

超图的路和圈^{*}

王建方

(中国科学院应用数学研究所, 北京 100080)

李 东

(香港中文大学讯息工程系, 香港)

摘要 超图是离散数学中最一般最复杂的结构. 无圈超图已被证明在数据库设计中非常有用. 从关系数据的结构出发, 建立了关于超图的路、连通性和圈的新的公理系统. 该系统与特殊情形——图是符合的. 引入了虚圈和实圈的概念, 这是一对相关联的概念. 虚圈在特殊情形——图中不存在, 退化掉了. 定义了超图圈的相关性和独立性, 给出了超图中最大独立实圈数目的计数公式, 对特殊情形——图, 这个公式就是 Euler 公式.

关键词 超图 路 圈 虚圈 实圈

超图是集合系统, 是最具一般性的离散结构, 在组合论中许多有限集合系统与超图有关, 如 Ramsey 理论, 有限几何, 拟阵等.

近年来, 计算机科学家引入了无圈超图的概念, 它在关系数据库设计中非常有用^[1~3].

设 $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 是一个有限集合, V 的一族子集合 $H = \{E_1, E_2, \dots, E_m\}$ 称为 V 上的一个超图, 如果 $E_i \neq \emptyset (i = 1, 2, \dots, m)$ 且 $\bigcup_{i=1}^m E_i = V$. V 中的元素称为顶点, H 中的元素称为边. 一个顶点 v 称为孤立的, 如它仅属于一条边. 一条边 E 称为 H 的一个耳朵, 如果存在 E' , 使得 $E \setminus E'$ 中的每个顶点是孤立的. 设 E 是一个耳朵, 称从 H 除去 E 为耳朵移除. 作为特殊情形, 仅有一条边, 可以使用“耳朵移除”除去它.

重复耳朵移除直到不能再移除为止, 所得到的超图称为原超图的 Graham 约化. 一个等价定义为: 重复使用下面两种运算, 直到不能进行为止:

(GR₁) 去掉 x , 如果它是孤立的;

(GR₂) 去掉 E_i , 如果 $E_i \subseteq E_j, i \neq j$.

一个超图称为是无圈的, 如果它的 Graham 约化是空的.

文献[4, 5] 引进半格研究超图, 利用半格的结构给出了超图圈族数的 Euler 公式^[5].

什么是超图的圈呢? 传统的定义显然不适用于数据库. 本文将建立关于超图的路、连通性和圈的新的公理系统, 这个系统适用于关系数据库, 并且对特殊情形——图也是适合的. 路、连通性和圈是基础图论的主要构成. 它们在超图中地位也如同在图论中一样. 本文主要研究超图的圈结构.

1 基本概念

1.1 路和连通性

定义 1 设 H 是集合 V 上的一个超图, $P = (E_0, E_1, \dots, E_{k-1})$ 是 H 中的一个边序列, $S_i = E_i \cap E_{i+1}$ 称为关节. 称 P 为 H 的具有关节序列 $S = (S_0, S_1, \dots, S_{k-2})$ 的一条路, 如果

(P₁) 当 $i \neq j$ 时, $E_i \neq E_j$;

(P₂) $S_i \neq \emptyset$, $i = 0, 1, \dots, k-2$;

(P₃) 当 $i \neq j$ 时, $S_i \setminus S_j \neq \emptyset$.

P 称为 t -维路, 简称 (t) -路, 如果 $t = \min\{|S_i| : i = 0, 1, \dots, k-2\}$. 称 P 是连接边 E_0 和 E_{k-1} 的 (t) -路或 E_0 和 E_{k-1} 之间的一条 (t) -路.

一个关节 S_i 称为 (t) -关节, 如果 $|S_i| = t$.

设 P 是 H 的一条路, $d(P)$ 表示 P 的维数. E, E' 是 H 的一对边, $P(E, E')$ 表示 E 和 E' 之间的所有路的集合, $m(E, E') = \max\{d(p) : p \in P(E, E')\}$.

定义 2 一个超图 H 称为 t -维连通的, 简称 (t) -连通的, 如果 $t = \min\{m(E, E') : E, E' \in H\}$. H 的一个极大 (t) -连通子超图称为 H 的 (t) -分支.

例 1 $H = \{ABC, ABD, AED, AEF, BCE, BEP, KEI, KEJ, EJI\}$.

边序列 (AED, ABD, ABC, BCE) 是一条 (2) -路, 其关节序列为 (AD, AB, BC) , 边序列 (ABD, AED, KEI) 是一条 (1) -路, 其关节序列为 (AD, E) . H 是 (1) -连通的. 它有 2 个 (2) -分支: $G_1 = \{ABC, ABD, AED, AEF, BCE, BEP\}$, $G_2 = \{KEI, KEJ, EJI\}$.

1.2 圈

定义 3 设 $Q = (E_0, E_1, \dots, E_{k-1})$ 是 H 中一个边序列, $S_i = E_i \cap E_{i+1}$, $i = 0, 1, \dots, k-1$, 下标运算取 $\text{mod } k$. Q 称为具有关节序列 $S = (S_0, S_1, \dots, S_{k-1})$ 的一个圈, 如果

(q₁) 当 $i \neq j$ 时, $E_i \neq E_j$;

(q₂) $S_i \neq \emptyset$, $i = 0, 1, \dots, k-1$;

(q₃) 当 $i \neq j$ 时, $S_i \setminus S_j \neq \emptyset$;

(q₄) 对任意 $i \in \{0, 1, \dots, k-1\}$, H 中不存在边 E 使得

$$E \supseteq \bigcup_{j=0}^{k-1} S_{i+j}.$$

显然 (q₃) 意味着 (q₂), 但为了强调圈的每个关节是非空的, 还是保留 (q₂). 在路的意义中也一样.

