中国科学: 数学　2015 年　第 45 卷　第 2 期: 129～140
link.springer.com　math.scichina.com
《中国科学》杂志社
SCIENCE CHINA PRESS

一维空间中临界离散加权型 Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式

许建开①*, 程泽②, 房艳芹③

① 湖南农业大学理学院, 长沙 410128;
② Department of Applied Mathematics, University of Colorado, Boulder, CO 80309-0526, USA;
③ 湖南大学数学与计量经济学院, 长沙 410205
E-mail: jiankaixu@126.com, ze.cheng@colorado.edu, YanqinFang@126.com

收稿日期: 2013-11-26; 接受日期: 2014-08-11; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 11126148 和 11301166)、湖南省教育厅一般项目 (批准号: 13C395) 和湖南农业大学青年项目 (批准号: 12QN08) 资助项目

摘要　本文建立了 $\mathbb{R}^1$ 中临界版的离散加权型 Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式

$$\sum_{\substack{-N\leqslant r,s\leqslant N;\\ r\neq 0,s\neq 0;\\ r\neq s}} \frac{1}{|r|^\alpha}\frac{a_r b_s |s|^\alpha}{|r-s|} \leqslant C_\alpha \lambda_N^\alpha \|a\|_2\|b\|_2,$$

其中 $\alpha \geqslant 0, a=(a_{-N},\dots,a_N)$, $b=(b_{-N},\dots,b_N)$. 当 $\alpha\geqslant 1$ 时, 我们得到了最佳常数 λ_N^α 为 $N^{\alpha-1/2}$, 即

$$\sum_{\substack{-N\leqslant r,s\leqslant N;\\ r\neq 0,s\neq 0;\\ r\neq s}} \frac{1}{|r|^\alpha}\frac{a_r b_s |s|^\alpha}{|r-s|} \leqslant C_\alpha N^{\alpha-1/2} \|a\|_2\|b\|_2.$$

关键词　Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式　特征值　最佳常数

MSC (2010) 主题分类　45E10, 45M20, 35J45

1　引言

本文主要目的为建立一维空间中临界加权型 Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式以及找到对应的最佳常数. 为清楚阐述我们的研究内容, 首先引入一些必要的相关背景知识. 经典的 Hardy-Littlewood-Sobolev (HLS) 不等式 [1,2] 叙述如下,

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(y)|x-y|^{-\lambda}dxdy\right| \leqslant C(\lambda,s,n)\|f\|_{L^r(\mathbb{R}^n)}\|g\|_{L^s(\mathbb{R}^n)}, \tag{1.1}$$

其中 $1<r,s<\infty, 0<\lambda<n$ 且满足 $\frac{1}{r}+\frac{1}{s}+\frac{\lambda}{n}=2$.

Lieb 在文献 [3] 中证明了 Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式最佳常数 $C(\lambda,s,n)$ 与对应极大函数对 (f,g) 的存在性. 并且, 在某些特殊的条件下, 即当 $f=g$ 且 $r=s$ 时, 作者利用球极投影以及对应 Euler-Lagrange 方程的共形不变性得到了 $C(\lambda,s,n)$ 与 f 的具体形式.

引用格式: Xu J K, Cheng Z, Fang Y Q. An extension of discrete weighted Hardy-Littlewood-Sobolev inequality in space dimension one (in Chinese). Sci Sin Math, 2015, 45: 129–140, doi: 10.1360/N012013-00172

在 20 世纪 50 年代末, Stein 与 Weiss 在文献 [4] 中将不等式 (1.1) 自然地推广到下列加权形式:

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}|x|^{-\alpha}f(x)\ g(y)|x-y|^{-\lambda}|y|^{-\beta}dxdy\right|\leqslant C(\lambda,\alpha,\beta,n)\|f\|_{L^r(\mathbb{R}^n)}\|g\|_{L^s(\mathbb{R}^n)},\tag{1.2}$$

其中 $1<r,s<\infty,0<\lambda<n,\alpha+\beta\geqslant 0$, $1-\frac{1}{r}-\frac{\lambda}{n}\leqslant\frac{\alpha}{n}<1-\frac{1}{r}$ 且满足 $\frac{1}{r}+\frac{1}{s}+\frac{\lambda+\alpha+\beta}{n}=2$. 不等式 (1.2) 中的最佳常数 $C(\lambda,\alpha,\beta,n)$ 与对应极大函数对 (f,g) 的存在性的证明由 Lieb 给出.

类似于连续型加权 Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式, 这离散版的加权 HLS 不等式 [5] 也宣称: 若 $p,q>1,0<\lambda<n,\ \alpha+\beta\geqslant 0$ 且 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{\lambda+\alpha+\beta}{n}=2$, 则对任意的 $a\in l^p,b\in l^q$ 有

$$\sum_{r\neq s}\frac{1}{|r|^\alpha}\frac{a_r\ b_s}{|r-s|^\lambda}\frac{1}{|s|^\beta}\leqslant C(\alpha,\lambda,\beta,p,q)\|a\|_p\|b\|_q.\tag{1.3}$$

上面所提到的 Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式, 不管是连续型还是离散型都要求参数 λ 满足约束条件 $0<\lambda<n$, 那么一个问题自然地产生了: 当 $\lambda=n$ 时, 对应的 Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式右端将如何变化? 同样, 对于加权型 Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式又将如何? 对连续型 HLS 不等式而言, 这个问题是很复杂, 因为 HLS 系统 (包括加权形式) 左端积分表达式在泛函空间 $L^p(\Omega)$ $(\Omega\subset\mathbb{R}^n)$ 上是不适定的. 因此, 本文我们仅考虑临界离散加权型 HLS 不等式.

当 $n=1$ 且 $\alpha=\beta=0$ 时, 不等式 (1.3) 也被称为 Hardy-Littlewood-Pólya 不等式. 此时, 当 λ 取临界值时, 即 $\lambda=n=1$, 不等式 (1.3) 右端的正确估计是什么? 这是丁夏畦先生提的一个猜想. 此问题, 当 $p=q=2$ 时, 已被 Li 和 Villavert 在文献 [6] 中解决, 即他们证明了在一个正锥区域 $\mathbb{Z}^+$ 内, 下列估计成立:

$$\sum_{\substack{r\neq s\\1\leqslant r\leqslant N,1\leqslant s\leqslant N}}\frac{a_r\ b_s}{|r-s|}\leqslant(2\mathrm{Ln}N+1)\|a\|_2\|b\|_2.\tag{1.4}$$

事实上, 不等式 (1.4) 中的参数 r,s 取遍所有整数时, 其右端估计不会有本质的变化. 确实, 用他们的方法, 我们容易推出区域 $\mathbb{Z}$ 上的临界 Hardy-Littlewood-Póya 不等式.

