中国科学: 数学 2021 年 第 51 卷 第 10 期: 1545～1578
SCIENTIA SINICA Mathematica
论 文

非交换半群上的 ζ- 函数

献给冯克勤教授 80 华诞

葛力明[1,3], 马明辉[1,2], 亓博[1,2*]

1. 中国科学院数学与系统科学研究院, 北京 100190;
2. 中国科学院大学数学科学学院, 北京 100049;
3. University of New Hampshire, Durham 03824, USA
E-mail: liming@math.ac.cn, maminghui17@mails.ucas.edu.cn, qibo16@mails.ucas.edu.cn

收稿日期: 2021-04-01; 接受日期: 2021-06-07; 网络出版日期: 2021-09-24; * 通信作者

摘要 自然数是由素数生成的乘法半群, 从推广素数乘积的非交换性得到一类具有算术性质的非交换半群, 自然数上的 Möbius 函数和 Riemann ζ- 函数等得到了自然推广. 经典的 Thompson 群的生成半群等例子都是我们研究的特殊情形, 它们上面的 ζ- 函数和经典的 ζ- 函数有类似的性质, 但也有本质差别. 本文证明类似的素数定理对许多非交换算术半群成立. 而 Thompson 半群的 ζ- 函数至少有两个极点, 这种现象反映了非交换半群中因子分解的复杂性.

关键词 半群 算术 ζ- 函数 素数定理

MSC (2020) 主题分类 11A99, 11M99, 11N99

1 引言

众所周知, Riemann ζ- 函数 $\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ 是和自然数有关的由复变量 s 给出的复函数, 当 s $(=\sigma+\mathrm{i}t)$ 的实部 $\sigma>1$ 时, 该无穷级数收敛, 其余部分可以由解析延拓定义, 且满足函数方程

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)=\pi^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s). \tag{1.1}$$

它有单极点 $s=1$, 所有非显然零点均落在条形带 $0<\sigma<1$ 中, 并关于竖直线 $\sigma=1/2$ 对称. 在 $\sigma>1$ 的区域内, $\zeta(s)$ 满足 Euler 乘积公式

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\prod_{p}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}, \tag{1.2}$$

英文引用格式: Ge L M, Ma M H, Qi B. Riemann ζ-functions on semigroups (in Chinese). Sci Sin Math, 2021, 51: 1545–1578, doi: 10.1360/SSM-2021-0060

其中 p 为素数. ζ- 函数的零点和极点的性质与自然数的算术结构、特别是素数分布有密切的关联, 它可以从多种途径得到 (参见文献 [1,2]). 下面建立它与 Möbius 函数的关系, 这与我们定义半群上的 ζ- 函数相关.

Möbius 函数可以从自然数的素数乘积分解直接定义, 常用 $\mu(n)$ 表示, 满足 $\mu(1)=1$. 当自然数 $n>1$ 含有非平凡平方因子时, 令 $\mu(n)=0$. 如果 n 没有平方因子, 那么它是不同素数的乘积. 设 k 为 n 的素因子的个数, 则令 $\mu(n)=(-1)^k$. Möbius 函数 μ 也可以由等式

$$\frac{1}{\zeta(s)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^s},\quad \sigma>1$$

唯一决定.

非交换算术常常从推广自然数的加法结构 (或整数全体构成的交换群) 出发, 在非交换的群中, 子群的指标对应了自然数, 这样非交换群上的 ζ- 函数就不难定义了; 用表示论的方法来推广 ζ- 函数也是常用的手段. 与传统的推广 Riemann ζ- 函数的方法不同, 本文将从半群的乘法结构出发, 定义不可约元和素元, 类比于素数的不可分解性, 得到一般的半群上的除数函数和其他常见的算术函数, 如半群上的 Möbius 函数等, 从而新的半群上的 ζ- 函数可以从不同途径得到. 我们通过对 ζ- 函数的零点和极点等的刻画, 等价地, 通过对 Möbius 函数均值的收敛性的研究, 可得到半群中素元的分布和类似的素数定理.

在对较一般的具有消去律的半群进行刻画后, 本文主要讨论了由无穷多个素元生成的半群, 典型的例子是 Thompson 群中由生成元的非负方幂生成的半群. 本文共有 5 节, 第 2 节讨论较一般的具有消去律的半群的性质, 为后面的研究做铺垫. 第 3 节重点考虑一类与自然数乘法半群较接近的非交换半群, 称它们为自然算术半群, 得到了其中元素因子分解的各种性质, 特别是关于素数分解的各种特点. 第 4 节考虑半群生成的带复系数的半群代数, 从而定义了半群上的 Möbius 函数等常用的算术函数. 本文的主要结果和证明都在第 5 节. 我们证明了从 Möbius 函数出发得到的 ζ- 函数与从除数函数出发得到的 ζ- 函数完全吻合; 同时得到了 Möbius 函数收敛性定理, 可看作算术半群上的素数定理. 通过较细致的分析, 我们还证明了 Thompson 半群的 ζ- 函数具有 (至少) 两个非平凡极点, 除 $s=1$ 外, 还有一个小于 1 但与 1 很近的 (实) 极点; 其他算术理论中常出现 $s=1$ 为高阶极点, 但很难看到从算术结构中自然产生一个具有多个非平凡极点的 ζ- 函数的例子.

本文中的记号都是标准的, 记 $\mathbb{N}=\{1,2,\ldots\}$ 为所有正整数构成的集合, $\mathbb{N}_0=\mathbb{N}\cup\{0\}$. 将 $\mathbb{N}$ 中的第 n 个素数记为 q_n, 即 $q_1=2$ 和 $q_2=3$ 等. 所有的半群都是可数生成的, 所有涉及的集合也是可数的, 用 $\#A$ 表示集合 A 的基数 (或元素个数).

2 几类常用半群的性质

本文涉及的半群都是有单位元的, 常记为 e, 半群同态也是保单位的. 设 S 和 T 为半群, 记 $\mathrm{Hom}(S,T)$ 为从 S 到 T 的半群同态全体构成的集合. 若 S 和 T 同构, 记为 $S\cong T$, S 到自身的同构映射全体记为 $\mathrm{Aut}(S)$. 下面的概念对我们进一步的讨论, 特别是在引进素因子时很重要.

定义 2.1 设 S 为含单位半群, 若满足消去律, 即对任意的 $x,x_1,y,z\in S$, 当 $yxz=yx_1z$ 成立时, $x=x_1$, 则称 S 为 XQ- 半群. 如果群 G 包含半群 S 且由 S 中元素生成, 则 G 称为 S 的分式群, 记为 $G(S)$.

注 2.1 这里的 "XQ" 取自于 "消去" 拼音的开头字母, 我们常把 "XQ- 半群" 称作可消去半群. 不难验证, 半群 S 满足消去律是 $G(S)$ 存在的必要条件. 例如, $S=(\mathbb{Z},*)$ 不满足消去律, 所以 $G(S)$ 不存在. 当 S 交换且 $G(S)$ 存在时, $G(S)$ 就是 S 的 Grothendieck 群 (参见文献 [3]). 一般地, 非交换 XQ-半群 S 并不一定存在分式群, 例如, Malcev[4] 曾证明 XQ- 半群

$$S=\langle a,b,c,d,u,v,x,y:ax=by,cx=dy,au=bv\rangle$$

的分式群不存在.

下面给出 $G(S)$ 存在的一个充分条件.

定理 2.1 S 为可消去半群. 如果对任意 $x,y\in S$, 都存在 $a,b\in S$ 使得 $xa=yb$, 也即 x 和 y 存在左整除公倍元, 那么 $G(S)$ 存在, 并且

$$G(S)=SS^{-1}=\{xy^{-1}:x,y\in S\}.$$

证明 考虑集合 $S\times S$, 对于 $(x,y),(x_1,y_1)\in S\times S$, 如果存在 $a,b\in S$ 使得

$$xa=x_1b,\quad ya=y_1b,$$

则记 $(x,y)\sim(x_1,y_1)$. 不难看出 $(x,y)\sim(x,y)$, 以及 $(x,y)\sim(x_1,y_1)$ 蕴涵 $(x_1,y_1)\sim(x,y)$. 假设 $(x,y)\sim(x_1,y_1)$, $(x_1,y_1)\sim(x_2,y_2)$, 则存在 a、b、c 和 d 使得

$$xa=x_1b,\quad ya=y_1b,\quad x_1c=x_2d,\quad y_1c=y_2d.$$

假设 $u,v\in S$ 使得 $cu=bv$, 则

$$xav=x_1bv=x_1cu=x_2du,\quad yav=y_1bv=y_1cu=x_2du,$$

也即 $(x,y)\sim(x_2,y_2)$. 因此 "$\sim$" 是等价关系.

考虑集合 $G=(S\times S)/\sim$, 对 $(x,y)\in S\times S$, 记 $(x,y)_\sim\in G$ 为 (x,y) 所在的等价类. 对于

$$(x,y)_\sim,(x',y')_\sim\in G,$$

定义乘积

$$(x,y)_\sim\cdot(x',y')_\sim=(xs,y't)_\sim,\quad \text{其中 } x't=ys, \tag{2.1}$$

简记为 $(x,y)_\sim(x',y')_\sim$.

下面证明上述乘法是良定的, 即 (2.1) 不依赖于等价类代表元的选取和 (s,t) 的选取.

(1) 首先说明 (2.1) 与 (s,t) 的选取无关, 假设 $x't_1=ys_1$, 并且 $tu=t_1v$, 那么

$$ysu=x'tu=x't_1v=ys_1v.$$

由消去律可得 $su=s_1v$, 于是有

$$xsu=xs_1v,\quad y'tu=y't_1v,$$

也即 $(xs,y't)\sim(xs_1,y't_1)$. 因此 $(xs,y't)_\sim$ 与 (s,t) 的选取无关.

(2) 现在说明 (2.1) 不依赖于等价类代表元的选取, 假设 $(x,y)\sim(x_1,y_1)$, 也即存在 a 和 b 使得

$$x_0=xa=x_1b,\quad y_0=ya=y_1b.$$

假设 $su=av$, 取 $t_0=tu$, $s_0=v$, 那么 $x't_0=y_0s_0$, 并且

$$xsv=xav=x_0s_0,\quad y'tu=y't_0,$$

也即 $(xs,y't)\sim(x_0s_0,y't_0)$. 类似地, 对于 (x_1,y_1) 和 (x_0,y_0) 也有同样的等价关系, 因此 $(xs,y't)_\sim$ 与 (x,y) 的选取无关.

假设 $(x',y')\sim(x_1',y_1')$, 也即

$$x_0'=x'a'=x_1'b',\quad y_0'=y'a'=y_1'b'.$$

假设 $tu=a'v$, 取 $t_0=v$, $s_0=su$, 那么 $x_0't_0=ys_0$, 并且

$$xsu=xs_0,\quad y'tu=y'a'v=y_0't_0,$$

也即 $(xs,y't)\sim(xs_0,y_0't_0)$. 对于 (x_1',y_1') 和 (x_0',y_0') 也有同样的等价关系, 因此 $(xs,y't)_\sim$ 与 (x_1,y_1) 的选取无关, 故乘法是良定的.

考虑 $(x,y)_\sim$、$(z,w)_\sim$ 和 $(u,v)_\sim$. 由于乘法与代表元的选取无关, 不妨设 $z=ya$, $u=wb$. 这样就有

$$((x,y)_\sim(z,w)_\sim)(u,v)_\sim=(xa,w)_\sim(u,v)_\sim=(xab,v)_\sim,$$
$$(x,y)_\sim((z,w)_\sim(u,v)_\sim)=(x,y)_\sim(zb,v)_\sim=(xab,v)_\sim,$$

所以乘法满足结合律. 容易验证 $(e,e)_\sim$ 是单位元, 并且 $(y,x)_\sim$ 是 $(x,y)_\sim$ 的逆元, 因此 G 是群. 现在考虑同态

$$j:S\to G,\quad x\mapsto(x,e)_\sim.$$

如果 $(x,e)_\sim=(y,e)_\sim$, 那么存在 a 和 b 使得

$$xa=yb,\quad a=b.$$

根据消去律可得

$$x=y,$$

所以 j 是单射. 将 $j(S)$ 与 S 等同, 那么 G 是 S 的分式群, 并且 $G(S)=SS^{-1}$. □

定义 2.2 设 S 为 XQ- 半群, 对任意 $g\in S$, 称 $D_L(g)=\{x:g=xy,x,y\in S\}$ 为 g 的左因子集, 相应地称 $D_R(g)=\{y:g=xy,x,y\in S\}$ 为 g 的右因子集. 根据消去律可知左因子与右因子一一对应, 因此 $\#D_L(g)=\#D_R(g)$. 定义函数

$$\tau:S\to N_0\cup\{\infty\}:\tau(g)=\#D_L(g)=\#D_R(g),$$

称其为 S 上的除数函数.

为方便起见, 在不加特殊说明的情形下, $x \mid g$ 是指左整除, 也即存在 $y \in S$, 使得 $g = xy$. 在非交换半群中, 由于乘积具有非交换性, 因此左因子集与右因子集一般不同. 而因子的个数有限是一个重要性质, 这将在定义半群上的 Möbius 函数时起到关键作用, 为此我们引入如下概念.

定义 2.3　设 S 为 XQ- 半群 (可消去半群). 若对于任意 $g \in S$ 均有 $\tau(g) < \infty$, 并且有 $\tau(e) = 1$, 则称 S 为 FJ- 半群或可分解半群.

定义 2.3 中 $\tau(e) = 1$ 是一个自然的要求, 例如 $S = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +)$, 有 $\tau(0) = 2$, 但 S 上的 Möbius 函数是不存在的. 这里 "FJ" 取自于 "分解" 的拼音开头字母, 表示半群对因子分解有较好的性质. 关于可分解半群, 我们有下面的基本性质.

引理 2.1　设 S 为可分解半群, $g = xy \in S$. 如果 $x \neq g$, 那么 $\tau(x) < \tau(g)$.

证明　若 $x = x_1x_2$, 则 $g = x_1(x_2y)$. 这说明 $D_L(x) \subset D_L(g)$, 于是 $\tau(x) \leqslant \tau(g)$. 如果 $\tau(x) = \tau(g)$, 那么 $D_L(x) = D_L(g)$. 所以 $g \in D_L(x)$, 也即 $x = gz = xyz$. 根据消去律可得 $e = yz$. 因为 $\tau(e) = 1$, 所以 $y = z = 1$, 也即 $x = g$, 矛盾. □

在自然数半群的算术中, 素数是非常重要的研究对象. 下面推广素数的概念.

定义 2.4　设 S 为可消去半群, $g \in S$. 若 $\tau(g) = 2$, 则称 g 为 S 的一个素元. S 中所有素元构成的集合记为 $\mathbb{P}(S)$.

下面的例子说明定义 2.4 中的素元与经典素数的性质是有差别的, 该例子中的半群也是我们后面讨论的重要对象.

例 2.1　Thompson 群有很多等价定义, 从生成元和关系出发可以简单地描述为群 F 由 x_0 和 x_1 生成, 满足关系: $x_0x_1^{-1}$ 分别与 $x_0^{-1}x_1x_0$ 和 $x_0^{-2}x_1x_0^2$ 交换. Thompson 群最早由 Richard Thompson 在 1965 引入 (参见文献 [5]), 并在 Dydak、Freyd 和 Heller 等的不同研究中重新发现. 直至今天对 Thompson 群的研究仍然很多, 它与数学及应用的多个领域有关. 最近 Xue [6] 研究了由 x_0、x_1 和 $x_0^{-j}x_1x_0^j$ $(j \geqslant 1)$ 生成的半群, 称之为 Thompson 半群, 记为 T_1, 其生成元和半群关系如下:

$$T_1 = \langle p_1, p_2, p_3, \ldots : p_jp_i = p_ip_{j+1}, j > i \geqslant 1 \rangle.$$

T_1 是可消去半群且 $G(T_1) = F$. 不难验证 T_1 上的素元与经典的素数在整除性上不同 (参见文献 [6]). 例如, $p_1, p_2, \ldots$ 是 T_1 中仅有的素元, 由于 $p_2p_1 = p_1p_3$, 因此有整除关系 $p_2 \mid p_1p_3$, 但 $p_2 \nmid p_1$, $p_2 \nmid p_3$.

