中国科学 E 辑: 信息科学
2007 年 第 37 卷 第 10 期: 1258~1271
http://www.scichina.com

《中国科学》杂志社
SCIENCE IN CHINA PRESS

线性定常系统特征模型的证明

孟 斌* 吴宏鑫

(北京控制工程研究所空间智能控制技术国家级重点实验室, 北京 100080)

摘要 研究线性定常系统的特征建模问题, 证明了多输入多输出线性定常系统的特征模型可以用二阶时变差分方程组描述, 并且刻画了特征模型的建模误差, 在系统不含零实部极点的情形下, 在稳态和暂态时建模误差分别为 0 和 $O(h)$, 一般情形下, 分别为 $O(h^2)$和 $O(h)$. 该证明表明特征建模与一般模型降阶方法是本质不同的, 特征模型是把高阶模型的有关信息压缩到几个特征参量之中, 并没有丢失系统信息.

关键词 特征模型 建模误差 最小实现 定点控制 自适应控制

1 引言

特征建模问题是基于特征模型的全系数自适应控制方法的关键问题之一[1~8]. 该方法是吴宏鑫提出的, 经过了 20 多年的研究, 在理论和应用上均取得了重要进展, 形成了一套完整的实用性很强的自适应控制理论和方法. 该方法在航天和工业控制领域的 9 类工程对象 400 多个系统中取得了成功应用. 特别是该方法的理论思想和工程要点创造性地应用于飞船返回再入控制, 其开伞精度达到世界先进水平[6].

自从 20 世纪 50 年代末期由麻省理工学院提出第 1 个自适应控制系统以来[9], 自适应控制引起了广泛关注, 取得了丰硕成果和重要进展[10~15]. 然而, 自适应控制在实际中并未得到广泛应用, 其原因在于现有自适应控制理论在实际工程应用中存在如下问题: 暂态响应较差、需要估计的参数个数较多、难以保证参数估计收敛以及需要人为调试的参数多等等[8]. 上述问题的一个重要原因是现有的建模和控制理论以精确动力学分析为基础, 建模与控制要求分开来考虑. 这套建模控制方法产生的物质基础是电子线路和机电部件等硬件, 其前提是精确建模, 如果模型不精确, 或者是时变的, 那么用硬件组成控制器是很困难的. 然而生产与科学技术的发展, 尤其是计算机技术和数字技术的发展, 为此提供了新的物质基础和可行性. 特征建模与全系数自适应控制方法以及多模型控制方法[14,15]相结合, 在很大程度上解决了上述问题.

基于特征模型的全系数自适应控制方法的基本思想是, 首先建立系统的特征模型, 然后按照特征模型参数设计全系数自适应控制律[8]. 所谓特征建模, 就是根据对象动力学特征和控

收稿日期: 2007-01-18; 接受日期: 2007-06-12
国家自然科学基金(批准号: 90405017, 60704014)、国家重点基础研究发展规划(批准号: 2002CB312205)和中国博士后科学基金(批准号: 20060400415)资助项目
*联系人, E-mail: mengb_bice@yahoo.com.cn

制性能要求相结合进行建模, 而不是仅以对象精确的动力学分析来建模. 在文献 [3]中, 对于如下形式的系统:

$$G(s)=\frac{k_v}{s^2}+\sum_{i=1}^{m}\frac{k_i}{s+\lambda_i}+\sum_{i=1}^{h}\left(\frac{k_{p+i}}{s+\lambda_{p+i}}+\frac{\bar{k}_{p+i}}{s+\bar{\lambda}_{p+i}}\right)+\sum_{i=1}^{p}\frac{k_{wi}}{(s+w_i)^2},$$

作者证明其在位置保持控制要求下的特征模型为下述时变差分方程:

$$y(k+1)=f_1(k)y(k)+f_2(k)y(k-1)+g_0(k)u(k)+g_1(k)u(k-1).$$

特征模型具有如下特点: 1)在同样输入控制作用下, 对象特征模型和实际对象在输出上是等价的; 2)特征模型的形式和阶次除考虑对象特征外, 主要取决于控制性能要求; 3)特征模型的形式比原对象动力学方程简单, 工程实现方便; 4)特征模型与降阶模型不同, 它是把高阶模型有关信息压缩到几个特征参量之中, 并不丢失信息. 一般情形下, 特征模型用慢时变差分方程描述. 但是, 从上面的讨论可知, 在文献[3]中考虑的被控对象仅限于含有少于或等于 2 个重极点的单输入单输出系统. 在文献 [7]中, 上述结果被推广到多输入多输出系统, 然而对系统极点的要求与文献 [3]相同.

近一段时间, 我们对特征建模理论进行了进一步研究. 由于速度和加速度等被控输出或者是可以量测的, 或者是可以通过系统的输出量计算得到, 因此, 可以将其定义为系统的广义输出. 进而, 可把文献 [3]中所考虑的速度保持等不同控制问题统一归为位置保持控制问题, 也即定点控制问题. 从而在速度保持等不同控制要求下系统可以用统一的二阶时变差分方程描述. 本文给出了一般多输入多输出线性定常系统定点控制要求下特征模型的证明, 并且刻画了特征建模的建模误差, 为黄金分割自适应控制的应用奠定了理论基础.

2　问题描述

本文中, 考虑如下 p 个输出, q 个输入的广义被控对象的特征建模问题:

$$y=G(s)u, \tag{1}$$

其中, $G(s)\in\mathbb{R}^{p\times q}$ 为一正则有理函数矩阵, 表示系统的传递函数, $u\in\mathbb{R}^q$ 和 $y\in\mathbb{R}^p$ 分别表示系统的输入和输出.

为清楚起见, 我们首先详细论证如下单输入单输出系统的特征模型:

$$G(s)=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1 s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}, \tag{2}$$

其中, $a_i\in\mathbb{R}$, $b_j\in\mathbb{R}$, $i=0,1,\cdots,n-1$, $j=0,1,\cdots,m$; $n\geqslant m$. 其特征多项式有如下分解:

$$s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0=s^{\gamma_1}\prod_{i=1}^{\gamma_2}(s-\mu_i)^{\nu_i}\prod_{i=1}^{\gamma_3}((s-\xi_i)^2+\eta_i^2)^{\upsilon_i}, \tag{3}$$

其中, $\eta_{i_3}>0$, $\mu_{i_2}\neq 0$, μ_{i_2}, ν_{i_2}, ξ_{i_3}, η_{i_3}, υ_{i_3}, $i_j=1,2,\cdots,\gamma_j$, $j=2,3$, 均为实数. 即系统(2)含有γ_1 重零特征根, γ_2 个多重实特征值(μ_i 是 ν_i 重的, $i=1,2,\cdots,\gamma_2$), 以及 γ_3 对多重共轭复根($\xi_i\pm\eta_i$ 是 υ_i 重的, $i=1,2,\cdots,\gamma_3$). 由(3)式可知, 系统(2)有如下分解:

$$G(s)=\sum_{i=1}^{\gamma_1}\frac{l_i}{s^i}+\sum_{i=1}^{\gamma_2}\sum_{j=1}^{\nu_i}\frac{d_{ij}}{(s-\mu_i)^j}+\sum_{i=1}^{\gamma_3}\sum_{j=1}^{\upsilon_i}\frac{p_{ij1}s+p_{ij0}}{((s-\xi_i)^2+\eta_i^2)^j}, \tag{4}$$

其中, $l_{\gamma_1}\neq 0$, $d_{i\nu_i}\neq 0$, $i=1,2,\cdots,\gamma_2$, $p_{i\upsilon_i 1}$和 $p_{i\upsilon_i 0}$不全为 0, $i=1,2,\cdots,\gamma_3$. 由(4)式可见, 系统

