].

图极限由群论学者所发明, 如同单模概率, 它可用来描述有限图 (网络) 序列的局部极限. 正如文献 [17, 第 23 页] 所言: "一个漂亮的事实是, 用此种方式表示群的图极限正好用于描述度有界收敛图序列的极限." 从某种角度来说, 图极限可能比单模概率更复杂或更简单. 但图极限有一个重大的优势: 它能表示更丰富的结构: 有限图序列的局部 - 整体极限, 参见文献 [17, 第 19.2.2 小节].

设 $\mathcal{R}\subseteq\Xi\times\Xi$ 是闭集. 任给两个单模概率 $\mu_1,\mu_2\in\mathcal{U}$. 称 μ_1 是 $\mathcal{R}$- 相关于 μ_2 的, 若存在支撑在标记空间为 $\Xi\times\Xi$ 的带根网络集上的概率测度 ν, 称为 μ_1 关于 μ_2 的 $\mathcal{R}$- 耦合, 满足 ν 对应的随机带根网络的标记是 $\mathcal{R}$ 值的且 ν 的第 i 个边际分布 (取标记的第 i 个坐标) 恰是 μ_i, $i=1,2$. 特别地, μ_1 与 μ_2 可耦合得具有相同的底带根图. 如下问题具有重大意义 (参见文献 [6, 第 1457、1458、1463、1465 页]):

问题 2.1 (单模耦合) 设 $\mathcal{R}\subseteq\Xi\times\Xi$ 是闭集, 单模概率 μ_1 $\mathcal{R}$- 相关于单模概率 μ_2. 是否存在 μ_1 关于 μ_2 的单模 $\mathcal{R}$- 耦合?

当诸 μ_i 是顺从的时, 问题 2.1 有肯定答案, 参见文献 [6, 命题 8.6]. 然而即使诸 μ_i- 随机网络的底图是同一固定的非顺从的 Cayley 图且标记空间只有两个点, 前述问题仍是开的, 参见文献 [6, 问题 2.5].

文献 [73] 提出了关于绑定 (wired) 均匀展开森林与自由均匀展开森林的单调耦合问题, 文献 [74] 给出了部分答案; 这是关于图包含关系的一个很有意思的耦合个例, 但还有如下的很有意思的网络包含关系 (单调关系) 耦合问题.

回到带根网络情形. 对映射 $\psi : \Xi \to \Xi$ 和网络 G, 令 $\Psi(G)$ 表示将 G 的每个标记用它在 ψ 下的象代替后得到的网络. 任给 Ξ 的 Borel 子集 Ξ_0 及网络 G, 称所有边标记属于 Ξ_0 的边构成的子网络为 G 的 Ξ_0- 开子网络. 设 μ 和 μ' 是 $\mathcal{G}_*$ 上的两个概率. 称 μ 被 μ' 边控制, 若存在 $\mathcal{G}_*$ 上的概率 ν、Ξ 的 Borel 子集 Ξ_0, 及 Borel 映射 $\psi, \psi' : \Xi \to \Xi$ 满足: 设网络 (G', o) 具有分布 ν, 记 o 在其 Ξ_0- 开子网络的连通分支为 (G, o), 则 $(\Psi(G), o)$ 具有分布 μ 而 $(\Psi'(G'), o)$ 具有分布 μ'. 进一步, 若 ν 是单模的, 则称 μ 被 μ' 单模边控制. 对两个单模概率 μ 和 μ', 当 μ 被 μ' 边控制时, 是否存在它们的单模边控制?

此外, 设 Ξ 是半序集, μ 和 μ' 是两个单模概率, 且存在如下的 $\Xi \times \Xi$- 耦合: 第二个网络的标记高于第一个网络的标记; 是否存在如此的单模单调耦合?

2.5 Aldous-Lyons 猜想

网络的单模性类似随机序列 (过程) 的平稳性 (参见文献 [6,8]). 用 $\mathbb{Z}$ 表示整数集. 任给自然数 n 和随机序列 $(Y_{n,i})_{1\leqslant i\leqslant n}$, 令 $U_n \in \{1, 2, \ldots, n\}$ 是独立于 $(Y_{n,i})_{1\leqslant i\leqslant n}$ 的均匀随机指标. 若当 $n \to \infty$ 时, 随机序列 $(Y_{n,U_n+i})_{i\in\mathbb{Z}}$ (约定 $Y_{n,j} = 0$, 若 $j \notin \{1, \ldots, n\}$) 具有一个极限分布, 则此分布是平稳的; 反之, 任意的平稳序列可平凡地用此种方式得到.

类似地, 显然有限网络序列的随机弱极限是单模的. Aldous-Lyons 猜想 (参见文献 [6, 第 1500 页的问题 10.1]): $\mathcal{G}_*$ 上的单模概率均是某有限网络序列的随机弱极限. 具体地:

猜想 2.1 (Aldous-Lyons 猜想) 设 μ 是 $\mathcal{G}_*$ 上的单模概率测度, 则存在有限网络序列 $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足

$$U(G_n) \Rightarrow \mu.$$

文献亦称使 Aldous-Lyons 猜想成立的单模概率 (随机网络) 为可图的, 如文献 [6, 59]. 此猜想等价于每个单模概率都是可图的. 注意动力系统中的可图概率测度与此处的可图是不同的, 参见文献 [75].

与随机弱极限 (局部极限) 相关的问题和猜想很多. 例如, (i) 文献 [8, 第 2179 页的问题 4]: 若 G 是有限平面图的随机弱极限 (局部极限), 则其上位置渗流的临界概率 $p_c(G, \text{site}) \geqslant 1/2$ a.s. 且此临界位置渗流不存在无穷连通分支; (ii) 关于渗流临界概率局部性的 Schramm 猜想 (参见文献 [23,76,77]): 记 $p_c(G)$ 为无穷连通图 G 上的 Bernoulli 边渗流的临界概率, 若无穷可迁图序列 $\{G_n\}_{n\geqslant 1}$ 局部收敛于无穷可迁图 G 且 $\sup_n p_c(G_n) < 1$, 则 $p_c(G_n) \to p_c(G)$.

3 Aldous-Lyons 猜想的进展

3.1 Aldous-Lyons 猜想对度有界的单模带根树成立 [58]

固定 $2 \leqslant d \in \mathbb{N}$. 令 Graph $= \{$简单图 G 的同构类 : $\forall\, x \in V(G), \deg(x) \leqslant d\}$. 对图 G, 用 $d_G(x, y)$ 表示 $x, y \in V(G)$ 之间的距离. 一带根 r- 球是一图 $G \in$ Graph, 它具有根 $x \in V(G)$, 且 $d_G(x, y) \leqslant r$ 对

任意的 $y \in V(G)$ 成立. 记 $U^r = \{$带根 r- 球$\}$. 任给 $G \in \mathrm{Graph}$, $x \in V(G)$, 令 $B_G(x,r) \in U^r$ 表示以 x 为根的带根 r- 球. 任给 $\alpha \in U^r, G \in \mathrm{Graph}$, 定义

$$T(G,\alpha) = \{x \in V(G) : B_G(x,r) \cong \alpha\},$$
$$p_G(\alpha) = \frac{|T(G,\alpha)|}{|V(G)|}.$$

称图序列 $\{G_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathrm{Graph}$ 是随机弱收敛的, 若

$$\lim_{n\to\infty} |V(G_n)| = \infty, \quad \lim_{n\to\infty} p_{G_n}(\alpha) \text{ 存在}, \quad \forall\, r \in \mathbb{N}, \quad \alpha \in U^r.$$

令

$$\mathrm{Gr} := \{\text{可数连通带根图 } (G,x) \text{ 的带根同构类 } [G,x] : G \in \mathrm{Graph}, x \in V(G)\}.$$

在 Gr 上定义距离 $\mathrm{dist}(\cdot,\cdot) : \forall\, [G_1,o_1],[G_2,o_2] \in \mathrm{Gr}$,

$$\mathrm{dist}([G_1,o_1],[G_2,o_2]) = \frac{1}{1+r}, \quad r := \max\{s : B_{G_2}(o_2,s) \cong B_{G_2}(o_2,s)\}, \tag{3.1}$$

则 $(\mathrm{Gr}, \mathrm{dist}(\cdot,\cdot))$ 是紧度量空间. 令

$$T(\mathrm{Gr},\alpha) = \{[G,o] \in \mathrm{Gr} : B_G(o,r) \cong \alpha\}, \quad \forall\, r \in \mathbb{N}, \quad \alpha \in U^r,$$

则 $T(\mathrm{Gr},\alpha)$ 既是开集也是闭集. 因此, Gr 上的概率 μ 是 $(G_n)_n$ 的随机弱极限当且仅当

$$\mu(T(\mathrm{Gr},\alpha)) = \lim_{n\to\infty} p_{G_n}(\alpha), \quad \forall\, r \in \mathbb{N}, \quad \alpha \in U^r.$$

文献 [58] 借鉴文献 [57] 中研究双曲平面的圆堆积 (circle packing) 的一个想法, 证明了如下定理:

定理 3.1 集中在树上的 Gr 上的单模概率 μ 是有限图序列的随机弱极限.

注 3.1 (i) 沿着定理 3.1 的证明思路可证: Aldous-Lyons 猜想对带标记的度有界的单模随机树仍然成立. 此结论在特殊标记时的证明, 参见文献 [34]. 注意可将 Aldous-Lyons 猜想的证明归结为度有界情形此猜想的证明. 因此, Aldous-Lyons 猜想对带标记的单模随机树成立.

(ii) 如前所述证明定理 3.1 的方法来自文献 [57, 定理 3.4] 的证明. 下面叙述文献 [57, 定理 3.4].

设 F 是离散群, K 是紧拓扑空间. 令 $X = X(F,K)$ 表示全体映射 $\phi : F \to K$, 并赋予 X 逐点收敛拓扑, 则 X 是紧度量空间, F 在其上有如下的作用: $\forall\, f \in F$,

$$f : \phi \in X \to f\phi(\cdot) = \phi(f^{-1}\cdot) \in X.$$

令 $M = M(F,K)$ 是 X 上在 F 作用下不变的概率全体, 赋予其弱收敛拓扑. 称 $\mu \in M$ 是周期的, 若其支撑是有限的. 如下的问题具有内在意义: 设 $2 \leqslant |K| < \infty$. 刻画使周期概率全体在 $M(F,K)$ 中稠密的离散群 F. 文献 [57] 证明了如下的结论 (参见文献 [57, 定理 3.4]):

令 F 是有限生成自由群且 $2 \leqslant |K| < \infty$. (i) 周期概率全体在 $M(F,K)$ 中稠密. (ii) 设 $E \subset F$ 有限, $\psi_1,\ldots,\psi_m \in X$, $Y := \{\phi \in X : \exists\, i$ 使得 $\phi|_E = \psi_i|_E\}$. 若 $\mu \in M(F,K)$ 支撑在 Y 上, 则存在周期概率序列 $\{\lambda_j\}_{j\geqslant 1}$ 使得 $\lambda_j \to \mu$.

3.2 利用不变渗流重证 Aldous-Lyons 猜想对单模随机树网络成立 [59]

单模随机树 (unimodular random tree, URT) 网络是支撑在树上的单模随机网络. 文献 [59] 证明了度有界的 URT 与正则树上的不变渗流的根的连通分支同分布, 从而重证了 Aldous-Lyons 猜想对 URT 成立, 即文献 [34,58] 的结果. 关于不变渗流, 参见文献 [35,70,71,78].

现开始证明前述结论. 为此, 先给出如下由定义直接可证的引理.

引理 3.1 设 μ 是 $\mathcal{G}_*$ 上的单模概率, Ξ 是相关的标记空间. 再设 $\widehat{\Xi}$ 是 Polish 空间, $\phi:\mathcal{G}_*\to\Xi$ 是可测映射. 令 Φ 是 $\mathcal{G}_*$ 到 $\mathcal{G}_*$ 的映射, 它将网络 $[G,o]$ 变成另一个网络: 此网络与 $[G,o]$ 具有相同的底图与根, 但顶点 $x\in V(G)$ 的标记被 $\phi([G,x])$ 所代替, 则 $\Phi_*\mu$ 是单模概率. 再者, 若给分布为 μ 的单模随机网络的所有顶点标记增加第二个独立同分布 (i.i.d.) $\widehat{\Xi}$ 值的标记, 则得到的随机网络仍然是单模的.