这个定义与特殊情形——图的相应定义是相容的.

一个圈 $Q = (E_0, E_1, \dots, E_{k-1})$ 称为 t -维圈, 简称 (t) -圈, 如果

$$t = \min\{|S_i| : i = 0, 1, \dots, k-1\},$$

其中 S_i 是 Q 的关节.

定义 4 设 $C = (E_0, E_1, \dots, E_{k-1})$ 是超图 H 中的一个圈, 其关节序列为 $S = (S_0, S_1, \dots, S_{k-1})$. 称 C 为第 1 类虚圈, 如果存在另一个同长圈 $C' = (E'_0, E'_1, \dots, E'_{k-1})$, 其关节序列为 $S' = (S'_0, S'_1, \dots, S'_{k-1})$, 使得对每个 i , $S_i \subseteq S'_i$ 且存在 i_0 满足 $S_{i_0} \subset S'_{i_0}$. C 称为第 2 类虚圈, 如果存在一条路 $(E'_1 = E_i, E'_2, \dots, E'_{j-1}, E'_j = E_{i+1})$, 使得

$$C' = (E_0, E_1, \dots, E_{i-1}, E'_1, E'_2, \dots, E'_j, E_{i+2}, \dots, E_{k-1})$$

是 H 的一个圈, 并且对任意 $\alpha \in \{1, 2, \dots, j\}$, 都有 $E'_\alpha \cap E'_{\alpha+1} \supseteq E_i \cap E_{i+1}$.

设圈 $C = (E_0, E_1, \dots, E_{k-1})$ 和 $C' = (E'_0, \dots, E'_j, \dots, E'_{k-1})$, 其关节序列分别为 $S = (S_0, S_1, \dots, S_{k-1})$ 和 $S' = (S'_0, S'_2, \dots, S'_{k-1})$. C 和 C' 称为等价的, 如果 $S = S'$. 等价于虚圈的圈是虚圈.

定义 5 一个圈称为实圈, 如果它不是虚圈.

注 1 对一组等价实圈, 仅称其中一个圈为实圈, 其余的称为第 3 类虚圈.

虚圈和实圈是一对相关的概念. 对特殊情形——图, 特别是简单图, 虚圈不存在, 这是一种退化的情形. 这一对颇有哲理的概念表明超图的深刻性. 有一个虚圈就一定存在一个对应的实圈. 因此, 在下面, 说存在一个实圈, 只要找到一个圈就可以了.

例 2 考虑超图 $H = \{ABC, ABD, AED, AEF, BCE, BED\}$, $C_1 = (BCE, ABC, ABD, AED)$, $S_1 = (BC, AB, AD, E)$, $C_3 = (ABC, AED, BCE)$, $S_3 = (A, E, BC)$. C_2 是第 1 类虚圈, C_3 是第 2 类虚圈, C_1 是实圈.

1.3 超图的半格

文献[4, 5] 给出了超图的半格的定义, 这里给出几个常用的术语和记号. 设 H 是一个超图, $L(H)$ 表示 H 的交闭半格, $L(H)$ 中的元素称为关节, 对应 H 的元素称之为端关节. $FL(x)$ 表示以 x 为顶的漏斗, 即 $FL(x) = \{y: y \in L(H), x \leq y\}$. $C^+(x)$ 表示 $FL(x) - x$ 的分支的数目. 设 G' 是 $FL(x) - x$ 的一个分支, $A = \{(x, y): y \in G', x < y\}$, $G = G' + A_i + x$ 称为 $FL(x)$ 的一个分支. $FL(x) \cap H$ 称为 H 的由 x 产生的子超图, 记为 $H(x)$.

不失一般性, 假设 $\bigcap_{E \in H} E = \emptyset$. $L(H)$ 的一个关节 x 称为 (t) -关节, 如果 $|x| = t$.

显然 H 的任意一条路或圈上的任意关节都是 $L(H)$ 的一个关节.

H 的每条路对应 $L(H)$ 中一条路. H 的每个圈对应 $L(H)$ 的一个圈. 反之不然.

例 3 $H = \{ABC, ABD, ADE, AEF, BCE, BEG, BGH, GHI, HIE, IEJ, EJK, JKAB\}$, $L(H)$ 如图 1 所示.

设 $T_t = \{x: x \in L(H), |x| = t\}$, $L_t = L(H) - T_0 - T_1 - \dots - T_{t-1}$. $L(H)$ 也表示 Hasse

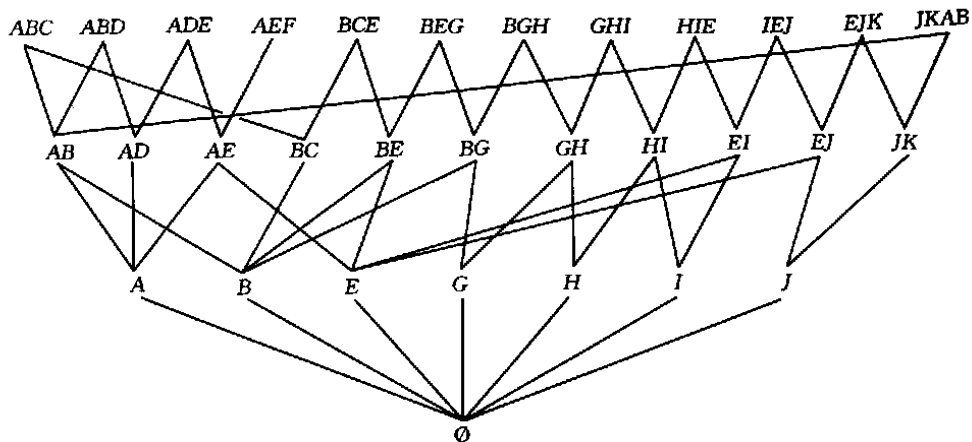


图 1

图. L_t 的分支称为 $L(H)$ 的 (t) -分支.

