扭曲网格上带有非光滑系数扩散方程的加权 DG 方法

张荣培^{1*}, 蔚喜军², 李明军³

1. 广东工业大学应用数学学院, 广州 510006;

2. 北京应用物理与计算数学研究所计算物理实验室, 北京 100088;

3. 湘潭大学数学与计算科学学院, 湘潭 411105

E-mail: rongpeizhang@163.com, yuxj@iapcm.ac.cn, alimingjun@163.com

收稿日期: 2020-05-31; 接受日期: 2021-03-29; 网络出版日期: 2021-09-24; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11571002 和 11971411) 资助项目

摘要 具有各向异性和间断扩散系数的椭圆型方程在辐射流体力学和油藏模拟等许多物理应用中发挥着重要作用. 辐射扩散问题的计算通常基于流体的网格. 在流体计算中, 网格会随着流体的流动发生扭曲变形. 间断 Galerkin (discontinuous Galerkin, DG) 方法是计算数学中一类重要方法, 适用于间断系数和非规则网格等复杂情形. 本文在对称内惩罚方法的基础上发展加权 DG 方法求解扭曲网格上的椭圆方程. 在理论分析中, 首先给出 DG 方法中双线性形式的强制性和连续性的证明, 然后基于强制性和连续性给出能量范数的误差分析, 最后采用对偶论证技巧给出 L^2 范数下的误差估计. 数值实验在随机网格、正弦曲线型网格、Shestakov 型网格和 Z 字型扭曲网格上进行, 数值结果验证了加权 DG 方法对具有间断和各向异性扩散系数的椭圆问题的有效性.

关键词 间断 Galerkin 方法 扭曲网格 椭圆方程 各向异性

MSC (2020) 主题分类 65M12, 65M60

1 引言

考虑如下带有非光滑扩散系数的椭圆方程:

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot (K \nabla u) &= f, \quad \text{在 } \Omega \text{ 内}, \\ u &= g_D, \quad \text{在 } \Gamma_D \text{ 上}, \\ K \nabla u \cdot \mathbf{n} &= g_N, \quad \text{在 } \Gamma_N \text{ 上}, \end{aligned} \quad (1.1)$$

其中 Ω 是有界凸多边形区域, 由多个区域组成, $\Omega = \Omega_1 \cup \cdots \cup \Omega_m$; 边界分为两部分: $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$, 这里 Γ_D 和 Γ_N 分别是 Dirichlet 边界和 Neumann 边界, 对应的边界条件分别为 g_D 和 g_N ; $\mathbf{n}$ 是边界

英文引用格式: Zhang R P, Yu X J, Li M J. Weighted discontinuous Galerkin method for diffusion equation with non-smooth coefficients on distorted polygonal meshes (in Chinese). Sci Sin Math, 2021, 51: 1–14, doi: 10.1360/SSM-2020-0159

上的单位外法向量; 扩散系数 $\mathbf{K} = (k_{ij})$ 在不同的区域上存在间断, 在每个区域都是对称正定矩阵, 即存在两个正常数 K_0 和 K_1 满足不等式

$$K_0 \mathbf{x}^T \mathbf{x} \leq \mathbf{x}^T \mathbf{K} \mathbf{x} \leq K_1 \mathbf{x}^T \mathbf{x}, \quad \text{对任意的 } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \text{ 且 } \mathbf{x} \neq 0; \quad (1.2)$$

f 是源汇项. 在二维情形, $\mathbf{K}$ 、 g_D 、 g_N 和 f 都是 (x, y) 的已知函数, $u(x, y)$ 是待求函数.

许多实际的物理系统中包含各种物理量的扩散过程, 如在惯性约束聚变、磁约束聚变和油藏模拟等应用领域中 (参见文献 [1, 2]), 方程 (1.1) 描述这些物理系统的扩散过程. 方程 (1.1) 的扩散系数可以是间断或各向异性的, 例如在辐射扩散问题中, 温度在同种介质中有不同的扩散性质. 当能量从高温介质传向低温介质时, 高温介质的导热系数要比低温介质的导热系数大得多, 两者可以相差多个数量级. 在油藏模拟问题中, 水、原油和天然气等流体都储存在由相互连通的孔隙网络填充的储层岩石中, 这些流体的扩散和流动在很大程度上取决于岩石的渗透性. 这种渗透性随位置和流动方向的变化而变化, 在水平方向上的渗透性比在垂直方向上的渗透性大得多, 此时张量矩阵 $\mathbf{K}$ 具有强各向异性.

在辐射流体力学中, 扩散方程的计算需要考虑流体运动的影响, 流体计算中通常采用 Lagrange 方法或者任意 Lagrange-Euler 方法 [3], 此时计算网格随流体运动, 物理量的剧烈变化会导致出现大变形网格. 扩散方程的计算是在流体网格上进行, 如何在大变形网格上构造稳健的数值格式一直是研究热点. 经典的数值方法包括九点格式 [4]、有限体积方法 [5, 6]、拟态有限差分方法 [7] 和多点通量逼近方法 [8] 等. 最近几年, 众多学者在经典格式的基础上发展了丰富多样的数值方法. Gao 和 Wu [9] 基于非线性两点通量逼近发展了保正有限体积格式, Su 等 [10] 和 Zhang 等 [11] 提出了以节点为中心的有限体积格式, Sheng 等 [12] 发展了并行有限体积格式, Guo 等 [13] 改进了支撑算子格式避免“数值热障”的出现.

间断 Galerkin (discontinuous Galerkin, DG) 方法是近年来比较流行的数值方法, 经过众多学者的努力, 已发展出丰富多样的 DG 方法. 在流体问题计算中, Cockburn 和 Shu [14] 开创性地发展了 Runge-Kutta DG (RKDG) 方法求解双曲守恒律; 在扩散问题计算中, 单元界面上的数值流通量如果用左右单元上试探函数的梯度的算数平均代替, 会导致不相容问题. 为了解决 DG 方法的数值通量问题, 发展出了内惩罚间断 Galerkin [15, 16]、局部间断 Galerkin [17, 18]、直接间断 Galerkin [19, 20] 和基于扩散方程广义 Riemann 问题 DG [21] 等方法. 由于基函数采用的是分片多项式, 因此其格式可以不受单纯形网格的限制, 支持任意多边形网格和带有悬点的网格. Mu 等 [22] 应用内惩罚间断方法在一般多边形网格上求解二阶椭圆方程, Ragusa [23] 发展了分片线性间断有限元方法求解任意多边形网格上的扩散方程. Li 等 [24] 基于单元片重构空间, 提出了一种任意阶精度 DG 方法求解任意多边形网格上的椭圆方程, 该方法的优势在于逼近空间在每一个单元只有一个自由度. 尽管上述工作在任意多边形网格上应用 DG 方法求解, 但是扩散系数是常数或者是线性情形. 对于扩散系数间断或各向异性的情形, 据我们所知还没有 DG 方法求解和相应的理论分析.