回顾图 G 上的带标记 (labeled) 渗流是如下的随机网络: 它的底图是 G, 顶点和边被赋予了有两个坐标的标记, 标记的第二个坐标要么为 0 要么为 1. 称第二个坐标为颜色 (color). 染 0 或 1 的边分别称为闭边或开边.

引理 3.2 令 μ 是底图是度至多为 d 的树的带根网络上的概率测度, 则 μ 是单模的当且仅当 μ 是 d- 正则树 $\mathbb{T}_d$ 上在自同构群作用下不变的带标记渗流的根的开分支的分布.

定理 3.2 每个 URT 是可图的.

证明 由文献 [57, 定理 3.4] 知, $\mathbb{T}_d$ 上的任一不变网络是可图的, 尽管只对偶数 d 给出了证明, 但对所有的 d 证明仍有效.

任给 URT μ, 若其顶点的度至多为 d, 则由引理 3.2, 令 ρ 是 $\mathbb{T}_d$ 上的不变带标记渗流, 其根的开分支具有分布 μ. 令 $(G_n)_n$ 是随机弱极限为 ρ 的有限网络序列. 这里亦可假设诸 G_n 的边被染成开或闭. 去掉诸 G_n 的闭边, 得 G_n'. 则显然 $(G_n')_n$ 具有随机弱极限 μ.

若顶点的度不 μ-a.s. 有界, 则对每个 d, 删掉 T 中所有其某端点的度大于 d 的边, 令 μ_d 是 o 在删边后的连通分支的分布, 其中 $(T,o)\sim\mu$, 则 μ_d 是单模的; 由刚证的结论知, 它是可图的. 注意可图测度全体是闭集, $\mu_d\to\mu$ $(d\uparrow\infty)$. 因此, μ 是可图的. □

注 3.2 (i) 文献 [34] 利用一个比定理 3.2 稍弱一点的可图逼近证明了每个可树化 (treeable) 群是可图的. 称群 Γ 是可树化的, 若存在一个支撑在以 Γ 为顶点集的树上的在 Γ 的自然作用下不变的概率; 称此概率为 Γ 的树化 (treeing). 参见附录 C.

(ii) 注意, 并不是每个单模随机网络都是某不变渗流的根的连通分支; 从而用不变渗流的想法不能证明一般情形下的 Aldous-Lyons 猜想. 例如, 考虑无穷离散 Sierpiński 地毯 (参见文献 [79, 引理 2.3] 和 [59]). 它是 Sierpiński 地毯第 n 步构造的自然边界图在 $n\to\infty$ 时的随机弱极限. 在此情形, 极限测度 μ 具有不可数的支撑, 尽管在支撑中的图是平面上三角形格点的子图. 不存在三角形格点上的不变渗流使其在根处的连通分支具有分布 μ; 因为 μ 的支撑中的子图具有密度 0, 且由它们的拓扑知三角形格点上的任一渗流只能有一个连通分支是 Sierpiński 地毯 (除去具有 μ 零测度的退化连通分支).

3.3 超有限情形的 Aldous-Lyons 猜想成立 [4]

与顺从群的 Følner 序列相关的一个概念是度有界图族的 “超有限性”; 此概念可以自然地延拓至图极限. “超有限” (在不同情形) 由文献 [4,36,80] 引入. 注意, 超有限度有界图族与超有限度有界图极限的关系就像稠密图序列与图测度 (graphon) 的关系一样美妙; 特别地, Schramm [4] 证明了超有限情形的 Aldous-Lyons 猜想成立, 参见文献 [17].

定义 3.1 (超有限图族 (hyperfinite graph family)) 令 $\mathcal{G}$ 表示顶点度至多为 D 的有限图全体. 任给 $\epsilon \in (0,1), k \in \mathbb{N}$, 称图 $G \in \mathcal{G}$ 是 (ϵ, k)- 超有限的, 若能删掉 G 的 $\epsilon|V(G)|$ 条边使得到的图的任一连通分支至多有 k 个顶点. 设 $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}$ 是有限图族, 称其为超有限的, 若 $\forall\, \epsilon \in (0,1)$, $\exists k = k(\epsilon) \in \mathbb{N}$ 使 $\mathcal{H}$ 中的任一图都是 (ϵ, k)- 超有限的.

上述定义中, 删边可换成删顶点. 实际上, 设删掉的边集为 S, 去掉 S 中每条边的一个端点可使所得图的连通分支变小. 反之, 若删掉顶点集 T 使所得图的连通分支变小, 令 S 表示所有与 T 相邻的边, 则删掉边集 S 亦可使所得图的连通分支变小且 $|S| \leqslant D|T|$.

注意, 展开子 (expander) 无穷族不超有限, 随机 D- 正则图族在 $D \geqslant 3$ 时以概率 1 不超有限.

例 3.1 (i) $\mathcal{G}$ 中的树全体是超有限的.

(ii) 任给 $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, 称图族 $\mathcal{H}$ 具有 f- 有界增长, 若

$$|B_G(v, m)| \leqslant f(m), \quad \forall\, G \in \mathcal{H}, \quad v \in V(G), \quad m \in \mathbb{N}.$$

若进一步, $(\log f(m))/m \to 0$ $(m \to \infty)$, 则称 $\mathcal{H}$ 具有次指数增长. 次指数增长的图族 $\mathcal{H}$ 是超有限的.

(iii) Benjamini 等 [81] 证明了如下结论: $\mathcal{G}$ 的每个子式封闭的非空真子集是超有限的. 特别地, $\mathcal{G}$ 中的全体平面图是超有限的.

定义 3.2 (超有限图极限) 回顾图极限是一个四元组 $\mathbf{G} = (\Omega, \mathcal{B}, \lambda, E)$: 其中 $V(\mathbf{G}) = \Omega$ 是集合, $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbf{G})$ 是 Ω 上的 Borel σ- 代数, $\lambda = \lambda_{\mathbf{G}}$ 是 $(\Omega, \mathcal{B})$ 上的概率测度, $E(\mathbf{G}) = E \in \mathcal{B} \times \mathcal{B}$ 是满足如下的条件的 Borel 集:

$$\eta(A \times B) = \eta(B \times A), \quad \forall\, A, B \in \mathcal{B},$$

其中图极限的度有上界 D, $\eta = \eta_{\mathbf{G}}$ 是 $(\Omega \times \Omega, \mathcal{B} \times \mathcal{B})$ 上的有限测度, 记 $y \sim x$, 若 $(x, y) \in E$,

$$\eta(A \times B) = \int_A \sum_{y \sim x} I_B(y) \lambda(dx), \quad \forall\, A, B \in \mathcal{B}.$$

称图极限 $\mathbf{G}$ 为 (ϵ, k)- 超有限, 若存在 Borel 集 $S \subseteq E$ 满足 $\eta(S) \leqslant \epsilon$ 且 $\mathbf{G} \setminus S$ 的每个连通分支至多有 k 个顶点. 称图极限 $\mathbf{G}$ 为超有限, 若任给 $\epsilon \in (0,1)$, 存在 $k \in \mathbb{N}$ 使 $\mathbf{G}$ 为 (ϵ, k)- 超有限. 注意若将 "$\mathbf{G} \setminus S$ 的每个连通分支至多有 k 个顶点" 换为 "$\mathbf{G} \setminus S$ 的每个连通分支有限", 则并不会改变超有限的定义.

类似图情形, 亦可通过删顶点集来定义图极限的超有限.

注 3.3 (i) 若 $\mathbf{G}$ 和 $\mathbf{G}'$ 是两个局部 - 整体等价的图极限, $\mathbf{G}$ 为 (ϵ, k)- 超有限, 则 $\forall\, \epsilon' > \epsilon$, $\mathbf{G}'$ 是 (ϵ', k)- 超有限.

(ii) 若 $\mathbf{G}$ 和 $\mathbf{G}'$ 是两个局部等价的图极限, $\mathbf{G}$ 是超有限的, 则 $\mathbf{G}'$ 亦然. 但 (ϵ, k)- 超有限在局部等价下不被保持.

设 $\mathbf{G}$ 是图极限. 令 $\mathcal{R} = \{Y \subseteq V = V(\mathbf{G}) : |Y| \leqslant k,\ \mathbf{G}|_Y \text{ 连通}\}$. $\mathcal{R}$ 是 $U = V \cup V^2 \cup \cdots \cup V^k$ 的子集, 且若赋予 U 从 V 继承的自然 σ- 代数, 则 $\mathcal{R}$ 是 Borel 子集. 称 $\mathcal{R}$ 上的概率 τ 是一分数剖分 (fractional partition), 若按 τ 来选取 $\mathbf{Y} \in \mathcal{R}$, 然后均匀选取 $y \in \mathbf{Y}$, 得 y 具有分布 λ. 定义 τ 的边界值为

$$\partial(\tau) = \mathbb{E}\left(\frac{\partial(\mathbf{Y})}{|\mathbf{Y}|}\right), \quad \partial(\mathbf{Y}) \text{ 表示 } \mathbf{Y} \text{ 与其外部的连边数}.$$

称 $\mathbf{G}$ 是分数 (ϵ, k)- 超有限, 若存在分数剖分 τ 使得 $\partial(\tau) \leqslant \epsilon$. 注意 (ϵ, k)- 超有限可推出分数 (ϵ, k)- 超有限; 反之不然. 但分数 (ϵ, k)- 超有限可推出 $(\epsilon \log(8D/\epsilon), k)$- 超有限.

命题 3.1 令 $\varphi:\mathbf{G}_1\to\mathbf{G}_2$ 是图极限 $\mathbf{G}_1$ 与 $\mathbf{G}_2$ 之间的局部同构, 则

(i) $\mathbf{G}_2$ 是 (ϵ,k) - 超有限 $\Rightarrow\mathbf{G}_1$ 是 (ϵ,k) - 超有限;

(ii) $\mathbf{G}_1$ 是分数 (ϵ,k) - 超有限 $\Rightarrow\mathbf{G}_2$ 是分数 (ϵ,k) - 超有限.

如下的定理由 Schramm [4] 证明.

定理 3.3 设 $(G_n)_n\subset\mathcal{G}$ 局部收敛到图极限 $\mathbf{G}$, 则 $\mathbf{G}$ 是超有限的当且仅当 $\{G_n:n\in\mathbb{N}\}$ 是超有限的.

下面叙述定理 3.3 在对偶意义下的如下定理, 可见 Aldous-Lyons 猜想对超有限图极限/单模图成立.

定理 3.4 一个图极限是超有限的当且仅当它是超有限有限图序列的局部极限.

注 3.4 (i) Kaimanovich [82] 证明了超有限图的一个刻画 (其证明参见文献 [83]): 图极限 $\mathbf{G}$ 不是超有限的当且仅当它有一子图极限 $\mathbf{F}$ 满足 $\eta_{\mathbf{G}}(E(\mathbf{F}))>0$ 且 $\exists\epsilon>0$ 使

$$\partial_{\mathbf{F}}(Y)\geqslant\epsilon|V(Y)|,\quad\forall\,\mathbf{F}\text{ 的有限连通子图 }Y.$$

(ii) Hatami 等 [24] 和 Elek [83] 证明了, 任两个局部等价超有限无原子图极限是局部 - 整体等价的.

(iii) 令 $\mathbf{G}$ 和 $\mathbf{G}'$ 是两个超有限局部等价图极限, $\mathbf{G}$ 是 (ϵ,k)- 超有限的, 则对 $\forall\,\epsilon'>\epsilon$, $\mathbf{G}'$ 是 (ϵ',k)- 超有限的.

(iv) 每个局部收敛超有限图序列是局部 - 整体收敛的.

(v) 定理 3.4 可推广至带标记情形, 即 Aldous-Lyons 猜想对带标记的超有限图极限和超有限的单模随机网络成立.

3.4 Aldous-Lyons 猜想对单连通单模地图成立 [28]

Angel 等 [28] 证明了 Aldous-Lyons 猜想对单连通单模地图成立.