(2)可看作 $\gamma_2+\gamma_3+1$ 个系统的并联. 定义

$$y_1=\sum_{i=1}^{\gamma_1}\frac{l_i}{s^i}u, \tag{5}$$

$$y_{2i}=\sum_{j=1}^{\upsilon_i}\frac{d_{ij}}{(s-\mu_i)^j}u,\quad i=1,2,\cdots,\gamma_2, \tag{6}$$

$$y_{3i}=\sum_{j=1}^{\upsilon_i}\frac{p_{ij1}s+p_{ij0}}{((s-\xi_i)^2+\eta_i^2)^j}u,\quad i=1,\cdots,\gamma_3, \tag{7}$$

则有

$$y=y_1+\sum_{i=2}^{3}\sum_{j=1}^{\gamma_i}y_{ij}.$$

由线性系统理论可知, 子系统(5)和(6)的最小实现分别为如下(8)和(9)式:

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2,\\ \quad\cdots\\ \dot{x}_{\gamma_1-1}=x_{\gamma_1},\\ \dot{x}_{\gamma_1}=u,\\ y_1=\sum\limits_{i=1}^{\gamma_1}l_{\gamma_1-i+1}x_i,\end{cases} \tag{8}$$

和

$$\begin{cases}\dot{\varphi}_{i1}=\mu_i\varphi_{i1}+\varphi_{i2},\\ \quad\cdots\\ \dot{\varphi}_{i\upsilon_i-1}=\mu_i\varphi_{i\upsilon_i-1}+\varphi_{i\upsilon_i},\\ \dot{\varphi}_{i\upsilon_i}=\mu_i\varphi_{i\upsilon_i}+u,\\ y_{2i}=\sum\limits_{j=1}^{\upsilon_i}d_{i\upsilon_i-j+1}\varphi_{ij},\end{cases}\quad i=1,2,\cdots,\gamma_2. \tag{9}$$

下面首先给出本文的几个关键引理, 其中引理 1, 3 和 4 的证明见附录 A.

引理 1 子系统(7)的最小实现为

$$\begin{cases}\dot{\zeta}_{i11}=\xi_i\zeta_{i11}+\eta_i\zeta_{i12}+2u,\\ \dot{\zeta}_{i12}=-\eta_i\zeta_{i11}+\xi_i\zeta_{i12},\\ \dot{\zeta}_{i21}=\xi_i\zeta_{i21}+\eta_i\zeta_{i22}-\dfrac{1}{\eta_i}\zeta_{i12},\\ \dot{\zeta}_{i22}=-\eta_i\zeta_{i21}+\xi_i\zeta_{i22},\\ \quad\cdots\\ \dot{\zeta}_{i\upsilon_i1}=\xi_i\zeta_{i\upsilon_i1}+\eta_i\zeta_{i\upsilon_i2}-\dfrac{1}{\eta_i}\zeta_{i(\upsilon_i-1)2},\\ \dot{\zeta}_{i\upsilon_i2}=-\eta_i\zeta_{i\upsilon_i1}+\xi_i\zeta_{i\upsilon_i2},\\ y_{3i}=\sum\limits_{j=1}^{\upsilon_i}\sum\limits_{k=1}^{2}\kappa_{ijk}\zeta_{ijk},\end{cases}\quad i=1,2,\cdots,\gamma_3, \tag{10}$$

其中, $\kappa_{ij1}=p_{ij1}/2$, $\kappa_{ij2}=(-p_{ij0}-p_{ij1}\xi_i)/2\eta_i$, $i=1,2,\cdots,\gamma_3$, $j=1,2,\cdots,\upsilon_i$.

引理 2[16]　对于线性定常连续系统 (A,B,C), 以h为采样周期的时间离散化系统为$(C,\ H,\ C)$, 其中, $G=\mathrm{e}^{Ah}$ 和 $H=\int_0^h \mathrm{e}^{At}\mathrm{d}tB$. 令 λ_1, λ_2, $\cdots$, λ_μ 为 A 的全部特征值, 且当 $i\neq j$ 时, $\lambda_i\neq\lambda_j$, 则时间离散化系统 (G,H,C) 保持能控(能观测)的一个充分条件是采样周期h的数值, 对一切满足

$$\mathrm{Re}(\lambda_i-\lambda_j)=0,\quad i,j=1,2,\cdots,\mu$$

的特征值, 应成立

$$h\neq\frac{2l\pi}{\mathrm{Im}(\lambda_i-\lambda_j)},\quad l=\pm1,\pm2,\cdots. \tag{11}$$

引理 3　考虑单输出能观测系统

$$\begin{cases}\dot{x}=Ax+Bu,\\ y=cx.\end{cases} \tag{12}$$

如果存在采样控制 $u(t)=u(kh)$, 其中采样周期 h 满足条件(11), 使得 $\lim_{t\to\infty}y(t)=y_r$ (常值), 且有 $\lim_{t\to\infty}u(t)=u_r$ (常值), 则 $\lim_{t\to\infty}x(t)=x_r$ (常值), 并且 $\lim_{t\to\infty}\dot{x}(t)=0$.

引理 4　记矩阵

$$N_{i1}=\begin{bmatrix}\xi_i & \eta_i\\ -\eta_i & \xi_i\end{bmatrix},\quad C_i=\begin{bmatrix}0 & -\dfrac{1}{\eta_i}\\ 0 & 0\end{bmatrix},\quad M_i=\begin{bmatrix}N_{i1} & 0 & \cdots & 0\\ C_i & N_{i1} & \ddots & \vdots\\ 0 & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & 0 & C_i & N_{i1}\end{bmatrix}^{-1}_{2\upsilon_i\times2\upsilon_i},\quad i=1,2,\cdots,\gamma_3.$$

则有

$$M_i=\frac{\xi_i}{\xi_i^2+\eta_i^2}I_{2\upsilon_i\times2\upsilon_i}+\frac{\eta_i}{\xi_i^2+\eta_i^2}P_i+N_i,$$

其中, $N_i=M_i-N_{i1}^{-1}I_{\upsilon_i\times\upsilon_i}$, $P_i=\mathrm{diag}\left[C\cdots C\right]_{2\upsilon_i\times2\upsilon_i}$, $C=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$.

3　主要结果

本部分, 我们给出多输入多输出线性定常系统定点控制下特征模型的证明, 并且刻画特征模型的建模误差. 根据全系数自适应控制理论, 假设控制律 $u(t)$ 为采样控制.

假设 1　系统是定点可控的, 也即存在控制律 $u(t)$, 使得系统的输出 $y(t)$ 在稳态时为一常值. 并且 $u(t)=u(kh)$, $\lim_{t\to\infty}u(t)=u_r$ (常值), 其中 h 为采样周期.

显然, 子系统(8)~(10)组成系统(2)的一个最小实现. 如果采样周期 h 满足条件(11), 也即 $h\neq l\pi/\eta_i$, $l=1,2,\cdots$, $i=1,2,\cdots,\gamma_3$, 则由假设 1 和引理 3 可知在定点控制下, 子系统(8)~(10)的状态的导数当 $t\to\infty$ 时极限为 0. 进而可知 $\dot{y}(t)$ 有界, 记 $|\dot{y}(t)|$ 的上界为 M.