命题 1.1 设 $N\geqslant 1$ 为一个正整数且 $a=(a_{-N},\dots,a_{-1},0,a_1,\dots,a_N)$, $b=(b_{-N},\dots,b_{-1},0,b_1,\dots,b_N)\in\mathbb{R}^{2N+1}$, 则

$$\sum_{\substack{r,s\in\mathbb{Z},r\neq s,\\-N\leqslant r,\ s\leqslant N.}}\frac{a_rb_s}{|r-s|}\leqslant C\overline{\lambda}_N\|a\|_2\|b\|_2,\tag{1.5}$$

其中 $\|a\|_2=\sqrt{a_{-N}^2+\cdots+a_N^2}$, C 是一个独立于 N 的绝对常数, $\overline{\lambda}_N=\mathrm{Ln}N$ 为不等式的最佳常数, 即

$$\overline{\lambda}_N\approx\max_{\|a\|_2=\|b\|_2=1}\Bigg\{\sum_{\substack{r,\ s\in\mathbb{Z},\ r\neq s,\\-N\leqslant r,\ s\leqslant N;}}\frac{a_rb_s}{|r-s|}\Bigg\}.\tag{1.6}$$

本文主要的兴趣在于建立临界离散加权型 Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式以及找到对应的最佳常数. 文献 [6–9] 中的方法对于我们的问题是失效的. 这里我们通过对矩阵迹的估计, 得到了对应不等式的最佳常数. 具体而言, 我们有如下结论.

定理 1.2 设 $p=q=2$, $\lambda=1$ 且 $\alpha\geqslant 0$. 若 $a=(a_{-N},\dots,a_N),b=(b_{-N},\dots,b_N)\in\mathbb{R}^{2N+1}$, 则

$$\sum_{\substack{-N\leqslant r,s\leqslant N;\\r\neq 0,s\neq 0;\\r\neq s}}\frac{1}{|r|^\alpha}\frac{a_rb_s|s|^\alpha}{|r-s|}\leqslant C_\alpha\lambda_N^\alpha\|a\|_2\|b\|_2,\tag{1.7}$$

其中 $C_\alpha > 0$ 是一个独立于 N 的绝对常数. λ_N^α 为一个关于 N 的单调递增参数且满足下列估计有界性估计:

当 $0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{1}{2}$ 时, 有

$$\mathrm{Ln}N \leqslant \lambda_N^\alpha \leqslant N\mathrm{Ln}N; \tag{1.8}$$

而当 $\alpha > \frac{1}{2}$ 时, 有

$$N^{\alpha-1/2} \leqslant \lambda_N^\alpha \leqslant N^\alpha, \quad \alpha > 1/2. \tag{1.9}$$

并且, 当 $\alpha \geqslant 1$ 时, 这不等式 (1.7) 的最佳常数 λ_N^α 是 $N^{\alpha-1/2}$, 即

$$\sum_{\substack{-N\leqslant r,s\leqslant N;\\ r\neq 0,s\neq 0;\\ r\neq s}} \frac{1}{|r|^\alpha}\frac{a_r b_s|s|^\alpha}{|r-s|} \leqslant C_\alpha N^{\alpha-1/2}\|a\|_2\|b\|_2. \tag{1.10}$$

注 1.3 当 $\alpha \geqslant 1$ 时, 这临界离散加权型 Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式的最佳常数 $\overline{\lambda}_N^\alpha$ 能得到, 原因在于矩阵 $C(\alpha) = AA^{\mathrm{T}}$ (详见 (2.35) 与 (2.37)) 特征值的重数是一个独立于 N 的一个参数. 然而对于 $0 \leqslant \alpha < 1$, 通过估计矩阵迹的方法去得到最佳常数的技巧失效. 主要的原因在于此时对应矩阵其最大特征值的重数是一个关于 N 的函数. 因此, 当 $0 < \alpha < 1$ 时, 不等式 (1.10) 的最佳常数 $\overline{\lambda}_N^\alpha$ 为多少是一个有趣的问题, 我们将在以后的研究中给以关注.

2 定理 1.2 的证明

定理 1.2 的证明将分 4 步完成. 在第 1 步中, 我们将证明下列估计成立,

$$S \triangleq \sum_{\substack{-N\leqslant r,s\leqslant N;\\ r\neq 0,s\neq 0;\\ r\neq s}} \frac{1}{|r|^\alpha}\frac{|s|^\alpha}{|r-s|} \backsimeq \begin{cases} C_1 N\mathrm{Ln}N, & 0 \leqslant \alpha \leqslant 1; \\ C_2(\alpha)N^\alpha, & \alpha > 1, \end{cases} \tag{2.1}$$

其中 C_1 是一个与 α 无关的常数.

第 2 步, 我们将致力于不等式 (1.7) 的下界估计. 具体而言, 我们将利用 (2.1) 去构造特殊的向量来估计不等式 (1.7) 的下界. 为得到不等式 (1.7) 的最佳常数, 在第 3 步中，我们将建立一些最佳常数 λ_N^α 的先验估计, 即我们将证明 $(\lambda_N^\alpha)^2$ 为半正定矩阵 AA^{T} 的一个特征值. 最后, 通过对矩阵 AA^{T} 迹的估计, 我们得到当 $\alpha \geqslant 1$ 时, 不等式 (1.7) 的最佳常数, 即 (1.10).

现在, 我们转向第 1 步的证明.