任给 (允许环和重边的) 连通图 $G=(V,E)$, 它在曲面 S 中的嵌入是指把它在 S 中能以边不相交的方式画出的画法. 对一个嵌入而言, 称 G 在 S 中的象的补的连通分支为面 (face). 称一个嵌入是适当的 (proper), 若

(i) 它是局部有限的 (S 中的每个紧集只与有限条边相交);

(ii) 每个面同构于一个开圆盘;

(iii) 任意面 f, 给与 f 相邻的边赋予使 f 位于其右边的方向, 则这些有向边首尾相接构成一个有向圈或路径.

注意对单连通或紧的 S, 满足 (i) 和 (ii) 的嵌入自动满足 (iii).

定义一个地图 M 为一个局部有限连通图 G 及其在定向曲面中的适当嵌入的等价类, 其中两个嵌入 $\varphi_i:G\to S^i$ $(i\in\{1,2\})$ 等价是指存在保定向的同构 $\phi:S^1\to S^2$ 使 $\phi\circ\varphi_1=\varphi_2$. 称一个地图是平面的, 若其嵌入的曲面同构于 2 维球面的一个开子集. 若嵌入的曲面是单连通的 (即此曲面同构于 2 维球面或平面), 则称所论地图是单连通的.

定理 3.5 (参见文献 [28, 定理 2]) 每个单连通单模随机带根地图是可图的.

上述定理的证明依赖于树的相应结果 (参见文献 [57–59]). Elek 和 Lippner [34] 观察到可树化单模图是可图的, 因此证明上述定理的关键步骤是证明自由均匀展开森林的连通性.

4 Aldous-Lyons 猜想: 一些理解

4.1 难度

(1) 无穷带根 3- 正则树 $(\mathbb{T}_3, o)$. 若 G_n 是 n 顶点 3- 正则图, 则 G_n 的随机弱极限是 $(\mathbb{T}_3, o)$. 亦可用 $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$ 的商群来构造逼近序列. 这些构造无法推广至一般情形. 但 $(\mathbb{T}_3, o)$ 不是有限树的随机弱极限. 特别地, 固定 $x \in V(\mathbb{T}_3)$, 令 $B_n = B_{\mathbb{T}_3}(x, n)$, $n \in \mathbb{N}$, 则 $(B_n)_n$ 的随机弱极限不是 $(\mathbb{T}_3, o)$, 而是如下的单模概率 μ : 令 T_n 是互不相交的深度为 n 的二分支树, $n \geqslant 0$. 给诸 T_n 加一与其根相邻的新顶点 x_n. 添加一孤立顶点 x_{-1}. 然后在 x_n 与 x_{n+1} 之间连一条边, $n \geqslant -1$, 则所得的树 T 被文献 [84] 称为华盖 (canopy) 树. 令

$$\mu(T, x_n) = 2^{-n-2}, \quad n \geqslant -1.$$

显然, μ 支撑在 $\mathbb{T}_3$ 的一棵真子树上. 注意, 可将 $\mathbb{T}_3$ 换为无穷 d- 正则树 $\mathbb{T}_d$ $(d \geqslant 3)$. 此时诸 T_n 是互不相交的深度为 n 的 $d-1$ 分支树,

$$\mu(T, x_n) = \frac{d-2}{(d-1)^{n+2}}, \quad n \geqslant -1.$$

一般地可证, 无穷可迁图 G 有有限子图序列随机弱逼近于它当且仅当 G 是顺从的.

(2) Elek [58] 借鉴 Bowen [57] 研究双曲平面的圆填充 (circle packing) 的一个想法, 证明了此猜想对任一度有界的单模随机树成立. Elek 和 Lippner [34] 将文献 [58] 的结论推广至网络. 最近, Benjamini 等 [59] 利用不变渗流重证了 Elek 的结论 (参见文献 [34, 58]): Aldous-Lyons 猜想对支撑在树上的单模随机网络成立. 注意, 树是连边方式最简单的图, 以及并不是每个单模随机网络都是某不变渗流的根的连通分支. 前述证明方法均有其天然的局限性. 虽然 Angel 等 [28] 证明了 Aldous-Lyons 猜想对单连通单模地图成立, 但其证明依赖于树的相应结果.

Schramm [4] 证明了超有限情形的 Aldous-Lyons 猜想成立. 注意 "超有限" 与顺从图的 Følner 序列密切相关. 此时 Aldous-Lyons 猜想成立是情理之中的事情.

证明 Aldous-Lyons 猜想的思路必须是构造性的, 已有方法难以适用, 挑战性巨大.

(3) 无标记和有标记. 设有限图序列 (G_n) 的随机弱极限为某固定的可迁图 G, 任意支撑在 G 上的单模概率 (网络) 是否是 (G_n) 上的某网络序列的随机弱极限?

一般来说, 不是!

(i) 若 G 是 3- 正则树, 则几乎所有增长的 3- 正则图序列以 G 为其随机弱极限. 然而 G 上有自同构不变的密度为 $\frac{1}{2}$ 的 (随机) 独立集 (这来自随机 3- 正则二部图序列的随机弱极限是 G), 但由文献 [85] 随机 3- 正则图的独立集的密度偏离 $\frac{1}{2}$. 若 Aldous-Lyons 猜想成立, 则必须存在有限图序列, 它的独立集序列密度可以趋于 $\frac{1}{2}$.

(ii) 此外, 另一个例子来自 Timár [27]: 存在一个收敛到 $(\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2) \times \mathbb{Z}_4$ 的 Cayley 图 G 的图序列 G_n, 但无法给 $E(G_n)$ 定向和标记以使所得的箭图局部收敛到 G 的 Cayley 箭图. 但此例子在一定程度上利用了 (i). Elek 注意到某些 Burger-Mozes 群以两棵正则树的直积为 Cayley 图, 从而存在有限图序列的随机弱逼近; 但并不知晓这些单群是否是可图的. 关于 Burger-Mozes 群, 参见文献 [86, 第 IV.9 节].

回顾文献 [27, 定理 2]: "存在满足如下条件的两个收敛到同一 Cayley 图 G 的序列 G_n 和 K_n: K_n 包含一个 Hamilton 圈 C_n 且 (K_n, C_n) 收敛到 (G, F), 其中 F 是 G 的单模随机子图; 但 G_n 不包含子图 D_n 满足 (G_n, D_n) 收敛到 (G, F)." 构造的例子亦在一定程度上利用了 (i). 注意, (K_n, C_n) 可视为 K_n 上的示意图: 对 C_n 的边染一种颜色, 而对 C_n 外的边染另一种颜色.

(iii) 一个潜在原因在于, (G_n) 本身只是局部收敛于 G, 而不是类似 "局部 - 整体 (染色邻域) 收敛"; 从而导致给 G 加标记后不存在 G_n 上的网络局部收敛于 G 上的网络. 关于局部 - 整体 (染色邻域) 收敛, 参见文献 [10,17,24].

4.2 单模 Galton-Watson 测度

设 $(p_k, k \geqslant 0)$ 为 $\mathbb{Z}_+ = \{0,1,\ldots\}$ 上的概率分布, T_1 和 T_2 是两棵独立的具有后代分布 (p_k) 的 Galton-Watson 树, o_1 和 o_2 分别是它们的根; 在 o_1 与 o_2 之间连一条边, 得一棵新的树 T, 令 o_1 为 T 的根. (T, o_1) : 增广 (augmented) Galton-Watson 树, 其分布叫增广 Galton-Watson 测度, 记为 AGW (若 $p_0 \neq 0$, 则考虑条件概率 $\mathbb{P}[T \in \cdot \mid T_1$ 与 T_2不灭绝] 或 $\mathbb{P}[T \in \cdot \mid T_1$ 与 T_2 灭绝]).

定义单模 Galton-Watson 测度 (UGW) 如下:

$$\mathrm{UGW}(B) = \frac{\mathrm{AGW}(I_B \frac{1}{\deg(o)})}{\sum_{k\geqslant 0} \frac{p_k}{k+1}}.$$

可以验证:

$$\mathrm{UGW}(\deg(o) = \ell + 1) = \frac{\frac{1}{\ell+1} p_\ell}{\sum_{k\geqslant 0} \frac{p_k}{k+1}}, \quad \ell \geqslant 0,$$

$$\overline{\deg}(\mathrm{UGW}) = \left(\sum_{k\geqslant 0} \frac{p_k}{k+1} \right)^{-1}.$$

往证 UGW 是有限网络的随机弱极限, 从而是单模的. 为此, 考虑固定度分布网络: 设 (γ_k) 是 $\mathbb{Z}_+$ 上的概率分布. 给定 n 个顶点, 独立地以概率 γ_k 给每个顶点 k 个球; 然后随机地对这些不同顶点的球配对, 在不同顶点的球对之间连一条边 (若有 1 个球没被配对, 则略掉它). 令 $m_0 = \sum_{k=0}^{\infty} k\gamma_k < \infty$. 取极限, 则得一棵树 (T, o): 其根 o 具有度 k 的概率为 γ_k, 根的邻居 (若存在) 度为 k 的概率为 $\frac{k\gamma_k}{m_0}$. 实际上, 我们得到了具有后代分布 $k \to (k+1)\gamma_{k+1}/m_0$ 的 UGW. 故若希望后代分布为 (p_k), 则只需令

$$\gamma_0 = 0, \quad \gamma_k = c^{-1} \frac{p_{k-1}}{k} \quad (k \geqslant 1), \quad c = \sum_{k\geqslant 0} \frac{p_k}{k+1}.$$

4.3 Cayley 示意图

设群 Γ 具有有限生成集 S, o 为其单位元. 定义 Γ 的 Cayley 示意图为如下的网络 (G, o):

$V(G) = \Gamma, \quad E(G) = \{(x, xs) : x \in \Gamma, s \in S\}$;

边 (x, xs) 在 x 处的标记为 s, 在 xs 处的标记为 s^{-1} (对顶点不作标记, 或作相同的标记).

Weiss[49] 定义了 Γ 是可图的, 若 (G, o) 是边标记集为 $S \cup S^{-1}$ 的有限网络序列的随机弱极限. 将 $S \cup S^{-1}$ 嵌入 Ξ, Aldous-Lyons 猜想 $\Rightarrow$ Cayley 示意图是某网络序列的随机弱极限. 将有限网络上的标记改成 $S \cup S^{-1}$ 中离它最近的点, 则可以得每个 Cayley 示意图是边标记集为 $S \cup S^{-1}$ 的有限网络序列的随机弱极限, 即每个有限生成群是可图的.

注意可图群的定义独立于 Cayley 示意图, 即生成元集. 回顾群 Γ 是可图的, 若其有一个有限置换群上的几乎忠实几乎作用 (almost-faithful almost-action) 的序列 $\{\sigma_i\}_{i=1}^{\infty}$: $\sigma_i : \Gamma \to \mathrm{Sym}(n_i)$, $n_i \to \infty$, 使得

$$\lim_{i\to\infty} \frac{1}{n_i} |\{1 \leqslant p \leqslant n_i : p^{\sigma_i(f)\sigma_i(g)} = p^{\sigma_i(fg)}\}| = 1, \quad \forall\, f, g \in \Gamma, \tag{4.1}$$

$$\lim_{i\to\infty}\frac{1}{n_i}|\{1\leqslant p\leqslant n_i : p^{\sigma_i(f)}\neq p^{\sigma_i(g)}\}|=1,\quad \forall\, f\neq g\in\Gamma. \tag{4.2}$$

关于可图群的其他等价定义见附录 A; 关于可图群的综述参见文献 [50, 52]. 可证: Γ 是 (4.1) 和 (4.2) 意义下的可图当且仅当它的一个或任一 Cayley 示意图是局部 (随机弱极限) 逼近的.