由定义直接可得

推论 1 如果 G 是 $L(H)$ 的一个 (t) -分支, 则 $G \cap H$ 是 H 的 (l) -连通子超图, $l \geq t$.

推论 2 设 C 是 H 的一个实 (t) -圈, 则在 $L(H)$ 的某个 (t) -分支中存在一个圈包含对应 C 的边的 $L(H)$ 的端关节.

例 4 $C = (ABC, BCD, CDA)$ 是超图 H 的一个 (2) -圈, 它对应 $L(H)$ 中的圈 $\bar{C} = (ABC-BC-BCD-CD-CDA-AC-ABC)$.

2 超图的圈结构

定义 6 设 $C_0, C_1, \dots, C_{k-1}$ 是 k 个 (t) -圈, 它们的每一个都含有 x 作为一个 (t) -关节. 令

$$C_i = (E_0^i, E_1^i, \dots, E_{n_i-1}^i), \quad i = 0, 1, \dots, k-1.$$

假设 $E_0^i \cap E_{n_i-1}^i = x$, $i = 0, 1, \dots, k-1$. 如果 $E_{n_i-1}^i = E_0^{i+1}$, 或存在一条具有下列性质的连接 $E_{n_i-1}^i$ 和 E_0^{i+1} 的路 P_i (加法取 mod k):

(i) P_i 的每个关节包含 x , $i = 0, 1, \dots, k-1$;

(ii) 当 $i \neq j$ 时, P_i 和 P_j 不交;

(iii) P_i 和 C_j 不相交, $i, j \in \{0, 1, \dots, k-1\}$,

则边序列 $(E_0^0, E_1^0, \dots, E_{n_0-1}^0, P_0, E_0^1, \dots, E_{n_1-1}^1, P_1, E_0^2, \dots, E_{n_{k-2}-1}^{k-2}, P_{k-2}, E_0^{k-1}, \dots, E_{n_{k-1}-1}^{k-1}, P_{k-1})$ 形成一个不含关节 x 的圈. 称这个圈是由 $C_0 \cup C_1 \cup \dots \cup C_{k-1}$ 生成的.

定义 7 设 $C_1 = (E_0^1, E_1^1, \dots, E_{k-1}^1)$ 和 $C_2 = (E_0^2, E_1^2, \dots, E_{k-1}^2)$ 是 2 个圈. 它们的 mod 2 和定义为

$$C_1 \oplus C_2 = (C_1 \cup C_2) \setminus \{(C_1 \cap C_2) \setminus A\},$$

其中 $A = \{E; E \in C_1 \cap C_2 \text{ 且 } E \text{ 包含 } C_1 \cup C_2 \text{ 中 3 个关节}\}$.

可以递归地定义 $C_1 \oplus C_2 \oplus \dots \oplus C_k$.

例 5 $C_1 = (abclm, cdemn, efg, ghi, ij al)$, $C_2 = (cdemn, efg, ghi, ij al, dnkj)$. C_1 的关节序列为 (cm, e, g, i, al) , C_2 的关节序列为 (e, g, i, j, dm) , $C_1 \oplus C_2 = (abclm, cdemn, dnkj, ij al)$, 见图 2.

注 2 超图圈的 mod 2 和与图圈的 mod 2 和有所不同. 因为图的每条边仅含 2 个顶点,

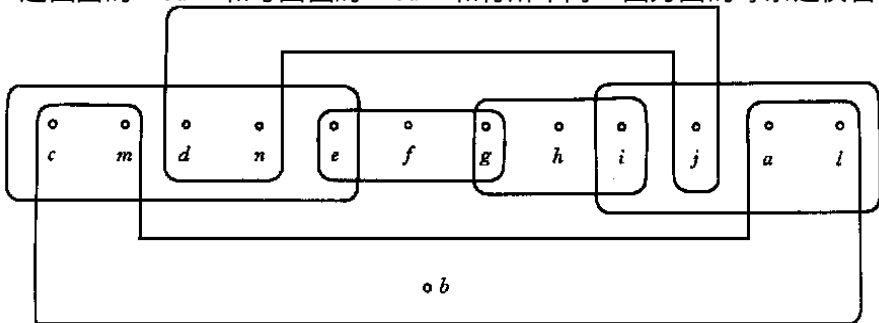


图 2

从而只可能含 2 个关节.