第 1 步 首先, 我们将级数和 S 分成如下 6 个部分.

$$\begin{aligned} S = \sum_{\substack{-N\leqslant r,s\leqslant N;\\ r\neq 0,\sqrt{}s\neq 0;\\ r\neq s}} \frac{1}{|r|^\alpha}\frac{|s|^\alpha}{|r-s|} &= \bigg\{ \sum_{1\leqslant r\leqslant N}\ \sum_{-N\leqslant s\leqslant -1} + \sum_{2\leqslant r\leqslant N}\ \sum_{1\leqslant s\leqslant r-1} \\ &\quad + \sum_{2\leqslant s\leqslant N}\ \sum_{1\leqslant r\leqslant s-1} + \sum_{-N\leqslant r\leqslant -1}\ \sum_{1\leqslant s\leqslant N} + \sum_{-N\leqslant r\leqslant -2,}\ \sum_{r+1\leqslant s\leqslant -1} \\ &\quad + \sum_{-N\leqslant s\leqslant -2,}\ \sum_{s+1\leqslant r\leqslant -1} \bigg\} \frac{1}{|r|^\alpha}\frac{|s|^\alpha}{|r-s|} \triangleq \mathbb{I}_1^\alpha + \mathbb{I}_2^\alpha + \mathbb{I}_3^\alpha + \mathbb{I}_4^\alpha + \mathbb{I}_5^\alpha + \mathbb{I}_6^\alpha. \end{aligned} \tag{2.2}$$

由对称性, 我们容易推出

$$\mathbb{I}_1^\alpha = \mathbb{I}_4^\alpha, \quad \mathbb{I}_2^\alpha = \mathbb{I}_5^\alpha, \quad \mathbb{I}_3^\alpha = \mathbb{I}_6^\alpha. \tag{2.3}$$

因此, 为得到 (2.1), 我们只需要分别估计 $\mathbb{I}_1^\alpha$, $\mathbb{I}_2^\alpha$ 以及 $\mathbb{I}_3^\alpha$.

对于一般的 $\alpha \in [0,\infty)$, 要直接求出 $\mathbb{I}_i^\alpha$ $(i=1,2,3)$ 十分困难. 因此, 首先我们讨论 $\mathbb{I}_1^\alpha$ 中两种特殊情形: $\alpha=0$ 和 $\alpha=1$.

注意到

$$\mathbb{I}_1^0 = \sum_{1\leqslant r\leqslant N}\sum_{1\leqslant s\leqslant N}\frac{1}{r+s} = \sum_{r=1}^{N}\left\{\frac{1}{r+1}+\cdots+\frac{1}{r+N}\right\},$$

因此

$$\mathbb{I}_1^0 \leqslant \sum_{k=1}^{N}\mathrm{Ln}(k+N)-\mathrm{Ln}k \leqslant \int_0^{N+1}\mathrm{Ln}(N+x)dx-\int_1^N \mathrm{Ln}x dx \leqslant 2N\ \mathrm{Ln}2, \quad N>2. \tag{2.4}$$

同时也注意到,

$$\mathbb{I}_1^0 = \sum_{1\leqslant r\leqslant N}\sum_{1\leqslant s\leqslant N}\frac{1}{r+s} \geqslant \sum_{1\leqslant r\leqslant N}\sum_{1\leqslant s\leqslant r}\frac{1}{2r} \geqslant \frac{N}{2}. \tag{2.5}$$

这结合 (2.4), 蕴含着

$$\mathbb{I}_1^0 \simeq N. \tag{2.6}$$

接下来, 我们将讨论 $\alpha=1$ 的情形. 首先分解 $\mathbb{I}_1^1$ 如下:

$$\mathbb{I}_1^1 = \sum_{1\leqslant r\leqslant N}\sum_{1\leqslant s\leqslant N}\frac{1}{r}\frac{s}{r+s} = \sum_{\substack{1\leqslant r\leqslant N;\\ 1\leqslant s\leqslant N}}\frac{1}{r}-\frac{1}{r+s} \triangleq \mathbb{I}_{11}^1+\mathbb{I}_{12}^1. \tag{2.7}$$

注意到

$$\mathrm{Ln}(m+1) \leqslant \sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k} \leqslant 1+\mathrm{Ln}m, \quad m\in\mathbb{Z}^+, \tag{2.8}$$

以及 $m>0$,

$$\int_0^N \mathrm{Ln}(m+x)dx \leqslant \sum_{k=1}^{N}\mathrm{Ln}(m+k) \leqslant \int_1^{N+1}\mathrm{Ln}(m+x)dx,$$

因此,

$$N\mathrm{Ln}(N+1) \leqslant \mathbb{I}_{11}^1 \leqslant N+N\mathrm{Ln}N, \tag{2.9}$$

这结合 $\mathbb{I}_{12}^1 = -\mathbb{I}_1^0$、(2.6) 以及 (2.7) 容易推出当 N 充分大时, 如下估计成立:

$$\mathbb{I}_1^1 \backsimeq N\mathrm{Ln}N. \tag{2.10}$$

因此, 当 $0<\alpha<1$ 时, 我们有

$$\begin{aligned}\mathbb{I}_1^\alpha &= \sum_{1\leqslant r\leqslant N}\sum_{1\leqslant s\leqslant N}\frac{1}{r^\alpha}\frac{s^\alpha}{r+s}\\ &= \left\{\sum_{1\leqslant r\leqslant N}\sum_{1\leqslant s\leqslant r}+\sum_{1\leqslant r\leqslant N}\sum_{r<s\leqslant N}\right\}\left(\frac{s}{r}\right)^\alpha\frac{1}{s+r}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\leqslant \sum_{1\leqslant r\leqslant N}\sum_{1\leqslant s\leqslant r}\left(\frac{1}{s+r}\right)+\sum_{1\leqslant r\leqslant N}\sum_{r<s\leqslant N}\frac{s}{r}\frac{1}{s+r}\\&\leqslant \mathbb{I}_1^0+\mathbb{I}_1^1\leqslant N\mathrm{Ln}N+N+2\mathrm{Ln}2\ N.\end{aligned}\tag{2.11}$$

下面, 我们继续估计 $\mathbb{I}_1^\alpha$ $(\alpha>1)$. 由基本的计算, 推出

$$\begin{aligned}\mathbb{I}_1^\alpha&=\sum_{1\leqslant r\leqslant N}\sum_{1\leqslant s\leqslant N}\frac{1}{r^\alpha}\frac{s^\alpha}{r+s}\geqslant \sum_{1\leqslant r\leqslant N}\sum_{1\leqslant s\leqslant N}\frac{1}{r^\alpha}\frac{s^\alpha}{2N}\\&\geqslant \frac{1}{2N}\left(\int_0^N x^\alpha\ dx\right)\sum_{1\leqslant r\leqslant N}\frac{1}{r^\alpha}\geqslant \frac{N^\alpha}{2(\alpha+1)},\end{aligned}\tag{2.12}$$