定义 2.5　设 S 为可消去半群. 如果存在一列 (有限或无限) 有序元素 $\mathbb{B} = \{p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots \mid p_i \in S\}$, 使得对于任意 $g \in S$, 都有唯一一组序列 $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots)$, $\alpha_i \in \mathbb{N}_0$, 且至多只有有限多个 α_i 不为 0, 满足

$$g = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_n^{\alpha_n}\cdots,$$

也即对任意 $g \in S$, 存在唯一的 $n_g \in \mathbb{N}_0$, 以及 $\alpha_i \in \mathbb{N}_0$, $1 \leqslant i \leqslant n_g$, 使得

$$g = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_{n_g}^{\alpha_{n_g}},$$

其中 n_g 为 g 的最大非零坐标, 即 $\alpha_{n_g} \neq 0$, 那么称 $\mathbb{B}$ 为半群 S 的一组乘法基. 如果 S 的素元全体 $\mathbb{P}(S)$ 恰好构成 S 的一组乘法基, 则称 S 为 P- 半群或素半群, 此时素元的个数 $\#\mathbb{P}$ 称为 S 的秩, 记为 $R(S)$.

不难证明二元生成的自由半群具有乘法基, 但不是素半群. 可数生成的秩无限的交换半群与自然数 $\mathbb{N}$ 作为乘法半群同构. 素半群是很特殊的半群, 可分解半群中的素元素的个数是半群的不变量, 所以同构素半群的秩相等.

设 S 为秩等于 n 的素半群, n 有限或可数无穷. 记 $p_1, p_2, \ldots, p_n$ 为 S 中的素元全体且构成一组乘法基. 对应于该半群 S, 我们总是记 $\mathfrak{W}_S$ 为由符号 $P_1, \ldots, P_n$ 生成的非交换 (含单位元 e 的) 自由半群, 称它为 S 的伴随自由半群, 该半群中的元素也称作词 (单位元 e 的词是空词). 对 $1 \leqslant j \leqslant n$, 令 $\varphi(P_j) = p_j$, 则 φ 诱导了从 $\mathfrak{W}_S$ 到 S 上的满同态. 对任意 $g \in S$, 定义 $\mathbb{W}(g) = \varphi^{-1}(g) \subset \mathfrak{W}_S$ 为像是 g 的词的集合. 当

$$g = p_{l_1}^{\alpha_1} p_{l_2}^{\alpha_2} \cdots p_{l_n}^{\alpha_n} \in S$$

满足 $l_1 < l_2 < \cdots < l_n$ 时, 对应的词 $P_{l_1}^{\alpha_1} P_{l_2}^{\alpha_2} \cdots P_{l_n}^{\alpha_n}$ 称为 g 的正规形式. 对任意

$$\omega = P_{l_1}^{\alpha_1} P_{l_2}^{\alpha_2} \cdots P_{l_n}^{\alpha_n} \in \mathfrak{W}_S,$$

定义词 ω 的长度为

$$\mathbb{L}(\omega) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k.$$

特别地, 空词 e 的长度为 0.

考虑在例 2.1 中引入的 Thompson 半群

$$T_1 = \langle p_1, p_2, p_3, \ldots : p_j p_i = p_i p_{j+1}, j > i \geqslant 1 \rangle,$$

不难验证对于任意 $g \in T_1$, $\mathbb{W}(g)$ 中所有词的长度相等. 对于具有这类性质的半群, 我们有如下定义.

定义 2.6 设 S 为素半群, $g \in S$. 若 g 的词集 $\mathbb{W}(g)$ 中元素都有相同的长度, 则称该长度为 g 的长度, 记为 $\ell(g)$. 如果 S 中的所有元素都有此性质, 则称 S 为 L- 半群.

注 2.2 设 S 是有限秩的 L- 半群, $R(S)$ 为其秩, 则对任意 $g \in S$, 有 $\#\mathbb{W}(g) \leqslant R(S)^{\ell(g)}$, 并且

$$\tau(g) \leqslant 1 + R(S) + R(S)^2 + \cdots + R(S)^{\ell(g)} < \infty,$$

所以 S 一定是可分解半群. 对于无限秩的 L- 半群, 此结论不成立. 例如, 设 S 由 $p_0, p_1, p_2, \ldots$ 生成, 满足如下条件:

(1) p_0 与 S 中任意元素交换;

(2) 对 $n \geqslant 1$ 都有 $p_{2n} p_{2n-1} = p_0^2$ 成立;

(3) 当 $i, j \geqslant 1$ $(i \neq j)$ 时, $\{p_{2i-1}, p_{2i}\}$ 与 $\{p_{2j-1}, p_{2j}\}$ 交换.

由其生成元关系不难验证 S 为 L- 半群. 注意到

$$\mathbb{W}(p_0^2) = \{P_0^2, P_2 P_1, P_4 P_3, P_6 P_5, \ldots\},$$

故 p_0^2 的左因子集为

$$D_L(p_0^2) = \{e, p_0^2, p_0, p_2, p_4, \ldots\}.$$

因此 $\tau(p_0^2) = \infty$, 所以 S 不是可分解半群.

例 2.2 考虑由 3 个素元生成的素半群

$$S = \langle p_1, p_2, p_3 : p_2 p_1 = p_1 p_2 p_3, p_3 p_1 = p_1 p_3, p_2 p_3 = p_3 p_2 \rangle.$$

不难验证, $\mathbb{L}(P_2 P_1) = 2$, $\mathbb{L}(P_1 P_2 P_3) = 3$, 因此 S 不是 L- 半群.

定理 2.2 设 S 为素半群, $g \in S$. 则 $\mathbb{W}(g)$ 是有限集等价于 $\tau(g) < \infty$.

证明 设 $\mathfrak{W}$ 为 S 的伴随自由半群. 将 g 的词的最大长度记为

$$n = \sup \mathbb{L}(\mathbb{W}(g)).$$

(1) 当 $n < \infty$ 时, 考虑 g 的前段子词集合

$$\mathbb{W}_z(g) = \{X \in \mathfrak{W}: \text{ 存在 } Y \in \mathfrak{W} \text{ 使得 } XY \in \mathbb{W}(g)\}.$$

显然有 $\tau(g)$ 的上界估计

$$\tau(g) \leqslant \#\mathbb{W}_z(g) \leqslant (1+n)\#\mathbb{W}(g).$$

反之, 当 $\tau(g) < \infty$ 时, 考虑 g 的长为 k 的前段子词集合

$$\mathbb{W}_k(g) = \{X \in \mathfrak{W} : \mathbb{L}(X) = k, \text{ 存在 } Y \in \mathfrak{W} \text{ 使得 } XY \in \mathbb{W}(g)\}.$$

假设 $1 \leqslant k \leqslant n$, $X, X' \in \mathbb{W}_k(g)$, 并且 $X = X_0P_i$, $X' = X_0P_j$, 其中 $\mathbb{L}(X_0) = k-1$, 也即 X 和 X' 的前 $k-1$ 段相同. 如果 $X \neq X'$, 则 $i \neq j$, 那么 X 和 X' 是不同元素的词, 所以有

$$\tau(g) \geqslant \frac{\#\mathbb{W}_k(g)}{\#\mathbb{W}_{k-1}(g)}.$$

再由 $\tau(g) \geqslant 1 = \#\mathbb{W}_0(g)$ 可得

$$\tau(g)^2 \geqslant \#\mathbb{W}_1(g), \quad \tau(g)^3 \geqslant \#\mathbb{W}_1(g)\frac{\#\mathbb{W}_2(g)}{\#\mathbb{W}_1(g)} = \#\mathbb{W}_2(g),$$

进而可以得到

$$\tau(g) \geqslant \max\{\#\mathbb{W}_0(g), (\#\mathbb{W}_1(g))^{\frac{1}{2}}, \ldots, (\#\mathbb{W}_n(g))^{\frac{1}{1+n}}\}.$$

根据

$$\#\mathbb{W}_0(g) + \#\mathbb{W}_1(g) + \#\mathbb{W}_2(g) + \cdots + \#\mathbb{W}_n(g) = \#\mathbb{W}_z(g) \geqslant \#\mathbb{W}(g),$$

可得 $\tau(g)$ 的下界估计:

$$\tau(g) \geqslant \left(\frac{\#\mathbb{W}(g)}{1+n}\right)^{\frac{1}{1+n}}.$$

故当 $n < \infty$ 时, $\mathbb{W}(g)$ 是有限集等价于 $\tau(g)$ 有限.

(2) 当 $n = \infty$ 时, 有 $\#\mathbb{W}(g) = \infty$. 分如下两种情形讨论.

(i) 若存在 k 使得 $\#\mathbb{W}_k(g) = \infty$, 设 k 是最小的, 则有 $\tau(g) \geqslant \frac{\#\mathbb{W}_k(g)}{\#\mathbb{W}_{k-1}(g)} = \infty$.

(ii) 若对任意 k 均有 $\#\mathbb{W}_k(g) < \infty$, 根据 $\mathbb{W}_1(g) < \infty$ 可得, 存在 P_{l_1} 使得集合

$$\mathbb{W}(g, P_{l_1}) = \{X \in \mathfrak{W} : P_{l_1}X \in \mathbb{W}(g)\}$$

是无限集. 根据 $\mathbb{W}_2(g) < \infty$ 可得, 存在 P_{l_2} 使得集合

$$\mathbb{W}(g, P_{l_1}P_{l_2}) = \{X \in \mathfrak{W} : P_{l_1}P_{l_2}X \in \mathbb{W}(g)\}$$

是无限集. 归纳定义 P_{l_n}, 使得集合

$$\mathbb{W}(g, P_{l_1}P_{l_2}\cdots P_{l_n}) = \{X \in \mathfrak{W} : P_{l_1}P_{l_2}\cdots P_{l_n}X \in \mathbb{W}(g)\}$$

是无限集. 因此 $p_{l_1}, p_{l_1}p_{l_2}, p_{l_1}p_{l_2}p_{l_3}, \ldots \in D_L(g)$. 于是 $\tau(g) = \infty$. 故当 $\mathbb{W}(g) = \infty$ 时有 $\tau(g) = \infty$. $\square$

注 2.3 上述定理说明素半群 S 是可分解半群当且仅当 S 中任意元素的词是有限集. 如果 S 为 L- 半群, 那么上述证明中 $n=\ell(g)$, $\mathbb{W}_n(g)=\mathbb{W}(g)$, 所以有

$$(\#\mathbb{W}(g))^{\frac{1}{1+\ell(g)}} \leqslant \tau(g) \leqslant (1+\ell(g))\#\mathbb{W}(g).$$

本文的以下内容主要对 L- 半群进行研究.

3 一类非交换的自然算术半群

本节定义一类称为自然算术半群的 L- 半群, 同时给出很多该类半群上的性质, 为第 5 节在其上定义 ζ- 函数奠定基础.

定义 3.1 称半群 S 为自然算术半群, 如果存在一个严格递增函数 $\sigma:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, 使得

$$S=\langle p_1,p_2,\dots,p_n,\dots \mid p_jp_i=p_ip_{\sigma(j)}, j>i\rangle.$$

为方便起见, 约定 $p_i^0=e$.

注 3.1 由 $\sigma(1)\geqslant 1$ 以及 σ 的递增性可得 $\sigma(i)\geqslant i$, $\forall i\in\mathbb{N}$. 根据定义可知自然算术半群是可消去半群.

定理 3.1 自然算术半群是秩无穷的 L- 半群.

在给出证明之前, 我们先介绍如下几个定义和引理.

定义 3.2 设 S 为自然算术半群, $g\in S$. 考虑 g 的一个词 $\omega_g=P_{l_1}^{\alpha_1}P_{l_2}^{\alpha_2}\cdots P_{l_n}^{\alpha_n}$, $\alpha_j\neq 0$, $\forall j$. 记

$$\mathrm{Ind_m}(\omega_g)=\min_{1\leqslant i\leqslant n} l_i,$$

称其为 ω_g 的最小指标.

引理 3.1 设 S 为自然算术半群. 对任意 $g\in S$, $\mathrm{Ind_m}(\mathbb{W}(g))$ 为单点集, 即 g 的所有词的最小指标相同. 记这个最小指标为 $c(g)$, 称其为 g 的最小指标.

证明 当 $j>i$ 时, $p_jp_i=p_ip_{\sigma(j)}$. 再由 $\sigma(j)\geqslant j$ 可得

$$\min\{j,i\}=i=\min\{i,\sigma(j)\}.$$

这说明 g 中素元换位时最小指标保持不变, 所以 g 的所有词的最小指标相同. □

引理 3.2 自然算术半群中的元素都具有唯一的正规形式.

证明 当 $\ell(g)=0$ 或 $\ell(g)=1$ 时结论显然成立. 假设 $\ell(g)$ 为 $n-1$ 时结论成立, 对于

$$g=p_{l_1}\cdots p_{l_{a-1}}p_{l_a}p_{l_{a+1}}\cdots p_{l_n},$$

假设 l_a 为最小指标, 并且 $l_i>l_a$, $1\leqslant i\leqslant a-1$, 那么

$$g=p_{l_a}p_{\sigma(l_1)}\cdots p_{\sigma(l_{a-1})}p_{l_{a+1}}\cdots p_{l_n}=p_{l_a}g'.$$

由于 $\ell(g')=n-1$, 根据归纳假设可得

$$g'=p_{j_1}p_{j_2}\cdots p_{j_{n-1}},\quad j_1\leqslant j_2\leqslant\cdots\leqslant j_{n-1},$$

并且 $j_1 = c(g') \geqslant c(g) = l_a$. 因此 g 有正规形式

$$\omega_g = P_{l_a} P_{j_1} P_{j_2} \cdots P_{j_{n-1}}.$$

这说明了正规形式的存在性. 如果 g 有两种正规形式, 即

$$g = p_{l_1} p_{l_2} \cdots p_{l_n} = p_{j_1} p_{j_2} \cdots p_{j_n},$$

其中 $l_1 \leqslant l_2 \leqslant \cdots \leqslant l_n$, $j_1 \leqslant j_2 \leqslant \cdots \leqslant j_n$, 那么有 $l_1 = c(g) = j_1$. 根据消去律可得

$$g' = p_{l_2} \cdots p_{l_n} = p_{j_2} \cdots p_{j_n}.$$

由于 $\ell(g') = n-1$, 根据归纳假设可得 $l_i = j_i$ $(2 \leqslant i \leqslant n)$, 这证明了唯一性. □

注 3.2　更进一步, 如果 $g = p_{l_1} p_{l_2} \cdots p_{l_n}$, $c(g) = m$, 那么 g 的正规形式的首项为 $P_m^{\sum_{i=1}^n \delta_m(l_i)}$.

定理 3.1 的证明　根据引理 3.2 可得自然算术半群是素半群, 并且 $R(S) = \#\mathbb{P} = \infty$. 又因为自然算术半群定义中生成元的换位关系不改变素元个数, 故为 L- 半群. □

例 3.1　当 $\sigma(i) = i$ 时, 对应的自然算术半群为一个交换的秩无穷的 L- 半群, 则有 $S \cong \mathbb{N}$, 即 S 同构于自然数的乘法半群.