在 DG 方法中, 如果网格边界上数值流通量简单地选取试探函数梯度在左右单元的平均值会导致不相容, 则需要添加惩罚项来保证稳定性. 本文针对间断和各向异性的扩散系数, 基于加权平均的思想发展一种新的 DG 方法求解二阶椭圆方程; 在数值流通量构造中, 将边界两端的扩散系数应用调和平均构造; 基于网格规则性假设和插值不等式, 在理论上证明双线性形式的强制性和连续性, 并对 DG 格式的误差分析进行研究; 在随机网格、正弦曲线型网格、Z 字型网格和 Shestakov 型网格等大变形多边形网格进行数值实验, 验证理论分析的正确性.

本文余下内容的结构如下: 第 2 节给出一些符号和定义, 建立加权 DG 格式, 在任意多边形网格上给出迹不等式、插值不等式和逆不等式; 第 3 节证明加权 DG 格式的稳定性 and 收敛性; 第 4 节给出数值实验; 最后给出结论.

2 间断 Galerkin 方法

2.1 记号

考虑二维计算区域 Ω , 记 $\mathcal{T}_h = \{T\}$ 为 Ω 的任意多边形网格剖分. 定义所有单元上的最大直径为 $h = \max_{T \in \mathcal{T}_h} h_T$, 其中 h_T 是单元 T 的直径. 记 $\mathcal{E}_h = \mathcal{E}_h^I \cup \mathcal{E}_h^D$ 为所有单元的边界 $\mathcal{T}_h$ 的集合, 其中 $\mathcal{E}_h^I$ 是所有内边界的集合, 而 $\mathcal{E}_h^D = \mathcal{E}_h^D \cup \mathcal{E}_h^N$ 是落在计算区域边界 $\partial\Omega$ 上的集合. DG 有限元的逼近空间允许基函数在相邻单元之间间断, 定义如下:

$$V_h = \{v \in L^2(\Omega) : v|_K \in P^k(T), \forall T \in \mathcal{T}_h\}. \quad (2.1)$$

对任意实数 s , 定义离散 Sobolev 空间

$$H^s(\mathcal{T}_h) = \{v \in L^2(\Omega) : \forall T \in \mathcal{T}_h, v|_T \in H^s(T)\} \quad (2.2)$$

和相应的离散 Sobolev 范数

$$\|v\|_{H^s(\mathcal{T}_h)}^2 = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|v\|_{H^s(T)}^2. \quad (2.3)$$

下面定义函数在单元边界 e 上的跳跃和加权平均. 首先考虑内部边界 $e \in \mathcal{E}_h^I$, 该边界是由单元 T^+ 和 T^- 共同拥有的公共边. 假设 e 的单位法向量 $\mathbf{n}$ 是由 T^- 指向 T^+ , 令 $v^\pm$ 表示函数 v 在单元 $T^\pm$ 的边 e 的迹, 则函数 v 在边界 e 上的加权平均和跳跃定义如下:

$$\{v\}_\omega = \omega^+ v^+ + \omega^- v^-, \quad \llbracket v \rrbracket = v^- - v^+.$$

对于落在区域 Ω 边界的边 $e \in \mathcal{E}_h^D$, 跳跃和平均定义如下: $\{v\}_\omega = \llbracket v \rrbracket = v$. 这里权重值 $\omega^\pm$ 是非负数且满足 $\omega^+ + \omega^- = 1$. 在本文中, 边界两侧的权重值是基于扩散系数张量矩阵 $\mathbf{K}$ 来定义的, $\omega^+ = \frac{\delta_K^-}{\delta_K^+ + \delta_K^-}$, $\omega^- = \frac{\delta_K^+}{\delta_K^+ + \delta_K^-}$, 其中 $\delta_K^\pm = \mathbf{n}^T \mathbf{K}^\pm \mathbf{n}$. 惩罚参数值取为 $\gamma_K = (\omega^+)^2 \delta_K^+ + (\omega^-)^2 \delta_K^-$. 由上述权重值的定义, 易证明 $\gamma_K = \frac{\delta_K^+ \delta_K^-}{\delta_K^+ + \delta_K^-}$, 可以发现 γ_K 是 $\delta_K^\pm$ 调和平均值的一半.

2.2 DG 离散格式

为了得到二阶椭圆方程 (1.1) 的 DG 格式, 首先对 $u, v \in V_h$ 定义如下双线性形式:

$$\begin{aligned} a(u, v) = & \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \mathbf{K} \nabla u \cdot \nabla v dx dy + \sum_{e \in \mathcal{E}_h^I \cup \mathcal{E}_h^D} \frac{\alpha}{h_e} \int_e \gamma_K \llbracket u \rrbracket \llbracket v \rrbracket ds \\ & - \sum_{e \in \mathcal{E}_h^I \cup \mathcal{E}_h^D} \int_e \{\mathbf{K} \nabla u \cdot \mathbf{n}_e\}_\omega \llbracket v \rrbracket ds - \sum_{e \in \mathcal{E}_h^I \cup \mathcal{E}_h^D} \int_e \{\mathbf{K} \nabla v \cdot \mathbf{n}\}_\omega \llbracket u \rrbracket ds \end{aligned} \quad (2.4)$$

和线性形式

$$f(v) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T f v dx dy - \sum_{e \in \mathcal{E}_h^D} \frac{\alpha}{h_e} \int_e \gamma_K g_D v ds + \sum_{e \in \mathcal{E}_h^N} \int_e g_N v ds - \sum_{e \in \mathcal{E}_h^D} \int_e (\mathbf{K} \nabla v \cdot \mathbf{n}) g_D ds, \quad (2.5)$$

那么问题 (1.1) 的加权内惩罚 DG 方法如下: 求 $u_h \in V_h$ 使得

$$a(u_h, v) = f(v), \quad \forall v \in V_h. \quad (2.6)$$

由于扩散系数张量矩阵 $\mathbf{K}$ 是对称正定的, 因此存在一个唯一的对称正定矩阵 $\mathbf{k}$ 满足 $\mathbf{K} = \mathbf{k}^2$.

定义有限元空间 V_h 上的能量范数如下:

$$\|v\|_{\mathcal{T}_h}^2 = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T |\mathbf{k} \nabla v|^2 dx dy + \sum_{e \in \mathcal{E}_h^I \cup \mathcal{E}_h^D} \frac{\alpha}{h_e} \int_e \gamma_K [v]^2 ds,$$

其中 α 是惩罚参数, 通常取正常数, 其取值范围在下面的强制性证明中有限定.