以及

$$\begin{aligned}\mathbb{I}_1^\alpha=&\sum_{1\leqslant r\leqslant N}\sum_{1\leqslant s\leqslant N}\frac{1}{r^\alpha}\frac{s^\alpha}{r+s}\leqslant \sum_{1\leqslant r\leqslant N}\sum_{1\leqslant s\leqslant N}\frac{1}{r^\alpha}\frac{s^\alpha}{s}\\&\leqslant \sum_{1\leqslant r\leqslant N}\frac{1}{r^\alpha}\left(\int_0^{N+1}s^{\alpha-1}ds\right)\leqslant \frac{(N+1)^\alpha}{\alpha}\left\{\int_1^\infty\left(\frac{1}{r}\right)^\alpha dr+1\right\}\\&\leqslant \left(1+\frac{1}{\alpha-1}\right)\frac{(N+1)^\alpha}{\alpha}\leqslant \left(1+\frac{1}{\alpha-1}\right)\frac{2^{\alpha+1}}{\alpha}N^\alpha.\end{aligned}\tag{2.13}$$

因此,

$$\mathbb{I}_1^\alpha\backsimeq N^\alpha,\quad \alpha>1.\tag{2.14}$$

现在, 我们讨论 $\mathbb{I}_2^\alpha$ 的估计. 当 $\alpha=0$ 时, 重写 $\mathbb{I}_2^0$ 如下:

$$\mathbb{I}_2^0=\sum_{2\leqslant r\leqslant N}\sum_{1\leqslant s\leqslant r-1}\frac{1}{r-s}=\sum_{2\leqslant r\leqslant N}\left\{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{r-1}\right\}.$$

这结合 (2.8) 可知

$$\sum_{2\leqslant r\leqslant N}\mathrm{Ln}(r+1)\leqslant \mathbb{I}_2^0\leqslant \sum_{2\leqslant r\leqslant N}(1+\mathrm{Ln}[r-1]).\tag{2.15}$$

同时注意到当 $\alpha\geqslant 0$ 时, 我们有

$$\mathbb{I}_2^\alpha=\sum_{2\leqslant r\leqslant N}\sum_{1\leqslant s\leqslant r-1}\frac{1}{|r|^\alpha}\frac{|s|^\alpha}{|r-s|}\leqslant \sum_{2\leqslant r\leqslant N}\sum_{1\leqslant s\leqslant r-1}\frac{1}{|r-s|}=\mathbb{I}_2^0.\tag{2.16}$$

因此, 上式结合 (2.15) 蕴含着

$$N\mathrm{Ln}N+\mathrm{Ln}N-N\leqslant \mathbb{I}_2^0\leqslant N\mathrm{Ln}N+1,\tag{2.17}$$

以及当 $\alpha\in(0,\infty)$ 时, 有

$$\mathbb{I}_2^\alpha\leqslant N\mathrm{Ln}N+1\leqslant 2N\mathrm{Ln}N,\quad N\geqslant 3.\tag{2.18}$$

最后, 我们来检验 $\mathbb{I}_3^\alpha$ 的估计. 当 $\alpha>1$ 时, 有

$$\mathbb{I}_3^\alpha=\sum_{2\leqslant s\leqslant N}\sum_{1\leqslant r\leqslant s-1}\frac{1}{r^\alpha}\ \frac{s^\alpha}{s-r}\geqslant \sum_{1\leqslant r\leqslant N-1}\sum_{r+1\leqslant s\leqslant N}\frac{1}{r^\alpha}\ \frac{s^\alpha}{s+r}$$

$$\begin{aligned}
&\geqslant \sum_{1\leqslant r\leqslant N-1}\sum_{r+1\leqslant s\leqslant N}\frac{1}{r^\alpha}\frac{s^\alpha}{2s}\geqslant\frac{1}{2}\sum_{1\leqslant r\leqslant N-1}\frac{1}{r^\alpha}\int_r^N s^{\alpha-1}ds\\
&=\frac{1}{2\alpha}\sum_{1\leqslant r\leqslant N-1}\frac{1}{r^\alpha}(N^\alpha-r^\alpha)\\
&=-\frac{1}{2\alpha}(N-1)+\frac{1}{2\alpha}N^\alpha\left(\sum_{1\leqslant r\leqslant N-1}\frac{1}{r^\alpha}\right),\quad N\geqslant 2. \qquad (2.19)
\end{aligned}$$

接下来, 我们来估计 $\mathbb{I}_3^\alpha$ 的上界. 注意到当 $s>t$ 且 $\alpha>1$ 时, 有

$$s^\alpha-t^\alpha\leqslant\alpha s^{\alpha-1}(s-t). \qquad (2.20)$$

因此

$$\begin{aligned}
\mathbb{I}_3^\alpha&=\sum_{2\leqslant s\leqslant N}\sum_{1\leqslant r\leqslant s-1}\frac{1}{r^\alpha}\frac{s^\alpha-r^\alpha+r^\alpha}{s-r}\\
&\leqslant\alpha\sum_{2\leqslant s\leqslant N}\sum_{1\leqslant r\leqslant s-1}\frac{s^{\alpha-1}}{r^\alpha}+\sum_{2\leqslant s\leqslant N}\sum_{1\leqslant r\leqslant s-1}\frac{1}{s-r}\triangleq\mathbb{I}_{3,1}^\alpha+\mathbb{I}_{3,2}^\alpha. \qquad (2.21)
\end{aligned}$$

显然,

$$\mathbb{I}_{3,2}^\alpha=\mathbb{I}_2^0\leqslant N\mathrm{Ln}N+1\leqslant 2N\mathrm{Ln}N,\quad N\geqslant 3, \qquad (2.22)$$

因此, 为得到 $\mathbb{I}_3^\alpha$ 的上界估计, 只需要估计 $\mathbb{I}_{3,1}^\alpha$ 的上界. 由 (2.20), 我们容易推出

$$\begin{aligned}
\mathbb{I}_{3,1}^\alpha&\leqslant\alpha\sum_{2\leqslant s\leqslant N}\sum_{1\leqslant r\leqslant s-1}\frac{s^{\alpha-1}}{r^\alpha}\\
&\leqslant\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}+\alpha\right)\sum_{2\leqslant s\leqslant N}s^{\alpha-1}\leqslant\left(\frac{1}{\alpha-1}+1\right)2^{\alpha+1}N^\alpha. \qquad (2.23)
\end{aligned}$$