假设 2　采样周期 h 满足 $h\ll\min\left\{|\lambda_{\min}|,\ |\lambda_{\max}|,\ \max_{i=1,\cdots,\gamma_3}(\pi/\eta_i,\varepsilon/M)\right\}$, 其中$\varepsilon$为充分小的正数,

$$\lambda_{\min(\max)}=\min(\max)\left\{\mu_{i_2},\xi_{i_3}+\frac{\eta_{i_3}^2}{\xi_{i_3}},i_j=1,2,\cdots,\gamma_j,j=2,3\right\}.$$

下面我们首先讨论单输入单输出系统的特征模型问题.

3.1 单输入单输出线性定常系统的特征模型

本节中, 我们给出单输入单输出系统(2)在定点控制要求下的特征模型. 首先证明系统没有零实部极点的情形. 在下面的引理中, 我们给出子系统(9)和(10)的输出所满足的微分方程.

引理 5 在假设 1 和 2 下, 子系统(9)的输出满足如下非线性时变微分方程:

$$\dot{y}_{2i}=\mu_i y_{2i}+G_{2i}(t)+g_{2i}u,\ \ i=1,2,\cdots,\gamma_2,\tag{13}$$

其中,

$$G_{2i}(t)=\sum_{j=2}^{v_i}\left(\sum_{k=v_i-j+2}^{v_i}(-1)^{k+j-v_i-2}\frac{d_{ik}}{\mu_i^{k+j-v_i-1}}\right)\dot{\varphi}_{ij},\quad g_{2i}=\sum_{j=1}^{v_i}(-1)^{j-1}\frac{d_{ij}}{\mu_i^{j-1}}.\tag{14}$$

并且 $G_{2i}(t)$ 有界, $\lim_{t\to\infty}G_{2i}(t)=0$.

证明 对于 $i=1,2,\cdots,\gamma_2$, 当 $v_i=1$ 时, $\dot{y}_{2i}=\mu_i y_{2i}+d_{i1}u$. 即 $G_{2i}(t)=0$, $g_{2i}=d_{i1}$. 当 $v_i>1$ 时, 记矩阵

$$D_i=\begin{bmatrix}\mu_i & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1\\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \mu_i\end{bmatrix}^{-1}_{v_i\times v_i}$$

和

$$\varphi_i=\begin{bmatrix}\varphi_{i1} & \varphi_{i2} & \cdots & \varphi_{iv_i}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}.$$

经过简单计算, 由(9)式可得

$$\varphi_i=D_i\dot{\varphi}_i-D_i\begin{bmatrix}0 & \cdots & 0 & 1\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}u,\tag{15}$$

和

$$\dot{y}_{2i}=\mu_i y_{2i}+\begin{bmatrix}0 & d_{iv_i} & d_{iv_i-1} & \cdots d_{i2}\end{bmatrix}\varphi_i+d_{i1}u.$$

将(15)式代入上式, 并整理, 有

$$\dot{y}_{2i}=\mu_i y_{2i}+\sum_{j=2}^{v_i}\left(\sum_{k=v_i-j+2}^{v_i}(-1)^{k+j-v_i-2}\frac{d_{ik}}{\mu_i^{k+j-v_i-1}}\right)\dot{\varphi}_{ij}+\sum_{j=1}^{v_i}(-1)^{j-1}\frac{d_{ij}}{\mu_i^{j-1}}u.$$

注意到(14)式, (13)式即可得证. 显然, 由上面的讨论以及 $G_{2i}(t)$ 的定义可知 $G_{2i}(t)$ 有界, 并且 $\lim_{t\to+\infty}G_{2i}(t)=0$.

下述引理证明子系统(10)有类似结果.

引理 6 在假设 1 和 2 下, 子系统(10)的输出满足如下微分方程:

$$\dot{y}_{3i}=\left(\xi_i+\frac{\eta_i^2}{\xi_i}\right)y_{3i}+G_{3i}(t)+g_{3i}u,\ \ \xi_i\neq 0,\ \ i=1,2,\cdots,\gamma_3, \tag{16}$$

其中,

$$\zeta_i=\left[\zeta_{i11}\quad \zeta_{i12}\quad \cdots\quad \zeta_{i\upsilon_i1}\quad \zeta_{i\upsilon_i2}\right]^{\mathrm{T}};$$

$$G_{3i}(t)=\frac{1}{\xi_i^2}(\xi_i\eta_iP_{i1}+(\xi_i^2+\eta_i^2)(\eta_iP_{i1}N_i+P_{i2}M_i))\dot{\zeta}_i; \tag{17}$$

$$g_{3i}=\left(1+\frac{\eta_i^2}{\xi_i^2}\right)\left(-(\eta_iP_{i1}+P_{i2})M_i[2\quad 0\quad \cdots\quad 0]^{\mathrm{T}}+2\kappa_{i11}\right), \tag{18}$$

$$P_{i1}=\left[-\kappa_{i12}\quad \kappa_{i11}\quad -\kappa_{i22}\quad \kappa_{i21}\quad \cdots\quad -\kappa_{i\upsilon_i2}\quad \kappa_{i\upsilon_i1}\right],$$

$$P_{i2}=\left[0\quad \frac{-\kappa_{i21}}{\eta_i}\quad 0\quad \frac{-\kappa_{i31}}{\eta_i}\quad \cdots\quad 0\quad \frac{-\kappa_{i\upsilon_i1}}{\eta_i}\quad 0\quad 0\right].$$

并且 $G_{3i}(t)$ 有界, $\lim_{t\to+\infty}G_{3i}(t)=0$.

证明　由(10)式可得

$$\zeta_i=M_i\dot{\zeta}_i-M_i[2\quad 0\quad \cdots\quad 0]^{\mathrm{T}}u,$$

其中 M_i 的定义见引理 4. 结合上式和(10)式, 再由引理 4, 我们有

$$\begin{aligned}\dot{y}_{3i}&=\xi_iy_{3i}+(\eta_iP_{i1}+P_{i2})\zeta_i+2\kappa_{i11}u\\&=\xi_iy_{3i}+\frac{\eta_i^2}{\xi_i^2+\eta_i^2}P_{i1}P_i\dot{\zeta}_i+\left(\frac{\xi_i\eta_i}{\xi_i^2+\eta_i^2}P_{i1}+\eta_iP_{i1}N_i+P_{i2}M_i\right)\dot{\zeta}_i\\&\quad+\left(-(\eta_iP_{i1}+P_{i2})M_i[2\quad 0\quad \cdots\quad 0]^{\mathrm{T}}+2\kappa_{i11}\right)u.\end{aligned}$$

注意到 $P_{i1}P_i=[\kappa_{i11}\quad \kappa_{i12}\quad \kappa_{i21}\quad \kappa_{i22}\quad \cdots\quad \kappa_{i\upsilon_i1}\quad \kappa_{i\upsilon_i2}]$, 以及 y_{3i} 的定义, 可得

$$\begin{aligned}\dot{y}_{3i}&=\xi_iy_{3i}+\frac{\eta_i^2}{\xi_i^2+\eta_i^2}\dot{y}_{3i}+\left(\frac{\xi_i\eta_i}{\xi_i^2+\eta_i^2}P_{i1}+\eta_iP_{i1}N_i+P_{i2}M_i\right)\dot{\zeta}_i\\&\quad+\left(-(\eta_iP_{i1}+P_{i2})M_i[2\quad 0\quad \cdots\quad 0]^{\mathrm{T}}+2\kappa_{i11}\right)u.\end{aligned}$$

经整理, 我们有

$$\begin{aligned}\dot{y}_{3i}&=\left(\xi_i+\frac{\eta_i^2}{\xi_i}\right)y_{3i}+\frac{1}{\xi_i^2}(\xi_i\eta_iP_{i1}+(\xi_i^2+\eta_i^2)(\eta_iP_{i1}N_i+P_{i2}M_i))\dot{\zeta}_i\\&\quad+\left(1+\frac{\eta_i^2}{\xi_i^2}\right)\left(-(\eta_iP_{i1}+P_{i2})M_i[2\quad 0\quad \cdots\quad 0]^{\mathrm{T}}+2\kappa_{i11}\right)u.\end{aligned}$$

把(17)和(18)式带入上式, 即有(16)式. 类似于引理 5, 可证 $G_{3i}(t)$ 有界, 并且 $\lim_{t\to+\infty}G_{3i}(t)=0$.