由 $C_0 \oplus C_1 \oplus C_2 \oplus \cdots \oplus C_{k-1}$ 加上定义 6 中所说的必要的某些路所形成的圈, 称为由 $C_0 \oplus C_1 \oplus \cdots \oplus C_{k-1}$ 生成的圈. 如例 3 中的超图, $C_0 = (BGH, GHI, HIE)$, $C_1 = (EJK, JKAB, ABD, ADE)$, $C_2 = (ADE, ABD, ABC, BCE)$ 是 3 个含 E 为 (1)-关节的 (1)-圈. $C_0 \oplus C_1 \oplus C_2 = (BEG, BGH, GHI, HIE, EJK, JKAB, ABC, BCE)$ 不是一个圈, 但加上路 $P_0 = (HIE, IEJ, EJK)$ 和 $P_1 = (BCE, BEG)$ 就形成一个 (2)-圈, $C = (BEG, BGH, GHI, HIE, IEJ, JKAB, ABC, BCE)$.

定义 8 设 $C_0, C_1, \dots, C_{k-1}$ 是 k 个 (t) -圈. 如果 $C_0 \oplus C_1 \oplus \cdots \oplus C_{k-1}$ 生成一个或几个维数大于 t 的圈, 或者 $C_0 \oplus C_1 \oplus \cdots \oplus C_{k-1} = \emptyset$, 则称圈集 $\{C_0, C_1, \dots, C_{k-1}\}$ 是相关的, 否则称之为独立的, 其中 C_i 表示 $L(H)$ 中对应 C_i 的圈.

引理 1 设 H 是一个超图, x 是 $L(H)$ 的一个关节, 如果 $C^+(x) = 1$, 则不存在实圈含 x 作为一个关节.

证 假若不然, 存在一个实圈 C 含有 x 为一个关节. 假设 $x = E_i \cap E_{i+1}$, 则 E_i 和 E_{i+1} 都属于 $H(x)$. 因为 $C^+(x) = 1$, 所以 $H(x)$ 是 $(t+1)$ -连通的, 其中 $t = |x|$. 故在 $H(x)$ 中存在一条 (l) -路 P 连接 E_i 和 E_{i+1} , $l \geq t+1$. 设 $P = (E'_0 = E_i, E'_1, \dots, E'_\alpha = E_{i+1})$, 则 $E'_j \cap E'_{j+1} \supseteq x, \forall j \in \{0, 1, \dots, \alpha-1\}$, 故 C 是一个虚圈. 矛盾.

引理 2 设 X 是 $L(H)$ 的一个 (t) -关节, $C^+(x) = 2$, A_1, A_2 是 $FL(x)$ 的 2 个分支, 如果 $(A_1 \cup A_2) - x$ 包含在 $L(H)$ 的同一个 $(t+1)$ -分支 G 中, 则存在一个 (t) -实圈含 x 为唯一 (t) -关节. 任意 2 个这样的圈是相关的.

证 令 $G = G \cap H$, 则 G 是 H 的 $(t+1)$ -连通子超图. 取 $E_i \in A_i \cap H, i = 1, 2$, 则 $E_1 \cap E_2 = x$. 因为 $(A_1 \cap H) \cup (A_2 \cap H)$ 在 G 中, 所以存在一条 (l) -路 P 连接 E_1 和 E_2 , $l \geq t+1$. 设 $P = (E'_0 = E_1, E'_1, \dots, E'_{k-2}, E'_{k-1} = E_2)$. 可以假设对 $1 \leq i \leq k-2, E'_i \in G \setminus \{(A_1 \cap H) \cup (A_2 \cap H)\}$. 故对 $0 \leq i \leq k-2, E'_i \cap E'_{i+1} \not\supseteq x$. 因此 $(E'_0, E'_1, \dots, E'_{k-1})$ 形成一个 (t) -圈, 它含 x 为唯一 (t) -关节.

假设 $C_1 = (E'_0, E'_1, \dots, E'_{k-1})$ 和 $C_2 = (E''_0, E''_1, \dots, E''_{n-1})$ 是 2 个 (t) -圈. 它们都含 x 为唯一 (t) -关节. 可以假设 $E'_{k-1}, E''_0 \in A_1 \cap H, E''_{n-1}, E'_0 \in A_2 \cap H, C_i \setminus \{E''_0, E'_{j-1}\} \in G \setminus \{(A_1 \cap H) \cup (A_2 \cap H)\}, j = k, n$.

情形 1 $E''_0 = E'_{k-1}, E''_{n-1} = E'_0$.

如果

$$(C_1 \setminus \{E'_0, E'_{k-1}\}) \cap (C_2 \setminus \{E''_0, E''_{n-1}\}) = \emptyset, \quad (1)$$

则 $(E'_0, E'_1, \dots, E'_{k-1}, E''_1, E''_2, \dots, E''_{n-2})$ 形成一个 (l) -圈, $l > t$. C_1 和 C_2 相关. 如果 (1) 式不成立, 则 $C_1 \oplus C_2$ 生成几个维数 $> t$ 的圈, 或 $C_1 \oplus C_2 = \emptyset$. 它们也相关.

情形 2 $E'_0 \neq E''_{n-1}$ 和 $E'_{k-1} \neq E''_0$ 中至少有一个成立. 仅考虑它们都成立的情形, 其他情形类似.

易见在 $A_1 \cap H$ 中存在一条维数大于 t 的路 P_1 连接 E'_{k-1} 和 E''_0 , 在 $A_2 \cap H$ 中存在一条维数大于 t 的路 P_2 连接 E''_{n-1} 和 E'_0 . 因此 $C_1 \oplus C_2$ 生成一个或几个维数大于 t 的圈. 故它们是相关的, 见图 3.