上式结合 (2.19)–(2.23) 可知

$$\mathbb{I}_3^\alpha\backsimeq N^\alpha,\quad \alpha>1. \qquad (2.24)$$

下面, 我们来讨论 α 属于区间 $[0,1]$ 情况. 类似于 $\mathbb{I}_1^\alpha$ 估计, 我们首先考虑端点的情况, 即 $\alpha=0$ 与 $\alpha=1$ 时的估计. 注意到 $\mathbb{I}_2^0=\mathbb{I}_3^0$ 以及 $\mathbb{I}_3^0\leqslant\mathbb{I}_3^1$, 因此

$$N\mathrm{Ln}N+\mathrm{Ln}N-N\leqslant\mathbb{I}_3^0\leqslant\mathbb{I}_3^1=\sum_{2\leqslant s\leqslant N}\sum_{1\leqslant r\leqslant s-1}\frac{1}{r}\frac{s}{s-r}, \qquad (2.25)$$

以及

$$\begin{aligned}
\mathbb{I}_3^1&=\sum_{2\leqslant s\leqslant N}\sum_{1\leqslant r\leqslant s-1}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{s-r}\right)\\
&=\mathbb{I}_2^0+\sum_{2\leqslant s\leqslant N}\sum_{1\leqslant r\leqslant s-1}\left(\frac{1}{r}\right)\\
&\leqslant\mathbb{I}_2^0+N-1+\int_1^N\mathrm{Ln}(s+1)d(s+1)\\
&\leqslant N\mathrm{Ln}N+1+(N+1)\mathrm{Ln}(N+1). \qquad (2.26)
\end{aligned}$$

同时, 注意到当 $\alpha \in (0,1)$ 时, 我们有

$$\mathbb{I}_3^0 \leqslant \mathbb{I}_3^\alpha = \sum_{2\leqslant s\leqslant N}\sum_{1\leqslant r\leqslant s-1}\frac{1}{r^\alpha}\frac{s^\alpha}{s-r} \leqslant \mathbb{I}_3^1. \tag{2.27}$$

上式结合 (2.25) 以及 (2.26) 可知

$$\mathbb{I}_3^\alpha \backsimeq N\mathrm{Ln}N. \tag{2.28}$$

因此, 当 $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ 时, (2.1) 的证明容易由 (2.6), (2.10), (2.11), (2.17), (2.18) 以及 (2.25)–(2.28) 推出. 而当 $\alpha > 1$ 时, 此时 (2.1) 的证明来源于 (2.14), (2.18) 以及 (2.24). 同时, 显然 (2.1) 隐含着 (1.8) 以及 (1.9) 的第二个不等式成立.

第 2 步 为得到不等式的最佳常数, 在这一步中我们首先建立最佳常数 λ_N^α 的一些下界估计. 设

$$\xi = \left(\frac{1}{N^\alpha}, \frac{1}{(N-1)^\alpha}, \ldots, 1, 0, 1, \frac{1}{2^\alpha}, \ldots, \frac{1}{N^\alpha}\right), \quad \eta = (N^\alpha, (N-1)^\alpha, \ldots, 1, 0, 1, 2^\alpha, \ldots, N^\alpha),$$

则

$$|\xi|^2 = 2\sum_{1\leqslant k\leqslant N}\left(\frac{1}{|k|^\alpha}\right)^2 \backsimeq \begin{cases} \dfrac{2}{1-2\alpha}N^{1-2\alpha}, & 0<\alpha<\dfrac{1}{2}; \\ 2\mathrm{Ln}N, & \alpha = \dfrac{1}{2}; \\ C_0 > 0, & \alpha > \dfrac{1}{2}, \end{cases} \tag{2.29}$$

以及

$$|\eta|^2 = 2\sum_{1\leqslant k\leqslant N} k^{2\alpha} \simeq \frac{2}{2\alpha+1}N^{2\alpha+1}. \tag{2.30}$$

现记 $a = \frac{\xi}{|\xi|}, b = \frac{\eta}{|\eta|}$. 由 (2.1), 可得

$$\sum_{\substack{-N\leqslant r,s\leqslant N;\\ r\neq 0, s\neq 0;\\ r\neq s}} \frac{1}{|r|^\alpha}\frac{a_r b_s |s|^\alpha}{|r-s|} = \frac{1}{|\xi|\cdot|\eta|}\sum_{\substack{-N\leqslant r,s\leqslant N;\\ r\neq 0, s\neq 0;\\ r\neq s}} \frac{1}{|r|^{2\alpha}}\frac{|s|^{2\alpha}}{|r-s|},$$

以及

$$\sum_{\substack{-N\leqslant r,s\leqslant N;\\ r\neq 0, s\neq 0;\\ r\neq s}} \frac{1}{|r|^\alpha}\frac{a_r b_s |s|^\alpha}{|r-s|} \backsimeq \begin{cases} \mathrm{Ln}N, & 0<\alpha<\dfrac{1}{2}; \\ \sqrt{\mathrm{Ln}N}, & \alpha = \dfrac{1}{2}; \\ N^{\alpha-\frac{1}{2}}, & \alpha > \dfrac{1}{2}. \end{cases} \tag{2.31}$$

当 $\alpha = \frac{1}{2}$ 时, 此时不等式对应的最佳常数 λ_N^α 大于等于 $\mathrm{Ln}N$. 事实上, 设

$$a = b = (\underbrace{\sqrt{1/(2N)}, \sqrt{1/(2N)}, \ldots, \sqrt{1/(2N)}}_{N}, 0, \underbrace{\sqrt{1/(2N)}, \ldots, \sqrt{1/(2N)}}_{N}),$$

由 (2.1), 可得

$$\sum_{\substack{-N\leqslant r,s\leqslant N;\\ r\neq 0, s\neq 0;\\ r\neq s}} \frac{1}{|r|^{\frac{1}{2}}}\frac{a_r b_s |s|^{\frac{1}{2}}}{|r-s|} = \frac{1}{2N}\sum_{\substack{-N\leqslant r,s\leqslant N;\\ r\neq 0, s\neq 0;\\ r\neq s}} \frac{1}{|r|^{\frac{1}{2}}}\frac{|s|^{\frac{1}{2}}}{|r-s|} \simeq \mathrm{Ln}N. \tag{2.32}$$

因此, 不等式 (1.8) 与 (1.9) 中的第一个不等式可由 (2.31) 与 (2.32) 直接推出.