为了证明稳定性和收敛性, 需要对单元的规则性设定一些要求. 假定任意多边形网格剖分 $\mathcal{T}_h$ 满足下列单元形状的规则性条件 (参见文献 [24]). 假定存在 (1) 与网格尺寸 h 无关的正整数 N ; (2) 与网格尺寸 h 无关的正常数 σ ; (3) 一个兼容的子剖分 $\tilde{\mathcal{T}}_h$, 使得 (i) 每一个网格单元 T 的子剖分 $\tilde{\mathcal{T}}_h|_T$ 最多拥有 N 个三角单元 K , (ii) 子剖分的任意三角单元 $K \in \tilde{\mathcal{T}}_h|_T$ 在 Ciarlet-Raviart 意义上是形状规则的, 即存在 σ 使得 $\frac{h_K}{\rho_K} \leq \sigma$, 其中 ρ_K 是三角单元 K 内接圆的半径. 在上述单元的规则性的假设下, 可以得到下面一些有关适定性和插值逼近的不等式, 详细的证明可参见文献 [25].

(1) (Agmon 不等式) 存在依赖于 N 和 σ 且与 h_T 无关的正常数 C_t , 使得对于任意 $v \in H^1(T)$, 有不等式

$$\|v\|_{L^2(\partial T)}^2 \leq C_t (h_T^{-1} \|v\|_{L^2(T)}^2 + h_T \|\nabla v\|_{L^2(T)}^2); \quad (2.7)$$

(2) (插值不等式) 存在依赖于 N 、 r 和 σ 且与 h_T 无关的正常数 C , 使得对于任意 $v \in H^{r+1}(T)$, 存在插值多项式 $\tilde{v} \in P_r(T)$ 满足

$$\|v - \tilde{v}\|_{L^2(T)} + h_T \|\nabla(v - \tilde{v})\|_{L^2(T)} \leq C h_T^{r+1} |v|_{H^{r+1}(T)}; \quad (2.8)$$

(3) (逆不等式) 对任意 $v \in P_r(T)$, 存在与 N 、 r 和 σ 相关的正常数 C_{inv} 满足

$$\|\nabla v\|_{L^2(T)}^2 \leq C_{\text{inv}} h_T^{-1} \|v\|_{L^2(T)}^2. \quad (2.9)$$

3 误差分析

本节对构造的加权 DG 格式在任意多边形网格上进行理论分析, 研究格式的相容性、连续性、强制性和收敛性. 在稳定性分析中, 加权 DG 格式的强制性依赖于惩罚参数 α . 在间断系数和各向异性的情形中, 惩罚参数必须选取足够大, 使得格式满足强制性. 在收敛性分析中, 本节给出了能量和 L^2 范数下的误差估计, 说明 DG 格式能达到最优收敛阶且对于非光滑的扩散系数具有一定鲁棒性. 首先给出加权 DG 格式的相容性.

引理 3.1 假设椭圆问题 (1.1) 的解析解 u 在每一个区域上足够光滑, $u \in H^2(\Omega_1 \cup \dots \cup \Omega_m)$, 则解析解 u 也满足方程 (2.6), 即

$$a(u, v) = f(v), \quad \forall v \in V_h. \quad (3.1)$$

该引理的证明可参见文献 [16]. 由上述相容性结论 (3.1) 和 DG 格式 (2.6) 可以推导得到如下 Galerkin 正交性:

$$a(u - u_h, v) = 0, \quad \forall v \in V_h. \quad (3.2)$$

定理 3.1 方程 (2.4) 中的双线性形式 $a(u, v)$ 对于任意 $v \in V_h$ 满足强制性, 即存在一个正常数 β 满足

$$a(v, v) \geq \beta \|v\|_{\mathcal{T}_h}^2, \quad \forall v \in V_h. \quad (3.3)$$

证明 首先应用 Agmon 不等式 (2.7)、逆不等式 (2.9) 和扩散系数矩阵 $\mathbf{K}$ 的性质 (1.2) 来确定内部边界上积分 $\|(\mathbf{K}\nabla v)^\pm\|_{L^2(e)}^2$ 的上界:

$$\begin{aligned} \|(\mathbf{K}\nabla v)^\pm\|_{L^2(e)}^2 &\leq K_1 \|(\nabla v)^\pm\|_{L^2(e)}^2 \leq \frac{K_1 C_t (1 + C_{\text{inv}}^2)}{h_e} \|(\nabla v)^\pm\|_{L^2(T^+ \cup T^-)}^2 \\ &\leq \frac{K_1 C_t (1 + C_{\text{inv}}^2)}{K_0 h_e} \|(\mathbf{K}\nabla v)^\pm\|_{L^2(T^+ \cup T^-)}^2. \end{aligned} \quad (3.4)$$

由 Cauchy-Schwarz 不等式和 Young 不等式, 有

$$\begin{aligned} \int_e \omega^\pm (\mathbf{K}\nabla v)^\pm \cdot \mathbf{n} \llbracket v \rrbracket ds &\leq \int_e (\mathbf{K}\nabla v)^\pm \cdot (\omega^\pm \mathbf{k}^\pm \mathbf{n} \llbracket v \rrbracket) ds \\ &\leq \left(\int_e |(\mathbf{K}\nabla v)^\pm|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_e (\omega^\pm)^2 \mathbf{n}^T \mathbf{K}^\pm \mathbf{n} \llbracket v \rrbracket^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{h_e}{\alpha} \|(\mathbf{K}\nabla v)^\pm\|_{L^2(e)}^2 + \int_e \alpha \frac{(\omega^\pm)^2 \delta_K^\pm}{4h_e} \llbracket v \rrbracket^2 ds. \end{aligned} \quad (3.5)$$

应用 (3.4) 和 (3.5), 可得

$$\begin{aligned} 2 \int_e \{\mathbf{K}\nabla v \cdot \mathbf{n}\}_\omega \llbracket v \rrbracket ds &\leq 2 \int_e \omega^+ |(\mathbf{K}\nabla v)^+ \cdot \mathbf{n} \llbracket v \rrbracket| ds + 2 \int_e \omega^- |(\mathbf{K}\nabla v)^- \cdot \mathbf{n} \llbracket v \rrbracket| ds \\ &\leq \frac{2h_e}{\alpha} (\|(\mathbf{K}\nabla v)^+\|_{L^2(e)}^2 + \|(\mathbf{K}\nabla v)^-\|_{L^2(e)}^2) + \frac{\alpha}{2} \int_e \frac{(\omega^+)^2 \delta_K^+ + (\omega^-)^2 \delta_K^-}{h_e} \llbracket v \rrbracket^2 ds \\ &\leq \frac{4K_1 C_t (1 + C_{\text{inv}}^2)}{K_0 \alpha} (\|(\mathbf{K}\nabla v)^+\|_{L^2(T^+)}^2 + \|(\mathbf{K}\nabla v)^-\|_{L^2(T^-)}^2) + \frac{\alpha}{2h_e} \int_e \gamma_K \llbracket v \rrbracket^2 ds. \end{aligned} \quad (3.6)$$

当 e 落在区域的边界时, 可以得到类似的估计式.