例 3.2　我们沿用例 2.1 的定义和记号, Thompson 群为

$$F = \langle p_1, p_2, p_3, \ldots : p_i^{-1} p_j p_i = p_{j+1}, j > i \geqslant 1 \rangle,$$

其生成半群记为

$$T_1 = \langle p_1, p_2, p_3, \ldots : p_j p_i = p_i p_{j+1}, j > i \geqslant 1 \rangle,$$

对于 $1 \leqslant i < j$ 有

$$p_i^{-1} p_j = p_{j+1} p_i^{-1}, \quad p_j^{-1} p_i = p_i p_{j+1}^{-1}, \quad p_j p_i = p_i p_{j+1}. \tag{3.1}$$

因此, 给定元素 $u \in F$, 根据 (3.1) 总是可以向右移动带有负幂或较大下标的 p_i, 于是 u 有唯一的正规形式 (参见文献 [5])

$$u = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_{n-1}^{a_{n-1}} p_n^{a_n} p_n^{-b_n} p_{n-1}^{-b_{n-1}} \cdots p_2^{-b_2} p_1^{-b_1}, \tag{3.2}$$

其中 $n, a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_n, b_n \in \mathbb{N}_0$, 并且

(i) a_n 和 b_n 恰有一个不为 0;

(ii) 如果 a_k 和 b_k 均不为 0, 那么 a_{k+1} 或者 b_{k+1} 不为 0.

群 F 中元素的正规形式类似于有理数的分数表示, F 的生成半群也有正规分解, 即

$$T_1 = \{p_1^{a_1} p_2^{a_2} p_3^{a_3} \cdots p_{n-1}^{a_{n-1}} p_n^{a_n} : n \geqslant 1, a_1, a_2, \ldots, a_n \geqslant 0\}. \tag{3.3}$$

易见 $F = G(T_1)$ 是 T_1 的分式群, 并且 Thompson 半群是关于 $\sigma(i) = i+1$ 的自然算术半群.

例 3.3　对于 $\sigma(i) = i + m$, $m \geqslant 0$, 记自然算术半群

$$T_m = \langle p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots : p_j p_i = p_i p_{j+m}, j > i \rangle.$$

其中 $T_0 = \mathbb{N}$, T_1 是上面例 3.2 中的 Thompson 半群.

下面给出一些自然算术半群的性质.

性质 3.1 自然算术半群的分式群存在.

证明 S 为自然算术半群, 根据定理 2.1 可知, 我们只需证明对任意 $x, y \in S$, 存在 $a, b \in S$ 使得 $xa = yb$.

首先假设 $y = p_k$ 为素元. 如果 $\ell(x) = 0$, 也即 $x = e$, 则取 $a = p_k$ 和 $b = e$ 即可. 假设结论对于 $\ell(x) = n-1$ 时成立, 那么当 $\ell(x) = n$ 时, 设 $x = p_l x_1$, 其中 $\ell(x_1) = n-1$. 如果 $l < k$, 那么存在 a_1 和 b_1 使得 $x_1 a_1 = p_{\sigma(k)} b_1$. 于是

$$xa_1 = p_l x_1 a_1 = p_l p_{\sigma(k)} b_1 = p_k p_l b_1 = y p_l b_1,$$

取 $a = a_1$ 和 $b = p_l b_1$ 即可. 如果 $l = k$, 取 $a = e$ 和 $b = x_1$ 即可. 如果 $l > k$, 那么存在 a_1 和 b_1 使得 $x_1 a_1 = p_k b_1$. 于是

$$xa_1 = p_l x_1 a_1 = p_l p_k b_1 = p_k p_{\sigma(l)} b_1 = y p_{\sigma(l)} b_1,$$

取 $a = a_1$ 和 $b = p_{\sigma(l)} b_1$ 即可. 根据归纳可得结论对于 $y = p_k$ 成立.

假设 $y = p_{k_1} p_{k_2} \cdots p_{k_n}$, 则存在 a_1 和 b_1 使得 $xa_1 = p_{k_1} b_1$, 存在 a_2 和 b_2 使得 $b_1 a_2 = p_{k_2} b_2, \ldots,$ 存在 a_n 和 b_n 使得 $b_{n-1} a_n = p_{k_n} b_n$. 取 $a = a_1 a_2 \cdots a_n$ 和 $b = b_n$ 即可. 另外, 根据上述证明过程, 可以选取 a 和 b 使得 $\ell(a) \leqslant \ell(y)$, $\ell(b) \leqslant \ell(x)$. □

性质 3.2 设 S 为自然算术半群. 对任意 $g \in S$, 有

$$\#\mathbb{W}(g) < \infty.$$

证明 设 $g = p_{l_1} p_{l_2} \cdots p_{l_n}$, 其中 $l_1 \leqslant l_2 \leqslant \cdots \leqslant l_n$. 记 $g' = p_{l_2} \cdots p_{l_n}$.

假设 $\omega_g = P_{k_1} \cdots P_{k_{a-1}} P_{k_a} \cdots P_{k_{a+1}} P_{k_n}$ 为 g 的词, 其中 $l_1 = k_a < k_i$, $1 \leqslant i < a$, 则有

$$g = p_{k_1} \cdots p_{k_{a-1}} p_{k_a} p_{k_{a+1}} \cdots p_{k_n} = p_{k_a} p_{\sigma(k_1)} \cdots p_{\sigma(k_{a-1})} p_{k_{a+1}} \cdots p_{k_n},$$

于是有

$$g' = p_{\sigma(k_1)} \cdots p_{\sigma(k_{a-1})} p_{k_{a+1}} \cdots p_{k_n}.$$

由 $c(g') = l_2$ 知,

$$\min\{\sigma(k_1), \ldots, \sigma(k_{a-1}), k_{a+1}, \ldots, k_n\} = l_2.$$

由于 $\sigma(k_i) \geqslant k_i$, 因此

$$\min\{k_1, \ldots, k_{a-1}, k_{a+1}, \ldots, k_n\} \leqslant l_2 \leqslant l_n.$$

重复以上推理可得

$$k_i \leqslant l_n, \quad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

又根据 k_a 的选取知 $l_1 \leqslant k_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, 于是每个 k_i 都落在 l_1 与 l_n 之间. 故有

$$\#\mathbb{W}(g) \leqslant (l_n - l_1 + 1)^n.$$

证毕. □

注 3.3　实际上, 对于 $\#\mathbb{W}(g)$, 我们有更好的上界估计. 沿用性质 3.2 证明中的记号, 设 g 的长度为 n, 定义映射

$$\varphi: \mathbb{W}(g) \to \{1,2,\dots,n\} \times \mathbb{W}(g'), \quad \omega_g \mapsto (a, P_{\sigma(k_1)} \cdots P_{\sigma(k_{a-1})} P_{k_{a+1}} \cdots P_{k_n}).$$

可以验证 φ 是单射. 对 g 的长度进行归纳可得 $\#\mathbb{W}(g) \leqslant n!$.

推论 3.1　根据定理 2.2 和性质 3.2 可知自然算术半群为可分解半群.

性质 3.3　设 S 为自然算术半群, 考虑元素 $p_i p_j$. 若 $j \geqslant i$, 并且

$$\sigma^{-1}(j) = \emptyset \quad \text{或} \quad \sigma^{-1}(j) \leqslant i,$$

则有 $\#\mathbb{W}(p_i p_j) = 1$. 否则 $\#\mathbb{W}(p_i p_j) = 2$.

证明　(1) 若 $j \geqslant i$, 并且满足 $\sigma^{-1}(j) = \emptyset$ 或 $\sigma^{-1}(j) \leqslant i$, 则 $P_i P_j$ 为其正规形式. 若 $p_k p_l = p_i p_j$, 且 $k \neq i$, $l \neq j$, 由正规形式的唯一性可得 $k > l$. 于是有 $p_k p_l = p_l p_{\sigma(k)} = p_i p_j$, 即 $l = i$, $j = \sigma(k)$. 所以 $\sigma^{-1}(j) = k > l = i$, 矛盾. 故 $\#\mathbb{W}(p_i p_j) = 1$.

(2) 若 $j > i$ 且存在 $k = \sigma^{-1}(j) > i$, 则有 $p_i p_j = p_k p_i$, 故 $\#\mathbb{W}(p_i p_j) = 2$.

(3) 若 $i > j$, 由自然算术半群的定义有 $p_i p_j = p_j p_{\sigma(i)}$, 故 $\#\mathbb{W}(p_i p_j) = 2$. □

定义 3.3　设 S 为自然算术半群, $g \in S$, 对于 g 的词 $\omega_g = P_{l_1} P_{l_2} \cdots P_{l_n} \in \mathbb{W}(g)$, 称

$$\mathrm{Ind}(\omega_g) = \sum_{k=1}^{n} l_k$$

为其指标, 称

$$\mathrm{Ind}_{\mathrm{w}}(\omega_g) = \sum_{k=1}^{n} k l_k$$

为其加权指标.

注 3.4　对于 $X, Y \in \mathfrak{W}_S$, 有 $\mathrm{Ind}(XY) = \mathrm{Ind}(X) + \mathrm{Ind}(Y)$, 以及

$$\mathrm{Ind}_{\mathrm{w}}(XY) = \mathrm{Ind}_{\mathrm{w}}(X) + \mathrm{Ind}_{\mathrm{w}}(Y) + \mathbb{L}(X)\mathrm{Ind}(Y).$$

设 g 为自然算术半群 S 中的一个元. 对任意 $\omega_g, \omega'_g \in \mathbb{W}(g)$, 如果存在 $X, Y \in \mathfrak{W}_S$ 和 $i < j$ 使得

$$\omega_g = X P_j P_i Y, \quad \omega'_g = X P_i P_{\sigma(j)} Y,$$

则记 $\omega_g \ll \omega'_g$. 利用这个记号, 定义 $\mathbb{W}(g)$ 上的一个序关系 “$\prec$” 如下.

定义 3.4　设 S 为自然算术半群, $g \in S$. 对任意 ω_g, $\omega'_g \in \mathbb{W}(g)$, 若存在 $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k \in \mathbb{W}(g)$, 使得

$$\omega_g \ll \omega_1 \ll \omega_2 \ll \cdots \ll \omega_k \ll \omega'_g,$$

则记 $\omega_g \prec \omega'_g$. 特别地, 对任意 $\omega \in \mathbb{W}(g)$, 有 $\omega \prec \omega$.

对于关系 “$\prec$”, 我们有下列性质.

性质 3.4　设 $S = T_m$, $m \geqslant 1$, $g \in S$, $\omega_g, \omega'_g \in \mathbb{W}(g)$ 满足 $\omega_g \prec \omega'_g$, $\omega_g \neq \omega'_g$, 则有

$$\mathrm{Ind}(\omega_g) < \mathrm{Ind}(\omega'_g).$$

证明 不妨设 $\omega_g = XP_jP_iY$, $\omega'_g = XP_iP_{\sigma(j)}Y$, $j > i$, 则有

$$\mathrm{Ind}(\omega'_g) - \mathrm{Ind}(\omega_g) = j + \sigma(i) - i - j = m > 0.$$

证毕. □

性质 3.5 设 S 为自然算术半群, $g \in S$, $\omega_g, \omega'_g \in \mathbb{W}(g)$ 满足 $\omega_g \prec \omega'_g$, $\omega_g \neq \omega'_g$, 则有

$$\mathrm{Ind}_{\mathrm{w}}(\omega_g) < \mathrm{Ind}_{\mathrm{w}}(\omega'_g).$$

证明 不妨设 $\omega_g = XP_jP_iY$, $\omega'_g = XP_iP_{\sigma(j)}Y$, $j > i$, 则有

$$\begin{aligned}\mathrm{Ind}_{\mathrm{w}}(\omega'_g) - \mathrm{Ind}_{\mathrm{w}}(\omega_g) &= i(\mathbb{L}(X)+1) + \sigma(j)(\mathbb{L}(x)+2) - j(\mathbb{L}(x)+1) - i(\mathbb{L}(x)+2)\\ &= (\mathbb{L}(x)+2)(\sigma(j)-j) + (j-i)\\ &> 0.\end{aligned}$$

证毕. □

由性质 3.4 或 3.5 可知 “$\prec$” 为 $\mathfrak{W}_S$ 上的偏序关系. 一个自然的问题是, 在此序关系下 $\mathbb{W}(g)$ 中是否一定有极小元. 进一步地, 如果有, 极小元是否唯一. 为此我们引入如下概念.

定义 3.5 设 S 为自然算术半群, $g \in S$, $\omega_g \in \mathbb{W}(g)$. 若不存在 $\omega'_g \in \mathbb{W}(g) \setminus \{\omega_g\}$ 使得 $\omega'_g \prec \omega_g$, 则称 ω_g 为 g 的一个极小形式.

关于极小形式的存在性, 我们有如下结果.

性质 3.6 自然算术半群中的任意元素 g 都存在极小形式.

证明 对于 $g \in S$, $\mathrm{Ind}_{\mathrm{w}}(\mathbb{W}(g))$ 为 $\mathbb{N}$ 的子集, 于是存在最小元 $\mathrm{Ind}_{\mathrm{w}}(\omega_g)$, 那么 ω_g 是 g 的一个极小形式. 如若不然, 则存在 $\omega'_g \prec \omega_g$. 根据性质 3.5, 有 $\mathrm{Ind}_{\mathrm{w}}(\omega'_g) < \mathrm{Ind}_{\mathrm{w}}(\omega_g)$, 这与 $\mathrm{Ind}_{\mathrm{w}}(\omega_g)$ 的最小性矛盾. 命题得证. □

一个自然的问题是如何判断自然算术半群上的词是不是极小形式. 下述引理给出了极小形式的一个刻画.

引理 3.3 设 S 为自然算术半群, $g \in S$, $\omega_g = P_{l_1}P_{l_2}\cdots P_{l_n}$. 则 ω_g 为极小形式当且仅当对任意 $1 \leqslant i \leqslant n-1$ 都有

$$l_i \geqslant l_{i+1} \quad 或 \quad \sigma^{-1}(l_{i+1}) = \emptyset \quad 或 \quad \sigma^{-1}(l_{i+1}) \leqslant l_i. \tag{3.4}$$

证明 若 ω_g 是极小形式, 容易验证对任意 i $(1 \leqslant i \leqslant n-1)$, l_i 和 l_{i+1} 必须满足 (3.4) 中的条件.

反之, 若 ω_g 不是极小形式, 则存在 X、Y、a、b、s 和 t, 使得 $\omega_g = XP_aP_bY$, $\omega'_g = XP_sP_tY$, 并且 $\omega'_g \prec \omega_g$. 由消去律, 得到

$$p_ap_b = p_sp_t, \quad P_sP_t \prec P_aP_b,$$

这样有 $s > t$, $a = t$, $b = \sigma(s)$. 于是, 对 $i = \mathbb{L}(X)+1$, 有 $l_i = a < l_{i+1} = b$ 且 $\sigma^{-1}(l_{i+1}) > l_i$, 故 ω_g 不满足 (3.4) 中的条件. 于是命题得证. □

注 3.5 对于自然算术半群 T_m, 根据引理 3.3 可得, $\omega_g = P_{l_1}P_{l_2}\cdots P_{l_n}$ 是 g 的极小形式当且仅当

$$l_{i+1} \leqslant l_i + m, \quad \forall 1 \leqslant i \leqslant n-1.$$

注 3.6　自然数 $\mathbb{N}$ 以及 Thompson 半群 T_1 中元素的极小形式是唯一的 (参见定理 3.2). 一般地, 自然算术半群中元素的极小形式不一定唯一. 例如, 考虑 $\sigma(i)=2^i$ 的情形, 我们有

$$p_1p_4p_{32}=p_2p_5p_1=p_1p_5p_4,$$

其中 $P_2P_5P_1$ 和 $P_1P_5P_4$ 均为极小形式, 其偏序关系如下:

$$P_1P_5P_4\prec P_1P_4P_{32},$$
$$P_2P_5P_1\prec P_1P_4P_{32}.$$

虽然极小形式一般不唯一, 但我们有如下定理.