联立(13)和(16)式可知子系统(6)和(7)的输出可由下述微分方程组描述:

$$\begin{cases}\dot{y}_{2i_2}=\mu_{i_2}y_{2i_2}+G_{2i_2}(t)+g_{2i_2}u,\\ \dot{y}_{3i_3}=\left(\xi_{i_3}+\dfrac{\eta_{i_3}^2}{\xi_{i_3}}\right)y_{3i_3}+G_{3i_3}(t)+g_{3i_3}u,\end{cases} \tag{19}$$

其中，$G_{2i_2}(t)$ 和 $G_{3i_3}(t)$ 分别在引理 5 和 6 中定义，$i_j=1,2,\cdots,\gamma_j$，$j=2,3$. 在下面的引理中，我们给出系统(2)的输出所满足的微分方程. 对假设 2 中给出的充分小的正数ε以及时刻t，定义集合

$$T_{i1}(t)=\{j\mid y_{ij}(t)>\varepsilon, j=1,2,\cdots,\gamma_i\},\ \ i=2,3,$$
$$T_{i2}(t)=\{j\mid y_{ij}(t)<-\varepsilon, j=1,2,\cdots,\gamma_i\},\ \ i=2,3,$$

以及函数

$$y_{t,1}(z)=\sum_{j\in T_{i1}(t),i=2,3} y_{ij}(z),\ \ z\geqslant t,\quad y_{t,2}(z)=\sum_{j\in T_{i2}(t),i=2,3} y_{ij}(z),\ \ z\geqslant t. \tag{20}$$

引理 7 在假设 1 和 2 下，对于 $r=1,2$ 和给定时刻 t，我们有

$$\dot{y}_{t,r}(t)=\sigma_r(t)y_{t,r}+P_r(t)+R_r(t)u, \tag{21}$$

其中，$\lambda_{\min}\leqslant\sigma_r(t)\leqslant\lambda_{\max}$，$P_r(t)=\sum_{i_\tau\in T_{\tau r}(t),\tau=2,3}G_{\tau i_\tau}(t)$ 有界，在稳态时为 0，$R_r(t)=\sum_{i_\tau\in T_{\tau r}(t),\tau=2,3}g_{\tau i_\tau}$，$R_r(t)$ 为 t 的有界函数.

证明 由(19)和(20)式易知，对于 $r=1,2$，

$$\dot{y}_{t,r}(z)=\sum_{i_\tau\in T_{\tau r}(t),\tau=2,3}\left(\mu_{i_2}y_{2i_2}(z)+\left(\xi_{i_3}+\frac{\eta_{i_3}^2}{\xi_{i_3}}\right)y_{3i_3}(z)\right)$$
$$+\sum_{i_\tau\in T_{\tau r}(t),\tau=2,3}g_{\tau i_\tau}u+\sum_{i_\tau\in T_{\tau r}(t),\tau=2,3}G_{\tau i_\tau}(z),\ \ z\in[t,t+h]. \tag{22}$$

定义

$$\sigma_r(z)=\frac{\sum_{i_\tau\in T_{\tau r}(t),\tau=2,3}\left(\mu_{i_2}y_{2i_2}(z)+\left(\xi_{i_3}+\frac{\eta_{i3}^2}{\xi_{i3}}\right)y_{3i_3}(z)\right)}{y_{t,r}(z)},\ \ z\in[t,t+h].$$

由于 $h<\varepsilon/M$，所以 $y_{ij}(z)>0$ (<0)，$j\in T_{i1}$ (T_{i2})，$z\in[t,t+h]$. 因此，结合 $y_{t,r}(z)$ 的定义，我们有

$$\lambda_{\min}\leqslant\sigma_r(z)\leqslant\lambda_{\max},\ \ r=1,2,\ z\in[t,t+h].$$

通过简单计算可知 $\sigma_r(t+h)-\sigma_r(t)$ 是 $y_{ij}(t+h)-y_{ij}(t)$ ($i=2,3$, $j\in T_{ir}(t)$) 的线性组合，因此 $\sigma_r(t+h)-\sigma_r(t)$ 有界，并且在稳态时为 0. 由(22)式，我们有

$$\dot{y}_{t,r}(t)=\sigma_r(t)y_{t,r}(t)+P_r(t)+R_r(t)u,$$

其中 $P_r(t)=\sum_{i_\tau\in T_{\tau r}(t),\tau=2,3}G_{\tau i_\tau}(t)$，$R_r(t)=\sum_{i_\tau\in T_{\tau r}(t),\tau=2,3}g_{\tau i_\tau}$. 显然，$R_r(t)$ 有界. 并且，由引理 5 和 6 易知，$P_r(t)$ 有界，在稳态时为 0.

定理 1 在假设 1 和 2 下，如果系统(2)不含零实部极点，则其特征模型可用如下二阶时变差分方程描述:

$$y(k+2)=f_1(k+1)y(k+1)+f_2(k)y(k)+f_3(k+1)u(k+1)+f_4(k)u(k), \tag{23}$$

其中,

$$\begin{cases} f_1(k)\in[2+2h\lambda_{\min},2],\ f_2(k)\in[-1,-(1+2h\lambda_{\min})],\ \text{当}\ \lambda_{\min}<\lambda_{\max}<0\text{时};\\ f_1(k)\in[2,2+2h\lambda_{\max}],\ f_2(k)\in[-(1+2h\lambda_{\max}),-1],\ \text{当}\ \lambda_{\max}>\lambda_{\min}>0\text{时};\\ f_1(k)\in[2+2h\lambda_{\min},2+2h\lambda_{\max}],\ f_2(k)\in[-(1+2h\lambda_{\max}),-(1+2h\lambda_{\min})],\ \text{其他},\\ f_3(k)=-f_4(k)+O(h^2)=O(h), \end{cases} \tag{24}$$

$f_i(k)$ ($i=1,2,3,4$)是慢时变的. 并且, 动态过程中建模误差为 $O(h)$, 稳态时输出相同.

证明　对于上述 $\varepsilon>0$ 和时刻 t, 定义集合

$$T_{i3}(t)=\left\{j\middle|\,|y_{ij}(t)|\leqslant\varepsilon,\ j=1,2,\cdots,\gamma_i\right\},\ \ i=2,3.$$

由于 ε 充分小, 因此, 对于 $y_{ij}(t)\in T_{i3}(t)$, 我们认为 $y_{ij}(t)$ 近似为 0, 则对于 $i_\tau\in T_{\tau3}$, $\tau=2,3$, 由(19)式, 有

$$\begin{cases} \dot{y}_{2i_2}=G_{2i_2}(t)+g_{2i_2}u,\\ \dot{y}_{3i_3}=G_{3i_3}(t)+g_{3i_3}u. \end{cases} \tag{25}$$

对于该给定时刻 t, 我们有下述 3 种情形之一: 1) $\bigcup_{\tau=2,3}T_{\tau1}(t)$ 和 $\bigcup_{\tau=2,3}T_{\tau2}(t)$ 均为非空集; 2) $\bigcup_{\tau=2,3}T_{\tau1}(t)$ 和 $\bigcup_{\tau=2,3}T_{\tau2}(t)$ 中一个为空集, 一个为非空集; 3) $\bigcup_{\tau=2,3}T_{\tau1}(t)$ 和 $\bigcup_{\tau=2,3}T_{\tau2}(t)$ 均是空集.