在第 4.1 小节 (3)(ii) 中已见到 Cayley 示意图的局部逼近与相应的 Cayley 图的局部逼近的关系: 通过忘记边定向与边标记即知前者推后者; 但不能通过对局部逼近 Cayley 图的有限图序列进行边定向与加边标记来推出相应的 Cayley 示意图的局部逼近. 见下面构造的例子 [27]:

令 $G=\mathbb{T}_3\times C_4$, C_4 表示长为 4 的圈, 则 G 是有限生成群

$$\langle a,b,c,d\mid b^2,c^2,d^2,cdcd,ada^{-1}c,aca^{-1}d,bcbd\rangle\cong(\mathbb{Z}*\mathbb{Z}_2)\times\mathbb{Z}_4$$

的 Cayley 图. 记前述有限生成群的 Cayley 示意图为 $\widetilde{G}$. 令 $(H_n)_n$ 是围长 (girth) 趋于无穷的独立比率小于 $1/2-\epsilon<1/2$ 的 3- 正则有限图序列. 关于此类序列的构造, 参见文献 [87] ($\epsilon=1/26$). 定义 $G_n=H_n\times C_4$. 显然局部地 $G_n\to G$. 往证: 不存在 G_n 上的示意图 (网络) $\widetilde{G}_n$ 使 $\widetilde{G}_n$ 局部逼近 $\widetilde{G}$.

先对 G 和 $\widetilde{G}$ 作如下的理解. (i) 设 T_1、T_2、T_3 和 T_4 是 4 个不交 $\mathbb{T}_3$- 版本, 称为纤维 (fibre). 令

$$\phi_1:T_1\to T_2,\quad \phi_2:T_2\to T_3,\quad \phi_3:T_3\to T_4,\quad \phi_4:T_4\to T_1$$

是 4 个同构映射, 且 $\phi_4^{-1}=\phi_3\circ\phi_2\circ\phi_1$, 则

$$G=T_1\cup T_2\cup T_3\cup T_4\cup K,$$

其中 K 表示所有如下形式的边: $\{v,\phi_i(v)\}, v\in T_i, i\in\{1,2,3,4\}$, 特别地, K 由不交的长度为 4 的圈构成. (ii) 设 $\mathbb{Z}*\mathbb{Z}_2=\langle a,b\mid b^2\rangle$ 的 Cayley 示意图是 $\widetilde{T}$. 对诸 T_i 的边定向并作标记使之成为与 $\widetilde{T}$ 标记 - 同构的 Cayley 示意图, 且使诸 ϕ_i 成为标记 - 同构. 用 c 和 d 标记 K 的元素: 对 K 中每个 4- 圈, 将它的边交替染 c 与 d; 且使得如下性质成立: 若边 $\{v,\phi_i(v)\}$ 染颜色 c 或 d 之一, 如 c, 则对 v 在 T_i 中的任一邻居 w, 边 $\{w,\phi_i(w)\}$ 染另一颜色 d. 对 G 作如此处理后得到的示意图恰好是 $\widetilde{G}$.

现反设存在 G_n 上的示意图 $\widetilde{G}_n$ 使 $\widetilde{G}_n$ 局部逼近 $\widetilde{G}$. 令 H_n^1、H_n^2、H_n^3 和 H_n^4 是 $\widetilde{G}_n$ 中的 $\widetilde{H}_n$ 的 4 个不交版本, 称为 $\widetilde{G}_n$ 的纤维, 其中 $\widetilde{H}_n$ 是 H_n 的示意图. 固定 G 的顶点 $o\in V(T_1)$. 称 $x\in V(\widetilde{G}_n)$ 是 R- 好的, 若

$$B_{\widetilde{G}_n}(x,R)\cong B_{\widetilde{G}}(o,R).$$

对 $R\geqslant 4$, $B_{\widetilde{G}}(o,R)$ 具有唯一的带根标记 - 同构: 恒等映射. 这是因为每个带根标记 - 同构必须保持 $T_1\cup T_2\cup T_3\cup T_4$ 中的边, 仅有的两个能保持 T_1、T_2、T_3 和 T_4 上的标记与定向的带根标记 - 同构是恒等映射以及交换 T_2 与 T_4 的映射. 但后者将交换标记 c 和 d, 不是 $B_{\widetilde{G}}(o,R)$ 上的带根标记 - 同构. 因此, 若示意图 (网络) 带根标记 - 同构于 $B_{\widetilde{G}}(o,R)$, 则此类带根标记 - 同构唯一. 实际上, 对任意的 i 和 R- 好的 x, 从 $B_{\widetilde{G}_n}(x,R)$ 到 $B_{\widetilde{G}}(o,R)$ 的带根标记 - 同构 ℓ, 由于保标记性, 将把 $B_{\widetilde{G}_n}(x,R)\cap H_n^i$ 中的顶点映到某 $\widetilde{T}_j$ (T_j 的示意图). 但此类带根标记 - 同构 ℓ 至多只有一个, 否则与 $B_{\widetilde{G}}(o,R)$ 具有唯一的带根标记 - 同构矛盾. 对 R- 好的 x, 用 ℓ_x 表示唯一的从 $B_{\widetilde{G}_n}(x,R)$ 到 $B_{\widetilde{G}}(o,R)$ 的带根标记 - 同构; 它以双射的方式把纤维映成纤维.

由于同构 ℓ_x 保持纤维, 它要么改变 H_n^1、H_n^2、H_n^3 和 H_n^4 的圈顺序:

$$\ell_x(H_n^1\cap B_{\widetilde{G}_n}(x,R))=B_{\widetilde{G}}(o,R)\cap\widetilde{T}_j,\quad \ell_x(H_n^2\cap B_{\widetilde{G}_n}(x,R))=B_{\widetilde{G}}(o,R)\cap\widetilde{T}_{j-1},\quad \ldots,$$

要么保持圈顺序. 令

$$\overrightarrow{S}_n = \{R\text{- 好的 } x : \ell_x \text{ 保持圈顺序}\},$$
$$\overleftarrow{S}_n = \{R\text{- 好的 } x : \ell_x \text{ 逆转圈顺序}\}.$$

断言: 若 x 与 y 是 R- 好的且在 $\widetilde{G}_n$ 中相邻, 则 ℓ_x 与 ℓ_y 给出相反的圈顺序 (定向). 实际上, 设 $\{x, x'\}$ 与 $\{y, y'\}$ 是 $\widetilde{G}_n$ 中分别与 x 和 y 相邻的 c- 边, 则 $\ell_x(x')$ 与 $\ell_x(y')$ 在不同的纤维, 从而, x' 与 y' 在不同的纤维. 另一方面, $\ell_x(x')$ 与 $\ell_y(y')$ 在同一个纤维. 因此 ℓ_x 与 ℓ_y 给出相反的圈顺序: 一个保持圈顺序, 另一个逆转圈顺序. 由此可知, $\overrightarrow{S}_n$ 和 $\overleftarrow{S}_n$ 均是独立集.

由 H_n 的选取知, 任给 i, 有 $|\overrightarrow{S}_n \cap H_n^i|/|H_n^i| \leqslant \frac{1}{2} - \epsilon$, $|\overleftarrow{S}_n \cap H_n^i|/|H_n^i| \leqslant \frac{1}{2} - \epsilon$. 因此,

$$\frac{|\overrightarrow{S}_n \cup \overleftarrow{S}_n|}{|V(G_n)|} = \sum_{i=1}^{4} \frac{1}{4|H_n|}\{|\overrightarrow{S}_n \cap H_n^i| + |\overleftarrow{S}_n \cap H_n^i|\} \leqslant 1 - 2\epsilon.$$

此与假设 $|\overrightarrow{S}_n \cup \overleftarrow{S}_n|/|V(G_n)|$ 收敛于 1 相矛盾. □

4.4 极值性

令 $\mathcal{I}$ 为在不带根同构下不变的 $\mathcal{G}_*$ 中的可测子集全体. 任给 $\mu \in \mathcal{U}$, $\mathcal{A} \in \mathcal{I}$, $\mu(\mathcal{A}) > 0$, 则

$$\mu(\cdot \mid \mathcal{A}) \in \mathcal{U}, \quad \mathcal{U} \text{ 是凸集.}$$

称 $\mu \in \mathcal{U}$ 是极端的 (extremal), 若它不能写成 $\mathcal{U}$ 中其他元素的凸组合.

定理 4.1 $\mu \in \mathcal{U}$ 是极端的当且仅当 $\mathcal{I}$ 是 μ- 平凡的, 即 $\mu(A) \in \{0, 1\}$, $\forall\, A \in \mathcal{I}$.

为证 Aldous-Lyons 猜想成立, 只需证其对极端单模概率测度成立. 注意有限连通网络序列的局部极限不一定是极端单模概率测度, 以及极端单模概率测度的定义. 一个自然的问题是, 极端单模概率测度是否是某有限连通网络序列的局部极限? 答案应是肯定的.

4.5 化归为有限标记空间 + 有界度情形

只需证 Aldous-Lyons 猜想对具有有限标记空间和有界度的单模概率 (随机带根网络) 成立.

设 $d \in \mathbb{N}$, $[G, o]$ 是带根网络. 对 G, 删掉所有与度大于 d 的顶点相邻的边; 令 G' 是如此所得网络的含 o 的连通分支. 定义映射 $\phi_d : [G, o] \in \mathcal{G}_* \to [G', o] \in \mathcal{G}_*$, 则 ϕ_d 连续. 因此, 任给单模概率 μ, $(\phi_d)_*\mu$ 是度有界的单模随机带根网络, 且当 $d \uparrow \infty$ 时, $(\phi_d)_*\mu$ 弱收敛于 μ.

回顾 $\mathcal{G}_*$ 是标记空间为 Ξ 的带根连通网络的同构类构成的空间. 当标记空间为 Ξ' 时, 相应的空间记为 $\mathcal{G}'_*$. 设 $\psi : \Xi \to \Xi'$ 可测. 定义如下的映射:

$$\Psi : [G, o] \in \mathcal{G}_* \to [G', o] \in \mathcal{G}'_*,$$

其中 G' 与 G 具有相同的底图, 但将 G 的顶点标记和边标记通过 ψ 换成了 Ξ' 中的点, 则 Ψ 可测.

事实上, 当 ψ 连续时, Ψ 连续. 注意 Ξ 和 Ξ' 均是 Polish 空间. 对一般的可测 ψ, 可选取从 Ξ 到 Ξ' 的连续映射序列 $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ 使得

$$\forall\, x \in \Xi, \quad \text{在 } \Xi' \text{ 中}, \quad \lim_{n\to\infty} \psi_n(x) = \psi(x);$$

如前类似地定义 Ψ_n, 则当 $n \to \infty$ 时, Ψ_n 逐点地收敛于 Ψ. 因此, 此时 Ψ 亦可测.

不失一般性, 设 $\Xi=\mathbb{Z}_+^{\mathbb{Z}_+}$, 其中 $\mathbb{Z}_+$ 表示所有非负整数, Ξ 上的距离如下:

$$\rho(\{x_i\}_{i=0}^{\infty},\{y_i\}_{i=0}^{\infty})=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{|x_i-y_i|}{2^i(1+|x_i-y_i|)},\quad \forall\,\{x_i\}_{i=0}^{\infty},\{y_i\}_{i=0}^{\infty}\in\mathbb{Z}_+^{\mathbb{Z}_+}.$$

任给 $\epsilon\in(0,1)$, 选取充分大的 $m\in\mathbb{N}$ 使得 $\frac{1}{2^m}<\epsilon$. 定义连续映射

$$\psi:=\psi_{\epsilon,m}:\vec{x}=\{x_i\}_{i=1}^{\infty}\in\mathbb{Z}_+^{\mathbb{Z}_+}\to\vec{x}_*=\{x_iI_{\{i\leqslant m\}}\}_{i=1}^{\infty}\in\mathbb{Z}_+^{\mathbb{Z}_+},$$

则 $\forall\,\vec{x}\in\mathbb{Z}_+^{\mathbb{Z}_+}$, $\rho(\psi(\vec{x}),\vec{x})<\frac{1}{2^m}<\epsilon$. 从而, $\mathrm{dist}(\Psi([G,o]),[G,o])<\epsilon$, $\forall\,[G,o]\in\mathcal{G}_*$. 因此, 任给单模概率 μ, $\Psi_*\mu$ 是具有可数离散标记空间的单模随机带根网络; 且当 $\epsilon\downarrow 0$ 时, $\Psi_*\mu$ 弱收敛于 μ.