定理 3.2　自然算术半群 S 中的元素的极小形式唯一的充分必要条件是 S 同构于某个 T_m.

在给出证明之前, 先给出一些定义和引理.

定义 3.6　设 S 为自然算术半群, $g\in S$, $\omega_g=P_{l_1}P_{l_2}\cdots P_{l_n}$ 为 g 的一个极小形式. 称

$$a=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\{i:l_1\leqslant l_2\leqslant\cdots\leqslant l_i\}$$

为 ω_g 的递增长度.

引理 3.4　设 $S=T_m$, $g\in S$, $\omega_g=P_{l_1}P_{l_2}\cdots P_{l_n}$ 为极小形式, 则对任意 $j>i$ 都有

$$l_j-l_i\leqslant(j-i)m.$$

证明　根据 $l_{i+1}\leqslant l_i+m$ 可得 $l_j\leqslant l_i+(j-i)m$, 也即 $l_j-l_i\leqslant(j-i)m$. □

引理 3.5　设 $S=T_m$, $g\in S$, $\omega_g=P_{l_1}P_{l_2}\cdots P_{l_n}$ 为极小形式且 ω_g 递增长度为 a. 若 g 的正规形式为

$$P_{k_1}P_{k_2}\cdots P_{k_n},$$

则有

$$k_n=l_a+(n-a)m.$$

证明　固定 a 的取值, 对 g 的长度 $\ell(g)=n\geqslant a$ 进行归纳. 当 $n=a$ 时, g 的正规形式为 $P_{l_1}P_{l_2}\cdots P_{l_a}$, 结论自然成立.

假设当 $\ell(g)=n-1\geqslant a$ 时结论成立, 对于极小形式 $\omega_g=P_{l_1}P_{l_2}\cdots P_{l_n}$, 由 (3.4) 可知, $\omega_{g'}=P_{l_1}P_{l_2}\cdots P_{l_{n-1}}$ 为某元素 g' 的一个极小形式. 假设 g' 的正规形式为 $P_{j_1}P_{j_2}\cdots P_{j_{n-1}}$, 根据归纳假设可得

$$j_{n-1}=l_a+(n-1-a)m.$$

由于 $l_n\leqslant l_{a+1}+(n-1-a)m<l_a+(n-1-a)m$, 也即 $l_n<j_{n-1}$, 故可以假设对于某个 $b<n-1$ 有 $j_b\leqslant l_n<j_{b+1}$, 那么

$$g=p_{j_1}\cdots p_{j_{n-1}}p_{l_n}=p_{j_1}\cdots p_{j_b}p_{l_n}p_{j_{b+1}+m}\cdots p_{j_{n-1}+m}.$$

由于 $j_1\leqslant j_2\leqslant\cdots\leqslant j_b\leqslant l_n\leqslant j_{b+1}+m\leqslant\cdots\leqslant j_{n-1}+m$, 故

$$P_{j_1}\cdots P_{j_b}P_{l_n}P_{j_{b+1}+m}\cdots P_{j_{n-1}+m}$$

为 g 的正规形式. 根据正规形式的唯一性即得 $k_n=j_{n-1}+m=l_a+(n-a)m$. 证明完毕. □

引理 3.6 设 $S=T_m$, $g\in S$, $\omega_g=P_{l_1}P_{l_2}\cdots P_{l_n}$ 为 g 的极小形式且 ω_g 递增长度为 a, 则

$$\omega_{g'}=P_{l_1}P_{l_2}\cdots P_{l_{a-1}}P_{l_{a+1}}\cdots P_{l_n}$$

为极小形式. 进一步地, 设 $P_{k_1}P_{k_2}\cdots P_{k_n}$ 为 g 的正规形式, 则

$$p_{l_1}p_{l_2}\cdots p_{l_{a-1}}p_{l_{a+1}}\cdots p_{l_n}=p_{k_1}p_{k_2}\cdots p_{k_{n-1}}. \tag{3.5}$$

证明 由 ω_g 的递增长度为 a 知

$$l_{a+1}<l_a.$$

又因为 ω_g 是极小形式, 我们有 $l_a\leqslant l_{a-1}+m$, 故

$$l_{a+1}<l_a\leqslant l_{a-1}+m.$$

于是由引理 3.3 可知 $\omega_{g'}$ 为极小形式.

接下来证明 (3.5). 注意到 (3.5) 等价于

$$p_{l_1}p_{l_2}\cdots p_{l_{a-1}}p_{l_{a+1}}\cdots p_{l_n}p_{k_n}=p_{k_1}p_{k_2}\cdots p_{k_{n-1}}p_{k_n}=p_{l_1}p_{l_2}\cdots p_{l_{a-1}}p_{l_a}p_{l_{a+1}}\cdots p_{l_n}.$$

由消去律, 我们只需证明

$$p_{l_{a+1}}\cdots p_{l_n}p_{k_n}=p_{l_a}p_{l_{a+1}}\cdots p_{l_n}.$$

因为 $l_a>l_{a+1}$, 故

$$p_{l_{a+1}}\cdots p_{l_n}p_{k_n}=p_{l_a}p_{l_{a+1}}\cdots p_{l_n}=p_{l_{a+1}}p_{l_a+m}p_{l_{a+2}}\cdots p_{l_n}.$$

根据引理 3.4, 有 $l_{a+2}\leqslant l_{a+1}+m<l_a+m$, 故

$$p_{l_{a+1}}\cdots p_{l_n}p_{k_n}=p_{l_{a+1}}p_{l_a+m}p_{l_{a+2}}\cdots p_{l_n}=p_{l_{a+1}}p_{l_{a+2}}p_{l_a+2m}p_{l_{a+3}}\cdots p_{l_n}.$$

重复上述过程, 最终可以得到

$$p_{l_{a+1}}\cdots p_{l_n}p_{k_n}=p_{l_{a+1}}\cdots p_{l_n}p_{l_a+(n-a)m}.$$

根据引理 3.5 可得 $k_n=l_a+(n-a)m$. 于是 (3.5) 成立, 命题得证. □

定理 3.2 的证明 (1) 首先证明充分性, 即对任意 $g\in T_m$, g 的极小形式唯一. 我们将通过对元素的长度 $\ell(g)$ 进行归纳来证明. 当 $\ell(g)=0,1$ 时, 结论是平凡的.

假设 $\ell(g)=n-1$ 时结论成立. 设 g 有两个极小形式分别为

$$\omega_g=P_{l_1}P_{l_2}\cdots P_{l_n},\quad \omega_g'=P_{j_1}P_{j_2}\cdots P_{j_n},$$

并设 a 和 b 分别为 ω_g 和 ω_g' 的递增长度. 记 $P_{k_1}P_{k_2}\cdots P_{k_n}$ 为 g 的正规形式, 由引理 3.6 可知,

$$P_{l_1}\cdots P_{l_{a-1}}P_{l_{a+1}}\cdots P_{l_n}\quad 和\quad P_{j_1}\cdots P_{j_{b-1}}P_{j_{b+1}}\cdots P_{j_n}$$

均为 $g'=p_{k_1}p_{k_2}\cdots p_{k_{n-1}}$ 的极小形式. 根据归纳假设知, g' 的极小形式唯一, 所以有

$$P_{l_1}\cdots P_{l_{a-1}}P_{l_{a+1}}\cdots P_{l_n}=P_{j_1}\cdots P_{j_{b-1}}P_{j_{b+1}}\cdots P_{j_n}.$$

因此只需证明 $a = b$. 如若不然, 不妨设 $a < b$, 则有

$$l_i = j_i, \quad 1 \leqslant i < a, \quad l_{a+1} = j_a,$$

于是

$$l_a + (n-a)m > l_{a+1} + (n-a)m = j_a + (n-a)m.$$

由引理 3.4 和 3.5 可得

$$k_n = l_a + (n-a)m > j_a + (n-a)m \geqslant j_b - (b-a)m + (n-a)m = j_b + (n-b)m = k_n,$$

矛盾. 故 $a \geqslant b$. 同理可得 $a \leqslant b$, 于是 $a = b$. 充分性得证.

(2) 下面证明必要性. 若 S 不是半群 T_m 之一, 则存在 $i > 1$ 使得 $\sigma(i+1) > \sigma(i) + 1$. 考虑元素 $g = p_1 p_{\sigma(i)} p_{\sigma(\sigma(i)+1)}$. 由

$$p_1 p_{\sigma(i)} p_{\sigma(\sigma(i)+1)} = p_1 p_{\sigma(i)+1} p_{\sigma(i)}$$

和

$$p_1 p_{\sigma(i)} p_{\sigma(\sigma(i)+1)} = p_i p_1 p_{\sigma(\sigma(i)+1)} = p_i p_{\sigma(i)+1} p_1$$

知 $P_1 P_{\sigma(i)+1} P_{\sigma(i)}$ 和 $P_i P_{\sigma(i)+1} P_1$ 都是 g 的词. 再根据性质 3.3 易验证它们都是 g 的极小形式. 于是命题得证. □

4 可分解半群上的函数

本节定义可分解半群 S 上的卷积运算, 特别地, 我们计算了自然算术半群上的 Möbius 函数, 并给出了 Möbius 函数的一些性质.

假设 S 是可分解半群, 记 $\mathbb{C}[S]$ 为复系数的半群代数, 其元素可用和式 $\sum_{g \in S} \lambda_g g$ 来表示, 这里要求只有有限多个系数 λ_g 非零. 当不对复系数 λ_g 有任何要求时, 这样的形式和也构成代数, 记为 $\mathbb{C}[[S]]$, 称这样的形式和为 S 的无穷级数. S 上的复值函数和无穷级数一一对应, 对于 S 上的函数 φ, 其无穷级数为 $D(\varphi) = \sum_{g \in S} \varphi(g) g$. 如果 φ 和 ψ 为 S 上的函数, 则有形式运算

$$\sum_{g \in S} \varphi(g) g \cdot \sum_{h \in S} \psi(h) h = \sum_{g \in S} \Bigg(\sum_{g = xy} \varphi(x) \psi(y) \Bigg) g,$$

由此可在 S 上定义卷积

$$(\varphi * \psi)(g) = \sum_{g = xy} \varphi(x) \psi(y).$$

卷积运算的单位为 δ_e, 即在单位元处取值为 1、其他取值为 0 的函数. 下面给出卷积的一些性质.

性质 4.1 若 S 为可分解半群, 则其上的卷积满足结合律, 即对于 S 上的函数 φ、ψ 和 ρ, 有

$$(\varphi * \psi) * \rho = \varphi * (\psi * \rho). \tag{4.1}$$

证明 对于任意 $g\in S$, 有

$$\begin{aligned}((\varphi*\psi)*\rho)(g)&=\sum_{g=xy}(\varphi*\psi)(x)\rho(y)\\&=\sum_{g=xy}\sum_{x=zw}\varphi(z)\psi(w)\rho(y)\\&=\sum_{g=zwy}\varphi(z)\psi(w)\rho(y)\\&=(\varphi*(\psi*\rho))(g).\end{aligned}$$

因而 (4.1) 成立. □

注 4.1 一般地, 对于非交换半群, 卷积不满足交换律, 即 $\varphi*\psi\neq\psi*\varphi$.

定理 4.1 设 S 为可分解半群, φ 为 S 上的函数. 如果 $\varphi(e)\neq 0$, 则存在唯一的函数 ψ, 使得 $\varphi*\psi=\psi*\varphi=\delta_e$, 且 ψ 由以下形式给出:

$$\psi(e)=\varphi(e)^{-1},\quad \psi(g)=-\varphi(e)^{-1}\sum_{g=xy,x\neq g}\psi(x)\varphi(y), \tag{4.2}$$

这里 ψ 称为 φ 的卷积逆.

该定理的证明与一般群上无穷级数的可逆性证明相同, 这里略去.

注 4.2 不难验证, ψ 是 φ 的卷积逆当且仅当

$$\sum_{g\in S}\psi(g)g=\left(\sum_{g\in S}\varphi(g)g\right)^{-1}.$$

在经典的解析数论中, 常值函数 **1** 的卷积逆是非常重要的算术函数, 即著名的 Möbius 函数 μ. 由定理 4.1 可知, 可分解半群 S 上的 Möbius 函数也存在, 我们将其记为 μ_S, 或简记为 μ.

性质 4.2 设 S_1 和 S_2 为可分解半群, 并令 $S=S_1\times S_2$, 则对任意的 $g=(g_1,g_2)\in S$, 有

$$\mu_S(g)=\mu_{S_1}(g_1)\mu_{S_2}(g_2).$$

证明 考虑如下无穷级数:

$$\sum_{g\in S}g=\sum_{g_1\in S_1,g_2\in S_2}(g_1,g_2)=\sum_{g_1\in S_1}(g_1,e_2)\sum_{g_2\in S_2}(e_1,g_2),$$

我们有

$$\begin{aligned}\left(\sum_{g\in S}g\right)^{-1}&=\left(\sum_{g_1\in S_1}(g_1,e_2)\right)^{-1}\left(\sum_{g_2\in S_2}(e_1,g_2)\right)^{-1}\\&=\sum_{g_1\in S_1}\mu_1(g_1)(g_1,e_2)\sum_{g_2\in S_2}\mu_2(g_2)(e_1,g_2)\\&=\sum_{g_1\in S_1,g_2\in S_2}\mu_1(g_1)\mu_2(g_2)(g_1,g_2).\end{aligned}$$

由注 4.2 即得 $\mu_S(g)=\mu_{S_1}(g_1)\mu_{S_2}(g_2)$. □

性质 4.3 设 S_1 和 S_2 是可分解半群, 并令 $S=S_1*S_2$ 为 S_1 和 S_2 的自由积, 则

$$\mu_S|_{S_1}=\mu_{S_1},\quad \mu_S|_{S_2}=\mu_{S_2},\quad \mu_S|_{S\setminus(S_1\cup S_2)}=0.$$

证明 对任意 $g\in S_j$ $(j=1,2)$ 有

$$(\mu_S*1)(g)=\sum_{x\,|\,g,x\in S}\mu_S(x)=\sum_{x\,|\,g,x\in S_j}\mu_{S_j}(x)=\delta_e(g).$$

现在假设 $g\in S\setminus(S_1\cup S_2)$, 则 $g=g_1g_2\cdots g_n$, 其中 $g_r\in S_{j_r}\setminus\{e\}$, $j_r\in\{1,2\}$, $1\leqslant r\leqslant n$, 并且有 $j_1\neq j_2\neq\cdots\neq j_n$. 直接计算可得

$$\begin{aligned}(\mu_S*1)(g)&=\sum_{x\,|\,g}\mu_S(g)=\sum_{x_1\,|\,g_1}\mu_S(x_1)+\sum_{x_2\,|\,g_2,x_2\neq e}\mu_S(g_1x_2)+\sum_{x_3\,|\,g_3,x_3\neq e}\mu_S(g_1g_2x_3)+\cdots\\&=(\mu_{S_{j_1}}*1)(g_1)+0+0+\cdots\\&=0.\end{aligned}$$

证明完毕. □

性质 4.4 设 S 和 T 为可分解半群, 分别用 g 和 h 表示 S 和 T 中的元素. 若对任意 $h\in T$, 存在保持单位元的单同态 $\varphi_h:S\to S$, 并且有 $\varphi_{h_1}\varphi_{h_2}=\varphi_{h_1h_2}$, 则可定义 Descartes 集 $S\times T$ 上的乘法如下:

$$(g_1,h_1)(g_2,h_2)=(g_1\varphi_{h_1}(g_2),h_1h_2),$$

则集合 $S\times T$ 在上述乘法下构成一个可分解半群, 记为 $S\rtimes T$. 对于其上的 Möbius 函数, 有

$$\mu_{S\rtimes T}(g,h)=\mu_S(\varphi_h^{-1}(g))\mu_T(h).$$

我们约定, 当 $\varphi_h^{-1}(g)=\emptyset$ 时, 有 $\mu_S(\varphi_h^{-1}(g))=0$.