第 3 步　在这一步中, 我们将推出 λ_N^α 的一些重要先验估计. 首先, 设

$$\mathbb{J}_N(a,b)=\sum_{\substack{-N\leqslant r,s\leqslant N;\\ r\neq 0,s\neq 0;\\ r\neq s}}\frac{1}{|r|^\alpha}\frac{a_rb_s|s|^\alpha}{|r-s|}.$$

显然, 不等式 (1.7)–(1.10) 的证明等价于泛函 $\mathbb{J}_N(a,b)$ 在下列集合 $\mathbb{M}$ 上的最大值问题

$$\mathbb{M}=(a,b)\in\mathbb{R}^{2N+1}\times\mathbb{R}^{2N+1}\{|\}\|a\|_2=\|b\|_2=1.$$

我们容易计算出其 Euler-Lagrange 方程:

$$\begin{cases}2\lambda_1a_r=\displaystyle\sum_{\substack{-N\leqslant s\leqslant N;\\ s\neq 0;\\ r\neq s}}\left(\frac{|s|}{|r|}\right)^\alpha\frac{b_s}{|r-s|};\\ 2\lambda_2b_s=\displaystyle\sum_{\substack{-N\leqslant r\leqslant N;\\ r\neq 0;\\ r\neq s}}\left(\frac{|s|}{|r|}\right)^\alpha\frac{a_r}{|r-s|}.\end{cases}\tag{2.33}$$

重写 (2.33) 如下:

$$\begin{cases}2\lambda_1a=Ab,\\ 2\lambda_2b^{\mathrm{T}}=a^{\mathrm{T}}A,\end{cases}\tag{2.34}$$

其中 $b^{\mathrm{T}}=(b_{-N},\dots,b_N)$ 为向量 b 的倒置, A 定义如下:

$$A=a_{i,j}=\begin{cases}\left|\dfrac{j}{i}\right|^\alpha\dfrac{1}{|i-j|},\quad i\neq j,\ j\neq 0\ \text{且}\ i\neq 0,i,j\in\{-N,\dots,N\};\\ 0,\qquad\qquad \text{其他}.\end{cases}\tag{2.35}$$

由紧致理论, 可推得存在向量 $(\bar a,\bar b)\in\mathbb{R}^{2N+1}\times\mathbb{R}^{2N+1}$ 使得 $\|\bar a\|_2=\|\bar b\|_2=1$ 且

$$\max_{(a,b)\in\mathbb{M}}\mathbb{J}_N(a,b)\triangleq\bar\lambda_N^\alpha=\sum_{\substack{-N\leqslant r,s\leqslant N;\\ r\neq 0,s\neq 0;\\ r\neq s}}\frac{1}{|r|^\alpha}\frac{\bar a_r\bar b_s|s|^\alpha}{|r-s|}.\tag{2.36}$$

首先在 (2.33) 第一个方程和第二个方程两边分别乘以 $\bar a_r$, $\bar{b_s}$, 然后从 $-N$ 到 N 求和, 则结合 $\|\bar a\|_2=\|\bar b\|_2=1$ 与 (2.33) 可得

$$2\lambda_1\|\bar a\|_2=\sum_{\substack{-N\leqslant s,r\leqslant N;\\ s\neq 0,r\neq 0;;\\ r\neq s}}\left(\frac{|s|}{|r|}\right)^\alpha\frac{\bar b_s\ \bar a_r}{|r-s|}=\bar\lambda_N^\alpha=2\lambda_2\|b\|_2.$$

另一方面, 由 (2.34), 可得

$$A^{\mathrm{T}}A\bar b=4\lambda_1\lambda_2\bar b=(\bar\lambda_N^\alpha)^2\bar b,\quad AA^{\mathrm{T}}\bar a=4\lambda_1\lambda_2\bar a=(\bar\lambda_N^\alpha)^2\bar a.\tag{2.37}$$

这结合 (2.31) 与 (2.32), 蕴含着当 $0\leqslant\alpha\leqslant\frac{1}{2}$ 时, 有

$$(\bar\lambda_N^\alpha)^2\geqslant(\mathrm{Ln}N)^2,\tag{2.38}$$

同时, 当 $\alpha > \frac{1}{2}$ 时, 有

$$(\bar{\lambda}_N^{\alpha})^2 \geqslant N^{2\alpha-1}. \tag{2.39}$$

第 4 步 在这一步中, 我们将建立不等式 (1.7) 在 $\alpha \geqslant 1$ 时的最佳常数. 首先, 我们引入一些必要的记号,

$$C(\alpha) = A \cdot A^{\mathrm{T}}, \quad C_{i,j}(\alpha) = \sum_{-N\leqslant k\leqslant N;} a_{i,k}a_{j,k},$$

其中 $a_{i,k}$ 由 (2.35) 给出. 下面, 我们将估计矩阵 $C(\alpha)$ 的迹.

$$G_\alpha(i) \triangleq C_{i,i}(\alpha) = \sum_{\substack{-N\leqslant k\leqslant N;\\ k\neq i, i\neq 0}} \left(\frac{|k|}{|i|}\right)^{2\alpha}\left(\frac{1}{|i-k|}\right)^2 = \sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant N;\\ k\neq i, i\neq 0}} \left(\frac{k}{i}\right)^{2\alpha}\left(\frac{1}{k-i}\right)^2 + \sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant N;\\ k\neq i, i\neq 0}} \left(\frac{k}{i}\right)^{2\alpha}\left(\frac{1}{k+i}\right)^2.$$

显然, $G_\alpha(i) = G_\alpha(-i)$, 因此,

$$\begin{aligned}
S_\alpha &\triangleq \sum_{-N\leqslant i\leqslant N} C_{i,i}(\alpha) = 2\sum_{1\leqslant i\leqslant N} G_\alpha(i)\\
&= 2\left\{\sum_{1\leqslant i\leqslant N}\sum_{1\leqslant k\leqslant N}\left(\frac{k}{i}\right)^{2\alpha}\frac{1}{(i+k)^2} + \sum_{1\leqslant i\leqslant N}\sum_{1\leqslant k\leqslant N}\left(\frac{k}{i}\right)^{2\alpha}\frac{1}{(i-k)^2}\right\}\\
&\triangleq 2\,(S_\alpha^1 + S_\alpha^2),
\end{aligned} \tag{2.40}$$

其中 S_α^1, S_α^2 分别定义如下:

$$\begin{aligned}
S_\alpha^1 &= \sum_{1\leqslant i\leqslant N}\sum_{1\leqslant k\leqslant N}\left(\frac{k}{i}\right)^{2\alpha}\frac{1}{(i+k)^2}\\
&= \left\{\sum_{1\leqslant i\leqslant N}\sum_{1\leqslant k\leqslant i} + \sum_{1\leqslant i\leqslant N}\sum_{1+i\leqslant k\leqslant N}\right\}\left(\frac{k}{i}\right)^{2\alpha}\frac{1}{(i+k)^2} \triangleq S_{\alpha,1}^1 + S_{\alpha,2}^1,
\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}
S_\alpha^2 &= \sum_{1\leqslant i\leqslant N}\sum_{1\leqslant k\leqslant N}\left(\frac{k}{i}\right)^{2\alpha}\frac{1}{(i-k)^2}\\
&= \sum_{1\leqslant i\leqslant N}\left(\sum_{1\leqslant k\leqslant i-1} + \sum_{1+i\leqslant k\leqslant N}\right)\left(\frac{k}{i}\right)^{2\alpha}\frac{1}{(i-k)^2} \triangleq S_{\alpha,1}^2 + S_{\alpha,2}^2.
\end{aligned}$$