对固定的 ϵ 和 m, 任给 $n\in\mathbb{N}$, 定义连续映射

$$\psi_n:=\psi_{\epsilon,m,n}:\vec{x}=\{x_i\}_{i=1}^{\infty}\in\mathbb{Z}_+^{\mathbb{Z}_+}\to\vec{x}_\wedge=\{(x_i\wedge n)I_{\{i\leqslant m\}}\}_{i=1}^{\infty}\in\mathbb{Z}_+^{\mathbb{Z}_+},$$

则相应的映射 $\Psi_n:\mathcal{G}_*\to\mathcal{G}_*$ 连续且

$$\Psi_n([G,o])\to\Psi([G,o]),\quad n\to\infty,\quad\forall\,[G,o]\in\mathcal{G}_*.$$

特别地,

$$\Psi_n\circ\Psi([G,o])\to\Psi\circ\Psi([G,o])=\Psi([G,o]),\ n\to\infty,\quad\forall\,[G,o]\in\mathcal{G}_*.$$

因此, 对单模概率 μ, $(\Psi_n\circ\Psi)_*\mu$ 是具有有限标记空间的单模随机带根网络, 且

$$\text{当 } n\uparrow\infty \text{ 时},\quad (\Psi_n\circ\Psi)_*\ \mu \text{ 弱收敛于 } \Psi_*\mu.$$

综上知, 可用具有有限标记空间的单模概率逼近任一单模概率; 可用度有界的单模随机带根网络逼近任一单模随机带根网络. 可见, 为证 Aldous-Lyons 猜想成立, 只需证 Aldous-Lyons 猜想对具有有限标记空间和有界度的单模概率 (随机带根网络) 成立.

4.6 局部 - 整体收敛 [10, 17, 24]

染色邻域收敛由文献 [10] 引入; 而后为强调此概念包含了收敛图序列的局部和整体信息, 文献 [24] 称之为 “局部 - 整体收敛” 并进一步研究了它, 参见文献 [17, 第 19.2 小节]. “局部 - 整体收敛” 这个名字在一定程度上有点不妥, 因为大偏差收敛 (由文献 [69] 引入) 亦包含了图序列的局部和整体信息, 而且目前并不知晓染色邻域收敛与大偏差收敛之间的强弱关系 (参见文献 [69]). 尽管如此, 在此小节, 局部 - 整体收敛指的是染色邻域收敛.

称有限图序列 $(G_n)_n$ 是局部 - 整体收敛的, 若任给 $r,k\in\mathbb{N}$ 和 $\epsilon>0$, 存在 $\ell\in\mathbb{N}$ 使得当 $n,m>\ell$ 时, 对 $V(G_n)$ 的每一个 k- 染色, 均存在 $V(G_m)$ 的一个 k- 染色满足: G_n 与 G_m 的 k- 染色 r- 邻域距离至多为 ϵ. 此收敛严格强于局部收敛. 局部 - 整体收敛可以自然地延拓至图极限. 文献 [24] 证明了如下的结论:

定理 4.2 对每个局部 - 整体收敛的有限图序列, 均存在一个图极限为其局部 - 整体收敛极限.

如下的问题强于 Aldous-Lyons 猜想:

问题 4.1 是否每个图极限都是某局部 - 整体收敛的有限图序列的局部 - 整体收敛极限?

上述问题的答案有可能是否定的, 此方面的讨论, 参见文献 [24, 第 12 节]. 令 μ 是支撑在无标记带根连通图集上的单模概率测度, ν 是对 μ- 随机图的顶点独立地加 $[0,1]$ 上的均匀标记所得的单模概率测度. 称对应于 ν 的概率空间为 Bernoulli 图极限, 记为 $\mathcal{B}_\mu$. 称有限图序列是 Bernoulli 的, 若其局部 - 整体收敛于某 Bernoulli 图极限. 如下的猜想由 Szegedy 提出, 近几年受到了关注, 但要解决它却需要实质性的创新思想. 如下三个猜想, 参见文献 [24], 其中后两个猜想比第一个猜想弱.

猜想 4.1 令 $3 \leqslant d \in \mathbb{N}$, G_i 是具有 i 个顶点的随机 d- 正则图 (当 d 奇时, 只考虑偶 i), 则 $(G_i)_{i=1}^{\infty}$ 以渐近概率 1 是 Bernoulli 序列.

猜想 4.2 猜想 4.1 中的 $(G_i)_{i=1}^{\infty}$ 以渐近概率 1 局部 - 整体收敛.

猜想 4.3 令 $3 \leqslant d \in \mathbb{N}$, 则存在 Bernoulli 图序列 $(G_i)_{i=1}^{\infty}$ 使其局部极限是 d- 正则树 $\mathbb{T}_d$.

致谢 衷心感谢审稿人的审稿.

参考文献

1 Benjamini I, Schramm O. Recurrence of distributional limits of finite planar graphs. Electron J Probab, 2001, 6: 1–13
2 Angel O, Schramm O. Uniform infinite planar triangulations. Comm Math Phys, 2003, 241: 191–213
3 Schramm O. Conformally invariant scaling limits: An overview and a collection of problems. In: Proceedings of the 8th International Coastal Symposium 2006, I. Zürich: European Mathematical Society, 2007, 513–543
4 Schramm O. Hyperfinite graph limits. Electron Res Announc Math Sci, 2008, 15: 17–23
5 Aldous D J, Steele M. The objective method: Probabilistic combinatorial optimization and local weak convergence. In: Probability on Discrete Structures. Encyclopaedia of Mathematical Sciences, vol. 110. New York: Springer, 2004, 1–72
6 Aldous D, Lyons R. Processes on unimodular random networks. Electron J Probab, 2007, 12: 1454–1508
7 Aldous D J. Exchangeability and continuum limits of discrete random structures. In: Proceedings of the International Congress of Mathematicians Hyderabad, India, 2010, vol. I. New Delhi: Hindustan Book Agency, 2010, 141–153
8 Benjamini I. Random planar metrics. In: Proceedings of the International Congress of Mathematicians Hyderabad, India, 2010, vol. IV. New Delhi: Hindustan Book Agency, 2010, 2177–2187
9 Bollobás B, Riordan O. Metrics for sparse graphs. In: Surveys in Combinatorics. London Mathematical Society Lecture Note Series, No. 365. Cambridge: Cambridge University Press, 2009, 211–287
10 Bollobás B, Riordan O. Sparse graphs: Metrics and random models. Random Structures Algorithms, 2011, 39: 1–38
11 Borgs C, Chayes J, Kahn J, et al. Left and right convergence of graphs with bounded degree. Random Structures Algorithms, 2013, 42: 1–28
12 Borgs C, Chayes J, Lovász L. Moments of two-variable functions and the uniqueness of graph limits. Geom Funct Anal, 2010, 19: 1597–1619
13 Borgs C, Chayes J, Lovász L, et al. Graph limits and parameter testing. In: STOC'06: Proceedings of the 38th Annual ACM Symposium on Theory of Computing. New York: ACM, 2006, 261–270
14 Borgs C, Chayes J T, Lovász L, et al. Convergent sequences of dense graphs I: Subgraph frequencies, metric properties and testing. Adv Math, 2008, 219: 1801–1851
15 Borgs C, Chayes J T, Lovász L, et al. Convergent graph sequences II: Multiways cuts and statistical physics. Ann of Math (2), 2012, 176: 159–219
16 Freedman M, Lovász L, Schrijver A. Reflection positivity, rank connectivity, and homomorphism of graphs. J Amer Math Soc, 2007, 20: 37–52
17 Lovász L. Large Networks and Graph Limits. Providence: Amer Math Soc, 2012
18 Lovász L. Very large graphs (dedicated to the memory of Oded Schramm). In: Current Developments in Mathematics, 2008. Somerville: International Press, 2009, 67–128
19 Lovász L, Sós V T. Generalized quasirandom graphs. J Combin Theory Ser B, 2008, 98: 146–163
20 Lovász L, Szegedy B. Limits of compact decorated graphs. ArXiv:1010.5155, 2010
21 Lovász L, Szegedy B. Regularity partitions and the topology of graphons. In: An Irregular Mind. Bolyai Society Mathematical Studies, vol. 21. Berlin: Springer, 2010, 415–446
22 Riordan O. Percolation on sequences of graphs. In: Proceedings of the International Congress of Mathematicians Hyderabad, India, 2010, vol. IV. New Delhi: Hindustan Book Agency, 2010, 2555–2578

23 Pete G. Probability and geometry on groups (lecture notes for a graduate course). Http://www.math.bme.hu/~gabor, 2017
24 Hatami H, Lovász L, Szegedy B. Limits of local-global convergent sequences. ArXiv:1205.4356, 2012
25 Benjamini I. Euclidean vs. graph metric. In: Erdös Centennial, Bolyai Society Mathematical Studies, vol. 25. Berlin: Springer, 2013, 35–57
26 Abért M, Thom A, Virág B. Benjamini-Schramm convergence and pointwise convergence of the spectral measure. Http://www.math.uni-leipzig.de/MI/thom/, 2013
27 Timár D M. Approximating Cayley diagrams versus Cayley graphs. Combin Probab Comput, 2012, 21: 635–641
28 Angel O, Hutchcroft T, Nachmias A, et al. Hyperbolic and parabolic unimodular random maps. ArXiv:1612.08693, 2016
29 Benjamini I, Schramm O. Percolation in the hyperbolic plane. J Amer Math Soc, 2001, 14: 487–508
30 Furman A. Gromov's measure equivalence and rigidity of higher rank lattices. Ann of Math (2), 1999, 150: 1059–1081
31 Furman A. Orbit equivalence rigidity. Ann of Math (2), 1999, 150: 1083–1108
32 Gaboriau D. Coût des relations d'équivalence et des groupes. Invent Math, 2000, 139: 41–98
33 Gaboriau D. Orbit equivalence and measured group theory. In: Proceedings of the International Congress of Mathematicians Hyderabad, India, 2010, vol. III. New Delhi: Hindustan Book Agency, 2010, 1501–1527
34 Elek G, Lippner G. Sofic equivalence relations. J Funct Anal, 2010, 258: 1692–1708
35 Houdayer C. Invariant percolation and measured theory of nonamenable groups. ArXiv:1106.5337, 2011
36 Kechris A, Miller B D. Topics in Orbit Equivalence Theory. Lecture Notes in Mathematics, vol. 1852. Berlin: Springer-Verlag, 2004
37 Marckert J F, Mokkadem A. Limit of normalized quadrangulations: The Brownian map. Ann Probab, 2006, 34: 2144–2202
38 Le Gall J F. The topological structure of scaling limits of large planar maps. Invent Math, 2007, 169: 621–670
39 Gall J F. Geodesics in large planar maps and in the Brownian map. Acta Math, 2010, 205: 287–360
40 Le Gall J F, Miermont G. Scaling limits of random trees and planar maps (Lecture Notes for Clay Mathematics Institute 2010 Summer School). In: Probability and Statistical Physics in Two and More Dimensions. Clay Mathematics Proceedings, vol. 15. Providence: Amer Math Soc, 2012, 155–211
41 Miermont G. The Brownian map is the scaling limit of uniform random plane quadrangulations. Acta Math, 2013, 210: 319–401
42 Le Gall J F. Uniqueness and universality of the Brownian map. Ann Probab, 2013, 41: 2880–2960
43 Duplantier B, Sheffield S. Liouville quantum gravity and KPZ. Invent Math, 2011, 185: 333–393
44 Sheffield S. Conformal weldings of random surfaces: SLE and the quantum gravity zipper. ArXiv:1012.4797, 2010
45 Sheffield S. Quantum gravity and inventory accumulation. ArXiv:1108.2241, 2011
46 Gurel-Gurevich O, Nachmias A. Recurrence of planar graph limits. Ann of Math (2), 2013, 177: 761–781
47 Gromov M. Endomorphisms of symbolic algebraic varieties. J Eur Math Soc (JEMS), 1999, 1: 109–197
48 Gottschalk W. Some general dynamical notions. In: Recent Advances in Topological Dynamics. Lecture Notes in Mathematics, vol. 318. New York: Springer, 1973, 120–125
49 Weiss B. Sofic groups and dynamical systems. Sankhyā, 2000, 62: 350–359
50 Pestov V G. Hyperlinear and sofic groups: A brief guide. Bull Symbolic Logic, 2008, 14: 449–480
51 Connes A. Classification of injective factors cases II_1, III_∞, III_λ, $\lambda \neq 1$. Ann of Math (2), 1976, 104: 73–115
52 Capraro V, Lupini M. Introduction to Sofic and Hyperlinear Groups and Connes' Embedding Conjecture (with an appendix by V. Pestov). Lecture Notes in Mathematics, vol. 2136. Cham: Springer, 2015
53 Capraro V. A survey on Connes's embedding conjecture. ArXiv:1003.2076, 2010
54 Fritz T. Tsirelson's problem and Kirchberg's conjecture. Rev Math Phys, 2012, 24: 1250012
55 Junge M, Navascues M, Palazuelos C, et al. Connes' embedding problem and Tsirelson's problem. J Math Phys, 2011, 52: 012102
56 Lyons R. Asymptotic enumeration of spanning trees. Combin Probab Comput, 2005, 14: 491–522
57 Bowen L. Periodicity and circle packings of the hyperbolic plane. Geom Dedicata, 2003, 102: 213–236
58 Elek G. On the limit of large girth graph sequences. Combinatorica, 2010, 30: 553–563
59 Benjamini I, Lyons R, Schramm O. Unimodular random trees. Ergodic Theory Dynam Systems, 2015, 35: 359–373
60 Bowen L. Every countably infinite group is almost Ornstein. In: Dynamical Systems and Group Actions. Providence: Amer Math Soc, 2012, 67–78
61 Douglas R G, Nowak P W. Every finitely generated group is weakly exact. ArXiv:1109.0313, 2011
62 Lee J R, Peres Y. Harmonic maps on amenable groups and a diffusive lower bound for random walks. Ann Probab, 2013, 41: 3392–3419

