

复合载荷下圆薄板大挠度问题的精确解*

郑晓静

周又和

(兰州大学数力系)

(华中工学院力学系, 武汉)

摘 要

本文构造得到了在均布载荷和中心集中力联合作用下圆板大挠度问题的精确解的解析式。对于固定夹紧边界且中心挠度为零的特殊情形进行了具体求解, 并与文献[1]进行了比较。

一、引 言

在均布载荷和中心集中力联合作用下的圆薄板大挠度问题, 是仪表工业中受复合载荷作用的膜盒这一弹性元件的抽象化模型, 其理论研究至今尚不全面。尤其是对于力平衡式仪表中常见的中心挠度为零的情况, 即复合载荷作用下圆板中心挠度为零的问题, 由于此时以中心挠度为参数的摄动法^[2,3]失效, 因此该问题的求解一直为人们所关注。

胡海昌教授于1954年提出用双参数摄动法来求解圆板受复合载荷的问题^[2]。他是先采用载荷双参数进行摄动求解; 后又采用位移双参数摄动。文献[1]在引入载荷分布函数使复合载荷依单一载荷参数变化后, 给出了此问题以选取平均挠角作为单一摄动参数的摄动解。

本文将文献[4]的方法推广到受复合载荷作用的圆薄板大挠度问题中, 从而获得了此问题的精确解的解析式。然后, 利用精确解求解了固定夹紧边界中心挠度为零的特殊情形, 其结果可直接用于工程实际。并与文献[1]摄动解的精度进行了对比, 发现: 文献[2]摄动解只是在载荷不很大的情形, 才与本文精确解的结果相一致。

二、基本方程

受如图1所示的复合载荷作用的圆薄板的 Kármán 方程为:

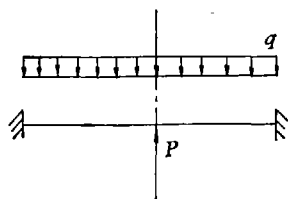


图 1

引入无量纲变量:

$$\begin{cases} D \frac{d}{dr} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{dw}{dr} = N_r \frac{dw}{dr} + \frac{qr}{2} - \frac{P}{2\pi r}, \\ r \frac{d}{dr} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r^2 N_r) = -\frac{Eh}{2} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2, \\ N_\theta = \frac{d}{dr} (r N_r), \end{cases} \quad (2.1)$$

本文1985年9月10日收到, 1986年2月12日收到修改稿。

* 中国科学院科学基金资助的课题。

$$y = \left(\frac{r}{a}\right)^2; \quad W = \sqrt{3(1-\nu^2)} \frac{\omega}{h}, \quad \bar{S} = 3(1-\nu^2) \frac{a^2 N_r}{Eh^3}, \quad T = 3(1-\nu^2) \frac{a^2 N_\theta}{Eh^3},$$

$$\varphi(y) = y \frac{dW}{dy}, \quad S(y) = y \bar{S}, \quad \bar{\alpha} Q = \frac{3}{4} (1-\nu^2) \sqrt{3(1-\nu^2)} \frac{a^2 P}{\pi E h^3},$$

$$\lambda = \frac{2}{(1+\nu) + k_1 a/D}, \quad \bar{\beta} Q = \frac{3}{4} (1-\nu^2) \sqrt{3(1-\nu^2)} \frac{a^2 q}{Eh^3}, \quad \mu = \frac{2}{(1-\nu) + Eh/k_1}.$$

于是,可得无量纲化的独立的微分方程组:

$$\begin{cases} y^2 \frac{d^2 \varphi(y)}{dy^2} = \varphi(y) S(y) + Q \left(\bar{\beta} - \frac{\bar{\alpha}}{y} \right) y^2, \\ y^2 \frac{d^2 S(y)}{dy^2} = -\frac{1}{2} \varphi^2(y) \end{cases} \quad (2.2)$$

和相应的一般边界条件为:

$$\begin{cases} y=0: \varphi(y)=0, S(y)=0, \\ y=1: \varphi(y) = \frac{\lambda}{\lambda-1} \frac{d\varphi(y)}{dy}, \quad S(y) = \frac{\mu}{\mu-1} \frac{dS(y)}{dy}. \end{cases} \quad (2.3)$$

这里: ω 为板的挠度, a 为板的半径, h 为板厚, q 为作用在板上的均布载荷, P 为作用在板中心的集中载荷, r 为板的径向坐标, N_r , N_θ 分别为中面单位长度的径向和周向力, E 为杨氏模量, ν 为泊松比, λ , μ 为边界常数. 对于固定夹紧边界, $\lambda=0$, $\mu = \frac{2}{1-\nu}$, 其余见文献 [2].