关于所有的单元边求和得

$$2 \sum_{e \in \mathcal{E}_h^I \cup \mathcal{E}_h^D} \int_e \{\mathbf{K}\nabla v \cdot \mathbf{n}\}_\omega \llbracket v \rrbracket ds \leq \frac{8K_1 C_t (1 + C_{\text{inv}}^2)}{K_0 \alpha} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|\mathbf{K}\nabla v\|_{L^2(T)}^2 + \sum_{e \in \mathcal{E}_h^I \cup \mathcal{E}_h^D} \frac{\alpha}{2h_e} \int_e \gamma_K \llbracket v \rrbracket^2 ds. \quad (3.7)$$

由 (3.7) 可以得到 $a(v, v)$ 的下界:

$$\begin{aligned} a(v, v) &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|\mathbf{K}\nabla v\|_{L^2(T)}^2 + \sum_{e \in \mathcal{E}_h^I \cup \mathcal{E}_h^D} \left(\frac{\alpha}{h_e} \int_e \gamma_K \llbracket v \rrbracket^2 ds - 2 \int_e \{\mathbf{K}\nabla v \cdot \mathbf{n}\}_\omega \llbracket v \rrbracket \right) ds \\ &\geq \sum_{e \in \mathcal{E}_h^I \cup \mathcal{E}_h^D} \frac{\alpha}{2h_e} \int_e \gamma_K \llbracket v \rrbracket^2 ds + \left(1 - \frac{8K_1 C_t (1 + C_{\text{inv}}^2)}{K_0 \alpha} \right) \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|\mathbf{K}\nabla v\|_{L^2(T)}^2. \end{aligned} \quad (3.8)$$

选取惩罚性参数 α 足够大, 则可以完成强制性的证明. $\square$

定理 3.2 双线性形式 $a(u, v)$ 在间断有限元空间 V_h 上满足如下的连续性: 对任意 $u, v \in V_h$, 存在正常数 M 使得

$$a(u, v) \leq M \|u\|_{\mathcal{T}_h} \|v\|_{\mathcal{T}_h} \quad (3.9)$$

成立.

证明 由 Hölder 不等式和 Cauchy-Schwarz 不等式, (2.4) 右端第一项可以通过下式约束:

$$\begin{aligned} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \mathbf{K} \nabla u \cdot \nabla v dx dy &\leq \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|\mathbf{k} \nabla u\|_{L^2(T)} \|\mathbf{k} \nabla v\|_{L^2(T)} \\ &\leq \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|\mathbf{k} \nabla u\|_{L^2(T)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|\mathbf{k} \nabla v\|_{L^2(T)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \|u\|_{\mathcal{T}_h} \|v\|_{\mathcal{T}_h}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

同理, 对右端第二项有

$$\sum_{e \in \mathcal{E}_h^I \cup \mathcal{E}_h^D} \frac{\alpha}{h_e} \int_e \gamma_K \llbracket u \rrbracket \llbracket v \rrbracket ds \leq \|u\|_{\mathcal{T}_h} \|v\|_{\mathcal{T}_h}. \quad (3.11)$$

进一步地, 由不等式 (3.5) 可知存在正常数 C 使得下式成立:

$$\begin{aligned} \int_e \{\mathbf{K} \nabla u \cdot \mathbf{n}\}_\omega \llbracket v \rrbracket ds &\leq (\|(\mathbf{k} \nabla u)^+\|_{L^2(e)}^2 + \|(\mathbf{k} \nabla u)^-\|_{L^2(e)}^2)^{\frac{1}{2}} \left(\int_e \gamma_K \llbracket v \rrbracket^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C(\|(\mathbf{k} \nabla u)^+\|_{L^2(T^+)} + \|(\mathbf{k} \nabla u)^-\|_{L^2(T^-)})^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\alpha}{h_e} \int_e \gamma_K \llbracket v \rrbracket^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

对上式关于所有边求和, 双线性形式 (2.4) 右端第三项可以由 Cauchy-Schwarz 不等式约束如下:

$$\begin{aligned} \sum_{e \in \mathcal{E}_h^I \cup \mathcal{E}_h^D} \int_e \{\mathbf{K} \nabla u \cdot \mathbf{n}\}_\omega \llbracket v \rrbracket ds &\leq C \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|\mathbf{k} \nabla u\|_{L^2(T)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{e \in \mathcal{E}_h^I \cup \mathcal{E}_h^D} \frac{\alpha}{h_e} \int_e \gamma_K \llbracket v \rrbracket^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C \|u\|_{\mathcal{T}_h} \|v\|_{\mathcal{T}_h}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

(2.4) 右端第四项的上界可以类似得到. $\square$

引理 3.2 假设椭圆问题 (1.1) 的解 u 在每一个单元上足够光滑, $u \in H^s(\mathcal{T}_h)$. 由插值不等式 (2.8) 可知, 存在一个与 h 无关的正常数 C , 使得任意试探函数 $\tilde{u} \in V_h$ 满足

$$\|u - \tilde{u}\|_{H^q(\mathcal{T}_h)} \leq Ch^{\min(k+1, s)-q} |u|_{H^s(\mathcal{T}_h)}. \quad (3.14)$$

下面给出加权 DG 格式在能量范数下的误差分析.

定理 3.3 假设椭圆问题 (1.1) 的解 u 属于 $H^s(\mathcal{T}_h)$, $s > 3/2$, 且惩罚参数 α 足够大. 设 u_h 是 DG 格式 (2.6) 的数值解, 则存在与 h 无关的常数 C 满足下面的最优误差估计式:

$$\|u - u_h\|_{\mathcal{T}_h} \leq Ch^{\min(k+1, s)-1} |u|_{H^s(\mathcal{T}_h)}. \quad (3.15)$$

证明 由三角不等式, 可得

$$\|u - u_h\|_{\mathcal{T}_h} \leq \|\chi\|_{\mathcal{T}_h} + \|u - \tilde{u}\|_{\mathcal{T}_h}, \quad (3.16)$$

其中 $\chi = u_h - \tilde{u}$. 由引理 3.2, 可得

$$\|u - \tilde{u}\|_{\mathcal{T}_h} \leq Ch^{\min(k+1, s)-1} |u|_{H^s(\mathcal{T}_h)}. \quad (3.17)$$

下面估计 $\|\chi\|_{\mathcal{T}_h}$.