首先考虑第 1 种情形. 若 $\bigcup_{\tau=2,3}T_{\tau3}(t)$ 为空集, 则 $y(z)=y_{t,1}(z)+y_{t,2}(z)$, $z\geqslant t$. 否则, 定义 $y_{t,3}(z)=y_{t,1}(z)+y_{\tau i_\tau}(z)$, $i_\tau\in T_{\tau3}(t)$, $\tau=2,3$, $z\geqslant t$. 由(21)和(25)式可得

$$\dot{y}_{t,3}(t)=\sigma_3(t)y_{t,3}+P_3(t)+R_3(t)u, \tag{26}$$

其中 $\sigma_3(t)=\sigma_1(t)$, $P_3(t)=P_1(t)+\sum_{i_\tau\in T_{\tau3}(t),\tau=2,3}G_{\tau i_\tau}(t)$, $R_3(t)=\sum_{i_\tau\in T_{\tau3}(t),\tau=2,3}g_{\tau i_\tau}+R_1(t)$. 显然 $P_3(t)$ 和 $R_3(t)$ 均有界, 并且 $P_3(t)$ 在稳态时为 0. 由于(26)与(21)式有相同的形式, 因此可以把 $\bigcup_{\tau=2,3}T_{\tau3}(t)$ 为空集和非空集进行同样的处理, 下面仅论证 $\bigcup_{\tau=2,3}T_{\tau3}(t)$ 为非空集的情形. 应用差商方法, 把(21)和(26)式离散化, 则有

$$y_{k,r}(k+1)=(1+h\sigma_r(k))y_{k,r}(k)+hP_r(k)+hR_r(k)u(k),\ \ r=2,3. \tag{27}$$

利用文献 [3]中的方法, 把上述两式相加, 平移, 可得

$$\begin{aligned} &y_{k,2}(k+2)+y_{k,3}(k+2)\\ &\quad=(1+h\sigma_2(k+1))y_{k,2}(k+1)+(1+h\sigma_3(k+1))y_{k,3}(k+1)\\ &\qquad+hP_2(k+1)+hP_3(k+1)+(hR_2(k+1)+hR_3(k+1))u(k+1). \end{aligned}$$

对(27)式中两式两端分别乘以 $(1+h\sigma_r(k+1))$, $r=2,3$, 与上式相加, 并注意到 $y(z)=y_{t,3}(z)+y_{t,2}(z)$, $z\geqslant t$, 可得

$$\begin{aligned} y(k+2)=&(2+h(\sigma_2(k+1)+\sigma_3(k+1)))y(k+1)-(1+h(\sigma_2(k)+\sigma_3(k))+h^2\sigma_2(k)\sigma_3(k))y(k)\\ &+(hR_2(k+1)+hR_3(k+1))u(k+1)-(h(1+h\sigma_3(k))R_2(k)+h(1+h\sigma_2(k))R_3(k))u(k)\\ &+h\delta_1(k), \end{aligned} \tag{28}$$

其中,

$$\begin{aligned}\delta_1(k)=&P_2(k+1)+P_3(k+1)-(1+h\sigma_3(k+1))P_2(k)-(1+h\sigma_2(k+1))P_3(k)\\&-(\sigma_3(k+1)-\sigma_3(k))(1+h\sigma_2(k))y_{k,2}(k)-(\sigma_2(k+1)-\sigma_2(k))(1+h\sigma_3(k))y_{k,3}(k)\\&-(hR_2(k)(\sigma_3(k+1)-\sigma_3(k))+hR_3(k)(\sigma_2(k+1)-\sigma_2(k)))u(k).\end{aligned}$$

显然 $\delta_1(k)$ 有界, 并且, 由于 $P_r(k)$ 和 $\sigma_r(k+1)-\sigma_r(k)$ ($r=2,3$), 在稳态时为 0, 因此 $\delta_1(k)$ 在稳态时为 0. 记

$$\begin{aligned}&f_1(k)=2+h(\sigma_2(k)+\sigma_3(k)),\\&f_2(k)=-(1+h(\sigma_2(k)+\sigma_3(k))+h^2\sigma_2(k)\sigma_3(k)),\\&f_3(k)=hR_2(k)+hR_3(k),\\&f_4(k)=-(h(1+h\sigma_3(k))R_2(k)+h(1+h\sigma_2(k))R_3(k)).\end{aligned}$$

(28)式即为

$$y(k+2)=f_1(k+1)y(k+1)+f_2(k)y(k)+f_3(k+1)u(k+1)+f_4(k)u(k)+h\delta_1(k),$$

其中 $f_i(k)$, $i=1,2,3,4$, 满足(24)式. 并且由于 h 充分小, 因此系统参数是慢时变的. 考虑到 $\delta_1(k)$ 有界, 在稳态时为 0, 因此(23)式的输出与(2)式的输出相差 $O(h)$, 在稳态时相同.

下面考虑第 2 种情形, 仅考虑 $\bigcup_{\tau=2,3}T_{\tau1}(t)$ 非空, $\bigcup_{\tau=2,3}T_{\tau2}(t)$ 是空集的情形, $\bigcup_{\tau=2,3}T_{\tau2}(t)$ 非空, $\bigcup_{\tau=2,3}T_{\tau1}(t)$ 是空集的情形类似可证. 从上述讨论可知, 对于 $\bigcup_{\tau=2,3}T_{\tau3}(t)$ 为空集和非空集的两种情形可统一处理, 下面仅考虑 $\bigcup_{\tau=2,3}T_{\tau3}(t)$ 为非空集的情形. 此时, 我们有 $y(z)=y_{t,3}(z)$, $z\geqslant t$. 把(26)式离散化, 我们有

$$y(k+1)=(1+h\sigma_3(k))y(k)+hP_3(k)+hR_3(k)u(k),\tag{29}$$

对上式进行平移, 可得

$$y(k+2)=(1+h\sigma_3(k+1))y(k+1)+hP_3(k+1)+hR_3(k+1)u(k+1),\tag{30}$$

把(29)和(30)式相加, 我们有

$$\begin{aligned}y(k+2)=&(2+h\sigma_3(k+1))y(k+1)-(1+h\sigma_3(k))y(k)+hR_3(k+1)u(k+1)\\&-hR_3(k)u(k)+hP_3(k+1)-hP_3(k).\end{aligned}$$

通过记 $f_1(k)=2+h\sigma_3(k)$, $f_2(k)=-(1+h\sigma_3(k))$, $f_3(k)=hR_3(k)$, $f_4(k)=-hR_3(k)$, 上式即为

$$y(k+2)=f_1(k+1)y(k+1)+f_2(k)y(k)+f_3(k+1)u(k+1)+f_4(k)u(k)+h\delta_2(k),$$

其中 $\delta_2(k)=P_3(k+1)-P_3(k)$, $f_i(k)$, $i=1,2,3,4$, 满足(24)式. 并且由于 h 充分小, 因此系统参数是慢时变的. 考虑到 $\delta_2(k)$ 有界, 在稳态时为 0, 因此(23)式的输出与(2)式的输出相差 $O(h)$, 在稳态时相同.