显然,当 $\bar{\alpha} > 0$, $\bar{\beta} > 0$ 时,均布载荷与集中载荷方向相反;而 $\bar{\alpha} < 0$, $\bar{\beta} > 0$ 时,二者方向一致. $\bar{\alpha} = 0$, $\bar{\beta} \neq 0$ 时,板受均布载荷作用; $\bar{\alpha} \neq 0$, $\bar{\beta} = 0$ 时,板仅受集中载荷作用;后两种情形的精确解已经求得. 见文献 [5, 6].

与文献 [4] 类似,利用格林函数法可得到对应于 (2.2), (2.3) 式的积分方程:

$$\begin{cases} \varphi(y) = - \int_0^1 K(y, \xi) \frac{1}{\xi^2} \varphi(\xi) S(\xi) d\xi + \varphi_1(y), \\ S(y) = \frac{1}{2} \int_0^1 G(y, \xi) \frac{1}{\xi^2} \varphi^2(\xi) d\xi, \end{cases} \quad y \in [0, 1], \quad (2.4)$$

其中:

$$\varphi_1(y) = Q \left\{ \left[-\frac{\bar{\beta}}{2} (\lambda + 1) + \bar{\alpha} \lambda \right] y - \bar{\alpha} y \ln y + \frac{\bar{\beta}}{2} y^2 \right\}, \quad (2.5)$$

而核函数 $K(y, \xi)$, $G(y, \xi)$ 的形式为:

$$\begin{aligned} K(y, \xi) &= \begin{cases} [(\lambda-1)y+1]\xi, & 0 \leq \xi \leq y; \\ [(\lambda-1)\xi+1]y, & y < \xi \leq 1; \end{cases} \\ G(y, \xi) &= \begin{cases} [(\mu-1)y+1]\xi, & 0 \leq \xi \leq y; \\ [(\mu-1)\xi+1]y, & y < \xi \leq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

定义 集合 $A = \left\{ y^\alpha f(y) \mid f(y) \in C_0[0, 1], \alpha > \frac{1}{2} \right\}$. 这里 $C_0[0, 1]$ 为由在 $[0, 1]$ 上所有连续函数组成的集合.

与文献[4]同理可得, 对于属于 A 集合中的 $\varphi(y)$, $S(y)$, 其积分方程与边值问题是等价的。因此, 当从积分方程获得属于 A 中的解 $\varphi(y)$ 和 $S(y)$, 就可知该解也是满足边值问题的解。

三、迭代函数序列的函数结构

对于积分方程组 (2.4) 取迭代格式如下:

$$\begin{cases} \varphi_{n+1}(y) = - \int_0^1 K(y, \xi) \frac{1}{\xi^2} \varphi_n(\xi) S_n(\xi) d\xi + \varphi_1(y) \\ S_n(y) = \frac{1}{2} \int_0^1 G(y, \xi) \frac{1}{\xi^2} \varphi_n^2(\xi) d\xi \end{cases} \quad y \in [0, 1], \quad (3.1)$$

其中, $n = 1, 2, \dots$; $\varphi_1(y)$ 由 (2.5) 式确定。

由 (3.1) 式, 用归纳法可以得到:

结论 1. 由 (3.1) 式所确定的迭代函数序列 $\{\varphi_n(y)\}$ 和 $\{S_n(y)\}$ 对于任意正整数 n , 其一般函数结构为:

$$\varphi_n(y) = \sum_{i=1}^{2 \times L_n} \sum_{j=0}^i A_{ij}^{(n)} y^i \ln^j y, \quad S_n(y) = \sum_{i=1}^{4 \times L_n} \sum_{j=0}^i B_{ij}^{(n)} y^i \ln^j y, \quad (3.2)$$