对于 $\alpha \geqslant 0$, 我们易推出

$$\begin{aligned}
S_{\alpha,1}^1 &= \sum_{1\leqslant i\leqslant N}\sum_{1\leqslant k\leqslant i}\left(\frac{k}{i}\right)^{2\alpha}\frac{1}{(i+k)^2} \leqslant \sum_{1\leqslant i\leqslant N}\sum_{1\leqslant k\leqslant i}\frac{1}{(i+k)^2}\\
&\leqslant \sum_{1\leqslant i\leqslant N}\int_0^i \frac{1}{(i+k)^2}dk = \frac{1}{2}\sum_{1\leqslant i\leqslant N}\frac{1}{i} \leqslant \frac{\mathrm{Ln}N+1}{2},
\end{aligned} \tag{2.41}$$

以及当 $\alpha > \frac{1}{2}$ 时, 有

$$\begin{aligned}
S_{\alpha,2}^1 &= \sum_{1\leqslant i\leqslant N}\sum_{1+i\leqslant k\leqslant N}\left(\frac{k}{i}\right)^{2\alpha}\frac{1}{(i+k)^2} < \sum_{1\leqslant i\leqslant N}\sum_{1+i\leqslant k\leqslant N}\left(\frac{k}{i}\right)^{2\alpha}\frac{1}{k^2}\\
&\leqslant \sum_{1\leqslant i\leqslant N}\left(\frac{1}{i}\right)^{2\alpha}\sum_{1+i\leqslant k\leqslant N}(k^{2\alpha-2}) \leqslant C(\alpha)N^{2\alpha-1}, \quad N\geqslant 3.
\end{aligned} \tag{2.42}$$

类似地, 当 $0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{1}{2}$ 时, 我们可得

$$\begin{aligned} S^1_{\alpha,2} \leqslant S^1_{\frac{1}{2},2} &= \sum_{1\leqslant i\leqslant N}\sum_{1+i\leqslant k\leqslant N}\left(\frac{k}{i}\right)\frac{1}{(i+k)^2} \\ &\leqslant \sum_{1\leqslant i\leqslant N}\sum_{1\leqslant k\leqslant N}\left(\frac{k}{i}\right)\frac{1}{k^2} \leqslant 4(\mathrm{Ln}N)^2, \quad N\geqslant 3. \end{aligned}$$

接下来, 我们来估计 S^2_α. 当 $\alpha \geqslant 0$ 时, 由基本的计算, 有

$$\begin{aligned} S^2_{\alpha,1} \leqslant S^2_{0,1} &= \sum_{2\leqslant i\leqslant N}\sum_{1\leqslant k\leqslant i-1}\frac{1}{(i-k)^2} \\ &= \sum_{2\leqslant i\leqslant N}\left\{1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\left(\frac{1}{i-1}\right)^2\right\} \\ &\leqslant \sum_{2\leqslant i\leqslant N}\left(2-\frac{1}{i}\right) \leqslant 2N. \end{aligned} \tag{2.43}$$

注意到当 $i+1 \leqslant k \leqslant N$ $(i \geqslant 2)$ 时, 有 $0 < \frac{k}{k-i} \leqslant 2i$. 因此, 当 $\alpha > \frac{3}{2}$ 时, 我们推出 $2\alpha - 2 > 1$ 以及

$$\begin{aligned} S^2_{\alpha,2} &= \sum_{2\leqslant i\leqslant N-1}\sum_{1+i\leqslant k\leqslant N}\left(\frac{k}{i}\right)^{2\alpha}\frac{k^2}{(k-i)^2}\ \frac{1}{k^2} \\ &\leqslant \sum_{2\leqslant i\leqslant N} 4\ i^{2-2\alpha}\sum_{1+i\leqslant k\leqslant N} k^{2\alpha-2} \\ &\leqslant \sum_{2\leqslant i\leqslant N}\frac{4}{i^{2\alpha-2}}\int_0^{N+1} k^{2\alpha-2}dk \\ &\leqslant C(\alpha)N^{2\alpha-1}. \end{aligned} \tag{2.44}$$

现在, 我们讨论 $\frac{1}{2} < \alpha \leqslant \frac{3}{2}$. 首先, 重写 $S^2_{\alpha,2}$ 如下:

$$\begin{aligned} S^2_{\alpha,2} &= \sum_{2\leqslant i\leqslant N-1}\sum_{1+i\leqslant k\leqslant N}\left(\frac{k}{i}\right)^{2\alpha}\frac{1}{(k-i)^2} = \sum_{3\leqslant k\leqslant N}\sum_{2\leqslant i\leqslant k-1}\left(\frac{k}{i}\right)^{2\alpha}\frac{1}{(k-i)^2} \\ &= \sum_{3\leqslant k\leqslant 99}\sum_{2\leqslant i\leqslant k-1}\left(\frac{k}{i}\right)^{2\alpha}\frac{1}{(k-i)^2} + \sum_{100\leqslant k\leqslant N}\sum_{2\leqslant i\leqslant k-1}\left(\frac{k}{i}\right)^{2\alpha}\frac{1}{(k-i)^2} \\ &\triangleq S^2_{\alpha,2,1} + S^2_{\alpha,2,2}. \end{aligned} \tag{2.45}$$

显然为得到 $S^2_{\alpha,2}$ 的上界, 我们只需要估计 $S^2_{\alpha,2,2}$ 的上界. 为此, 我们分解 $S^2_{\alpha,2,2}$ 如下,

$$\begin{aligned} S^2_{\alpha,2,2} &= \sum_{100\leqslant k\leqslant N}\sum_{2\leqslant i\leqslant k-1}\left(\frac{k}{i}\right)^{2\alpha}\frac{1}{(k-i)^2} \\ &= \left\{\sum_{100\leqslant k\leqslant N}\sum_{2\leqslant i\leqslant \frac{k}{2}} + \sum_{100\leqslant k\leqslant N}\sum_{\frac{k}{2}\leqslant i\leqslant k-1}\right\}\left(\frac{k}{i}\right)^{2\alpha}\frac{1}{(k-i)^2} \\ &\triangleq \mathbb{F}_1 + \mathbb{F}_2. \end{aligned} \tag{2.46}$$