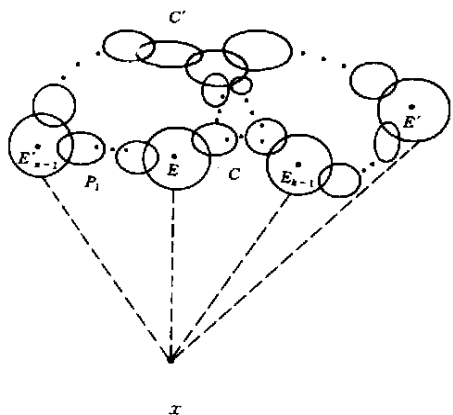


图 3

引理 3 设 x 是 $L(H)$ 的一个 (t) -关节, 如果 $C^+(x) \geq 2$, $FL(x) - x$ 包含于 $L(H)$ 的同一个 $(t+1)$ -分支中, 则含 x 为唯一 (t) -关节的独立实 (t) -圈的数目不大于 $C^+(x) - 1$.

证 令 $k = C^+(x)$, $A_0, A_1, \dots, A_{k-1}$ 是 $FL(x)$ 的分支, G 是 $L(H)$ 的包含 $(A_0 \cup A_1 \cup \dots \cup A_{k-1}) - x$ 的 $(t+1)$ -分支, $G = G \cap H$, 则 $G - H(x) \neq \emptyset$.

情形 1 $|G - H(x)| = 1$. 设 $E = G - H(x)$, 则对任意 $i \in \{0, 1, \dots, k-1\}$, 存在 $E_i \in A_i \cap H$, 使得 $|E \cap E_i| \geq t+1$. 令 $y_i = E \cap E_i, i = 0, 1, \dots, k-1$. $G_i = (E_i, E, E_{i+1})$ 是 H 的一个含 x 为唯一 (t) -关节的 (t) -圈. $C_i = (E_i - y_i - E - y_{i+1} - E_{i+1} - x - E_i)$ 是 $L(H)$ 的

圈, 它对应 C_i , 其中 $E_i - y_i$ 表示 E_i 和 y_i 之间在 $L(H)$ 中的路. 以下记法相同. 显然

$$C_0 \oplus C_1 \oplus C_2 \oplus \dots \oplus C_{k-1} = \emptyset,$$

故 $\{C_0, C_1, \dots, C_{k-1}\}$ 是相关的.

情形 2 $|G - H(x)| \geq 2$. 由引理 1, 对任意 $A_i, A_j (i \neq j)$, 存在一个实 (t) -圈含 x 为唯一 (t) -关节且包含 $A_i \cap H$ 和 $A_j \cap H$ 中各一条边, 记这个圈为 C_{ij} . 总可以假设 $|C_{ij} \cap (A_i \cap H)| = 1$ 和 $|C_{ij} \cap (A_j \cap H)| = 1$.

令 $C_i = C_{i, i+1}$. 如果对任意一对 $i, j \in \{0, 1, \dots, k-1\}, i \neq j$,

$$(C_i - A_i \cap H - A_{i+1} \cap H) \cap (C_j - A_j \cap H - A_{j+1} \cap H) = \emptyset, \quad (2)$$

则易见 $\bigcup_{i=0}^{k-1} C_i$ 生成一个维数大于 t 的圈, 因此它们是相关的.

现在假设 (2) 式不成立, 则 $C_0 \oplus C_1 \oplus \dots \oplus C_{k-1}$ 生成几个维数大于 t 的圈, 因此它们是相关的.

引理 4 假设同引理 3, 则 H 有 $C^+(x) - 1$ 个独立的实 (t) -圈. 它们的每个都含 x 为唯一 (t) -关节.

证 由引理 1, 对 A_0, A_1 , 存在一个实 (t) -圈, 含 x 为唯一 (t) -关节, 用 C_0 表示这个圈. 对 A_1, A_2 , 存在一个实 (t) -圈含 x 为唯一 (t) -关节, 记为 C'_1 . 若

$$(C_0 - A_0 \cap H - A_1 \cap H) \cap (C'_1 - A_1 \cap H - A_2 \cap H) = \emptyset,$$

则 C_0 和 C'_1 是独立的. 若不然, 设 E 是沿 C_0 方向上 C_0 和 C'_1 的第 1 个公共边. 设 $C_0 \cap (A_0 \cap H) = E_0, C_0 \cap (A_1 \cap H) = E_1, C'_1 \cap (A_2 \cap H) = E_2$. 令 $C_1 = (E_1 \underline{C_0} E \underline{C'_1} E_2)$ 是含 x 为唯一 (t) -关节的 (t) -圈, 其中 $E_1 \underline{C_0} E$ 是 C_0 上从 E_1 到 E 的一段, $E \underline{C'_1} E_2$ 的意义类似, 则 C_0 和 C_1 是独立的. 继续使用这种方法, 可以找到 $k-1$ 个含 x 为唯一 (t) -关节的独立实 (t) -圈.

推论 3 假设同引理 3, 则含 x 为唯一 (t) -关节的独立实 (t) -圈的最大数目是 $C^+(x) - 1$.