其中: $L_n = 3^{n-1}$, $A_{ij}^{(n)}$, $B_{ij}^{(n)}$ 是与 y 无关的常数, 其迭代公式为:

$$B_{10}^{(n)} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2 \times L_n} \sum_{j=0}^i \sum_{r=1}^{2 \times L_n} \sum_{s=0}^r A_{ij}^{(n)} A_{rs}^{(n)} (j+s)! (-1)^{j+s} \left[\frac{\mu-1}{(i+r)^{j+s+1}} + \frac{1}{(i+r-1)^{j+s+1}} \right],$$

$$B_{11}^{(n)} = 0,$$

$$B_{ij}^{(n)} = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{i-1} \sum_{t=j}^i \sum_{s=0}^t A_{i-r,t-s}^{(n)} A_{rs}^{(n)} \frac{(-1)^{t-j-s}}{j!} \left[\frac{1}{(i+1)^{t+1-j}} - \frac{1}{i^{t+1-j}} \right],$$

$i = 2, 3, \dots, (4 \times L_n); \quad j = 0, 1, 2, \dots, i.$

$$A_{10}^{(n+1)} = - \sum_{i=1}^{2 \times L_n} \sum_{j=0}^i \sum_{r=1}^{4 \times L_n} \sum_{s=0}^r A_{ij}^{(n)} B_{rs}^{(n)} (j+s)! (-1)^{j+s} \left[\frac{\lambda-1}{(i+r)^{j+s+1}} + \frac{1}{(i+r-1)^{j+s+1}} \right] \\ + Q \left[-\frac{\beta}{2} (\lambda+1) + \alpha \lambda \right],$$

$$A_{11}^{(n+1)} = -\alpha Q,$$

$$A_{ij}^{(n+1)} = - \sum_{r=1}^{i-1} \sum_{t=j}^i \sum_{s=0}^t A_{i-r,t-s}^{(n)} B_{rs}^{(n)} \frac{(-1)^{t-j-s}}{j!} \left[\frac{1}{(i+1)^{t+1-j}} - \frac{1}{i^{t+1-j}} \right] \\ + \frac{Q}{2} \beta \delta(i-2) \delta(j),$$

$$i = 2, 3, \dots, 2 \times L_{n+1}; \quad j = 0, 1, 2, \dots, i, \quad \delta(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases}.$$

注意: 上述递推式中用到关系式:

$$\sum_{j=0}^i A_{ij} \sum_{t=0}^j \frac{(-1)^t j!}{(j-t)! i^{t+1}} \ln^{i-t} y = \sum_{j=0}^i \sum_{t=j}^i A_{it} \frac{(-1)^{t-j} t!}{i^{t-j+1} j!} \ln^j y.$$

由结论 1 显然可得: $\{\varphi_n(y)\}, \{S_n(y)\}$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 且取 $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ 时, 令:

$$\Phi_n(y) = y^{-\alpha} \varphi_n(y), \quad S_n^*(y) = y^{-\alpha} S_n(y), \quad (3.3)$$

则可得 $\Phi_n(y), S_n^*(y)$ 在 $[0, 1]$ 上连续. 于是, 有:

推论 1. 由 (3.1) 式得到的迭代函数序列 $\{\varphi_n(y)\}, \{S_n(y)\}$ 在 $[0, 1]$ 上连续且属于集合 A .

我们的目的是设法证明上述迭代序列在 $[0, 1]$ 上一致收敛, 再由结论 1 即可得到满足积分方程组 (2.4) 式的精确解, 通过证明其解属于 A , 便可得到解满足原边值问题 (2.2), (2.3) 式.

四、函数序列的收敛性与精确解

定义. 范数 $\|f\| = \max_{0 \leq y \leq 1} |f(y)|$, $f(y) \in C_0[0, 1]$.