若为第 3 种情形, 则子系统的输出的绝对值在时刻 t 均小于 ε, 由上面的讨论可知, 此时系统由微分方程组(25)描述, 并且 $y(z)=\sum_{i=2,3,j=1,2,\cdots,\gamma_i}y_{ij}(z)$, $z\geqslant t$. 由(25)式, 可得

$$\dot{y}(t)=P(t)+R(t)u,$$

其中 $P(t)=\sum_{\tau=2,3,i_\tau=1,2,\cdots,\gamma_\tau}G_{\tau i_\tau}(t)$, $R(t)=\sum_{\tau=2,3,i_\tau=1,2,\cdots,\gamma_\tau}g_{\tau i_\tau}$. 把上式离散化, 并且平移, 我们有

$$y(k+1)=y(k)+hP(k)+hR(k)u(k)$$

和

$$y(k+2)=y(k+1)+hP(k+1)+hR(k+1)u(k+1).$$

再把以上两式相加, 可得

$$y(k+2)=2y(k+1)-y(k)+hR(k+1)u(k+1)-hR(k)u(k)+hP(k+1)-hP(k).$$

通过记 $f_1(k)=2$, $f_2(k)=-1$, $f_3(k)=hR(k)$, $f_4(k)=-hR(k)$, 上式即为

$$y(k+2)=f_1(k+1)y(k+1)+f_2(k)y(k)+f_3(k+1)u(k+1)+f_4(k)u(k)+h\delta_3(k),$$

其中 $\delta_3(k)=P(k+1)-P(k)$, 显然 $\delta_3(k)$ 有界, 在稳态时为 0, 并且满足(24)式.

上面我们证明了在任意给定时刻 t, 定理成立. 由于 t 的任意性, 利用解得延拓的方法即完成定理证明.

在下面的定理中, 我们给出含有零实部极点时系统的特征模型.

定理 2　在假设 1 和 2 下, 系统(2)的特征模型可用二阶时变差分方程(23)描述. 并且, 在动态过程中建模误差为 $O(h)$, 稳态时建模误差为 $O(h^2)$.

证明　这里仅考虑定理 1 中的第 1 种情形, 其他情形类似可证. 由零极点输出所对应的最小实现(8), 可得

$$\dot{y}_1=\sum_{i=2}^{\gamma_1}l_{\gamma_1-i+2}x_i+l_1u.$$

对上式离散化, 并对所得结果进行平移, 有

$$y_1(k+1)-y_1(k)=h\sum_{i=2}^{\gamma_1}l_{\gamma_1-i+2}x_i(k)+hl_1u(k),$$

和

$$y_1(k+2)-y_1(k+1)=h\sum_{i=2}^{\gamma_1}l_{\gamma_1-i+2}x_i(k+1)+hl_1u(k+1),$$

进而再将以上两式相减, 可得

$$y_1(k+2)-2y_1(k+1)+y_1(k)=hl_1u(k+1)-hl_1u(k)+h\delta_4(k), \tag{31}$$

其中 $\delta_4(k)=\sum_{i=2}^{\gamma_1}l_{\gamma_1-i+2}(x_i(k+1)-x_i(k))$. 最后将(31)式与(28)式相加, 并记 $\overline{y}=y+y_1$, 可得

$$\begin{aligned}\overline{y}(k+2)=&f_1(k+1)\overline{y}(k+1)+f_2(k)\overline{y}(k)+(f_3(k+1)+hl_1)u(k+1)\\&+(f_4(k)-hl_1)u(k)+h\delta_5(k)+h^2\delta_6(k),\end{aligned}$$

其中,

$$\delta_5(k)=-(\sigma_2(k)+\sigma_3(k))(y_1(k+1)-y_1(k))-y_1(k+1)\sum_{i=2}^{3}(\sigma_i(k+1)-\sigma_i(k))+\delta_1(k)+\delta_4(k),$$

$$\delta_6(k)=\sigma_2(k)\sigma_3(k)y_1(k).$$

类似于前面的论证可知 $\delta_4(k)$, $\delta_5(k)$ 和 $\delta_6(k)$ 均有界, 且 $\delta_4(k)$ 和 $\delta_5(k)$ 在稳态时为 0. 因此, (23)式的输出与(2)式的输出相差 $O(h)$, 在稳态时相差 $O(h^2)$. 对于纯虚根的情形, 可以用与零极点相同的方法进行论证.

综合上面的讨论可知, 在系统含有零实部极点的情形下, 特征模型(23)的暂态建模误差为 $O(h)$, 稳态建模误差为 $O(h^2)$. 定理其他部分的证明与定理 1 相同.

3.2 多输入多输出线性定常系统的特征模型

在本节中, 我们考虑多输入多输出系统(1)的特征建模问题. 对于正则有理函数矩阵 $G(s)$, 其最小实现为

$$\begin{cases}\dot{x} = Ax + Bu, \\ y_i = C_i x, \ \ i = 1,2,\cdots,p,\end{cases}$$

其中, $x \in \mathbb{R}^r$, $u \in \mathbb{R}^q$, $y_i \in \mathbb{R}$, $i = 1,2,\cdots,p$, 分别表示系统的状态、输入和输出; $A \in \mathbb{R}^{r\times r}$, $B \in \mathbb{R}^{r\times q}$, $C_i \in \mathbb{R}^{1\times r}$, $i = 1,2,\cdots,p$, 分别表示系统矩阵、输入矩阵和输出矩阵. $1 \leqslant p \leqslant r$, $1 \leqslant q \leqslant r$. 不失一般性, 假设矩阵 A 具有如下分块: $A = \mathrm{diag}[A_1, A_2, A_3]$, 其中, A_1 表示零特征根所对应的约当块, $A_1 \in \mathbb{R}^{r_1\times r_1}$, A_2 表示非零实根所对应的约当块, $A_2 \in \mathbb{R}^{r_2\times r_2}$, A_3 表示复根所对应的约当块, $A_3 \in \mathbb{R}^{r_3\times r_3}$. 把矩阵 B 和 C_i 同样进行分块: $B = [B_1^{\mathrm{T}} \quad B_2^{\mathrm{T}} \quad B_3^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$, $C_i = [C_{i1} \quad C_{i2} \quad C_{i3}]$, $i = 1,2,\cdots,p$, 其中, $B_1 \in \mathbb{R}^{r_1\times q}$, $B_2 \in \mathbb{R}^{r_2\times q}$, $B_3 \in \mathbb{R}^{r_3\times q}$, $C_{i1} \in \mathbb{R}^{1\times r_1}$, $C_{i2} \in \mathbb{R}^{1\times r_2}$, $C_{i3} \in \mathbb{R}^{1\times r_3}$. 对于任意一维输出 y_i, 平行于引理 5~7 和定理 1 及 2 的论证, 我们可以得到系统(1)的特征模型, 其各维输出通过控制互相耦合.

定理 3 在假设 1 和 2 下, 系统(1)的特征模型可用如下二阶时变差分方程组描述:

$$y_i(k+2) = f_{i1}(k+1)y_i(k+1) + f_{i2}(k)y_i(k) + f_{i3}^{\mathrm{T}}(k+1)u(k+1) + f_{i4}^{\mathrm{T}}(k)u(k), \ \ i = 1,2,\cdots,p,$$

其中, $f_{i1}(k)$, $f_{i2}(k) \in \mathbb{R}$, $f_{i3}(k)$, $f_{i4}(k) \in \mathbb{R}^q$, $f_{ij}(k)$, $j = 1,2,3,4$, 满足(24)式, 是慢时变的. 并且, 在系统不含零实部极点的情形下, 动态过程中建模误差为 $O(h)$, 稳态时输出相同; 一般情形下, 动态过程中建模误差为 $O(h)$, 稳态时建模误差为 $O(h^2)$.