由双线性形式 $a(u, v)$ 的正交性可知, 在方程 (3.2) 加上并减去 $\tilde{u}$ 可得

$$a(\chi, v) = a(u - \tilde{u}, v), \quad \forall v \in V_h. \quad (3.18)$$

选取试探函数 $v = \chi$ 并利用强制性的结论可得

$$\begin{aligned} \beta \|\chi\|_{\mathcal{T}_h}^2 &\leq \left| \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \mathbf{K} \nabla(u - \tilde{u}) \cdot \nabla \chi dx dy - \sum_{e \in \mathcal{E}_h^I \cup \mathcal{E}_h^D} \int_e \{\mathbf{K} \nabla \chi \cdot \mathbf{n}\}_\omega \llbracket u - \tilde{u} \rrbracket ds \right. \\ &\quad \left. - \sum_{e \in \mathcal{E}_h^I \cup \mathcal{E}_h^D} \int_e \{\mathbf{K} \nabla(u - \tilde{u}) \cdot \mathbf{n}\}_\omega \llbracket \chi \rrbracket ds + \sum_{e \in \mathcal{E}_h^I \cup \mathcal{E}_h^D} \frac{\alpha}{h_e} \int_e \gamma_K \llbracket u - \tilde{u} \rrbracket \llbracket \chi \rrbracket ds \right| \\ &\leq |E_1| + |E_2| + |E_3| + |E_4| \\ &\leq |E_1| + |E_2| + |E_3| + |E_4|. \end{aligned} \quad (3.19)$$

下面对 (3.19) 中的 $|E_1|$ 、 $|E_2|$ 、 $|E_3|$ 和 $|E_4|$ 分别进行估计. 首先由 Hölder 不等式和 Cauchy-Schwarz 不等式, 可得

$$|E_1| \leq \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|\mathbf{k} \nabla(u - \tilde{u})\|_{L^2(T)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|\mathbf{k} \nabla \chi\|_{L^2(T)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{\beta}{6} \|\chi\|_{\mathcal{T}_h}^2 + \frac{3K_1}{2\beta} \|\nabla(u - \tilde{u})\|_{L^2(T)}^2. \quad (3.20)$$

类似于连续性证明中的 (3.13),

$$\begin{aligned} |E_2| &\leq C \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|\mathbf{k} \nabla \chi\|_{L^2(T)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{e \in \mathcal{E}_h^I \cup \mathcal{E}_h^D} \frac{\alpha}{h_e} \int_e \llbracket u - \tilde{u} \rrbracket^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{\beta}{6} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|\mathbf{k} \nabla \chi\|_{L^2(T)}^2 + \frac{3C}{2\beta} \sum_{e \in \mathcal{E}_h^I \cup \mathcal{E}_h^D} \frac{\alpha}{h_e} \int_e \llbracket u - \tilde{u} \rrbracket^2 ds. \end{aligned} \quad (3.21)$$

由 Agmon 不等式 (2.7) 和逆不等式 (2.9), 可得 $\|\llbracket u - \tilde{u} \rrbracket\|_{L^2(e)}^2 \leq \frac{C_t(1+C_{\text{inv}}^2)}{h_e} (\|u - \tilde{u}\|_{L^2(T^+)}^2 + \|u - \tilde{u}\|_{L^2(T^-)}^2)$, 进而可得

$$|E_2| \leq \frac{\beta}{6} \|\chi\|_{\mathcal{T}_h}^2 + \frac{3C}{\beta} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \frac{\alpha}{h^2} \|u - \tilde{u}\|_{L^2(T)}^2. \quad (3.22)$$

对于第三项, 通过 (3.13) 可得

$$\begin{aligned} |E_3| &\leq C \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|\mathbf{k} \nabla(u - \tilde{u})\|_{L^2(T)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{e \in \mathcal{E}_h^I \cup \mathcal{E}_h^D} \frac{\alpha}{h_e} \int_e \gamma_K \llbracket \chi \rrbracket^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{\beta}{6} \|\chi\|_{\mathcal{T}_h}^2 + \frac{3CK_1}{2\beta} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|\nabla(u - \tilde{u})\|_{L^2(T)}^2. \end{aligned} \quad (3.23)$$

类似于对 $|E_2|$ 的估计, 下面对 $|E_4|$ 进行估计:

$$|E_4| \leq \left(\sum_{e \in \mathcal{E}_h^I \cup \mathcal{E}_h^D} \frac{\alpha \gamma_K}{h_e} \|\llbracket u - \tilde{u} \rrbracket\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{e \in \mathcal{E}_h^I \cup \mathcal{E}_h^D} \frac{\alpha \gamma_K}{h_e} \|\llbracket \chi \rrbracket\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \frac{\beta}{6} \sum_{e \in \mathcal{E}_h^I \cup \mathcal{E}_h^D} \frac{\alpha \gamma_K}{h_e} \|\llbracket \chi \rrbracket\|^2 + \frac{3}{2\beta} \sum_{e \in \mathcal{E}_h^I \cup \mathcal{E}_h^D} \frac{\alpha \gamma_K}{h_e} \|\llbracket u - \tilde{u} \rrbracket\|^2 \\
 &\leq \frac{\beta}{6} \|\chi\|_{\mathcal{T}_h}^2 + \frac{3C}{\beta} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \frac{\alpha}{h^2} \|u - \tilde{u}\|_{L^2(T)}^2.
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

将上述关于 $|E_1|$ 、 $|E_2|$ 、 $|E_3|$ 和 $|E_4|$ 的估计式代入 (3.19), 并利用引理 3.2 可以完成证明. $\square$

最后应用标准的对偶论证技巧给出加权 DG 格式 (2.6) 在 L^2 范数下的误差估计.