63 Csóka E, Lippner G. Invariant random perfect matchings in Cayley graphs. Groups, Geometry, and Dynamics (to appear, 2017). ArXiv:1211.2374, 2017
64 Lyons R. Identities and inequalities for tree entropy. Combin Probab Comput, 2010, 19: 303–313
65 Kesten H. Full Banach mean values on countable groups. Math Scand, 1959, 7: 146–156
66 Diestel R, Leader I. A conjecture concerning a limit of non-Cayley graphs. J Algebraic Combin, 2001, 14: 17–25
67 Lyons R, Peres Y. Probability on Trees and Networks. Cambridge: Cambridge University Press, 2017
68 Eskin A, Fisher D, Whyte K. Coarse differentiation of quasi-isometries II: Rigidity for Sol and lamplighter groups. Ann of Math (2), 2013, 177: 869–910
69 Borgs C, Chayes J, Gamarnik D. Convergent sequences of sparse graphs: A large deviations approach. ArXiv:1302.4615, 2013
70 Häggström O. Infinite clusters in dependent automorphism invariant percolation on trees. Ann Probab, 1997, 25: 1423–1436
71 Benjamini I, Lyons R, Peres Y, et al. Group-invariant percolation on graphs. Geom Funct Anal, 1999, 9: 29–66
72 Benjamini I, Curien N. Ergodic theory on stationary random graphs. Electron J Probab, 2012, 17: 20 pp
73 Benjamini I, Lyons R, Peres Y, et al. Uniform spanning forests. Ann Probab, 2001, 29: 1–65
74 Bowen L. Couplings of uniform spanning forests. Proc Amer Math Soc, 2004, 132: 2151–2159
75 Thomas A. Sofic measures and densities of level sets. ArXiv:1310:0993, 2013
76 Benjamini I, Nachmias A, Peres Y. Is the critical percolation probability local? Probab Theory Related Fields, 2011, 149: 261–269
77 Benjamini I. Coarse Geometry and Randomness. Lecture Notes From the 41st Probability Summer School Held in Saint-Flour, 2011. Lecture Notes in Mathematics, vol. 2100. Cham: Springer, 2013
78 Müller S. Interacting growth processes and invariant percolation. ArXiv:1304.3556, 2013
79 Teplyaev A. Spectral analysis on infinite Sierpiński gaskets. J Funct Anal, 1998, 159: 537–567
80 Elek G. The combinatorial cost. Enseign Math, 2007, 53: 225–235
81 Benjamini I, Schramm O, Shapira A. Every minor-closed property of sparse graphs is testable. Adv Math, 2010, 223: 2200–2218
82 Kaimanovich V A. Amenability, hyperfiniteness, and isoperimetric inequalities. C R Acad Sci Ser I Math, 1997, 325: 999–1004
83 Elek G. Finite graphs and amenability. Http://arxiv.org/abs/1204.0449, 2012
84 Aizenman M, Warzel S. The canopy graph and level statistics for random operators on trees. Math Phys Anal Geom, 2007, 9: 291–333
85 Frieze A, Suen S. On the independence number of random cubic graphs. Random Structures Algorithms, 1994, 5: 649–664
86 de la Harpe P. Topics in Geometric Group Theory. Chicago Lectures in Mathematics Series. Chicago: The University of Chicago Press, 2000
87 Bollobás B. The independence ratio of regular graphs. Proc Amer Math Soc, 1981, 83: 433–433
88 Elek G, Szabó E. Sofic groups and direct finiteness. J Algebra, 2004, 280: 426–434
89 Elek G, Szabó E. On sofic groups. J Group Theory, 2006, 9: 161–171
90 Ozawa N. About the QWEP conjecture. Internat J Math, 2004, 15: 501–530
91 Rădulescu F. A non-commutative, analytic version of Hilbert's 17th problem in type II_1 von Neumann algebras. Von Neumann Algebras in Sibiu. Theta Series Advance Mathematics, 10. Bucharest: Theta, 2008, 93–101
92 Abért M, Hubai T. Benjamini-Schramm convergence and the distribution of chromatic roots for sparse graphs. Combinatorica, 2015, 35: 127–151
93 Addario-Berry L, Albenque M. The scaling limit of random simple triangulations and random simple quadrangulation. ArXiv:1306.5227, 2013
94 Aldous D. The continuum random tree, III. Ann Probab, 1993, 21: 248–289
95 Aldous D. The continuum random tree, I. Ann Probab, 1991, 19: 1–28
96 Stacey A, Benjamini I, Alon N. Percolation on finite graphs and isoperimetric inequalities. Ann Probab, 2004, 32: 1727–1745
97 Ambjørn J, Durhuus B, Jonsson T. Quantum Geometry, A Statistical Field Theory Approach. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge: Cambridge University Press, 1997
98 Amir G, Virág B. Speed exponents of random walks on groups. ArXiv:1203.6226, 2012
99 Angel O, Chapuy G, Curien N, et al. The local limit of unicellular maps in high genus. Electron Commun Probab, 2013, 18: 1–8
100 Angel O, Ray G. Classification of half-planar maps. Ann Probab, 2015, 43: 1315–1349

101 Artemenko I. On weak limits and unimodular measures. ArXiv:1309.0847, 2014
102 Artemenko I. Graphings and unimodularity. ArXiv:1203.2346, 2012
103 Artemenko I. Weak convergence of laws of finite graphs. ArXiv:1103.5517, 2011
104 Benjamini I, Curien N. Simple random walk on the uniform infinite planar quadrangulation: Subdiffusivity via pioneer points. Geom Funct Anal, 2013, 23: 501–531
105 Benjamini I, Lyons R, Schramm O. Percolation perturbations in potential theory and random walks. In: Random Walks and Discrete Potential Theory (Cortona, 1997). Symposium Mathematics, XXXIX. Cambridge: Cambridge University Press, 1999, 56–84
106 Berestycki N, Yadin A. Condensation of a two-dimensional random walk and the Wulf crystal. ArXiv:1305.0139, 2013
107 Beringer D, Pete G, Timár Á. On percolation critical probabilities and unimodular random graphs. ArXiv:1609.07043, 2016
108 Bordenave C, Caputo P. Large deviations of empirical neighborhood distribution in sparse random graphs. Probab Theory Related Fields, 2015, 163: 149–222
109 Bordenave C, Sen A, Virág B. Mean quantum percolation. ArXiv:1308.3755, 2013
110 Bordenave C, Lelarge M, Salez J. Matchings on infinite graphs. Probab Theory Related Fields, 2013, 157: 183–208
111 Bowen L. A brief introduction to sofic entropy theory. ArXiv:1711.02062, 2017
112 Cannizzo J. The boundary action of a sofic random subgroup of the free group. ArXiv:1306.1444, 2013
113 Chatterjee S, Varadhan S R S. The large deviation principle for the Erdös-Rényi random graph. European J Combin, 2011, 32: 1000–1017
114 Ciobanu L, Holt D F, Rees S. Sofic groups: Graph products and graphs of groups. ArXiv:1212.2739, 2012
115 Connes A, Feldman J, Weiss B. An amenable equivalence relation is generated by a single transformation. Ergodic Theory Dynam Systems, 1981, 1: 431–450
116 Cornulier Y. Sofic profile and computability of Cremona groups. ArXiv:1305.0993, 2013
117 Curien N. A glimpse of the conformal structure of random planar maps. ArXiv:1308.1807, 2013
118 Curien N, Kortchemski I. Percolation on random triangulations and stable looptrees. ArXiv:1307.6818, 2013
119 Curien N, Ménard L, Miermont G. A view from infinity of the uniform infinite planar quadrangulation. ArXiv:1201.1052, 2012
120 David F, Eynard B. Planar maps, circle patterns and 2d gravity. ArXiv:1307.3123, 2013
121 Diaconis P, Janson S. Graph limits and exchangeable random graphs. Rend Math, 2008, 28: 33–61
122 Duminil-Copin H, Smirnov S. The connective constant of the honeycomb lattice equals $\sqrt{2+\sqrt{2}}$. Ann of Math (2), 2012, 175: 1653–1665
123 Elek G. Full groups and soficity. ArXiv:1211.0621, 2012
124 Elek G. Note on limits of finite graphs. Combinatorica, 2007, 27: 503–507
125 Elek G, Szabó E. Hyperlinearity, essentially free actions and L^2-invariants. The sofic property. Math Ann, 2005, 332: 421–441
126 Gaboriau D, Seward B. Cost, ℓ^2-Betti numbers and the Sofic entropy of some algebraic actions. ArXiv:1509.02482, 2015
127 Gamarnik D. Right-convergence of sparse random graphs. ArXiv:1202.3123, 2012
128 Grimmett G. Percolation, 2nd ed. Springer-Verlag, 1999
129 Grimmett G, Kesten H. Percolation Since Saint-Flour. Percolation Theory at Saint-Flour, ix-xxvii, Probability Saint-Flour. Heidelberg: Springer, 2012
130 Grimmett G, Kesten H. Percolation Theory at Saint-Flour. Probability at Saint-Flour. Heidelberg: Springer, 2012
131 Grimmett G, Li Z Y. Counting self-avoiding walks. ArXiv:1304.7216, 2013
132 Häggström O. Random-cluster measures and uniform spanning trees. Stochastic Process Appl, 1995, 59: 267–275
133 Häggström O, Jonasson J. Uniqueness and non-uniqueness in percolation theory. Probab Surv, 2006, 3: 289–344
134 Hara T, Slade G. Mean-field critical behaviour for percolation in high dimensions. Comm Math Phys, 1990, 128: 333–391
135 Harangi V. On the density of triangles and squares in regular finite and unimodular random graphs. ArXiv:1111.6007, 2011
136 van der Hofstad R, Nachmias A. Unlacing the lace expansion: A survey to hypercube percolation. ArXiv:1210.8213, 2012
137 van der Hofstad R, Nachmias A. Hypercube percolation. ArXiv:1201.3953, 2012
138 Hoory S, Linial N, Wigderson A. Expander graphs and their applications. Bull Amer Math Soc, 2006, 43: 439–562
139 Janson S, Stefánsson S Ö. Scaling limits of random planar maps with a unique large face. ArXiv:1212.5072, 2012