4 结论

本文研究了一般线性定常系统在定点控制下的特征建模问题. 利用采样控制理论和线性系统的最小实现理论, 证明了多输入多输出线性定常系统的特征模型可用二阶时变差分方程组描述, 并且刻画了特征建模的建模误差, 在系统不含零实部极点的情形下, 建模误差在稳态时为 0, 暂态时为 $O(h)$; 一般情形下, 在稳态时为 $O(h^2)$, 暂态时为 $O(h)$. 基于特征模型的全系数自适应控制方法在工程上取得了非常成功的应用, 在理论研究上也取得了一定进展. 但是由于实际工程问题的复杂性, 仍然有很多理论问题有待进一步提炼和研究, 其中时变系统和非线性系统的特征建模问题就是亟待解决的问题之一.

参 考 文 献

1 Wu H X, Sa Z. An all-coefficients identification adaptive control method and its applications. In: Proceedings of the 10th IFAC World Congress. Munich, 1987. 179—184

2 吴宏鑫. 全系数自适应控制理论及其应用. 北京: 国防工业出版社, 1990

3 吴宏鑫, 刘一武, 刘忠汉, 等. 特征建模与挠性结构控制. 中国科学, E 辑, 2001, 31(2): 137—149

4 吴宏鑫, 王迎春, 邢琰. 基于特征模型的智能控制及应用. 中国科学, E 辑, 2002, 32(6): 805—816

5 钟国民, 李志民, 燕育民. 啤酒发酵全系数自适应控制. 自动化学报, 1987, 13(6): 441—444

6 胡军. 载人飞船全系数自适应再入升力控制. 宇航学报, 1998, 19(1): 8—12

7 孙多青, 吴宏鑫. 多变量线性系统的特征模型及控制方法. 航天控制, 2004, 22(6): 4—10

8 Wu H X, Hu J, Xie Y. Characteristic model-based all-coefficients adaptive control method and its applications. IEEE Trans

Syst Man Cybern Part C-Appl Rev, 2007, 37(2): 213—221 [DOI]
9 Whitaker H P, Yamron J, Kezer A. Design of model reference adaptive control systems for an aircraft. Technical Report R-164, Instrumentation Laboratory, MIT. 1958
10 Guo L, Chen H F. The Astrom-Wittenmark self-tuning regulator revisited and ELS based adaptive trackers. IEEE Trans Autom Control, 1991, 36(7): 802—812 [DOI]
11 Zhang J F, Caines P E. Adaptive control via a simple switching algorithm. SIAM J Control Optim, 1996, 34(1): 365—388 [DOI]
12 Chen H F, Cao X, Fang H. Stability of adaptively stabilized stochastic systems. IEEE Trans Autom Control, 2001, 46(11): 1832—1836 [DOI]
13 Wang L, Zhang J F, Yin G G. System identification using binary sensors. IEEE Trans Autom Control, 2003, 48(11): 1892—1907 [DOI]
14 Smith R M, Johansen T A. Multiple Model Approaches to Modeling and Control. London: Taylor and Francis, 1997
15 王伟, 李晓理. 多模型自适应控制. 北京: 科学出版社, 2001
16 郭雷, 程代展, 冯德兴. 控制理论导论-从基本概念到研究前沿. 北京: 科学出版社, 2005. 1—107

附录 A

引理 1 的证明　定义中间输出变量

$$\begin{cases} e_{i1}=\dfrac{1}{(s-\xi_i)^2+\eta_i^2}u, \\ e_{i2}=\dfrac{1}{(s-\xi_i)^2+\eta_i^2}e_{i1}, \\ \cdots \\ e_{i\upsilon_i}=\dfrac{1}{(s-\xi_i)^2+\eta_i^2}e_{i\upsilon_i-1}, \end{cases} \quad i=1,\cdots,\gamma_3, \tag{A1}$$

和

$$\begin{cases} y_{3i1}=\dfrac{p_{i11}s+p_{i10}}{(s-\xi_i)^2+\eta_i^2}u, \\ y_{3i2}=\dfrac{p_{i21}s+p_{i20}}{(s-\xi_i)^2+\eta_i^2}e_{i1}, \\ \cdots \\ y_{3i\upsilon_i}=\dfrac{p_{i\upsilon_i1}s+p_{i\upsilon_i0}}{(s-\xi_i)^2+\eta_i^2}e_{i\upsilon_i-1}, \end{cases} \quad i=1,\cdots,\gamma_3. \tag{A2}$$

通过简单计算可知,

$$y_{3i}=\sum_{j=1}^{\upsilon_i}y_{3ij},\ i=1,\cdots,\gamma_3. \tag{A3}$$

定义状态变量 ζ_{ijk}, $i=1,\cdots,\gamma_3$, $j=1,2,\cdots,\upsilon_i$, $k=1,2$. 利用线性系统理论, 可知系统(A1)和(A2)的最小实现为

$$\begin{cases}\dot{\zeta}_{i11}=\xi_i\zeta_{i11}+\eta_i\zeta_{i12}+2u,\\ \dot{\zeta}_{i12}=-\eta_i\zeta_{i11}+\xi_i\zeta_{i12},\\ \dot{\zeta}_{i21}=\xi_i\zeta_{i21}+\eta_i\zeta_{i22}+2e_{i1},\\ \dot{\zeta}_{i22}=-\eta_i\zeta_{i21}+\xi_i\zeta_{i22},\\ \quad\cdots\\ \dot{\zeta}_{i\upsilon_i1}=\xi_i\zeta_{i\upsilon_i1}+\eta_i\zeta_{i\upsilon_i2}+2e_{i\upsilon_i-1}, & i=1,2,\cdots,\gamma_3,\\ \dot{\zeta}_{i\upsilon_i2}=-\eta_i\zeta_{i\upsilon_i1}+\xi_i\zeta_{i\upsilon_i2},\\ y_{3ij}=\kappa_{ij1}\zeta_{ij1}+\kappa_{ij2}\zeta_{ij2},\ j=1,2,\cdots,\upsilon_i,\\ e_{ij}=-\dfrac{1}{2\eta_i}\zeta_{ij2},\ j=1,2,\cdots,\upsilon_i-1,\end{cases}$$

其中，$\kappa_{ij1}=p_{ij1}/2$，$\kappa_{ij2}=(-p_{ij0}-p_{ij1}\xi_i)/(2\eta_i)$，$i=1,2,\cdots,\gamma_3$，$j=1,2,\cdots,\upsilon_i$. 将上式中 e_{ij} 的表达式代入上述方程和(A3)式中, 即可得到(10)式.

引理 3 的证明 为了证明引理 3, 我们需要如下引理.

引理 A1 如果函数 $f(t)$ 连续可微且有界，$\lim_{t\to\infty}f'(t)=r$ (常值), 则 $r=0$. 进而，如果 $\lim_{k\to\infty}f(kh)=f_r$ (常值), 其中 h 为常数, 则 $\lim_{t\to\infty}f(t)=f_r$.

证明 由反证法易证 $\lim_{t\to\infty}f'(t)=0$. 下面证明引理的第 2 部分. 对于任意 $\varepsilon>0$，由 $\lim_{k\to\infty}f(kh)=f_r$ 可知，存在 $T_1>0$，使得当 $t>T_1$ 时，$|f(t_1)-f_r|<\varepsilon/2$，其中 $t_1=\lfloor t/h\rfloor h$. 由 $\lim_{t\to\infty}f'(t)=0$ 可知，存在 $T_2>0$，当 $t>T_2$ 时，$|f'(t)|h<\varepsilon/2$. 因此对任意 $t>\max(T_1,T_2)$，存在 $\alpha_t\in[0,1]$，使得

$$|f(t)-f_r|\ \leqslant\ |f(t)-f(t_1)|+|f(t_1)-f_r|\ \leqslant\ |f'(\xi)_{\xi=\alpha_t t+(1-\alpha_t)t_1}||t-t_1|+\varepsilon/2<\varepsilon.$$

因此对于任意 $t>\max(T_1,T_2)$，$|f(t)-f_r|<\varepsilon$. 由 ε 的任意性, 引理得证.