引理 5 设 x 是 $L(H)$ 的一个 (t) -关节, $\alpha(x)$ 表示含 x 为唯一 (t) -关节的独立实 (t) -圈的最大数目. $B(x) = \{G \mid G \text{ 是 } L(H) \text{ 的 } (t+1)\text{-分支且 } G \cap FL(x) \neq \emptyset\}, \beta(x) = |B(x)|$, 则

$$\alpha(x) + \beta(x) = C^+(x).$$

证 设 $B(x) = \{G_1, G_2, \dots, G_{\beta(x)}\}$, Q 是 $FL(x) - x$ 的一个分支. 显然, $Q \cap G_i \neq \emptyset$ 意味着 $Q \subseteq G_i$. 令

$$n_i = \{Q: Q \text{ 是 } FL(x) - x \text{ 的一个分支且 } Q \subseteq G_i\},$$

则

$$\sum_{i=1}^{\beta(x)} n_i = C^+(x).$$

由引理的条件, $n_i \geq 1, i \in \{1, 2, \dots, \beta(x)\}$. 根据推论 3, 在 $G_i + x$ 中含 x 为唯一 (t) -关节的独立实 (t) -圈的最大数目是 $n_i - 1$, 于是

$$\alpha(x) = \sum_{i=1}^{\beta(x)} (n_i - 1) = \sum_{i=1}^{\beta(x)} n_i - \beta(x) = C^+(x) - \beta(x).$$

因此 $\alpha(x) + \beta(x) = C^+(x)$.

引理 6 设 $x_0, x_1, \dots, x_{k-1}$ 是 $L(H)$ 的 k 个 (t) -关节. $\bigcup_{i=0}^{k-1} (FL(x_i) - x_i)$ 包含在 $L(H)$ 的一个 $(t+1)$ -分支 G 中, 对任何其他 (t) -关节 y , $G \cap (FL(y) - y) = \emptyset$, 则在 $G = G \cap H$ 中的独立的实 (t) -圈的最大数目等于

$$\sum_{i=0}^{k-1} (C^+(x_i) - 1).$$

证 令 $l_i = C^+(x_i)$, $\{A_0^i, A_1^i, \dots, A_{l_i-1}^i\}$ 是 $FL(x_i)$ 的全体分支的集合, $i = 0, 1, \dots, k-1$.

令 $C(x_i)$ 表示所有含 x_i 为唯一 (t) -关节的独立实 (t) -圈的集合.

由推论 3, $|C(x_i)| = C^+(x_i) - 1$. 显然, 对任意 $x_i, x_j, i \neq j, \{C(x_i), C(x_j)\}$ 是独立的.

现在, 考虑含 2 个 (t) -关节的 (t) -圈, 其他情形类似.

设 C 是含有 2 个 (t) -关节 x_i 和 x_j 的实 (t) -圈. 因此, $|C \cap H(x_i)| \geq 2, |C \cap H(x_j)| \geq 2$. 假设 $|C \cap H(x_i)| = 2, |C \cap H(x_j)| = 2$, 设它们是 E_1, E_2, E_3, E_4 , 如图 4 所示. C 是由连接 E_1 和 E_3 的一个路 P_1 和连接 E_2 和 E_4 的一条路 P_2 组成, 因为 C 恰含 2 个 (t) -关节. 所以 P_1 和 P_2 的维数都大于 t .

由引理 1, 存在一个含 x_j 为唯一 (t) -关节的实 (t) -圈 C_1 , 不失一般性, 假设 $C \cap C_1 \neq \emptyset$. 令 $\{E_5 \cup P_3\} = C_1 \cap C$, 如图 4 所示.

$C_2 = (E_1, P_2, E_5, P_3, E_4, P_1, E_2)$ 是恰含一个 (t) -关节 x_i 的 (t) -圈, 故

$$C = C_1 \oplus C_2,$$

$\{C, C_1, C_2\}$ 是相关的.

因此, 最大独立实 (t) -圈的集合可以由仅含一个 (t) -关节的实 (t) -圈组成. 由推论 3, 在 G 中独立实 (t) -圈的最大数目是

$$\sum_{i=0}^{k-1} (C^+(x_i) - 1).$$

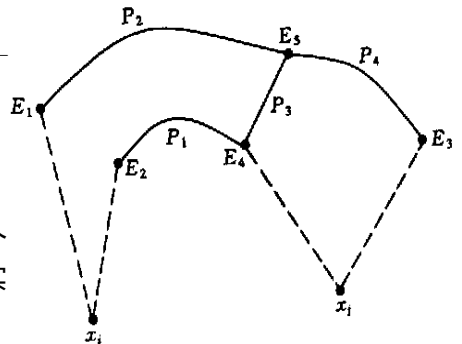


图 4

引理 7 设 G_1, G_2 是 $L(H)$ 的 2 个 $(t+1)$ -分支, x_1, x_2 是 2 个 (t) -关节. G_i 含 $FL(x_j) - x_j$ 的 1 个分支, $i, j=1, 2$, 则 H 有一个含 x_1 和 x_2 为 2 个 (t) -关节的实 (t) -圈.

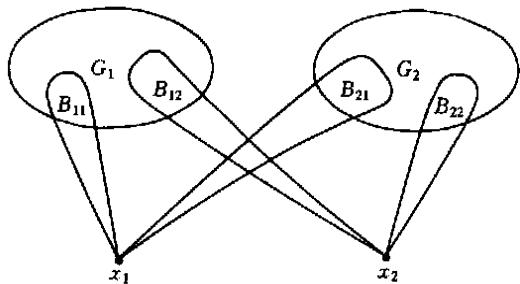


图 5

类似情形 1 证明.

情形 3 $E_{11}=E_{12}$ 和 $E_{21}=E_{22}$. 不可能.