140 Kaimanovich V A. Finite approximation of random graphs. In: International Conference "Probability Theory and its Applications" (Moscow, June 26–30, 2012). Moscow: URSS, 2012, 104–105
141 Kenyon R, Okounkov A, Sheffield S. Dimers and amoebae. Ann of Math (2), 2006, 163: 1019–1056
142 Kirsebom M S. Extreme value theory for random walks on homogeneous spaces. ArXiv:1304.1006, 2013
143 Krikun M. Local structure of random quadrangulations. Http://arxiv.org/abs/math/0512304, 2005
144 Lovász L, Szegedy B. Limits of dense graph sequences. J Combin Theory Ser B, 2006, 96: 933–957
145 Lyons, R, Peres Y, Schramm O. Minimal spanning forests. Ann Probab, 2006, 34: 1665–1692
146 Lyons R, Schramm O. Indistinguishability of percolation clusters. Ann Probab, 1999, 27: 1809–1836
147 Ménard L, Nolin P. Percolation on uniform infinite planar maps. ArXiv:1302.2851, 2013
148 Păunescu L. A convex structure on sofic embeddings. ArXiv:1112.2195, 2011
149 Păunescu L. On sofic actions and equivalence relations. J Funct Anal, 2011, 261: 2461–2485
150 Peled R, Spinka Y. Random walk with long-range constraints. ArXiv:1310.1583, 2013
151 Pestov V G, Kwiatkowska A. An introduction to hyperlinear and sofic groups. ArXiv:0911.4266, 2012
152 Pogorzelski F. Convergence theorems for graph sequences. ArXiv:1304.0945, 2013
153 Rădulescu F. The von Neumann algebra of the non-residually finite Baumslag group $\langle a, b \mid ab^3a^{-1} = b^2\rangle$ embeds into R^ω. In: Hot Topics in Operator Theory. Theta Series Advance Mathematics, 9. Bucharest: Theta, 2008, 173–185
154 Selig T. Representations of stack triangulations in the plane. ArXiv:1309.2566, 2013
155 Smirnov S. Discrete complex analysis and probability. In: Proceedings of the International Congress of Mathematicians Hyderabad, India, 2010, vol. I. New Delhi: Hindustan Book Agency, 2010, 595–621
156 Szegedy B. Limits of kernel operators and the spectral regularity lemma. European J Combin, 2011, 32: 1156–1167
157 Talagrand M. Mean Field Models for Spin Glasses, Volume II. Advanced Replica-Symmetry and Low Temperature. Heidelberg: Springer, 2011
158 Talagrand M. Mean Field Models for Spin Glasses, Volume I. Basic Examples. Berlin: Springer-Verlag, 2011
159 Woess W. Random Walks on Infinite Graphs and Groups. Cambridge: Cambridge University Press, 2000

附录 A 可图群、Connes 嵌入猜想和 Gottschalk 满射猜想

为介绍可图群和 Connes 嵌入猜想, 须先引入概念 "超滤子" (ultrafilter) 和 "超积" (ultraproduct). 此附录取自文献 [50, 53, 88, 89], 亦可参见文献 [52].

定义 A.1 (超滤子) 令 X 是一个非空集合, $\mathfrak{U}$ 是 X 的一个子集族. 称 $\mathfrak{U}$ 是一个超滤子, 若

(i) $\emptyset \notin \mathfrak{U}$;

(ii) $A, B \in \mathfrak{U} \Rightarrow A \cap B \in \mathfrak{U}$;

(iii) $A \in \mathfrak{U} \Rightarrow B \in \mathfrak{U}$, $\forall\, B \supseteq A$;

(iv) $\forall\, A \subseteq X$, $A \in \mathfrak{U}$ 或 $X \setminus A \in \mathfrak{U}$.

作为网 (net) 的对偶概念, 超滤子在拓扑中十分有用, 如定义相当一般情形的收敛.

定义 A.2 (极限) 令 $\{x_a\}_{a\in A}$ 是一个实数族, $\mathfrak{U}$ 是 A 上的超滤子. 若存在 $x \in \mathbb{R}^1$ 满足

$$\{a \in A : |x_a - x| < \epsilon\} \in \mathfrak{U}, \quad \forall\, \epsilon > 0,$$

则定义 $\lim_{\mathfrak{U}} x_a = x$.

注 A.1 (i) 任给收敛序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^1$, 往证其沿任意的超滤子 $\mathfrak{U}$ 收敛.

考虑两种情形: (1) $\mathfrak{U}$ 是主超滤子 (principal ultrafilter), 即存在 $B \subseteq \mathbb{N}$ 使 $\mathfrak{U} = \{A \subseteq \mathbb{N} : A \supseteq B\}$, 称 B 是 $\mathfrak{U}$ 的基. (2) $\mathfrak{U}$ 是非主的 (自由的). 回顾如下结论: 任给非空集合 X 及其上的超滤子 $\mathfrak{U}$, 则当 $\mathfrak{U}$ 是主的时, 它的基是单点; 当 $\mathfrak{U}$ 是非主的时, 它不含有限集.

回到前述例子. 若 $\mathfrak{U}$ 是主的且基为 n_0, 则对任意的 $\epsilon > 0$, 有

$$A_\epsilon = \{n \in \mathbb{N} : |x_n - x_{n_0}| < \epsilon\} \ni n_0, \quad A_\epsilon \in \mathfrak{U},$$

从而,

$$\lim_{\mathfrak{U}} x_n = x_{n_0}.$$

若 $\mathfrak{U}$ 是自由的, 记 $x = \lim_{n\to\infty} x_n$, 则对任给 $\epsilon > 0$, 要么 $A_\epsilon = \{n : |x_n - x| < \epsilon\} \in \mathfrak{U}$, 要么 $\mathbb{N} \setminus A_\epsilon \in \mathfrak{U}$; 但 $\mathbb{N} \setminus A_\epsilon$ 有限, 因此, $A_\epsilon \in \mathfrak{U}$ 且 $\lim_{\mathfrak{U}} x_n = x$.

(ii) 每个有界网沿任一超滤子 $\mathfrak{U}$ 收敛. 实际上, 可用 Bolzano-Weierstrass 方法证明该结论. 设 $\{x_a\}_{a\in A} \subseteq [-M, M]$, 令

$$R_1 = [-M, 0], \quad R_2 = (0, M], \quad F_i = \{a \in A : x_a \in R_i\}, \quad i = 1, 2,$$

则 F_1 和 F_2 中有仅有一个属于 $\mathfrak{U}$. 若是 F_2, 则用 $\overline{R}_2 = [0, M]$ 替换 R_2,

$$\{a \in A : x_a \in \overline{R}_2\} \supseteq F_2,$$

从而,

$$\{a \in A : x_a \in \overline{R}_2\} \in \mathfrak{U}.$$

重复上述推导, 则得一个满足如下条件的闭区间序列 $\{R_n\}_{n=1}^{\infty}$: $\{a \in A : x_a \in R_n\} \in \mathfrak{U}$, 每个 R_{n+1} 的直径是 R_n 的直径的一半. 于是, $\bigcap_{n\geqslant 1} R_n$ 是一个单点集 $\{x\}$ 且 $\lim_{\mathfrak{U}} x_a = x$.

超积依赖空间的代数结构. 下面引入度量群的超积和 II_1 型因子的超积.

定义 A.3 令 G 是一个群且 d 是其上的双不变度量, 即

$$d(gx, gy) = d(x, y) = d(xg, yg), \quad \forall\, x, y, g \in G.$$

称 (G, d) 为度量群.

设 $\{(G_a, d_a)\}_{a\in A}$ 是一族度量群且每个 e_a 是 G_a 的单位元, $\mathfrak{U}$ 是 A 上的超滤子. 令

$$\mathfrak{G} = \left\{x = (x_a)_{a\in A} \in \prod_{a\in A} G_a : \sup_{a\in A} d_a(x_a, e_a) < \infty\right\}.$$

注意任给 $x \in \mathfrak{G}$, $\lim_{\mathfrak{U}} d_a(x_a, e_a) \in \mathbb{R}^1$ 存在. 令

$$\mathfrak{N} = \left\{x \in \mathfrak{G} : \lim_{\mathfrak{U}}\ d_a(x_a, e_a) = 0\right\},$$

则 $\mathfrak{G}$ 是 $\prod_{a\in A} G_a$ 的子群, 且 $\mathfrak{N}$ 是 $\mathfrak{G}$ 的正规子群. 定义商群 $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ 上如下的度量:

$$\mathbf{d}(x\mathfrak{N}, y\mathfrak{N}) = \lim_{\mathfrak{U}}\ d_a(x_a, y_a), \quad (x, y) \in \mathfrak{G},$$

则 $\mathbf{d}$ 是 $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ 上的双不变度量, $(\mathfrak{G}/\mathfrak{N}, \mathbf{d})$ 是度量群.

定义 A.4 称度量群 $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ 为度量群族 $(G_a)_{a\in A}$ 的 (度量) 超积, 记为 $(\prod_{a\in A} G_a)_{\mathfrak{U}} = \mathfrak{G}/\mathfrak{N}$.

回顾 von Neumann 代数或 W^*- 代数是满足如下条件的某 Hilbert 空间上有界算子的 $*$- 代数: 此 $*$- 代数在弱算子拓扑下闭且包含单位算子; 而 von Neumann 代数 M 上的有限迹是一个满足

$$\tau(xy) = \tau(yx), \quad \forall\, x, y \in M$$

的线性映射 $\tau : M \to \mathbb{C}$. 若对任意的正算子 $x \in M$, $\tau(x) \geqslant 0$, 则称 τ 是正的. 称正迹 τ 是忠实的 (faithful), 若 $\tau(x^*x) = 0 \Rightarrow x = 0$; 称正迹 τ 是正规的, 若它在 M 的单位球上是弱连续的.

注意 II_1 因子是一个具有平凡中心的不同构于任一矩阵代数 $M_n(\mathbb{C})$ 且允许一个非零有限正迹的 von Neumann 代数. 归一化 τ 使 $\tau(1)=1$, 则迹 τ 唯一, 自动地 τ 是正规的. 记 $\|x\|_2=\sqrt{\tau(x^*x)}$ 是对应于 τ 的 L^2- 范数. 用数量积 $\langle x,y\rangle=\tau(x^*y)$ 来完备化 M, 则得 Hilbert 空间 $L^2(M)$, 此空间是一个在 M 上的左乘和右乘作用下的 M-M- 双模.

例 A.1 (群 von Neumann 代数) 设 Γ 是一个可数群. 注意群 von Neumann 代数 $\mathrm{VN}(\Gamma)$ 由 $\ell^2(\Gamma)$ 上所有左推移不变酉算子生成. 此外, $\mathrm{VN}(\Gamma)$ 是唯一的由酉算子族 $(u_g)_{g\in\Gamma}$ 生成的具有如下性质的迹 von Neumann 代数: $u_gu_h=u_{gh}$, $\forall\, g,h\in\Gamma$, 且 $\tau(u_g)=0$, $\forall\, g\neq e$. $\mathrm{VN}(\Gamma)$ 可用如下的另一种方式来定义: 记 $(\delta_g)_{g\in\Gamma}$ 是 $\ell^2(\Gamma)$ 的标准正交基, 用 $u_g\delta_h=\delta_{gh}$ 来定义推移酉算子 u_g, 则 $\mathrm{VN}(\Gamma)$ 是 $\{u_g: g\in\Gamma\}$ 生成的迹 τ 由 $\tau(x)=\langle\delta_e, x\delta_e\rangle$ ($x\in\mathrm{VN}(\Gamma)$) 给出的 von Neumann 代数.

定义 A.5 (II_1- 型因子的超积) 令 $\{(M_a,\tau_a)\}_{a\in A}$ 是一族具有归一化迹族 $\{\tau_a\}_{a\in A}$ 的 II_1- 因子, 而 $\mathfrak{U}$ 是 A 上的超滤子. 置

$$M=\Big\{x=(x_a)_{a\in A}\in\prod_{a\in A}M_a:\sup_{a\in A}\sqrt{\tau_a(x_a^*x_a)}<\infty\Big\},$$
$$J=\Big\{x\in M:\lim_{\mathfrak{U}}\sqrt{\tau_a(x_a^*x_a)}=0\Big\},$$

则商 M/J 是一个具有如下迹的 II_1- 因子:

$$\tau(x+J)=\lim_{\mathfrak{U}}\tau_a(x_a),\quad \forall\, x\in M,$$

称为 $(M_a)_{a\in A}$ 的超积, 且当所有的 $M_a=N$ 时称为超幂.