由前节知: $\Phi_n(y), S_n^*(y)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 于是 $\|\Phi_n\|, \|S_n^*\|$ 有意义. 由 (3.1) 式得:

$$\begin{aligned} \|\Phi_{n+1}\| &= \|y^{-\alpha} \int_0^1 K(y, \xi) \frac{1}{\xi^2} \xi^\alpha \Phi_n(\xi) S_n(\xi) d\xi + \Phi_1(y)\| \\ &\leq \left\| -\frac{1}{2} y^{-\alpha} \int_0^1 K(y, \xi) \frac{1}{\xi^2} \xi^\alpha \int_0^1 G(\xi, \eta) \frac{1}{\eta^2} \eta^{2\alpha} d\eta d\xi \right\| \cdot \|\Phi_n\| + \|\Phi_1\| \\ &= C \|\Phi_n\| + \|\Phi_1\|, \end{aligned} \quad (4.1)$$

其中:

$$\begin{aligned} C &= \left\| -\frac{1}{2} y^{-\alpha} \int_0^1 K(y, \xi) \xi^{\alpha-2} \int_0^1 G(\xi, \eta) \eta^{2(\alpha-1)} d\eta d\xi \right\| \\ &= \left\| \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\mu-1}{2\alpha} + \frac{1}{2\alpha-1} \right) \left(\frac{\lambda-1}{\alpha+1} + \frac{1}{\alpha} \right) + \left(\frac{1}{2\alpha} - \frac{1}{2\alpha-1} \right) \left(\frac{\lambda-1}{3\alpha} + \frac{1}{3\alpha-1} \right) \right] y^{1-\alpha} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{\mu-1}{2\alpha} + \frac{1}{2\alpha-1} \right) \left(\frac{1}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha} \right) y + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2\alpha} - \frac{1}{2\alpha-1} \right) \left(\frac{1}{3\alpha} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{3\alpha-1} \right) y^{2\alpha} \right\|. \end{aligned} \quad (4.2)$$

当 $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ 时, C 存在且为一有限数.

令:

$$f_1(y) = \left[-\frac{\beta}{2} (\lambda+1) + \alpha\lambda \right] y^{1-\alpha} - \alpha y^{1-\alpha} \ln y + \frac{\beta}{2} y^{2-\alpha}.$$

显然, $\|f_1\|$ 存在且非零. 于是有以下结论:

结论 2. 当 $\varrho < \varrho_{\max} = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{1}{3C}} / \|f_1\|$ 时, 由迭代式确定的函数序列 $\{\Phi_n\}$ 对任意正整数 n 都有不等式

$$\|\Phi_n\| < \sqrt{\frac{1}{3C}} \quad (4.3)$$

成立.

结论 3. 当结论 2 的条件成立时, 由迭代格式 (3.1) 式所获得的函数序列 $\{\varphi_n(y)\}$ 和 $\{S_n(y)\}$ 在 $[0, 1]$ 上分别一致收敛于 $\varphi(y)$ 和 $S(y)$ 且在 $[0, 1]$ 上连续.

证. 由 (3.1), (3.3) 式可得:

$$\begin{aligned} \|\Phi_{n+1} - \Phi_n\| &\leq \| -y^{-\alpha} \int_0^1 K(y, \xi) \frac{1}{\xi^2} \xi^\alpha \left[\frac{1}{2} \int_0^1 G(\xi, \eta) \eta^{2(\alpha-1)} d\eta \cdot \|\Phi_n\| \cdot (\|\Phi_n\| \right. \\ &\quad \left. + \|\Phi_{n-1}\|) + \frac{1}{2} \int_0^1 G(\xi, \eta) \eta^{2(\alpha-1)} d\eta \cdot \|\Phi_{n-1}\|^2 \right] d\xi \| \cdot \|\Phi_n - \Phi_{n-1}\| \\ &= \theta \|\Phi_n - \Phi_{n-1}\|. \end{aligned} \quad (4.4)$$