证明 容易验证 $S\rtimes T$ 上的乘法满足结合律, 并且 (e,e) 是其单位元. 如果 $(g_1,h_1)\mid(g,h)$, 那么存在 (g_2,h_2) 使得

$$(g,h)=(g_1,h_1)(g_2,h_2)=(g_1\varphi_{h_1}(g_2),h_1h_2),$$

即 $(g_1,h_1)\in D_L(g)\times D_L(h)$. 所以 $\tau(g,h)\leqslant\tau(g)\tau(h)$, 故 $S\rtimes T$ 为可分解半群.

设 $\psi(g,h)=\mu_S(\varphi_h^{-1}(g))\mu_T(h)$, 则有

$$\begin{aligned}(\psi*1)(g,h)&=\sum_{(g_1,h_1)\,|\,(g,h)}\psi(g_1,h_1)=\sum_{(g_1,h_1)\,|\,(g,h)}\mu_S(\varphi_{h_1}^{-1}(g_1))\mu_T(h_1)\\&=\sum_{h=h_1h_2}\mu_T(h_1)\sum_{g=g_1\varphi_{h_1}(g_2)}\mu_S(\varphi_{h_1}^{-1}(g_1))\\&=\sum_{h=h_1h_2}\mu_T(h_1)\sum_{g=\varphi_{h_1}(g_3)\varphi_{h_1}(g_2)}\mu_S(g_3)\\&=\sum_{h=h_1h_2}\mu_T(h_1)\sum_{\varphi_{h_1}^{-1}(g)=g_3g_2}\mu_S(g_3)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{h=h_1h_2} \mu_T(h_1)\delta_e(\varphi_{h_1}^{-1}(g)) \\
&= \delta_e(g) \sum_{h=h_1h_2} \mu_T(h_1) = \delta_e(g)\delta_e(h) \\
&= \delta_{(e,e)}(g,h).
\end{aligned}
$$

故

$$
\mu_{S\rtimes T}(g,h) = \psi(g,h) = \mu_S(\varphi_h^{-1}(g))\mu_T(h).
$$

证毕. □

注 4.3 如果对于任意 $h\in T$, $\varphi_h: S\to S$ 还是满射, 即 $\varphi_h\in \mathrm{Aut}(S)$, 那么 $\mu(\varphi_h^{-1}(g)) = \mu(g)$, 这时有

$$
\mu_{S\rtimes T}(g,h) = \mu_S(g)\mu_T(h).
$$

对于任意 $h\in T$, 定义 $\varphi_h = \mathrm{id}_S$, 则可以得到直积的情形.

例 4.1 考虑 $(\mathbb{N},*)\rtimes(\mathbb{N}_0,+)$, $\varphi_n(q_i) = q_{i+n}$, 其中 q_i 是第 i 个素数, 那么有

$$
\mu_{(\mathbb{N},*)\rtimes(\mathbb{N}_0,+)}(m,n) = \begin{cases} \mu_{\mathbb{N}}(m), & n=0, \\ -\mu_{\mathbb{N}}(m), & n=1, \quad m \text{ 为奇数}, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}
$$

考虑 $(\mathbb{N},*)\rtimes(\mathbb{N},*)$, 其中 $\varphi_n(m) = m^n$, 那么有

$$
\mu_{(\mathbb{N},*)\rtimes(\mathbb{N}_0,+)}(m,n) = \begin{cases} \mu_{\mathbb{N}}(k)\mu_{\mathbb{N}}(n), & m=k^n, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}
$$

在讨论了一般的可分解半群上的 Möbius 函数后, 我们将在下一小节中详细计算自然算术半群上的 Möbius 函数.

4.1 自然算术半群上的 Möbius 函数

对于自然算术半群上的 Möbius 函数, 有如下定理.

定理 4.2 设 S 为自然算术半群, 则其上的 Möbius 函数为

$$
\mu_S(g) = \begin{cases} 1, & g=e, \\ (-1)^n, & g = p_{j_1}p_{j_2}\cdots p_{j_n}, \quad j_1>j_2>\cdots>j_n\geqslant 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases} \tag{4.3}
$$

在证明定理 4.2 之前, 我们先给出几个引理.

引理 4.1 设 S 为自然算术半群, $g\in S$. 若存在 $l>j$ 使得 $p_l\mid g$, $p_j\mid g$, 则 $p_lp_j\mid g$.

证明 设 $g = p_lg_1 = p_jg_2$, 并记 $P_{l_1}P_{l_2}\cdots P_{l_n}$ 和 $P_{j_1}P_{j_2}\cdots P_{j_n}$ 分别为 g_1 和 g_2 的正规形式. 则存在

$$
a = \max\{t\in\mathbb{N}_0 : \sigma^i(l) > l_{i+1}, 0\leqslant i\leqslant t\} \tag{4.4}
$$

和

$$b=\max\{t\in\mathbb{N}_0:\sigma^i(j)>j_{i+1},0\leqslant i\leqslant t\},\tag{4.5}$$

使得

$$P_{l_1}P_{l_2}\cdots P_{l_a}P_{\sigma^a(l)}P_{l_{a+1}}\cdots P_{l_n}$$

是 $p_lg_1=g$ 的正规形式, 且

$$P_{j_1}P_{j_2}\cdots P_{j_b}P_{\sigma^b(j)}P_{j_{b+1}}\cdots P_{j_n}$$

是 $p_jg_2=g$ 的正规形式. 由正规形式的唯一性知,

$$P_{l_1}P_{l_2}\cdots P_{l_a}P_{\sigma^a(l)}P_{l_{a+1}}\cdots P_{l_n}=P_{j_1}P_{j_2}\cdots P_{j_b}P_{\sigma^b(j)}P_{j_{b+1}}\cdots P_{j_n}.$$

若 $a=b$, 则由 (4.4) 和 (4.5) 得 $\sigma^b(l)=\sigma^b(j)$. 根据 σ 的严格单调性有 $l=j$, 得出矛盾. 若 $a<b$, 则有

$$l_1=j_1,\quad \ldots,\quad l_a=j_a.$$

根据 (4.5) 有

$$\sigma^a(l)=j_{a+1}<\sigma^a(j),$$

这与 $l>j$ 相矛盾. 所以 $b<a$, 此时有

$$l_1=j_1,\quad \ldots,\quad l_b=j_b,\quad l_{b+1}=\sigma^b(j),\quad l_{b+2}=j_{b+1},\quad \ldots,\quad l_a=j_{a-1},$$

于是

$$\begin{aligned}g&=p_{j_1}p_{j_2}\cdots p_{j_b}p_{\sigma^b(j)}p_{j_{b+1}}\cdots p_{j_{a-1}}p_{\sigma^a(l)}h\\&=p_lp_{j_1}p_{j_2}\cdots p_{j_b}p_{\sigma^b(j)}p_{j_{b+1}}\cdots p_{j_{a-1}}h\\&=p_lp_jp_{j_1}p_{j_2}\cdots p_{j_b}p_{j_{b+1}}\cdots p_{j_{a-1}}h\\&=p_lp_jg_3.\end{aligned}$$

证明完毕. □

事实上, 引理 4.1 对任意有限多个素因子的情形也成立, 具体形式如下.

推论 4.1　设 S 为自然算术半群, $g\in S$. 如果存在 $l_1>\cdots>l_k$ 使得 $p_{l_i}\mid g$, $1\leqslant i\leqslant k$, 则有 $p_{l_1}p_{l_2}\cdots p_{l_k}\mid g$.

证明　对素因子的个数 k 进行归纳. 当 $k=2$ 时, 由引理 4.1 知命题成立.

假设命题对 $k-1\geqslant 2$ 成立. 记 $g=p_{l_1}g_1$, 根据引理 4.1 可知, 对任意 $2\leqslant i\leqslant k$, 都有 $p_{l_1}p_{l_i}\mid g$. 于是存在 $h_i\in S$ 使得

$$g=p_{l_1}p_{l_i}h_i=p_{l_1}g_1.$$

由消去律可得 $p_{l_i}h_i=g_1$. 故 $p_{l_i}\mid g_1$ 对 $i=2,3,\ldots,k$ 成立. 根据归纳假设可得

$$p_{l_2}p_{l_3}\cdots p_{l_k}\mid g_1.$$

即存在 $h\in S$ 使得 $g_1=p_{l_2}p_{l_3}\cdots p_{l_k}h$. 于是

$$g=p_{l_1}g_1=p_{l_1}p_{l_2}p_{l_3}\cdots p_{l_k}h,$$

即 $p_{l_1}p_{l_2}\cdots p_{l_k}\mid g$. 命题得证. □

定义 $\mathcal{P}_L(g)=\{p_l\in\mathbb{P}:p_l\mid g\}$ 为 g 的左素因子集. 根据推论 4.1, 有如下结论.

性质 4.5 设 S 为自然算术半群, $g\in S$. 对任意正整数列 $l_1>l_2>\cdots>l_k$, 有

$$p_{l_1}p_{l_2}\cdots p_{l_k}\mid g \quad\Leftrightarrow\quad p_{l_i}\in\mathcal{P}_L(g),\quad 1\leqslant i\leqslant k.$$

证明 "$\Leftarrow$" 根据推论 4.1 即得.

"$\Rightarrow$" 因为 l_i 是递减的, 故有

$$g=p_{l_1}p_{l_2}\cdots p_{l_k}=p_{l_i}p_{\sigma(l_1)}\cdots p_{\sigma(l_{i-1})}p_{l_{i+1}}\cdots p_{l_k}.$$

因此 $p_{l_i}\in\mathcal{P}_L(g)$ $(1\leqslant i\leqslant k)$. □

定理 4.2 的证明 只需验证 $\mu_S*\mathbf{1}=\delta_e$. 对于 $g=e$, 有 $(\mu_S*\mathbf{1})(e)=\mu_S(e)=1$. 若 $g\neq e$, 不妨设 $\mathcal{P}_L(g)=\{p_{l_1},\ldots,p_{l_k}\}$, 其中 $l_1>\cdots>l_k$. 根据性质 4.5 可得

$$(\mu_S*\mathbf{1})(g)=\sum_{x\mid g}\mu_S(x)=\sum_{\beta_i\in\{0,1\},1\leqslant i\leqslant k}\mu_S(p_{l_1}^{\beta_1}p_{l_2}^{\beta_2}\cdots p_{l_k}^{\beta_k})=(1-1)^k=0.$$

故 $\mu_S*\mathbf{1}=\delta_e$. 证明完毕. □

5 自然算术半群上的 ζ- 函数

基于前面对于自然算术半群中元素性质的讨论及其上 Möbius 函数的计算, 本节类比 Riemann ζ- 函数的定义给出自然算术半群上的 ζ- 函数. 在给出定义之前, 鉴于我们所考虑的半群是抽象定义的, 首先给出半群上的赋值.

5.1 自然算术半群的赋值

定义 5.1 设 S 为自然算术半群. 如果映射

$$\omega:S\to\mathfrak{W}_S$$

满足 $\omega(g)\in\mathbb{W}(g)$, $\forall\, g\in S$, 则称 ω 为 S 上的词截面. 如果

$$V:\mathfrak{W}_S\to\mathbb{C}$$

是 $\mathfrak{W}_S$ 上的一个映射, 则称 $v=V\circ\omega$ 为半群 S 上的一个赋值.

根据自然算术半群的定义, 在考虑赋值时, 对于 V 的选择, 一个很自然的考虑是将半群的生成元与自然数半群上的素数对应起来:

例 5.1 对 $P_{l_1}P_{l_2}\cdots P_{l_k}\in\mathfrak{W}_S$, 定义

$$V_0(P_{l_1}P_{l_2}\cdots P_{l_k})=q_{l_1}q_{l_2}\cdots q_{l_k},$$

这里 q_n 表示 $\mathbb{N}$ 中的第 n 个素数. 称 V_0 为 $\mathfrak{W}$ 上的自然映射.

根据自然算术半群上的元素都有唯一的正规形式, 可定义如下赋值:

定义 5.2 设 S 为自然算术半群, $g\in S$. 定义 S 上的词截面 $\omega_{\max}:S\to\mathfrak{W}_S$ 使得 $\omega_{\max}(g)\in\mathbb{W}(g)$ 为 g 的正规形式, 称 $v_{\max}=V_0\circ\omega_{\max}$ 为半群 S 上的极大赋值.

根据定理 3.2 可知, T_m 半群上的元素不仅具有唯一的正规形式, 同时也具有唯一的极小形式, 这启发我们定义 T_m 半群上的另一种赋值如下.

定义 5.3 设 S 为 T_m 半群, $g \in S$. 定义 S 上的词截面 $\omega_{\min}: S \to \mathfrak{W}_S$ 使得 $\omega_{\min}(g) \in \mathbb{W}(g)$ 为 g 的极小形式, 称 $v_{\min} = V_0 \circ \omega_{\min}$ 为半群 S 上的极小赋值.

注 5.1 设 $g_1, g_2 \in S$, 则有

$$v_{\max}(g_1g_2) \geqslant v_{\max}(g_1)v_{\max}(g_2), \quad v_{\min}(g_1g_2) \leqslant v_{\min}(g_1)v_{\min}(g_2).$$

特别地, T_0 半群 (即自然数半群) 上的极大赋值和极小赋值均退化为其上的恒等赋值.

5.2 自然算术半群的 ζ- 函数

在经典的解析数论中, 当 s 的实部 $\Re(s) > 1$ 时,

$$\zeta_{\mathbb{N}}(s)^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}, \tag{5.1}$$

其中 $\mu(n)$ 为自然数上的 Möbius 函数.

第 4 节研究了自然算术半群上 Möbius 函数, 同时考虑自然算术半群上的极大赋值. 我们可以定义自然算术半群上的 ζ- 函数如下.

定义 5.4 设 S 为自然算术半群. 定义

$$\zeta_S(s)^{-1} = \sum_{g \in S} \frac{\mu(g)}{v_{\max}(g)^s}, \quad \Re(s) > 1, \tag{5.2}$$

其中 $v_{\max}$ 为 S 上的极大赋值, μ 为 S 上的 Möbius 函数, 称 $\zeta_S(s)$ 为 S 上的 ζ- 函数.

我们在定义中选取 $\Re(s) > 1$ 是为了保证 $\zeta(s)^{-1}$ 的收敛性, 这一点可通过下面的引理说明.

引理 5.1 设 S 为自然算术半群, $\zeta_S(s)$ 为 S 上的 ζ- 函数, 则有

$$\zeta_S(s)^{-1} = \sum_{g \in S} \frac{\mu(g)}{v_{\max}(g)^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\hat{\mu}(n)}{n^s},$$

其中

$$\hat{\mu}(n) = \begin{cases} 1, & n = 1, \\ (-1)^k, & n = q_{l_k} q_{\sigma(l_{k-1})} \cdots q_{\sigma^{k-1}(l_1)}, \quad l_1 > l_2 > \cdots > l_k, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases} \tag{5.3}$$

这里的 σ 由定义 3.1 给出.