称 von Neumann 代数 M 是有限维逼近的 (approximately finite dimensional, AFD), 若其包含一个上升的满足如下条件的有限维子代数序列: 此子代数序列的并在 M 中强稠密. 注意存在 (von Neumann 代数同构意义下) 唯一的 II_1- 型 AFD 因子, 记为 R; 且称 R 为超有限 (hyperfinite) 因子和最小的 II_1 型因子. 令 $\mathfrak{U}$ 是 $\mathbb{N}$ 上的一个非主超滤子, 则 Connes 嵌入猜想可以叙述如下:

猜想 A.1 (Connes 嵌入猜想 [51]) 任一个可分的 II_1 因子可嵌入一个适当的 R 的迹超幂 $R^\omega=(R^{\mathbb{N}})_{\mathfrak{U}}$. 弱形式的 Connes 嵌入猜想: 对每个可数群 Γ, 其群 von Neumann 代数 $\mathrm{VN}(\Gamma)$ 可嵌入一个适当的超幂 R^ω.

此猜想是算子代数中最重要和最著名的公开问题之一. 它的重要性来自它的一些出人意料的等价结论贯穿了算子代数的几乎全部子方向. 最引人注目的是 Connes 嵌入猜想等价于算子代数版本的 Hilbert 第 17 问题, 参见文献 [52–55, 90, 91].

现引入可图群 [47, 49] 和超有限 (hyperfinite) 群.

定义 A.6 称群 G 是可图的, 若存在一个集合 A 和其上的超滤子 $\mathfrak{U}$, 以及一个映射 $a\in A\to n(a)\in\mathbb{N}$, 使得

$$G<\Big(\prod_{a\in A}(S_{n(a)},d_{\mathrm{hamm}})\Big)_{\mathfrak{U}},$$

其中 S_k 表示度为 k 的对称群, d_{hamm} 是其上归一化的 Hamming 度量. 称群 G 是超有限的, 若存在一个集合 A 和其上的超滤子 $\mathfrak{U}$, 以及一个映射 $a\in A\to n(a)\in\mathbb{N}$ 使

$$G<\Big(\prod_{a\in A}(U_{n(a)},d_{\mathrm{HS}})\Big)_{\mathfrak{U}},$$

其中 U_k 是度为 k 的酉群, d_{HS} 是其上归一化的 Hilbert-Schmidt 度量.

定理 A.1 群 G 是可图的当且仅当如下的条件成立: 任意有限的 $F \subseteq G$, $\forall \epsilon > 0$, 存在 $n \in \mathbb{N}$ 和映射 $\theta : F \to S_n$ 使

(i) $d_{\mathrm{hamm}}(\theta(g)\theta(h), \theta(gh)) < \epsilon$, $\forall g, h \in F$ 满足 $gh \in F$;

(ii) 若 $e \in F$, 则 $d_{\mathrm{hamm}}(\theta(e), \mathrm{Id}) < \epsilon$;

(iii) $d_{\mathrm{hamm}}(\theta(x), \theta(y)) \geqslant 1/4$, $\forall x, y \in F$, $x \neq y$.

群 G 是超有限的当且仅当如下条件成立: 任意有限的 $F \subseteq G$, $\forall \epsilon > 0$, 存在 $n \in \mathbb{N}$ 和映射 $\theta : F \to U_n$ 使得

(i) $\|\theta(g)\theta(h) - \theta(gh)\|_2 < \epsilon$ $(\forall g, h \in F)$ 满足 $gh \in F$;

(ii) 若 $e \in F$, 则 $\|\theta(e) - \mathrm{Id}\|_2 < \epsilon$;

(iii) $\|\theta(x) - \theta(y)\|_2 \geqslant 1/4$, $\forall x, y \in F$, $x \neq y$.

每个可图群是超有限的.

什么群是可图的? 剩余有限 (residually finite) 群和顺从群都是可图的. 可图群的直积、子群、自由积、可逆和直接极限仍是可图的. 若 $N \lhd \Gamma$, N 是可图的且 Γ/N 是顺从的, 则 Γ 亦是可图的. 注意, 存在有限生成的非剩余有限群和非顺从群. 专家猜测存在非可图群, 但还没发现例子. 是否每个可数群都是可图的? 是否每个可数群都是超有限的? 这两个问题是可数群理论中的两个核心公开问题, 参见文献 [50, 52].

注意 Connes 嵌入猜想对任意的群 von Neumann 代数 $\mathrm{VN}(\Gamma)$ 成立当且仅当可数群 Γ 是超有限的. 对有限生成群, 文献 [49] 定义的 "可图" 与定义 A.6 是一致的. 可数群 G 是超有限的当且仅当它所有的有限生成子群是超有限的. 对一个有限生成群而言, Aldous-Lyons 猜想对它的某一 Cayley 箭图成立等价其是可图的.

猜想 A.2 (Gottschalk 满射猜想 [48]) 任给可数群 G 和有限集 A, 推移系统 A^G 不包含同构于 A^G 的闭 G- 不变真子空间 X.

Gromov [47] 证明了 Gottschalk 满射猜想对每个可图群成立. 如果每个可数群都是可图的, 那么 Gottschalk 满射猜想和弱形式的 Connes 嵌入成立.

附录 B Hilbert 第 17 问题

令 $\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ 是 n 元实系数多项式环, $\mathbb{R}(x_1, \ldots, x_n)$ 是 $\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ 的商域.

Hilbert 第 17 问题 任给满足

$$f(x_1, \ldots, x_n) \geqslant 0, \quad \forall\, (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

的多项式 $f \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$. f 是否能够写成 $\mathbb{R}(x_1, \ldots, x_n)$ 中的一些元素的平方之和?

Artin 在 1927 年给出了该问题的肯定答案, 更多的信息见脚注 3) 的网址.

回顾猜想 A.1. Rădulescu [91] 证明了 Connes 嵌入猜想等价于算子代数版本的 Hilbert 第 17 问题.

附录 C 可图等价关系

此附录取自文献 [34]. 先回顾概念: 可数 Borel 等价关系. 设 X 是标准 Borel 空间. 可数 Borel 等价关系是 Borel 子空间 $E \subset X \times X$, 其中 E 是等价关系且每个等价类是可数的. 令 Γ 是可数群, $\Gamma \curvearrowright X$ 是 Γ 在 X 上的 Borel 作用, 则此作用定义了 X 的一个可数 Borel 等价关系. 注意由 Feldman-Moore

3) Https://en.wikipedia.org/wiki/Hilbert's_seventeenth_problem

定理知, 任一可数 Borel 等价关系均可由前述方式得到. 称 X 上的概率是 E 不变的, 若其在相关的可数群作用下不变.

从现在开始, 设 $X=\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, μ 是其上的标准乘积概率测度. 任给词 $w\in\{0,1\}^k$, 记 A_w 是 X 中从 w 出发的点全体. 注意 A_w 是 X 中的闭 - 开集 (开 - 闭集). 令 $\mathbb{F}_\infty=\langle\gamma_1,\gamma_2,\ldots\rangle$ 是具有无穷可数生成元的自由群. 任给 $r\in\mathbb{N}$, 令 $W_r\subset\mathbb{F}_\infty$ 表示全体由 $\gamma_1,\gamma_1^{-1},\ldots,\gamma_r,\gamma_r^{-1}$ 生成的长度至多为 r 的既约字. 显然,

$$W_0\subset W_1\subset W_2\subset\cdots,\quad \bigcup_{r=0}^{\infty}W_r=\mathbb{F}_\infty.$$

设 $\theta:\mathbb{F}_\infty\curvearrowright X$ 是 Borel 群作用 (不必自由), 则 θ 产生了有向图极限 (有向 Borel 图) $\mathcal{G}\subset X\times X$:

$$(x,y)\in\mathcal{G}\Leftrightarrow\exists\, i,\theta(\gamma_i,x)=y.$$

此外, 群作用也自然诱导了 $\mathcal{G}$ 的可数边染色: 颜色为 $\gamma_1,\gamma_1^{-1},\gamma_2,\gamma_2^{-1},\ldots$; 每个顶点恰有任一颜色的一条出边和一条进边. 注意 $\mathcal{G}$ 可以有重边及环边, 若 xy 染 γ_i 色, 则 yx 染 γ_i^{-1}.

定义 C.1 一个 r- 邻域是指如下形式的 r- 边染色有向重边图. 每个顶点的出边用 $\gamma_1,\gamma_1^{-1},\ldots,\gamma_r,\gamma_r^{-1}$ 中的不同颜色来染色; 且若 xy 染 γ_i, 则 yx 染 γ_i^{-1}. 此外, 有一根顶点使得其他的顶点到它的距离至多为 r. 显然在同构意义下, r- 邻域的数目有限; 用 U^r 表示同构意义下的 r- 邻域全体.

对群作用 θ 和点 $x\in X$, 定义 x 的 r- 邻域 $B_r(x)$ 为 $\mathcal{G}$ 在 $\theta(W_r,x)$ 上的诱导边染色子图, x 为根.

定义 C.2 一个 r- 标记 r- 邻域是指顶点用 $\{0,1\}^r$ 标记的 r- 邻域. 此种邻域在同构意义下只有有限个, 用 $U^{r,r}$ 表这些邻域全体.

对群作用 θ 和点 $x\in X$, 定义 x 的 r- 标记 r- 邻域 $B_r^r(x)$ 为按如下方式标记的 $B_r(x)$: 每个顶点 $y\in B_r(x)$ 对应一个点 $y'\in X$, y 的标记是唯一满足 $y'\in A_w\subset X$ 的词 $w\in\{0,1\}^r$.

给定群作用 θ. 任给 $\alpha\in U^{r,r}$, 易知

$$T(\theta,\alpha)=\{x\in X:B_r^r(x)\cong\alpha\}\text{ 是 }X\text{ 的 Borel 子集.}$$

令 $p_\alpha(\theta)=\mu(T(\theta,\alpha))$.

对用 X 中的元素来标记的有限集 Y (称为 X- 集) 和 $\theta:\mathbb{F}_\infty\curvearrowright Y$, 定义

$$p_\alpha(\theta)=\frac{|T(\theta,\alpha)|}{|Y|}.$$

定义 C.3 称 Borel 作用 θ 是可图的, 如果存在有限 X- 集序列 $\{Y_n\}_n$ 和群作用序列 $\{\theta_n:\mathbb{F}_\infty\curvearrowright Y_n\}_n$ 使得

$$\lim_{n\to\infty}p_\alpha(\theta_n)=p_\alpha(\theta),\quad r\geqslant 1,\quad \alpha\in U^{r,r}.$$

注 C.1 θ 是可图的 $\Leftrightarrow\theta^r=\theta|_{\gamma_1,\ldots,\gamma_r}$ (θ 在前 r 个生成元上的限制) 是可图的, $\forall\, r\geqslant 1$.

回顾称等价关系 $E\subset X\times X$ 为可树化, 若它具有一个由保测对合变换 $S_1,S_2,\ldots$ 生成的 L- 树化. 自由群的自由作用产生可树化等价关系. 可证所有可树化等价关系是可图的.

定理 C.1 $\Gamma=\langle\gamma_1,\gamma_2,\ldots\mid\gamma_i^2=1\ (i\in\mathbb{N})\rangle$ 在 X 上的作用 θ 是可图的, 其中 $\theta(\gamma_i,x)=S_i(x)$, S_i 是 X 上的对合变换.

类似于 Aldous 和 Lyons[6] 关于单模随机网络的问题 10.1, Elek 和 Lippner[34] 提出了如下的问题:

问题 C.1 (参见文献 [34, 问题 8.1]) 是否存在非可图的可测等价关系?

附录 D　结束语

文献 [92–159] 及脚注 4) 和 5) 对完成本文起到了重要的参考作用, 特别地, 它们中的大部分对理解 Aldous-Lyons 猜想及相关专题十分有价值.

Finite approximation for unimodular random networks

Kainan Xiang

Abstract　Random graph limit theory is a very active and challenging research area, and Aldous-Lyons conjecture on finite approximation for unimodular random networks is an important central problem in this area. This paper is a survey on the conjecture.

Keywords　**graph limit, local limit, unimodular random network, finite approximation**

MSC(2010)　**60C05, 60K99, 05C80**

doi: 10.1360/N012017-00073

4) Abért M. Some questions. Preprint, 2010

5) Curien N. Local limits of random graphs. Preprint, 2011