定理 3.4 假设椭圆问题 (1.1) 的解 u 属于 $H^s(\Omega_1 \cup \dots \cup \Omega_m)$, $s > \max\{3/2, k+1\}$, u_h 是 DG 格式 (2.6) 的数值解, 则存在与 h 无关的常数 C 满足下面的 L^2 范数误差估计式:

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^{k+1} |u|_{H^{k+1}(\mathcal{T}_h)}. \tag{3.25}$$

证明 首先引入下面的对偶问题:

$$\begin{aligned}
 -\nabla \cdot (\mathbf{K} \nabla \varphi) &= u - u_h, \quad \text{在 } \Omega \text{ 内}, \\
 \varphi &= 0, \quad \text{在 } \partial\Omega \text{ 上}.
 \end{aligned} \tag{3.26}$$

由文献 [26] 知, 方程 (3.26) 存在唯一的弱解, $\varphi \in H^2(\Omega_1 \cup \dots \cup \Omega_m)$, 且满足椭圆正则性估计式

$$\|\varphi\|_{H^2(\mathcal{T}_h)} \leq C \|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}. \tag{3.27}$$

对方程 (3.26) 两边在 Ω 上与 $u - u_h$ 作内积, 有 $\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}^2 = -\int_{\Omega} \nabla \cdot (\mathbf{K} \nabla \varphi) (u - u_h) dx dy$. 在每个单元上作分部积分得

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}^2 = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \mathbf{K} \nabla \varphi \cdot \nabla (u - u_h) dx dy - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial T} (\mathbf{K} \nabla \varphi \cdot \mathbf{n}) (u - u_h) ds.$$

由于函数 φ 在不同区域的界面上满足流连续性, 因此可得

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}^2 = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \mathbf{K} \nabla \varphi \cdot \nabla (u - u_h) dx dy - \sum_{e \in \mathcal{E}_h^I \cup \partial\Omega} \int_e \{\mathbf{K} \nabla \varphi \cdot \mathbf{n}\}_{\omega} \llbracket u - u_h \rrbracket ds. \tag{3.28}$$

将 (3.28) 与 (3.2) 作差, 得

$$\begin{aligned}
 \|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \mathbf{K} \nabla (\varphi - v) \cdot \nabla (u - u_h) dx dy - \sum_{e \in \mathcal{E}_h^I \cup \partial\Omega} \int_e \{\mathbf{K} \nabla (\varphi - v) \cdot \mathbf{n}\}_{\omega} \llbracket u - u_h \rrbracket ds \\
 &\quad - \sum_{e \in \mathcal{E}_h^I \cup \mathcal{E}_h^D} \frac{\alpha}{h_e} \int_e \gamma_K \llbracket u - u_h \rrbracket \llbracket v \rrbracket ds.
 \end{aligned}$$

取 $v = \varphi_I$ 为函数 φ 的连续分片线性插值, 则有 $\llbracket \varphi_I \rrbracket|_e = 0$. 由 (2.4) 进一步可得

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}^2 = a(\varphi - \varphi_I, u - u_h). \tag{3.29}$$

根据双线性形式的连续性 (3.9)、插值不等式 (2.8)、椭圆正则性估计式 (3.27) 和定理 3.3, 不等式 (3.29) 可以进一步放大:

$$\begin{aligned}
 \|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq C \|\varphi - \varphi_I\|_{\mathcal{T}_h} \|u - u_h\|_{\mathcal{T}_h} \leq Ch |\varphi|_{H^2(\mathcal{T}_h)} \|u - u_h\|_{\mathcal{T}_h} \\
 &\leq Ch \|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \|u - u_h\|_{\mathcal{T}_h} \leq Ch^{k+1} \|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} |u|_{H^{k+1}(\mathcal{T}_h)}.
 \end{aligned}$$

定理证明完毕. $\square$

4 数值实验

本节将通过一系列数值算例验证本文提出的加权 DG 格式的有效性和收敛性. 首先对带有间断系数的椭圆方程进行测试, 网格类型包括随机网格、正弦曲线型网格和 Z 字型网格; 然后求解扩散系数是各向异性的椭圆问题, 在例 4.2 中, 网格选择了 Shestakov 四边形网格; 最后的算例的扩散系数既是各向异性的, 又在不同的区域是间断的, 测试是在随机四边形网格上计算得到.

例 4.1 考虑在 $\Omega = [0, 1]^2$ 区域上求解带有间断系数的椭圆方程

$$-\nabla \cdot (K \nabla u) = f, \quad (4.1)$$

边界条件选择齐次 Dirichlet 边界条件. 扩散系数在界面 $x = \frac{1}{2}$ 处间断, 左右选择不同的分片常数

$$K = \begin{cases} 5, \\ 1, \end{cases} \quad (4.2)$$

方程 (4.1) 的精确解是

$$u(x, y) = \begin{cases} \sin(\pi x) \sin(2\pi y), \\ \sin(5\pi x) \sin(2\pi y), \end{cases} \quad (4.3)$$

右端项 f 可以由精确解得到.

在本算例的计算中, 选取的间断有限元空间是 P^1 元, 网格选取下面 3 种类型的扭曲网格 [23]:

- 随机网格: 首先在计算区域上剖分得到一致正交网格, 网格尺寸分别为 $\delta x = \frac{1}{64}$ 和 $\delta y = \frac{1}{64}$. 然后将内部网格点沿着 x - 和 y - 方向偏移 $\pm \xi \delta x$ 和 $\pm \xi \delta y$, 其中 ξ 是一个随机数, 满足 $0 \leq \xi \leq 1$. 图 1(a) 给出了随机数 $\xi = 0.25$ 的网格图.

- 正弦曲线型网格: 将一致正交剖分得到的网格点 $(\bar{x}_i, \bar{y}_j)$ 按照 $x_{i,j} = \bar{x}_i + \zeta \sin(2\pi \bar{x}_i) \sin(2\pi \bar{y}_j)$ 和 $y_{i,j} = \bar{y}_j + \zeta \sin(2\pi \bar{x}_i) \sin(2\pi \bar{y}_j)$ 进行变换得到, 其中 ζ 是扭曲参数. 图 1(b) 给出了 $\zeta = 0.12$ 的扭曲网格图.

- Z 字型网格: 由 Kershaw [27] 提出的一种扭曲型网格, 偏度参数 s 决定网格的扭曲程度. 图 1(c) 给出了 $s = 0.2$ 的扭曲网格图.

在上述网格的变换过程中, 我们保持区域的边界和界面的点位置不变. 相应的数值结果显示在图 1(d)–1(f). 表 1–3 给出了 3 种扭曲网格上的收敛性数据, 每一类型的网格分别加密 5 次, N_{ele} 表示网格单元数, 误差以能量范数和 L^2 范数形式给出. 从这些表中可以看出, 加权 DG 格式的误差在 L^2 范数下基本可以达到最优的 2 阶收敛精度, 而在能量范数下的误差只能达到次优的 1 阶收敛精度.