证明 直接计算可得

$$\begin{aligned} \zeta_S(s)^{-1} &= \sum_{g \in S} \frac{\mu(g)}{v_{\max}(g)^s} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l_1 > l_2 > \cdots > l_k} \frac{(-1)^k}{v_{\max}(p_{l_1} \cdots p_{l_{k-1}} p_{l_k})^s} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 1+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l_1>l_2>\cdots>l_k}\frac{(-1)^k}{V_0(P_{l_k}P_{\sigma(l_{k-1})}\cdots P_{\sigma^{k-1}(l_1)})^s}\\
&= 1+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l_1>l_2>\cdots>l_k}\frac{(-1)^k}{(q_{l_k}q_{\sigma(l_{k-1})}\cdots q_{\sigma^{k-1}(l_1)})^s}\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\hat{\mu}(n)}{n^s}.
\end{aligned}
\tag{5.4}
$$

证毕. □

将 $\hat{\mu}$ 与自然数半群上经典的 Möbius 函数 μ 进行对比, 可以看出 $\hat{\mu}$ 的支集是 μ 的支集的子集. 由 $|\hat{\mu}(n)|\leqslant 1$ 可以得到自然算术半群上的 ζ- 函数在 $\Re(s)>1$ 时是有意义的.

特别地, 对于 T_m 半群 S, 有

$$\zeta_S(s)^{-1}=\sum_{g\in S}\frac{\mu(g)}{v_{\max}(g)^s}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu_m(n)}{n^s},$$

其中

$$
\mu_m(n)=\begin{cases}1, & n=1,\\ (-1)^k, & n=q_{l_1}q_{l_2}\cdots q_{l_k},\quad l_{i+1}>l_i+m,\quad i=1,\ldots,k-1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}
\tag{5.5}
$$

5.2.1 T_m 半群上的 ζ- 函数

在上面一小节中, 我们通过类比

$$\zeta_{\mathbb{N}}(s)^{-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^s}$$

用 Möbius 函数和极大赋值定义了自然算术半群上的 ζ- 函数. 而对于 T_m 半群来说, 既有极大赋值又有极小赋值, 且这两种赋值在 $m=0$ 时均退化为 $\mathbb{N}$ 上的恒等赋值. 所以, 我们也可以类比

$$\zeta_{\mathbb{N}}(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s},$$

在 T_m 半群定义

$$\zeta_{\min}(s)=\sum_{g\in T_m}\frac{1}{v_{\min}(g)^s}.$$

同时 T_m 半群 S 作为自然算术半群, 有

$$\zeta_S(s)=\left(\sum_{g\in T_m}\frac{\mu(g)}{v_{\max}(g)^s}\right)^{-1},\quad \Re(s)>1.$$

关于这两个 ζ- 函数, 一个令人惊奇的事实是

$$\zeta_{\min}(s)=\zeta_S(s).$$

也就是说, 我们之前在自然算术半群上定义的 ζ- 函数确实是 $\mathbb{N}$ 上的 Riemann ζ- 函数的一个非交换推广.

引理 5.2 设 S 为 T_m 半群. 对任意 $n=q_1^{\alpha_1}q_2^{\alpha_2}\cdots q_k^{\alpha_k}\in\mathbb{N}$, 定义

$$\mathfrak{M}(n)=\{\omega\in\mathfrak{W}_S\mid \omega \text{ 是由 } \alpha_1 \text{ 个 } P_1,\, \alpha_2 \text{ 个 } P_2,\ldots,\alpha_k \text{ 个 } P_k \text{ 构成的极小形式}\}.$$

那么有计数公式

$$N_m(n)=\#\mathfrak{M}(n)=\prod_{l=1}^{k}\binom{\sum_{l-m\leqslant i\leqslant l}\alpha_i}{\alpha_l}=\prod_{l=1}^{k}\binom{\sum_{l\leqslant i\leqslant l+m}\alpha_i}{\alpha_l}.$$

这里约定, 当 $i\leqslant 0$ 或 $i\geqslant k+1$ 时, $\alpha_i=0$.

证明 设 $\omega=X_1P_kX_2P_kX_3\cdots X_{l-1}P_kX_l\in\mathfrak{W}\ (=\mathfrak{W}_S)$, 其中 X_i 中不含有 P_k, $1\leqslant i\leqslant n$, 定义删除映射

$$f_k:\mathfrak{W}\to\mathfrak{W},\quad \omega\mapsto X_1X_2\cdots X_l.$$

考虑 $\omega\in\mathfrak{M}(n)$, 根据注 3.5 可知, $\omega_g=P_{l_1}P_{l_2}\cdots P_{l_n}$ 是 $g\in T_m$ 的极小形式当且仅当

$$l_{i+1}\leqslant l_i+m,\quad \forall 1\leqslant i\leqslant n-1.$$

故 ω 去掉 P_k 之后仍为极小形式, 即

$$\omega'=f_k(\omega)\in\mathfrak{M}(n'),$$

这里 $n'=q_1^{\alpha_1}q_2^{\alpha_2}\cdots q_{k-1}^{\alpha_{k-1}}$. 反过来, ω 也可以通过在 ω' 中添加 α_k 个 P_k 得到. 同样根据注 3.5 可知, 这些 P_k 可以放在:

(i) ω' 的首位之前; 或

(ii) P_i 之后, 其中 $k-m\leqslant i\leqslant k-1$.

于是一共有 $1+\sum_{i\in\mathbb{N}:k-m\leqslant i\leqslant k-1}\alpha_i$ 个位置供 α_k 个 P_k 自由放置. 根据组合理论可知, 将 α 个球放入 $1+\beta$ 个抽屉共有 $\binom{\alpha+\beta}{\beta}$ 种方式, 所以

$$N_m(n)=N_m(n')\binom{\sum_{k-m\leqslant i\leqslant k}\alpha_i}{\alpha_k}.$$

通过对 k 归纳可得

$$N_m(n)=\prod_{l=1}^{k}\binom{\sum_{l-m\leqslant i\leqslant l}\alpha_i}{\alpha_l}. \tag{5.6}$$

注意到

$$\prod_{l=1}^{k}\binom{\sum_{l-m\leqslant i\leqslant l}\alpha_i}{\alpha_l}=\prod_{l\in\mathbb{Z}}\binom{\sum_{l-m\leqslant i\leqslant l}\alpha_i}{\alpha_l}=\frac{\prod_{l\in\mathbb{Z}}(\sum_{l-m\leqslant i\leqslant l}\alpha_i)!}{\prod_{l\in\mathbb{Z}}(\sum_{l-m\leqslant i\leqslant l-1}\alpha_i)!\prod_{l\in\mathbb{Z}}\alpha_l!},$$

$$\prod_{l=1}^{k}\binom{\sum_{l\leqslant i\leqslant l+m}\alpha_i}{\alpha_l}=\prod_{l\in\mathbb{Z}}\binom{\sum_{l\leqslant i\leqslant l+m}\alpha_i}{\alpha_l}=\frac{\prod_{l\in\mathbb{Z}}(\sum_{l\leqslant i\leqslant l+m}\alpha_i)!}{\prod_{l\in\mathbb{Z}}(\sum_{l+1\leqslant i\leqslant l+m}\alpha_i)!\prod_{l\in\mathbb{Z}}\alpha_l!},$$

于是 $N_m(n)$ 有另一表达式

$$N_m(n)=\prod_{l=1}^{k}\binom{\sum_{l\leqslant i\leqslant l+m}\alpha_i}{\alpha_l}. \tag{5.7}$$

证毕. □

注 5.2 可以验证, 在上述证明中, 若先从 P_1 开始删除, 则可以直接得到 (5.7).

引理 5.3 沿用引理 5.2 的记号, 则有上界估计

$$N_m(n) \leqslant n^m.$$

证明 当 $m=0$ 时, 对任意 n 均有 $N_m(n)=1=n^m$, 结论显然成立.

当 $m=1$ 时, 设 $0<t<1$, $\alpha,\beta\in\mathbb{N}_0$, 由 $(t+(1-t))^{\alpha+\beta}$ 的二项展开可得

$$t^\alpha(1-t)^\beta\binom{\alpha+\beta}{\alpha}\leqslant 1.$$

设 $n=q_1^{\alpha_1}q_2^{\alpha_2}\cdots q_k^{\alpha_k}$, 则

$$\binom{\alpha_1+\alpha_2}{\alpha_1}\binom{\alpha_2+\alpha_3}{\alpha_2}\binom{\alpha_3+\alpha_4}{\alpha_3}\leqslant 2^{\alpha_1+\alpha_2}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{\alpha_2}\cdot 3^{\alpha_3}\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^{\alpha_3}\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^{\alpha_4}=2^{\alpha_1-\alpha_4}3^{\alpha_2}5^{\alpha_3}5^{\alpha_4}.$$

故

$$\begin{aligned}N_1(n)&=\prod_{l\geqslant 1}\binom{\alpha_l+\alpha_{l+1}}{\alpha_l}\\&\leqslant 2^{\alpha_1-\alpha_4}3^{\alpha_2}5^{\alpha_3}5^{\alpha_4}\cdot\prod_{l\geqslant 4}2^{\alpha_l+\alpha_{l+1}}\\&=2^{\alpha_1}3^{\alpha_2}5^{\alpha_3}5^{\alpha_4}4^{\alpha_5+\alpha_6+\cdots}.\end{aligned}$$

因为 $q_1=2$, $q_2=3$, $q_3=5$, $q_4=7>5$, $q_j\geqslant q_5=11>4$, $j\geqslant 5$, 所以有 $N_1(n)\leqslant n$. 于是当 $m=1$ 时结论成立.

当 $m\geqslant 2$ 时, 同样设 $n=q_1^{\alpha_1}q_2^{\alpha_2}\cdots q_k^{\alpha_k}$, 那么根据 $\binom{\beta}{\alpha}\leqslant 2^\beta$ 可得

$$N_m(n)=\prod_{l\geqslant 1}\binom{\sum_{l\leqslant i\leqslant l+m}\alpha_i}{\alpha_l}\leqslant\prod_{l\geqslant 1}2^{\sum_{l\leqslant i\leqslant l+m}\alpha_i}=2^{\alpha_1+2\alpha_2+\cdots+m\alpha_m+(m+1)(\alpha_{m+1}+\alpha_{m+2}+\cdots)}.$$

当 $1\leqslant j\leqslant m$ 时, $2^j\leqslant 2^m\leqslant q_j^m$. 当 $j\geqslant m+1$ 时, $q_j\geqslant q_{m+1}\geqslant q_3=5\geqslant 2^{\frac{3}{2}}\geqslant 2^{1+\frac{1}{m}}$, 即 $2^{m+1}\leqslant q_j^m$. 因此有 $N_m(n)\leqslant n^m$, 结论成立. □

实际上, N_m 与 T_m 半群上的 $\zeta_{\min}$ 函数密切相关.

引理 5.4 T_m 半群上的 $\zeta_{\min}$ 函数是以 $N_m(n)$ 为系数的 Dirichlet 级数, 即

$$\zeta_{\min}(s)=\sum_{g\in T_m}\frac{1}{v_{\min}(g)^s}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{N_m(n)}{n^s}.$$

证明 由于 T_m 半群中的元素有唯一的极小形式, 所以

$$\#\mathfrak{M}(n)=\#\{g\in T_m: v_{\min}(g)=n\}.$$

这样有

$$\sum_{g\in T_m}\frac{1}{v_{\min}(g)^s}=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{v_{\min}(g)=n}\frac{1}{n^s}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{N_m(n)}{n^s}.$$

证毕. □

注 5.3　由引理 5.3 可知 $\zeta_{\min}(s)$ 在 $\Re(s)>m+1$ 时绝对收敛.

注 5.4　当 $m=0$ 时, μ_0 即为自然数上经典的 Möbius 函数, 而

$$N_0(n)=\prod_{l=1}^{k}\binom{\alpha_l}{\alpha_l}=1,$$

对应经典的 Riemann ζ- 函数

$$\zeta_{\mathbb{N}}(s)=\Bigg(\sum_{g\in T_0}\frac{\mu(g)}{v_{\max}(g)^s}\Bigg)^{-1}=\Bigg(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^s}\Bigg)^{-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{N_0(n)}{n^s}.$$

前文曾提到, 若 S 为 T_m 半群, 则其上的 $\zeta_{\min}$ 函数与 ζ_S 相同. 该结论可由下述定理推出.

定理 5.1　μ_m 的卷积逆是 N_m.

证明　只需证明

$$(\mu_m*N_m)(n)=\begin{cases}1, & n=1,\\ 0, & n>1.\end{cases}\tag{5.8}$$

当 $n=1$ 时, 有 $(\mu_m*N_m)(1)=\mu_m(1)N_m(1)=1$. 当 $n=q^{\alpha}>1$ 为素数幂时,

$$(\mu_m*N_m)(n)=\mu_m(1)N_m(q^{\alpha})+\mu_m(q)N_m(q^{\alpha-1})=1-1=0.\tag{5.9}$$

假设 $n=q_1^{\alpha_1}q_2^{\alpha_2}\cdots q_r^{\alpha_r}$, 其中 $r\geqslant 1$, $\alpha_r\neq 0$. 下面通过对 r 进行归纳来证明 $(\mu_m*N_m)(n)=0$.

当 $r=1$ 时, 由 (5.9) 知 (5.8) 成立.

假设当 $r=k-1$ 时, (5.8) 成立. 对于 $i\leqslant 0$, 约定 $\alpha_i=\beta_i=0$. 根据 μ_m 的性质和 N_m 的表达式可得

$$\begin{aligned}(\mu_m*N_m)(n)&=\sum_{\beta_i\in\{0,1\},1\leqslant i\leqslant k}\mu_m(q_1^{\beta_1}\cdots q_k^{\beta_k})N_m(q_1^{\alpha_1-\beta_1}\cdots q_k^{\alpha_k-\beta_k})\\&=\sum_{\beta_i\in\{0,1\},1\leqslant i\leqslant k}\mu_m(q_1^{\beta_1}\cdots q_k^{\beta_k})N_m(q_1^{\alpha_1-\beta_1}\cdots q_{k-1}^{\alpha_{k-1}-\beta_{k-1}})\binom{\sum_{k-m\leqslant i\leqslant k}\alpha_i-\beta_i}{\alpha_k-\beta_k}\\&=\sum_{\beta_i\in\{0,1\},1\leqslant i\leqslant k}\mu_m(q_1^{\beta_1}\cdots q_k^{\beta_k})N_m(q_1^{\alpha_1-\beta_1}\cdots q_{k-1}^{\alpha_{k-1}-\beta_{k-1}})(x+y),\end{aligned}$$

其中

$$x=\binom{\sum_{k-m\leqslant i\leqslant k}\alpha_i-1}{\alpha_k-1},\quad y=\binom{\sum_{k-m\leqslant i\leqslant k}\alpha_i-1}{\alpha_k}.$$

注意到, 当 $\beta_{k-m},\dots,\beta_k$ 中有至少两个为 1 时, 由 (5.5) 知 $\mu_m(q_1^{\beta_1}\cdots q_k^{\beta_k})=0$. 当 $\beta_{k-m},\dots,\beta_m$ 中恰有一个为 1 时,

$$\binom{\sum_{k-m\leqslant i\leqslant k}\alpha_i-\beta_i}{\alpha_k-\beta_k}=\begin{cases}x, & \beta_k=1,\\ y, & \text{其他}.\end{cases}$$

而当 $\beta_{k-m},\dots,\beta_m$ 全为 0 时,

$$\binom{\sum_{k-m\leqslant i\leqslant k}\alpha_i-\beta_i}{\alpha_k-\beta_k}=x+y.$$

于是, $\mu_m * N_m(n)$ 等于

$$\sum_{\beta_i\in\{0,1\},1\leqslant i\leqslant k}\mu_m(q_1^{\beta_1}\cdots q_k^{\beta_k})N_m(q_1^{\alpha_1-\beta_1}\cdots q_{k-1}^{\alpha_{k-1}-\beta_{k-1}})((1-\beta_{k-m})\cdots(1-\beta_{k-1})x+(1-\beta_k)y).$$

考虑 x 的系数

$$\begin{aligned}&\sum_{\beta_i\in\{0,1\},1\leqslant i\leqslant k}\mu_m(q_1^{\beta_1}\cdots q_k^{\beta_k})N_m(q_1^{\alpha_1-\beta_1}\cdots q_{k-1}^{\alpha_{k-1}-\beta_{k-1}})(1-\beta_{k-m})\cdots(1-\beta_{k-1})\\ &\quad=\sum_{\beta_i\in\{0,1\},1\leqslant i\leqslant k-1}[\mu_m(q_1^{\beta_1}\cdots q_{k-1}^{\beta_{k-1}}q_k)+\mu_m(q_1^{\beta_1}\cdots q_{k-1}^{\beta_{k-1}})]\cdot A,\end{aligned}$$

其中

$$A=N_m(q_1^{\alpha_1-\beta_1}\cdots q_{k-1}^{\alpha_{k-1}-\beta_{k-1}})(1-\beta_{k-m})\cdots(1-\beta_{k-1})$$

与 β_k 无关. 由于 $\mu_m(q_1^{\beta_1}\cdots q_{k-1}^{\beta_{k-1}}q_k)=-\mu_m(q_1^{\beta_1}\cdots q_{k-1}^{\beta_{k-1}})$, 所以 x 的系数为 0.