引理 3 的证明 首先证明 x 有界并且当 k 趋于无穷时，$x(k)$ 趋于常数. 由引理 2 可知, 以 h 为采样周期的时间离散化系统 (G,H,c) 能观, 其中 $G=\mathrm{e}^{Ah}$ 和 $H=\int_0^h\mathrm{e}^{At}\mathrm{d}tB$. 不失一般性, 设 (G,c) 为能观标准形, 即

$$G=\begin{bmatrix}0&0&\cdots&0&-\alpha_0\\1&0&&\vdots&-\alpha_1\\0&1&\ddots&&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&0&-\alpha_{n-2}\\0&\cdots&0&1&-\alpha_{n-1}\end{bmatrix},\quad c=\begin{bmatrix}0&0&\cdots&0&1\end{bmatrix},\tag{A4}$$

其中 α_i ($i=1,2,\cdots,n$) 为 G 的特征多项式的系数. 记 $H=[H_1^{\mathrm{T}}\ \ H_2^{\mathrm{T}}\ \ \cdots\ \ H_n^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$，$x=[x_1\ \ x_2\ \ \cdots\ \ x_n]^{\mathrm{T}}$. 离散化系统 (G,H,c) 可表示为

$$\begin{cases}x_1(k+1)=-\alpha_0x_n(k)+H_1u(k),\\ x_2(k+1)=x_1(k)-\alpha_1x_n(k)+H_2u(k),\\ \qquad\cdots\\ x_n(k+1)=x_{n-1}(k)-\alpha_{n-1}x_n(k)+H_nu(k),\\ y(k)=x_n(k).\end{cases}$$

显然, 由 $u(k)$ 和 $y(k)$ 趋于常值, 可得 $x(k)$ 亦趋于常值, 记 $\lim_{k\to\infty} x(k)=x_r$. 对于系统(12), 我们有

$$x(t)=\mathrm{e}^{A(t-kh)}x(kh)+\int_{kh}^{t}\mathrm{e}^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\mathrm{d}\tau,\ t\in[kh,(k+1)h),\ k=0,1,\cdots,$$

因此

$$\begin{aligned}\|x(t)\|&\leqslant\left\|\mathrm{e}^{A(t-kh)}\right\|\|x(kh)\|+\int_{kh}^{t}\left\|\mathrm{e}^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\right\|\mathrm{d}\tau\\&\leqslant\mathrm{e}^{\|A\|h}\|x(kh)\|+h\mathrm{e}^{\|A\|h}\|B\|\sup_{\tau\geqslant0}\|u(\tau)\|.\end{aligned}$$

由上可知, 系统(12)的状态有界.

下面证明 $\lim_{t\to\infty} x(t)=x_r$, 并且 $\lim_{t\to\infty}\dot{x}(t)=0$. 由于 (A,c) 能观, 则存在非奇异矩阵 P, 使得 $\overline{A}=P^{-1}AP$, $\overline{c}=cP$, $\overline{B}=P^{-1}B$, $\overline{x}=P^{-1}x$. $\overline{A}$ 和 $\overline{c}$ 与(A4)式中 G 和 c 形式相同, 其中 α_i, $(i=1,2,\cdots,n)$ 为 A 的特征多项式的系数. 记

$$\overline{B}=[B_1^{\mathrm{T}}\quad B_2^{\mathrm{T}}\quad\cdots\quad B_n^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}},\ \overline{x}=[\overline{x}_1\quad\overline{x}_2\quad\cdots\quad\overline{x}_n]^{\mathrm{T}},\ \overline{x}_r=P^{-1}x_r=[\overline{x}_{1r}\quad\overline{x}_{2r}\quad\cdots\quad\overline{x}_{nr}]^{\mathrm{T}},$$

则系统 $(\overline{A},\overline{B},\overline{c})$ 可表示为

$$\begin{cases}\dot{\overline{x}}_1=-\alpha_0\overline{x}_n+B_1u,\\ \dot{\overline{x}}_2=\overline{x}_1-\alpha_1\overline{x}_n+B_2u,\\ \qquad\cdots\\ \dot{\overline{x}}_n=\overline{x}_{n-1}-\alpha_{n-1}\overline{x}_n+B_nu,\\ y=\overline{x}_n.\end{cases}\tag{A5}$$

由 $y=\overline{x}_n$ 和 $\lim_{t\to\infty} y(t)=y_r$ 可得 $\lim_{t\to\infty}\overline{x}_n(t)=y_r$. 结合(A5)式的第 1 式以及 $\lim_{t\to\infty} u(t)=u_r$, 有 $\lim_{t\to\infty}\dot{\overline{x}}_1(t)=r_1$ (常值). 再由 x 有界, $\lim_{k\to\infty}\overline{x}_1(kh)=\overline{x}_{1r}$, 和引理 A1, 可知 $r_1=0$ 和 $\lim_{t\to\infty}\overline{x}_1(t)=\overline{x}_{1r}$. 以此类推, 我们有 $\lim_{t\to\infty}\dot{\overline{x}}_i(t)=0$ 和 $\lim_{t\to\infty}\overline{x}_i(t)=\overline{x}_{ir}$, $i=2,3,\cdots,n$. 也即 $\lim_{t\to\infty}\dot{x}(t)=0$, $\lim_{t\to\infty} x(t)=P\overline{x}_r=x_r$.

引理 4 的证明　对于 $i=1,2,\cdots,\gamma_3$, 记

$$N_{ij}=\begin{bmatrix}N_{i1} & 0_{2\times2(j-1)}\\ \begin{bmatrix}C_i\\ 0_{2(j-2)\times2}\end{bmatrix} & N_{ij-1}\end{bmatrix},\qquad j=2,3,\cdots,\upsilon_i.$$

通过简单计算, 我们有

$$N_{i1}^{-1}=\frac{1}{\xi_i^2+\eta_i^2}\begin{bmatrix}\xi_i & -\eta_i\\ \eta_i & \xi_i\end{bmatrix},\quad N_{ij}^{-1}=\begin{bmatrix}N_{i1}^{-1} & 0_{2\times2(j-1)}\\ -N_{ij-1}^{-1}\begin{bmatrix}C_i\\ 0_{2(j-2)\times2}\end{bmatrix}N_{i1}^{-1} & N_{ij-1}^{-1}\end{bmatrix},\quad j=2,3,\cdots,\upsilon_i.$$

通过比较, 可知 $M_i=N_{i\upsilon_i}^{-1}$, 即 M_i 可由上述递推关系求出. 记 $N_i=M_i-N_{i1}^{-1}I_{\upsilon_i\times\upsilon_i}$, 其中 $I_{k\times k}$ 表示 $k\times k$ 的单位矩阵. 把 N_{i1}^{-1} 的具体表达形式代入, 可得

$$N_{i1}^{-1}I_{\upsilon_i\times\upsilon_i}=\frac{\xi_i}{\xi_i^2+\eta_i^2}I_{2\upsilon_i\times2\upsilon_i}+\frac{\eta_i}{\xi_i^2+\eta_i^2}P_i,$$

也即

$$M_i=\frac{\xi_i}{\xi_i^2+\eta_i^2}I_{2\upsilon_i\times2\upsilon_i}+\frac{\eta_i}{\xi_i^2+\eta_i^2}P_i+N_i.$$