这里

$$\begin{aligned} \theta = & \left\| -\frac{1}{2} y^{-\alpha} \int_0^1 K(y, \xi) \xi^{\alpha-2} \int_0^1 G(\xi, \eta) \eta^{2(\alpha-1)} d\eta d\xi \right\| \cdot [\|\Phi_n\| \cdot (\|\Phi_n\| + \|\Phi_{n-1}\|) \\ & + \|\Phi_{n-1}\|^2] < C \left[\frac{1}{\sqrt{3C}} \left(\frac{1}{\sqrt{3C}} + \frac{1}{\sqrt{3C}} \right) + \frac{1}{3C} \right] = 1. \end{aligned} \quad (4.5)$$

于是, 对于任意的正整数 $m > n > 1$, 有

$$\|\Phi_m - \Phi_n\| \leq \frac{\theta^{n-1} - \theta^{m-1}}{1 - \theta} \|\Phi_2 - \Phi_1\|. \quad (4.6)$$

$\therefore \lim_{m, n \rightarrow \infty} \|\Phi_m - \Phi_n\| = 0$ 对于 $\forall y \in [0, 1]$ 成立. 即: 序列 $\{\Phi_n(y)\}$ 在 $[0, 1]$ 上一致收敛.

依所定义的范数知:

$$\Phi(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_n(y).$$

在 $[0, 1]$ 上连续. 由于 $\varphi_n(y) = y^\alpha \Phi_n(y)$, 故函数序列 $\varphi_n(y)$ 在 $[0, 1]$ 上一致收敛. 定义其极限函数为:

$$\varphi(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(y), \quad (4.7)$$

则得

$$\varphi(y) = y^\alpha \Phi(y). \quad (4.8)$$

同理可得: $\{S_n(y)\}, \{S_n^*(y)\}$ 在 $[0, 1]$ 上分别一致收敛于 $S(y)$ 和 $S^*(y)$ 且在 $[0, 1]$ 上连续. 至此, 结论 1 得证.

推论 2. 在均布载荷与中心受集中力联合作用下的圆薄板大挠度问题的精确解的解析式为:

$$\varphi(y) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=0}^i A_{ij} y^j \ln^i y, \quad S(y) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=0}^i B_{ij} y^j \ln^i y, \quad (4.9)$$

其中 A_{ij}, B_{ij} 是与 y 无关的常数.

推论 3. 由积分方程所得到的 (4.9) 式属于集合 A .

由于 $W(y) = W_m + \int_0^y \frac{1}{\xi} \varphi(\xi) d\xi$, 于是, 有:

推论 4. $W(y) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^i C_{ij} y^j \ln^i y$ 在 $[0, 1]$ 上一致收敛且连续. 其中:

$$C_{00} = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=0}^i A_{ij} \frac{(-1)^{i+1} \cdot j!}{i^{j+1}}, \quad C_{ij} = \sum_{t=i}^j \frac{(-1)^{t-i} \cdot t!}{j! i^{t-i+1}} A_{it},$$

$$i = 1, 2, \dots; j = 0, 1, \dots, i.$$

五、待定系数的确定与中心挠度为零的解

1. 待定系数的求解:

将精确解的解析式 (4.9) 代入 (2.2) 式中, 比较同次幂 $y^i \ln^j y$ 的系数后, 得:

$$\begin{cases} A_{11} = -Q\bar{\alpha}, \quad B_{11} = 0, \quad A_{22} = 0, \quad A_{21} = \frac{1}{2} A_{10} B_{10}, \\ A_{20} = \frac{1}{2} A_{10} B_{10} + \frac{1}{2} Q\bar{\beta} - \frac{3}{2} A_{21}, \quad B_{22} = -\frac{1}{4} A_{11}^2, \\ B_{21} = -\frac{1}{2} A_{11} A_{10} - 3B_{22}, \quad B_{20} = -\frac{1}{4} A_{10}^2 - \frac{3}{2} B_{21} - B_{22} \end{cases} \quad (5.1.1)$$

和

$$\begin{cases} A_{ij} = \frac{1}{i(i-1)} \left[\sum_{l=1}^{i-1} \sum_{k=0}^j A_{i-l, j-k} B_{lk} - (j+1)(2i-1) A_{i, j+1} \right. \\ \quad \left. - (j+1)(j+2) A_{i, j+2} \right], \\ B_{ij} = \frac{1}{i(i-1)} \left[\frac{1}{2} \sum_{l=1}^{i-1} \sum_{k=0}^j A_{i-l, j-k} A_{lk} - (j+1)(2i-1) B_{i, j+1} \right. \\ \quad \left. - (j+1)(j+2) B_{i, j+2} \right]. \end{cases} \quad (5.1.2)$$

其中 $i = 3, 4, \dots; j = i, i-1, \dots, 0$.