注意到当 $2 \leqslant i \leqslant \frac{k}{2}$ 时, 有 $\frac{1}{(k-2)^2} \leqslant \frac{1}{(k-i)^2} \leqslant \frac{4}{k^2}$. 因此, 当 $\frac{1}{2} < \alpha \leqslant \frac{3}{2}$ 时,

$$\mathbb{F}_1 = \sum_{100\leqslant k\leqslant N}\sum_{2\leqslant i\leqslant \frac{k}{2}}\left(\frac{k}{i}\right)^{2\alpha}\frac{1}{(k-i)^2}$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant 4 \sum_{100\leqslant k\leqslant N} \sum_{2\leqslant i\leqslant \frac{k}{2}} k^{2\alpha-2}\left(\frac{1}{i}\right)^{2\alpha} \\
&\leqslant \frac{4}{2\alpha-1} \sum_{100\leqslant k\leqslant N} k^{2\alpha-2} \\
&\leqslant \frac{4}{(2\alpha-1)^2} N^{2\alpha-1}.
\end{aligned} \tag{2.47}
$$

同时, 对于 $0\leqslant \alpha\leqslant \frac{1}{2}$, 我们有

$$
\mathbb{F}_1 \leqslant 16(\mathrm{Ln}N)^2. \tag{2.48}
$$

下面, 我们来估计 $\mathbb{F}_2$. 首先容易推出当 $\frac{k}{2}\leqslant i\leqslant k-1\leqslant k$ 时, 有 $1\leqslant \frac{k}{i}\leqslant 2$, 因此

$$
\begin{aligned}
\mathbb{F}_2 &= \sum_{100\leqslant k\leqslant N} \sum_{\frac{k}{2}\leqslant i\leqslant k-1} \left(\frac{k}{i}\right)^{2\alpha} \frac{1}{(k-i)^2} \\
&\leqslant \sum_{100\leqslant k\leqslant N} \sum_{\frac{k}{2}\leqslant i\leqslant k-1} 2^{2\alpha} \frac{1}{(k-i)^2} \\
&\leqslant 2^{2\alpha} \sum_{100\leqslant k\leqslant N} 4\left\{1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}\right\} \\
&\leqslant 2^{2\alpha+4} N.
\end{aligned} \tag{2.49}
$$

设 $\Lambda^\alpha=\lambda_i^\alpha\in\mathbb{R}^1, i\in\{-N,-N+1,\ldots,N\}$ 为矩阵 $C(\alpha)$ 的特征值所组成的集合. 由矩阵的基本性质, 我们容易推出 $\lambda_i^\alpha\geqslant 0$ 以及

$$
\sum_{k=-N}^{N} \lambda_i^\alpha = S_\alpha.
$$

对于 $\alpha\geqslant 1$ 时, 由 (2.37) 以及 (2.41)–(2.49), 我们可得

$$
(\bar{\lambda}_N^\alpha)^2 \leqslant S_\alpha \leqslant C_\alpha N^{2\alpha-1}. \tag{2.50}
$$

上式结合 (2.39) 可得

$$
\bar{\lambda}_N^\alpha \backsimeq N^{\alpha-\frac{1}{2}}, \quad \alpha\geqslant 1.
$$

至此, 我们完成了定理 1.2 的证明.

.

致谢 感谢清华大学邹文明教授以及厦门大学伍火熊教授富有建设性的讨论与建议.

参考文献

1 Stein E M, Weiss G. Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions. Princeton: Princeton University Press, 1970
2 许建开, 伍火熊, 谭忠. 一类共形不变摄动积分方程正解的存在性. 中国科学: 数学, 2012, 42: 329–340
3 Lieb E H. Sharp constants in the Hardy-Littlewood-Sobolev and related inequalities. Ann Math, 1983, 114: 349–374
4 Stein E M, Weiss G. Fractional integrals in n-dimensional Euclidean space. J Math Mech, 1958, 7: 503–513
5 Hardy G H, Littlewood J E, Pólya G. Inequalities. Cambridge: Cambridge University press, 1952
6 Li C, Villavert J. An extension of the Hardy-Littlewood-Polya inequality. Acta Math Sin Ser B, 2011, 31: 2285–2288

7 Cheng Z, Li C M. An extended discrete Hardy-Littlewood-Sobolev inequality. Disc Cont Dyn Syst A, 2014, 34: 1951–1959
8 唐林. 完全非线性混合可积微分算子解的正则性. 中国科学: 数学, 2014, 44: 559–570
9 郭铁信, 张霞. 复完备随机内积模上的随机酉算子群的 Stone 表示定理. 中国科学: 数学, 2012, 42: 181–202

An extension of discrete weighted Hardy-Littlewood-Sobolev inequality in space dimension one

XU JianKai, CHENG Ze & FANG YanQin

Abstract In this paper, we establish the critical version of discrete weighted Hardy-Littlewood-Sobolev inequality with $p = q = 2$, $\lambda = 1$ and $\alpha + \beta = 0$ in $\mathbb{R}^1$:

$$\sum_{\substack{-N \leqslant r,s \leqslant N;\\ r \neq 0, s \neq 0;\\ r \neq s}} \frac{1}{|r|^\alpha} \frac{a_r b_s |s|^\alpha}{|r-s|} \leqslant C_\alpha \lambda_N^\alpha \|a\|_2 \|b\|_2,$$

where $a = (a_{-N}, \dots, a_N)$ and $b = (b_{-N}, \dots, b_N)$. When $\alpha \geqslant 1$, we obtain that the sharp estimate λ_N^α is $N^{\alpha - 1/2}$. Namely,

$$\sum_{\substack{-N \leqslant r,s \leqslant N;\\ r \neq 0, s \neq 0;\\ r \neq s}} \frac{1}{|r|^\alpha} \frac{a_r b_s |s|^\alpha}{|r-s|} \leqslant C_\alpha N^{\alpha - 1/2} \|a\|_2 \|b\|_2.$$

Keywords eigenvalue, Hardy-Littlewood-Sobolev inequality, sharp constant
MSC(2010) 45E10, 45M20, 35J45
doi: 10.1360/N012013-00172