例 4.2 考虑区域 $\Omega = [0, 1]^2$ 上的非均匀旋转各向异性问题 (1.1), 扩散张量为

$$K = \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} \beta x^2 + y^2 & (\beta - 1)xy \\ (\beta - 1)xy & x^2 + \beta y^2 \end{pmatrix},$$

其中 β 表示各向异性程度, 精确解为

$$u(x, y) = \sin(\pi x) \sin(\pi y). \quad (4.4)$$

右端项和边界条件由 (4.4) 确定.

收敛性测试在 Shestakov 型网格上进行, 该类型网格由 Shestakov 等 [28] 提出, 扭曲程度由参数 a ($0 < a < 0.5$) 决定, a 的值越小表示网格越扭曲, 图 2 给出了 $a = 0.12$ 的网格图. 表 4 给出了不同各向异性参数 $\beta = 10^{-3}$ 和 $\beta = 10^{-6}$ 的误差和收敛阶. 从表 4 可以看出, 在强扭曲的 Shestakov 型网格上, L^2 范数下的误差达不到最优收敛阶.

例 4.3 考虑扩散系数强各向异性且间断的情形. 求解区域 $\Omega = [0, 1]^2$ 被两条直线 $x = 1/2$ 和

图 1 (网络版彩图) 算例 4.1 的网格剖分 (a)–(c) 和对应的数值结果图 (d)–(e)

表 1 随机网格上的 L^2 和能量范数下的误差和收敛阶

N_{ele}	L^2 范数误差	L^2 范数收敛阶	能量范数误差	能量范数收敛阶
16	3.5248E-1	—	5.5529E+0	—
64	1.2988E-1	1.4404	3.3914E+0	0.7114
256	3.6037E-2	1.8496	1.7963E+0	0.9169
1,024	9.2483E-3	1.9622	9.1104E-1	0.9794
4,096	2.3279E-3	1.9902	4.5716E-1	0.9948
16,384	5.8304E-4	1.9974	2.2878E-1	0.9987

表 2 正弦曲线型网格上的 L^2 和能量范数下的误差和收敛阶

N_{ele}	L^2 范数误差	L^2 范数收敛阶	能量范数误差	能量范数收敛阶
24	4.1668E-1	—	5.8749E+0	—
96	2.2548E-1	0.8859	3.7815E+0	0.6326
384	1.2352E-1	0.8693	2.4529E+0	0.6245
1,536	5.2330E-2	1.2390	1.4533E+0	0.7552
6,144	1.6936E-2	1.6275	7.8572E-1	0.8872
24,576	4.6565E-3	1.8628	4.0347E-1	0.9616

$y = 1/2$ 分割为四个象限. 在第一和第三象限中的扩散系数为

$$\mathbf{K}_a = [2464.36002, 1148.68364; 1148.68364, 536.63998],$$

而在第二和第四象限中的扩散系数为

$$\mathbf{K}_b = [2464.36002, -1148.68364; -1148.68364, 536.63998].$$

扩散张量 $\mathbf{K}_a$ 和 $\mathbf{K}_b$ 具有强各向异性, 张量矩阵的特征值的比值为 3000 : 1. 关于右端项 f , 考虑 Gauss

表 3 Z 字型网格上的 L^2 和能量范数下的误差和收敛阶

N_{ele}	L^2 范数误差	L^2 范数收敛阶	能量范数误差	能量范数收敛阶
16	3.6504E-1	—	5.6751E+0	—
64	1.5934E-1	1.1959	3.7166E+0	0.6107
256	4.6846E-2	1.7661	2.0130E+0	0.8846
1,024	1.2289E-2	1.9306	1.0286E+0	0.9687
4,096	3.1141E-3	1.9805	5.1728E-1	0.9917
16,384	7.8140E-4	1.9947	2.5903E-1	0.9978

图 2 Shestakov 型扭曲网格

表 4 Shestakov 型网格上关于参数 $\beta = 10^{-3}$ 和 $\beta = 10^{-6}$ 的 L^2 误差和收敛阶

N_{ele}	$\beta = 10^{-3}$ 误差	$\beta = 10^{-3}$ 收敛阶	$\beta = 10^{-6}$ 误差	$\beta = 10^{-6}$ 收敛阶
16	5.2323E-2	—	5.2324E-2	—
64	1.6655E-2	1.6515	1.6673E-2	1.6499
256	6.1941E-3	1.4270	6.2264E-3	1.4210
1,024	2.2414E-3	1.4665	2.2645E-3	1.4592
4,096	1.0171E-3	1.1399	1.0489E-3	1.1103

源项和汇项的组合, 其中源项为

$$f_a(x, y) = 10^5 \exp \left(- \frac{(x - 0.25)^2 + (y - 0.25)^2}{2\sigma^2} \right), \quad (4.5)$$

汇项为

$$f_b(x, y) = -10^5 \exp \left(- \frac{(x - 0.75)^2 + (y - 0.75)^2}{2\sigma^2} \right), \quad (4.6)$$

其中 $\sigma = 0.070710$.

间断有限元空间取 P^1 元, 网格是两种随机网格 (见图 3), 随机参数分别是 $\xi = 0.12$ (左) 和 $\xi = 0.33$ (右), 数值结果见图 3. 由于该问题没有精确解, 将计算结果与文献 [2] 中的弱 Galerkin 方法的结果进行比较, 可以发现本文的结果与文献 [2] 的结果吻合. 数值解呈现出椭圆性剖面, 这反映了渗透率场的各向异性, 而且渗透性的不连续性会产生偏斜.

图 3 (网络版彩图) 算例 3 的网格剖分 (上) 和对应的数值结果图 (下)

5 结论

本文应用加权 DG 格式求解扭曲网格上的非光滑系数椭圆方程, 该方法可以作为现有流行的有限体积方法的一个可行的替代方法. 相比较有限体积方法, 有限元方法具有严谨的理论分析基础. 本文对加权 DG 方法的强制性、连续性和误差估计进行了证明. 在随机网格、正弦曲线型网格、Z 字型网格和 Shestakov 型扭曲多边形网格进行了一系列数值实验, 数值结果显示本方法可以有效地求解强各向异性和间断系数的扩散方程. 当流体部分采用 DG 方法求解时, 一致的数值格式使得流体和扩散两大物理模块的耦合变得容易, 为 DG 方法完整求解辐射流体问题奠定基础. 在将来, 加权 DG 方法将用于在扭曲网格上求解更加复杂的非线性辐射扩散问题.

致谢 作者对审稿人提出的改进建议表示衷心的感谢.