引理 8 设 $G_0, G_1, \dots, G_{k-1}$ 是 $L(H)$ 的 k 个 $(t+1)$ -分支, $x_0, x_1, \dots, x_{k-1}$ 是 k 个 (t) -关节, G_i 和 G_{i+1} 各包含 $FL(x_i) - x_i$ 的一个分支 (如图 6 所示), 则存在一个实 (t) -圈, 它恰包含 $x_0, x_1, \dots, x_{k-1}$ 为 k 个 (t) -关节.

证 类似于引理 7.

引理 9 设 $L(H)$ 的 (t) -分支数目为 β_t , $x_0, x_1, \dots, x_{k-1}$ 为 k 个 (t) -关节, 则独立的实 (t) -圈的最大数目为

$$\sum_{i=0}^{k-1} (C^+(x_i) - 1) - \beta_{t+1} + \beta_t.$$

证 情形 1 $\beta_t=1, L_t$ 连通. 令 $\{G_i, i=0, 1, \dots, \beta_{t+1}-1\}$ 是 L_{t+1} 的所有分支的集合, $G_i = G_i \cap H$, 则 G_i 是 (l) -连通的, 其中 $l \geq t+1$.

(i) 当把每个 G_i 当成一个点时, L_t 是树. 在这种情形, 称 L_t 为似树. 可以调整下标, 使得包含 $FL(x_i) - x_i$ 的分支的 $(t+1)$ -分支的最小下标不大于包含 $FL(x_{i+1}) - x_{i+1}$ 的分支的 $(t+1)$ -分支的最小下标, $i=0, 1, \dots, k-2$.

设 $G_0, G_1, \dots, G_{m_0-1}$ 是同 $FL(x_0)$ 的交不空的所有 $(t+1)$ -分支, G_i 包含 $FL(x) - x_i$ 的 n_i^0 个分支, $i=0, 1, \dots, m_0-1$.

设 $G_j, G_{m'_i+1}, \dots, G_{m'_i+m_i-1}$ 是同 $FL(x_i) - x_i$ 的交不空的所有 $(t+1)$ -分支, G_j 包含 $FL(x_i) - x_i$ 的 n_j^i 个分支, $G_{m'_i+j}$ 包含 $FL(x_i) - x_i$ 的 n_j^i 个分支, $j=1, 2, \dots, m_i-1$, 其中

$$m'_i = \sum_{\alpha=0}^{i-1} m_\alpha - i + 1, \quad i \in \{0, 1, \dots, m'_i-1\}, \quad \sum_{j=0}^{m_i-1} n_j^i = C^+(x_i).$$

因为 L_t 连通, $j_i \in \{0, 1, \dots, m'_i-1\}$. 因为 L_t 是似树, 所以, 仅有一个同 $\{FL(x_j) - x_j: j=0, 1, \dots, i\}$ 的交不空的 $(t+1)$ -分支包含 $FL(x_{i+1}) - x_{i+1}$ 的一个分支. 于是有

$$\sum_{j=0}^{k-1} m_j = \beta_{t+1} + k - 1.$$

证 设 B_{ij} 表示 $FL(x_j) - x_j$ 在 G_i 中的分支. 如图 5 所示.

$$G_i = G_i \cap H, \quad B_{ij} = B_{ij} \cap H, \quad E_{ij} \in B_{ij}.$$

情形 1 $E_{i1} \neq E_{i2}, i=1, 2$. 这时存在维数大于 t 的路 p_i 连接 E_{i1} 和 E_{i2} , $E_{11} \cap E_{12} = x_1$, $E_{21} \cap E_{22} = x_2$. 于是由 $P_1 \cup P_2$ 的边组成的序列形成一个 (t) -圈含 x_1 和 x_2 为 2 个 (t) -关节.

情形 2 $E_{11}=E_{12}$ 和 $E_{21}=E_{22}$ 之一成立. 可

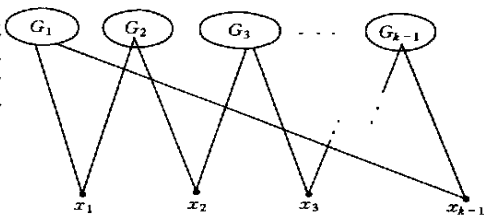


图 6

令 $\alpha(x_i)$ 表示具有 x_i 为唯一 (t) -关节的独立实 (t) -圈的最大数目. 由推论 3 有

$$\alpha(x_i) = \sum_{j=0}^{m_i-1} (n_j^i - 1) = C^+(x_i) - m_i, \quad i = 0, 1, \dots, k-1.$$

因此

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= \sum_{i=0}^{k-1} \alpha(x_i) = \sum_{i=0}^{k-1} (C^+(x_i) - m_i) = \sum_{i=0}^{k-1} C^+(x_i) - \sum_{i=0}^{k-1} m_i = \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} C^+(x_i) - (\beta_{t+1} - t - 1) = \sum_{i=0}^{k-1} (C^+(x_i) - 1) - \beta_{t+1} + 1, \end{aligned} \quad (3)$$

其中 $\alpha(t)$ 表示独立的实 (t) -圈的最大数目.

(ii) L_t 不是似树. 把每个 $(t+1)$ -分支收缩成一个点, L_t 变成 L'_t . L'_t 不是树. 设 T 是它的支撑树. 对应 T 的点的 $(t+1)$ -分支和 $FL(x_i) - x_i$ 的分支依 (i) 排序. 称这样的序为正常的. 令 T' 表示 L_t 的对应 T 的子图. 由 (i), (3) 式对 T' 成立. 由引理 7 和 8, 当一个其他分支加到 T' 时, 一个唯一含多于 1 个 (t) -关节的实 (t) -圈将产生. 易见这个圈与其他圈是独立的. 因此, (3) 式仍然成立.