再考虑 y 的系数, 和式中只有 $\beta_k=0$ 的项有贡献, 故其系数为

$$\sum_{\beta_i\in\{0,1\},1\leqslant i\leqslant k-1}\mu_m(q_1^{\beta_1}\cdots q_{k-1}^{\beta_{k-1}})N_m(q_1^{\alpha_1-\beta_1}\cdots q_{k-1}^{\alpha_{k-1}-\beta_{k-1}})=(\mu_m*N_m)(q_1^{\alpha_1}\cdots q_{k-1}^{\alpha_{k-1}}).$$

如果 $q_1^{\alpha_1}\cdots q_{k-1}^{\alpha_{k-1}}\neq 1$, 那么根据归纳假设可得 y 的系数为 0, 故

$$(\mu_m*N_m)(n)=(\mu_m*N_m)(q_1^{\alpha_1}\cdots q_k^{\alpha_k})=0.$$

如果 $q_1^{\alpha_1}\cdots q_{k-1}^{\alpha_{k-1}}=1$, 则 n 退化为 (5.9) 的情形, 故也有

$$(\mu_m*N_m)(n)=0.$$

于是命题得证. □

由定理 5.1, 立即可得如下定理:

定理 5.2 设 S 为 T_m 半群, 则有 $\zeta_{\min}(s)=\zeta_S(s)$.

在 Riemann ζ- 函数的研究中, Euler 乘积公式扮演着非常重要的角色. 对于 T_m 半群上的 ζ- 函数, 也有类似的乘积公式.

定理 5.3 设 S 为 T_m 半群, 记 $\zeta_S=\zeta$, 则有乘积公式

$$\zeta(s)=\prod_{n\geqslant 1}a_n(s)^{-1},\quad \Re(s)>m+1, \tag{5.10}$$

其中

$$a_n(s)=\begin{cases}1, & n\leqslant 0,\\ 1-\dfrac{q_n^{-s}}{a_{n-m}(s)a_{n-m+1}(s)\cdots a_{n-1}(s)}, & n\geqslant 1.\end{cases}$$

证明 当 $\Re(s)>m+1$ 时, 由绝对收敛性可得

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{N_m(n)}{n^s}=\sum_{\alpha_1\geqslant 0,\alpha_2\geqslant 0,\dots}\prod_{l=1}^{\infty}\binom{\sum_{l\leqslant i\leqslant l+m}\alpha_i}{\alpha_l}q_l^{-\alpha_l s},$$

上述和式中的每一项都只有有限个 α_l 不为 0. 由于当 $j \leqslant 0$ 时, $a_j(s) = 1$, 因此上式最右边可以改写为

$$\sum_{\alpha_1 \geqslant 0, \alpha_2 \geqslant 0, \ldots} \prod_{l=1}^{m} \binom{\sum_{l \leqslant i \leqslant l+m} \alpha_i}{\alpha_l} \left(q_l^s \prod_{j=l-m}^{0} a_j(s)\right)^{-\alpha_l} \prod_{l=m+1}^{\infty} \binom{\sum_{l \leqslant i \leqslant l+m} \alpha_i}{\alpha_l} q_l^{-\alpha_l s}. \tag{5.11}$$

设 $\beta \in \mathbb{N}_0$, 当 $|z| < 1$ 时, 对等式

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{\alpha=0}^{\infty} z^{\alpha}$$

两边关于 z 求 β 次导可得

$$\frac{1}{(1-z)^{1+\beta}} = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \binom{\alpha+\beta}{\alpha} z^{\alpha}.$$

在 (5.11) 中先对 α_1 求和, 则其可写作

$$\begin{aligned} &\sum_{\alpha_2 \geqslant 0, \alpha_3 \geqslant 0, \ldots} B(\alpha_2, \alpha_3, \ldots) \cdot \sum_{\alpha_1=0}^{\infty} \binom{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{m+1}}{\alpha_1} q_1^{-\alpha_1 s} \\ &\quad = a_1(s)^{-1} \cdot \sum_{\alpha_2 \geqslant 0, \alpha_3 \geqslant 0, \ldots} B(\alpha_2, \alpha_3, \ldots) \cdot \frac{1}{a_1(s)^{\sum_{i=2}^{m+1} \alpha_i}}, \end{aligned}$$

其中

$$B(\alpha_2, \alpha_3, \ldots) = \prod_{l=2}^{m+1} \binom{\sum_{l \leqslant i \leqslant l+m} \alpha_i}{\alpha_l} \left(q_l^s \prod_{j=l-m}^{0} a_j(s)\right)^{-\alpha_l} \prod_{l=m+2}^{\infty} \binom{\sum_{l \leqslant i \leqslant l+m} \alpha_i}{\alpha_l} q_l^{-\alpha_l s}.$$

于是 (5.11) 变为

$$a_1(s)^{-1} \cdot \sum_{\alpha_2 \geqslant 0, \alpha_3 \geqslant 0, \ldots} \prod_{l=2}^{m+1} \binom{\sum_{l \leqslant i \leqslant l+m} \alpha_i}{\alpha_l} \left(q_l^s \prod_{j=l-m}^{1} a_j(s)\right)^{-\alpha_l} \prod_{l=m+2}^{\infty} \binom{\sum_{l \leqslant i \leqslant l+m} \alpha_i}{\alpha_l} q_l^{-\alpha_l s}.$$

类似地, 再对 α_2 求和可以得到

$$a_1(s)^{-1} a_2(s)^{-1} \cdot \sum_{\alpha_3 \geqslant 0, \alpha_4 \geqslant 0, \ldots} \prod_{l=3}^{m+2} \binom{\sum_{l \leqslant i \leqslant l+m} \alpha_i}{\alpha_l} \left(q_l^s \prod_{j=l-m}^{2} a_j(s)\right)^{-\alpha_l} \prod_{l=m+3}^{\infty} \binom{\sum_{l \leqslant i \leqslant l+m} \alpha_i}{\alpha_l} q_l^{-\alpha_l s}.$$

对 α_n 重复上述求和过程, 可以得到 $\zeta(s)$ 等于

$$\left(\prod_{j=1}^{n} a_j(s)^{-1}\right) \sum_{\alpha_{n+1} \geqslant 0, \alpha_{n+2} \geqslant 0, \ldots} \prod_{l=n+1}^{n+m} \binom{\sum_{l \leqslant i \leqslant l+m} \alpha_i}{\alpha_l} \left(q_l^s \prod_{j=l-m}^{n} a_j(s)\right)^{-\alpha_l} \prod_{l=n+m+1}^{\infty} \binom{\sum_{l \leqslant i \leqslant l+m} \alpha_i}{\alpha_l} q_l^{-\alpha_l s}.$$

注意到,

$$\begin{aligned} &\sum_{\alpha_{n+1} \geqslant 0, \alpha_{n+2} \geqslant 0, \ldots} \prod_{l=n+1}^{n+m} \binom{\sum_{l \leqslant i \leqslant l+m} \alpha_i}{\alpha_l} \left(q_l^s \prod_{j=l-m}^{n} a_j(s)\right)^{-\alpha_l} \prod_{l=n+m+1}^{\infty} \binom{\sum_{l \leqslant i \leqslant l+m} \alpha_i}{\alpha_l} q_l^{-\alpha_l s} \\ &\quad = 1 + \sum_{P^-(k) \geqslant q_{n+1}} \frac{N_m(k)}{k^s}, \end{aligned}$$

其中 $P^{-}(k)$ 表示 k 的最小素因子. 根据上界估计 $N_m(n) \leqslant n^m$, 当 $\Re(s) > m+1$ 时, $\sum_{k\geqslant 1}\frac{N_m(k)}{k^s}$ 绝对收敛, 故

$$\lim_{n\to\infty} 1 + \sum_{P^{-}(k)\geqslant q_{n+1}} \frac{N_m(k)}{k^s} = 1.$$

于是

$$\zeta(s) = \prod_{n\geqslant 1} a_n(s)^{-1}, \quad \Re(s) > m+1.$$

证明完毕. □

接下来将通过研究 (5.10) 给出 Thompson 半群 T_1 上的 ζ- 函数直到 $\Re(s) = 1$ 左侧的解析延拓, 并得到相应的素数定理.

5.2.2 T_1 半群上的 ζ- 函数的解析延拓

对于 T_1 半群上的 ζ- 函数, 根据 (5.10) 可得

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{N_1(n)}{n^s} = \prod_{n\geqslant 1} a_n(s)^{-1}, \quad \Re(s) > 2,$$

其中 $a_0(s) = 1$, $a_n(s) = 1 - \frac{q_n^{-s}}{a_{n-1}(s)}$, $n \geqslant 1$. 通过迭代, 可以得到连分式

$$a_n(s) = 1 - \cfrac{q_n^{-s}}{1 - \cfrac{q_{n-1}^{-s}}{1 - \cfrac{\cdots}{1 - \frac{q_2^{-s}}{1-q_1^{-s}}}}}. \tag{5.12}$$

注意到对任意 $n \geqslant 0$, $a_n(s)$ 是 $\mathbb{C}$ 上的亚纯函数. 我们将证明, $a_n(s)$ 在 $[0,\infty)$ 上都有零点, 且 $\zeta(s)$ 可以解析延拓到这些零点的上确界所在竖直线的右侧. 我们先给出几个引理.

引理 5.5 考虑函数列 $a_n(\sigma)$, $\sigma \geqslant 0$, $n \geqslant 1$. 则存在

$$\sigma_1 = 0 < \sigma_2 = 0.787885\cdots < \sigma_3 < \cdots < \sigma_n < \sigma_{n+1} < \cdots,$$

使得

(i) $a_n(\sigma_n) = 0$;

(ii) 当 $\sigma > \sigma_{n-1}$ 时, 函数 $a_n(\sigma)$ 关于 σ 严格单调递增.

证明 通过对 n 进行归纳来证明命题.

我们先验证 $n = 1, 2$ 的情形. 当 $n = 1$ 时, $a_1(\sigma) = 1 - \frac{1}{q_1^{\sigma}}$, 显然有 $a_1(0) = 0$ 且 $a_1(\sigma)$ 在 $[0,\infty)$ 上严格单调递增.

当 $n = 2$ 时, 由 $n = 1$ 的情形知 $a_1(0) = 0$ 且 $a_1(\sigma)$ 在 $(0,\infty)$ 上为严格单调递增的正函数. 根据函数列 $a_n(s)$ 的递推关系, 有

$$a_2(\sigma) = 1 - a_1^{-1}(\sigma) q_2^{-\sigma}.$$

设 $\sigma'' > \sigma' > 0$, 则

$$a_2(\sigma'') - a_2(\sigma') = a_1^{-1}(\sigma') q_2^{-\sigma'} - a_1^{-1}(\sigma'') q_2^{-\sigma''} > 0.$$

于是 $a_2(\sigma)$ 在 $(0,\infty)=(\sigma_1,\infty)$ 上严格单调递增. 易验证

$$\lim_{\sigma\to 0^+} a_2(\sigma)=-\infty \quad \text{且} \quad \lim_{\sigma\to\infty} a_2(\sigma)=1.$$

由介值定理知, 存在 $\sigma_2>0$ 使得 $a_2(\sigma_2)=0$.

假设命题对 $n=k\geqslant 2$ 时成立, 即 $a_k(\sigma)$ 满足如下条件:

- 存在 $\sigma_k>\sigma_{k-1}$, 使得 $a_k(\sigma_k)=0$;
- 当 $\sigma>\sigma_{k-1}$ 时, $a_k(\sigma)$ 严格单调递增.

显然 $a_k(\sigma)$ 在 (σ_k,∞) 上为严格单调递增的正函数. 由递推式

$$a_{k+1}(\sigma)=1-a_k(\sigma)^{-1}q_{k+1}^{-\sigma}$$

可得 $a_{k+1}(\sigma)$ 在 (σ_k,∞) 上严格单调递增. 注意到

$$\lim_{\sigma\to\sigma_k^+} a_{k+1}(\sigma)=-\infty \quad \text{且} \quad \lim_{\sigma\to\infty} a_{k+1}(\sigma)=1,$$

故由介值定理知存在 $\sigma_{k+1}>\sigma_k$ 使得 $a_{k+1}(\sigma_{k+1})=0$. 证明完毕. □

注 5.5 序列 $\{\sigma_n\}$ 存在上界. 事实上, 通过数学归纳法可以验证当 $\sigma\geqslant 2$ 时,

$$0<a_1(\sigma)<a_2(\sigma)<\cdots<a_n(\sigma)<\cdots.$$

函数列 $a_n(\sigma)$ 关于 n 的收敛性可由下面的引理给出.

引理 5.6 存在唯一的 $\sigma_0>0$ 使得

(i) $a_n(\sigma_0)$ 关于 n 单调递减且 $\lim_{n\to\infty} a_n(\sigma_0)=0$;

(ii) 对任意 $\sigma>\sigma_0$, 有 $\lim_{n\to\infty} a_n(\sigma)=1$.

证明 考虑集合

$$\Sigma:=\Big\{\sigma>0:\lim_{n\to\infty} a_n(\sigma)=1 \text{ 且 } a_n(\sigma)>0,\forall\, n\in\mathbb{N}\Big\}.$$

我们将证明存在 $\sigma_0>0$ 使得 $\Sigma=(\sigma_0,\infty)$.

首先证明 Σ 非空. 注意到, 当 σ 足够大时有 $a_2(\sigma)<a_1(\sigma)>0$, 由于 $\{q_n\}$ 严格递增, 因此可归纳证明

$$a_{n+1}(\sigma)<a_n(\sigma), \quad n\in\mathbb{N}.$$

由于 $a_1(\sigma)>0$ 是序列 $\{a_n(\sigma)\}$ 的一个正下界且 q_n 趋于无穷, 于是

$$\lim_{n\to\infty} a_n(\sigma)=1.$$

故 Σ 非空.