参考文献

- 1 Pei W, Zhu S. Scientific computing for laser fusion. *Physics*, 2009, 38: 559–568
- 2 Lin G, Liu J, Mu L, et al. Weak Galerkin finite element methods for Darcy flow: Anisotropy and heterogeneity. *J Comput Phys*, 2014, 276: 422–437
- 3 Sijoy C D, Chaturvedi S. TRHD: Three-temperature radiation-hydrodynamics code with an implicit non-equilibrium radiation transport using a cell-centered monotonic finite volume scheme on unstructured-grids. *Comput Phys Comm*, 2015, 190: 98–119
- 4 Li D, Shui H, Tang M. On the finite difference scheme of two-dimensional parabolic equation in a non-rectangular mesh. *J Numer Meth Comput Appl*, 1980, 1: 217–224
- 5 Yuan G W, Sheng Z Q, Yue J Y. The finite volume scheme preserving the positivity for diffusion equation (in Chinese). *Sci Sin Math*, 2012, 42: 951–970 [袁光伟, 盛志强, 岳晶岩. 扩散方程保正的有限体积格式. *中国科学: 数学*, 2012, 42: 951–970]
- 6 Cao F, Sheng Z, Yuan G. Monotone finite volume schemes for diffusion equation with imperfect interface on distorted meshes. *J Sci Comput*, 2018, 76: 1055–1077
- 7 Kuznetsov Y, Lipnikov K, Shashkov M. The mimetic finite difference method on polygonal meshes for diffusion-type problems. *Comput Geosci*, 2004, 8: 301–324
- 8 Aavatsmark I. An introduction to multipoint flux approximations for quadrilateral grids. *Comput Geosci*, 2002, 6: 405–432
- 9 Gao Z, Wu J. A second-order positivity-preserving finite volume scheme for diffusion equations on general meshes. *SIAM J Sci Comput*, 2015, 37: A420–A438
- 10 Su S, Dong Q, Wu J. A vertex-centered and positivity-preserving scheme for anisotropic diffusion equations on general polyhedral meshes. *Math Methods Appl Sci*, 2019, 42: 59–84
- 11 Zhang X, Su S, Wu J. A vertex-centered and positivity-preserving scheme for anisotropic diffusion problems on arbitrary polygonal grids. *J Comput Phys*, 2017, 344: 419–436
- 12 Sheng Z, Yue J, Yuan G. A parallel finite volume scheme preserving positivity for diffusion equation on distorted meshes. *Numer Methods Partial Differential Equations*, 2017, 33: 2159–2178
- 13 Guo S, Zhang M, Zhou H, et al. Improved numerical method for three dimensional diffusion equation with strongly discontinuous coefficients. *High Power Laser Part Beams*, 2015, 27: 092014
- 14 Cockburn B, Shu C W. The Runge-Kutta discontinuous Galerkin method for conservation laws, V: Multidimensional systems. *J Comput Phys*, 1998, 141: 199–224
- 15 Wheeler M F. An elliptic collocation-finite element method with interior penalties. *SIAM J Numer Anal*, 1978, 15: 152–161
- 16 Arnold D N. An interior penalty finite element method with discontinuous elements. *SIAM J Numer Anal*, 1982, 19: 742–760
- 17 Zhao D, Zhang Q. Local discontinuous Galerkin methods with generalized alternating numerical fluxes for two-dimensional linear Sobolev equation. *J Sci Comput*, 2019, 78: 1660–1690
- 18 Zhang R P, Yu X J, Li M J, et al. A conservative local discontinuous Galerkin method for the solution of nonlinear Schrödinger equation in two dimensions. *Sci China Math*, 2017, 60: 2515–2530
- 19 Zhang F, Cheng J, Liu T. A direct discontinuous Galerkin method for the incompressible Navier-Stokes equations on arbitrary grids. *J Comput Phys*, 2019, 380: 269–294

- 20 Cao W, Liu H, Zhang Z. Superconvergence of the direct discontinuous Galerkin method for convection-diffusion equations. [Numer Methods Partial Differential Equations](#), 2017, 33: 290–317
- 21 Gassner G, Lörcher F, Munz C D. A contribution to the construction of diffusion fluxes for finite volume and discontinuous Galerkin schemes. [J Comput Phys](#), 2007, 224: 1049–1063
- 22 Mu L, Wang J, Wang Y, et al. Interior penalty discontinuous Galerkin method on very general polygonal and polyhedral meshes. [J Comput Appl Math](#), 2014, 255: 432–440
- 23 Ragusa J C. Discontinuous finite element solution of the radiation diffusion equation on arbitrary polygonal meshes and locally adapted quadrilateral grids. [J Comput Phys](#), 2015, 280: 195–213
- 24 Li R, Ming P, Sun Z, et al. An arbitrary-order discontinuous Galerkin method with one unknown per element. [J Sci Comput](#), 2019, 80: 268–288
- 25 Beirão V L, Lipnikov K, Manzini G. The Mimetic Finite Difference Method for Elliptic Problems. Cham: Springer, 2014
- 26 Roitberg JaA, Šeřtel Z G. A homeomorphism theorem for elliptic systems, and its applications. *Mat Sb*, 1969, 78: 446–472
- 27 Kershaw D S. Differencing of the diffusion equation in Lagrangian hydrodynamic codes. [J Comput Phys](#), 1981, 39: 375–395
- 28 Shestakov A I, Harte J A, Kershaw D S. Solution of the diffusion equation by finite elements in Lagrangian hydrodynamic codes. [J Comput Phys](#), 1988, 76: 385–413

Weighted discontinuous Galerkin method for diffusion equation with non-smooth coefficients on distorted polygonal meshes

Rongpei Zhang, Xijun Yu & Mingjun Li

Abstract The elliptic equations with heterogeneous and anisotropic diffusion coefficient play an important role in many physical applications such as radiation hydrodynamics and reservoir simulations. Usually the distorted meshes are considered since the solution of the diffusion part involves the hydro part. The discontinuous Galerkin (DG) method is an important class of computational mathematics. The features of DG methods can be implemented flexibly on large deformation and discontinuous coefficients. In this study, we present a weighted discontinuous Galerkin (WDG) method for numerically solving the elliptic problem with non-smooth coefficients. The WDG method is based on the symmetric interior penalty technique. We give the proof of the coercivity and continuity of bilinear forms in WDG scheme. The convergence analysis for the energy norm is presented based on the coercivity and continuity. Next, we prove an error estimate in the L^2 norm based on the duality argument. Numerical examples demonstrate the validity of WDG method for elliptic problems with discontinuous and tensor diffusion coefficients. Some types of distorted meshes such as random, sinusoidal, Shestakov, and Z meshes are used.

Keywords discontinuous Galerkin method, distorted mesh, elliptic equation, anisotropy

MSC(2020) 65M12, 65M60

doi: 10.1360/SSM-2020-0159