情形 2 $\beta_t > 1$.

设 $H_0, H_1, \dots, H_{\beta_t-1}$ 是 $L(H)$ 的 β_t 个 (t) -分支, $G_0, G_1, \dots, G_{\beta_{t+1}-1}$ 是 $L(H)$ 的 $(t+1)$ -分支.

设 $G_0, G_1, \dots, G_{m_0-1}$ 在 H_0 中, $G_{m'_i}, G_{m'_i+1}, \dots, G_{m'_i+m_i-1}$ 在 H_i 中, 其中 $m'_i = \sum_{j=0}^{i-1} m_j$, $i = 1, 2, \dots, \beta_t - 1$, $x_0, x_1, \dots, x_{n_0-1} \in H_0$, $x_{n'_i}, x_{n'_i+1}, \dots, x_{n'_i+n_i-1} \in H_i$, $i = 1, 2, \dots, \beta_t - 1$, 其中

$$n'_i = \sum_{j=0}^{i-1} n_j, \quad \beta_{t+1} = \sum_{j=0}^{\beta_t-1} m_j, \quad k = \sum_{j=0}^{\beta_t-1} n_j.$$

令 $\alpha_t(H_i)$ 表示 H_i 中的独立实 (t) -圈的最大数目, α_t 表示 H 中的独立实 (t) -圈的最大数目, 则由情形 1,

$$\alpha_t(H_i) = \sum_{j=n'_i}^{n'_i+n_i-1} (C^+(x_j) - 1) - m_i + 1.$$

于是

$$\alpha_t = \sum_{i=0}^{\beta_t-1} \alpha_t(H_i) = \sum_{j=0}^{k-1} (C^+(x_j) - 1) - \beta_{t+1} + \beta_t.$$

引理 10 设 $Q(t)$ 表示独立的实 (t) -圈的一个集合, 若 $i \neq j$, 则 $Q(i) \cup Q(j)$ 是独立的实圈集合.

证 由定义即得.

定理 1 设 H 是一个超图, α 表示 H 的独立的实圈的最大数目, 则

$$\alpha = \sum_{x \in L(H)} (C^+(x) - 1) + 1.$$

证 令 $m = \max\{|E| : E \in H\}$, 可以假设 $\bigcap_{E \in H} E = \emptyset$. 令 $T_t = \{x : x \in L(H), |x| = t\}$,

$$L_t = L(H) - T_0 - T_1 - \dots - T_{t-1}.$$

由引理 9,

$$\alpha_t = \sum_{x \in T_t} (C^+(x) - 1) - \beta_{t+1} + \beta_t.$$

由引理 10,

$$\alpha = \sum_{t=0}^m \alpha_t = \sum_{t=0}^m \left[\sum_{x \in T_t} (C^+(x) - 1) - \beta_{t+1} + \beta_t \right] = \sum_{x \in L(H)} (C^+(x) - 1) + 1.$$

定义 9 一个超图 H 称为 r -超图, 如果对任意 $E \in H, |E| = r$.

定义 10 一个在 V 上的超图 H 称为完全 r -超图, 如果 $H = \{E: E \subseteq V, |E| = r\}$.

推论 4 设 H 是在 V 上的完全 r -超图, $|V| = n$, α 表示 H 的独立实圈的最大数目, 则

$$\alpha = \frac{n(n-1) \cdots (n-r+2) [(r-1)(n-r)-1]}{r!} + 1.$$

证 易见

$$C^+(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq r-2, \\ n-r+1, & |x| = r-1, \\ 0, & |x| = r. \end{cases}$$

使得 $|x| = r-1$ 的关节 x 的数目是

$$\binom{n}{r-1} = \frac{n(n-1) \cdots (n-r+2)}{(r-1)!},$$

使得 $|x| = r$ 的关节 x 的数目是

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1) \cdots (n-r+1)}{r!}.$$

由定理 1,

$$\begin{aligned} \alpha &= \sum_{x \in L(H)} (C^+(x) - 1) + 1 = \\ &= \frac{n(n-1) \cdots (n-r+2)}{(r-1)!} - \frac{n(n-1) \cdots (n-r+1)}{r!} + 1 = \\ &= \frac{n(n-1) \cdots (n-r+2) [(r-1)(n-r)-1]}{r!} + 1. \end{aligned}$$

当 $r=2$ 时, α 正好是 n 阶完全图的独立圈的最大数目.

定理 2 一个超图是无圈的当且仅当它没有圈.

证 由定理 1 和文献[3]的定理 3 立得.

参 考 文 献

- 1 Maier D. The Theory of Relational Databases. Rockville; Computer Science Press, Inc. 1983
- 2 Beeri C, Fagin R, Maier D et al. On the desirability of acyclic database schemes. JACM, 1983, 30: 479~513
- 3 Wang J F, Lee T T. An invariant for hypergraphs. Chinese ACTA Mathematicae Applicatae Sinica, 1996, 2(2): 113~120
- 4 Lee T T. An information theoretic analysis of relational databases——part 2: information structures of database schemes. IEEE Trans Softw Eng, 1987, SE-13: 1062~1072
- 5 Lee T T. The Euler formula of cyclomatic number of hypergraphs. Southeastern Asian Bulletin of Mathematics, 1997, 21: 113~137