接着说明, 若 $\sigma\in\Sigma$, 则 $[\sigma,\infty)\in\Sigma$. 任取 $\sigma'>\sigma$. 注意到

$$a_1(\sigma')=1-\frac{1}{q_1^{\sigma'}}>1-\frac{1}{q_1^{\sigma}}=a_1(\sigma)>0,$$

通过对 n 归纳可得

$$a_n(\sigma')=1-\frac{1}{a_{n-1}(\sigma')q_n^{\sigma'}}>1-\frac{1}{a_{n-1}(\sigma)q_n^{\sigma}}=a_n(\sigma)>0.$$

由 $a_n(\sigma')$ 恒正知 $a_n(\sigma')$ 恒小于 1. 故由极限的两边夹法则知

$$\lim_{n\to\infty} a_n(\sigma') = 1.$$

故 $\sigma' \in \Sigma$.

下面说明 Σ 为开集. 如果 $\sigma \in \Sigma$, 则由 $a_1(\sigma) < 1$ 和 $\lim_{n\to\infty} a_n(\sigma) = 1$ 可得存在 n_σ 使得

$$a_{n_\sigma+1}(\sigma) > a_{n_\sigma}(\sigma) > 0.$$

根据 $a_n(\sigma)$ 关于 σ 的连续性, 可得当 δ 与 σ 足够接近时有 $a_n > 0$ $(\forall\, n < n_\sigma)$ 且 $a_{n_\sigma+1}(\delta) > a_{n_\sigma}(\delta) > 0$. 通过归纳可得

$$a_{n+1}(\delta) > a_n(\delta) > 0, \quad \forall\, n \geqslant n_\sigma.$$

故有 $\delta \in \Sigma$. 因此 Σ 是开集.

最后, 我们说明 Σ 有正的下界. 注意到

$$a_1(\sigma)a_2(\sigma) = a_1(\sigma) - \frac{1}{q_2^\sigma} = 1 - \frac{1}{q_1^\sigma} - \frac{1}{q_2^\sigma}.$$

故当 σ 足够小时, $a_1(\sigma)a_2(\sigma) < 0$. 因此 Σ 必有正的下界.

记 $\sigma_0 = \inf \Sigma$, 则有

$$\Sigma = (\sigma_0, \infty).$$

对于任意 n, 根据引理 5.5, 有 $\sigma_0 \geqslant \sigma_{n+1} > \sigma_n$. 于是 $a_n(\sigma_0) > 0$, 即 $a_n(\sigma_0)$ 是正数列. 又因为 $\sigma_0 \notin \Sigma$, 所以 $a_n(\sigma_0)$ 单调递减且趋于 0. 存在性得证.

下面说明唯一性. 假设存在 $\sigma'' < \sigma_0$ 使得 $a_n(\sigma'')$ 单调递减且趋于 0, 则有 $a_n(\sigma'') \leqslant a_n(\sigma_0)$. 根据 $a_n(\sigma'') > 0$ 可得 $a_{n-1}(\sigma'')q_n^{\sigma''} > 1$. 于是

$$a_{n-1}(\sigma_0)q_n^{\sigma_0} \geqslant a_{n-1}(\sigma'')q_n^{\sigma''} \cdot q_n^{\sigma_0-\sigma''} > q_n^{\sigma_0-\sigma''}.$$

故 $a_n(\sigma_0) \geqslant 1 - q_n^{\sigma''-\sigma_0}$, 这与 $a_n(\sigma_0)$ 趋于 0 矛盾. 故存在唯一的 $\sigma_0 > 0$ 使得 $a_n(\sigma_0)$ 单调递减且趋于 0. 唯一性得证. □

注 5.6 通过数值计算可得

$$\sigma_0 = 0.94664991038513\cdots < 1.$$

一个自然的问题是, σ_0 是否为无理数.

下面结合 T_1 半群上 ζ- 函数的 Euler 乘积, 利用上述有关 a_n 的结果给出 ζ- 函数的一个解析延拓.

引理 5.7 我们有

$$|a_n(s)| \geqslant a_n(\sigma), \quad \Re(s) > \sigma_0.$$

证明 我们对 n 进行归纳. 当 $n = 1$ 时,

$$|a_1(s)| = |1 - q_1^{-s}| = \sqrt{1 + q_1^{-2\sigma} - 2\cos(t\log q_1)q_1^{-\sigma}} \geqslant a_1(\sigma).$$

令 $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$, $x, y \in \mathbb{R}$. 注意到

$$|1 - (x + \mathrm{i}y)|^2 = 1 + x^2 + y^2 - 2x$$

$$
\begin{aligned}
&= 1 + |z|^2 - 2\Re(z) \\
&\geqslant 1 + |z|^2 - 2|z| \\
&= (1 - |z|)^2.
\end{aligned} \tag{5.13}
$$

假设结论对于 $n = k$ 时成立, 即 $|a_k(s)| \geqslant a_k(\sigma)$. 当 $n = k+1$ 时, 根据 (5.13) 有

$$
\begin{aligned}
|a_{k+1}(s)| &= \sqrt{|1 - a_k(s)^{-1} q_{k+1}^{-s}|^2} \\
&\geqslant \sqrt{(1 - |a_k(s)^{-1} q_{k+1}^{-s}|)^2} \\
&= \sqrt{(1 - |a_k(s)^{-1}||q_{k+1}^{-s}|)^2} \\
&\geqslant \sqrt{(1 - |a_k(\sigma)^{-1}||q_{k+1}^{-\sigma}|)^2} \\
&= |a_{k+1}(\sigma)|.
\end{aligned}
$$

证明完毕. □

定理 5.4 T_1 半群的 ζ- 函数可以解析延拓为 $\Omega = \{s \in \mathbb{C} : \Re(s) > \sigma_0\}$ 上的亚纯函数, $s = 1$ 为其唯一的极点, 相应的留数为 $\eta(1) \approx 5.8575$. 这里

$$
\eta(s) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1 - q_n^{-s}}{a_n(s)}, \quad \Re(s) > \sigma_0,
$$

也即

$$
\zeta(s) = \eta(s)\zeta_{\mathbb{N}}(s), \quad \Re(s) > \sigma_0.
$$

证明 根据定理 5.3 可知, 当 $\Re(s) > 2$ 时, 有

$$
\frac{\zeta_{\mathbb{N}}(s)}{\zeta(s)} = \prod_{n \geqslant 1} \frac{a_n(s)}{1 - q_n^{-s}} = \prod_{n \geqslant 1} \frac{1 - a_{n-1}(s)^{-1} q_n^{-s}}{1 - q_n^{-s}} = \prod_{n \geqslant 1} \left(1 + \frac{1 - a_{n-1}(s)^{-1}}{q_n^s - 1}\right);
$$

当 $n \geqslant 2$ 时, 有

$$
1 + \frac{1 - a_{n-1}(s)^{-1}}{q_n^s - 1} = 1 - \frac{a_{n-2}(s)^{-1}}{q_{n-1}^s (q_n^s - 1)}.
$$

假设 $s = \sigma + \mathrm{i}t$. 根据引理 5.7 可知, 当 $\sigma > \sigma_0$ 时, $|a_n(s)| \geqslant a_n(\sigma)$, 由引理 5.6 知 $|a_n(s)|$ 有正下界. 又因为 $q_n \to +\infty$ 和 $\sigma > \sigma_0$, 由引理 5.6 有

$$
\lim_{n \to \infty} a_n(s) \to 1.
$$

这样就有

$$
1 - \frac{a_{n-2}(s)^{-1}}{q_{n-1}^s (q_n^s - 1)} \sim 1 - \frac{1}{q_{n-1}^s (q_n^s - 1)} \sim 1 - q_n^{-2s}.
$$

因此当 $\sigma > \sigma_0 > \frac{1}{2}$ 时, $\eta(s)$ 是无零点解析函数. 另外对于任意 $\sigma_1 > \sigma_0$, $|\eta(s)|$ 在区域 $\sigma > \sigma_1$ 上有正的上下界. 由于 $\Re(s) > 2$ 时有

$$
\zeta(s) = \eta(s)\zeta_{\mathbb{N}}(s),
$$

等式右边是 Ω 上的亚纯函数, 所以 $\zeta(s)$ 可以解析延拓到 Ω 上. 不难得到 $\zeta(s)$ 在极点 $s = 1$ 处的留数为 $\eta(1) \approx 5.8575$. 证明完毕. □

5.2.3 T_1 半群上的素数定理

Riemann ζ- 函数在实部为 1 的竖直线上没有零点等价于素数定理

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}.$$

在经典的解析数论中, 素数定理有如下等价形式:

$$\sum_{n \geqslant 1} \frac{\mu(n)}{n} = 0.$$

对于 T_1 半群, 我们也可以考虑其上的 "素数定理".

定理 5.5 μ 为 T_1 半群上的 Möbius 函数, $v_{\max}$ 为其极大赋值, 那么有

$$\sum_{g \in T_1} \frac{\mu(g)}{v_{\max}(g)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_1(n)}{n} = 0. \tag{5.14}$$

我们先给出在证明中将用到的公式.

引理 5.8 (Perron 求和公式) 设 Dirichlet 级数 $F(s) = \sum_{n \geqslant 1} \frac{a_n}{n^s}$ 的绝对收敛坐标为 σ_a, 则对于 $\kappa > \max\{0, \sigma_a\}$、$T \geqslant 1$ 和 $x \geqslant 1$, 有

$$\sum_{n \leqslant x} a_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\kappa - \mathrm{i}T}^{\kappa + \mathrm{i}T} F(s) x^s \frac{ds}{s} + O\bigg(x^\kappa \sum_{n \geqslant 1} \frac{|a_n|}{n^\kappa (1 + T|\log(x/n)|)} \bigg).$$

此结论的证明详见文献 [7, 定理 II.2.3].

定理 5.5 的证明 设 $\Re(s_0) = 1, a_n = \frac{\mu_1(n)}{n^{s_0}}$, 并取 $\kappa = \frac{1}{\log x}$. 根据引理 5.8 可得

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{\mu_1(n)}{n^{s_0}} = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\kappa - \mathrm{i}T}^{\kappa + \mathrm{i}T} \frac{x^w}{w \zeta(s_0 + w)} dw + O\bigg(\sum_{n \geqslant 1} \frac{n^{-1-\kappa}}{(1 + T|\log(x/n)|)} \bigg).$$

我们先估计余项. 余项中所有满足 $|\log(x/n)| > 1$ (即 $n > \mathrm{e}x$ 或者 $n < \frac{x}{\mathrm{e}}$) 的项的和不超过 $O(\frac{\log x}{T})$. 其他的项 (即 $\frac{x}{\mathrm{e}} \leqslant n \leqslant \mathrm{e}x$) 的项的和

$$\ll \frac{1}{x} \sum_{0 \leqslant n \leqslant x} \frac{1}{1 + Tn/x} \ll \frac{1}{x} + \sum_{1 \leqslant n \leqslant x} \frac{1}{Tn} \ll \frac{1}{x} + \frac{\log x}{T}.$$

故余项有上界

$$O\bigg(\frac{1}{x} + \frac{\log x}{T} \bigg).$$

再对积分作估计. 由于存在正常数 c 使得 $\zeta_{\mathbb{N}}(s)$ 在区域 $\sigma > 1 - \frac{c}{\log(|t|+2)}$ $(> \sigma_0)$ 内无零点且 $\frac{1}{\zeta_{\mathbb{N}}(s)} \ll \log |t|$, 而

$$\bigg| \frac{\zeta(s)}{\zeta_{\mathbb{N}}(s)} \bigg| = |\eta(s)|$$

在该区域内有正的上下界, 故 $\zeta(s)$ 在区域 $\sigma > 1 - \frac{c}{\log(|t|)}$ 内无零点且 $\frac{1}{\zeta(s)} \ll \log |t|$. 将积分线左移到

$$\Re(w) = -\frac{c}{\log T},$$

根据留数定理可得

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{\mu_1(n)}{n^{s_0}}=\frac{1}{\zeta(s_0)}+O\bigg(\frac{\log x}{T}+\frac{1}{x}+(\log T)^2x^{-c/\log T}\bigg).$$

取 $T=\mathrm{e}^{\sqrt{c\log x}}$, 可得

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{\mu_1(n)}{n^{s_0}}=\frac{1}{\zeta(s_0)}+O(\mathrm{e}^{-\sqrt{c\log x}}\log x).$$

取 $s_0=1$, 此时 $w=0$ 不是 $\frac{x^w}{w\zeta(s_0+w)}$ 的极点. 因此,

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{\mu_1(n)}{n}=\zeta(1)^{-1}=0.$$

证明完毕. □

以上, 我们对 T_m 半群 (特别是 T_1 半群) 上 ζ- 函数的解析性及其有关的算术函数作了初步的研究, 在此基础上, 我们自然地可以提出如下问题.

问题 5.1　一般的 T_m 半群上的 ζ- 函数的解析延拓是什么? 是否有函数方程?

问题 5.2　T_1 半群上 "素数定理" 对应半群上的什么信息? 例如会不会与 Thompson 群的顺从性 (amenable) 有联系?

问题 5.3　T_m 半群上的 ζ- 函数是否是自守 L 函数? 或者更一般地, 是否存在群 G, 使得 ζ- 函数在群 G 上具有某种 "自守性"?

问题 5.4　T_m 半群上的 ζ- 函数的性质是否可以为我们研究经典的 Riemann ζ- 函数提供信息?

要回答以上的问题, 我们还需要进行进一步的探索. 我们希望本文能够给相关研究者提供一个新的思考角度.

致谢　作者对审稿人的仔细审查和修改意见表示感谢, 同时感谢吴冬生博士在本文的写作过程中提供的帮助.

参考文献

1 Ge L M, Xue B Q. Do mathematically interesting zero-value solutions of the Riemann zeta function all have the form $\frac{1}{2}+it$ (in Chinese)? Chin Sci Bull, 2018, 63: 141–147 [葛力明, 薛博卿. 黎曼 ζ- 函数的零点都有 $\frac{1}{2}+it$ 的形式吗? 科学通报, 2018, 63: 141–147]

2 Ge L M. On the Riemann zeta function, I: KS-transformation (in Chinese). Acta Math Sin Chin Ed, 2019, 62: 673–686 [葛力明. 黎曼 ζ- 函数之一: KS- 变换. 数学学报 (中文版), 2019, 62: 673–686]

3 Atiyah F M. K-Theory (Notes taken by Anderson D W, Fall 1964). New York: W. A. Benjamin, 1967

4 Malcev A. On the immersion of an algebraic ring into a field. Math Ann, 1937, 113: 686–691

5 Cannon J W, Floyd W J, Parry W R. Introductory notes on Richard Thompsons groups. Enseign Math, 1996, 42: 215–256, 101–121

6 Xue B. Non-commutative arithmetics based on Thompson's group F. Acta Math Sin Engl Ser, 2021, in press

7 Tenenbaum G. Introduction to Analytic and Probabilistic Number Theory, 3rd ed. Providence: Amer Math Soc, 2010

8 Feng K Q. Algebraic Number Theory (in Chinese). Beijing: Science Press, 2000 [冯克勤. 代数数论. 北京: 科学出版社, 2000]

9 Pan C D. Foundations of Number Theory (in Chinese). Beijing: Higher Education Press, 2012 [潘承洞. 数论基础. 北京: 高等教育出版社, 2012]

Riemann ζ-functions on semigroups

Liming Ge, Minghui Ma & Bo Qi

Abstract By introducing prime elements in semigroups, divisor functions and Möbius functions are defined and studied on a class of semigroups. The Riemann ζ-function can be naturally generalized through different means on these semigroups. The semigroup associated with Thompson's group is a typical example of our interest. We show that zeta functions on Thompson's semigroup obtained through different definitions agree with each other. Moreover, this zeta function has at least another real pole less than 1 besides a simple pole at 1. Many other arithmetic results are obtained on some noncommutative semigroups such as analogs of the prime number theorem on natural numbers.

Keywords **semigroup, divisor, ζ-function, prime number theorem**

MSC(2020) **11A99, 11M99, 11N99**

doi: 10.1360/SSM-2021-0060