上述所有待定常数中, 只有 A_{10}, B_{10} 为独立常数. 由 $y = 1$ 处的边界条件得:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{\infty} [A_{i0}(\lambda - 1 - i\lambda) - \lambda A_{i1}] = 0, \\ \sum_{i=1}^{\infty} [B_{i0}(\mu - 1 - i\mu) - \mu B_{i1}] = 0, \end{cases} \quad (5.1.3)$$

而 (2.3) 式中 $y = 0$ 处的边界条件能自动满足.

(5.1.3) 式是一组关于以 A_{10}, B_{10} 为未知量的非线性代数方程组, 可用牛顿迭代法进行求解如下: 令:

$$X = \sum_{i=1}^{\infty} [(\lambda - 1 - i\lambda) A_{i0} - \lambda A_{i1}], \quad (5.1.4)$$

$$Y = \sum_{i=1}^{\infty} [(\mu - 1 - i\mu) B_{i0} - \mu B_{i1}], \quad (5.1.5)$$

$$D = X^2 + Y^2. \quad (5.1.6)$$

牛顿迭代格式如下:

$$\bar{A}_{10} = A_{10} + \xi_1, \quad \bar{B}_{10} = B_{10} + \xi_2, \quad (5.1.7)$$

其中 A_{10}, B_{10} 为迭代前的取值, $\bar{A}_{10}, \bar{B}_{10}$ 为迭代后的修正值, ξ_1, ξ_2 为修正量且由下式确定:

$$\begin{cases} \xi_1 = \frac{Y(A_{10}, B_{10})X_{,B_{10}} - X(A_{10}, B_{10})Y_{,B_{10}}}{X_{,A_{10}} \cdot Y_{,B_{10}} - X_{,B_{10}} \cdot Y_{,A_{10}}}, \\ \xi_2 = \frac{X(A_{10}, B_{10}) \cdot Y_{,A_{10}} - Y(A_{10}, B_{10}) \cdot X_{,B_{10}}}{X_{,A_{10}} \cdot Y_{,B_{10}} - X_{,B_{10}} \cdot Y_{,A_{10}}}. \end{cases} \quad (5.1.8)$$

上述迭代直到下列精度:

$$|D| < 10^{-10}, \quad |\xi_1| < 10^{-5}, \quad |\xi_2| < 10^{-5}$$

满足为止。从而得到满足边界条件 $X = 0, Y = 0$ 的解 A_{10}, B_{10} 。其值精确到小数点后第 5 位。

2. 其它有关量的计算公式

$$\text{边缘径向膜力: } S_R(1) = \sum_{i=1}^{\infty} B_{i0}, \quad (5.2.1)$$

$$\text{中心径向膜力: } S_R(0) = B_{10}, \quad (5.2.2)$$

$$\text{边缘弯曲应力: } S_w(1) = \sum_{i=1}^{\infty} [(-2i - \nu + 1)A_{i0} - 2A_{i1}], \quad (5.2.3)$$

$$\text{挠度: } W(y) = W_m + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=0}^i \sum_{t=j}^i A_{it} \frac{(-1)^{i-j} \cdot t!}{j! i^{t-j+1}} y^j \ln y. \quad (5.2.4)$$

由边界条件 $W(1) = 0$ 得:

$$W_m = W(0) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=0}^i A_{ij} \frac{(-1)^{i+1} \cdot j!}{j^{i+1}}. \quad (5.2.5)$$

3. 中心挠度为零的情形

由基本方程可知: 在给定了 $Q, \bar{\beta}$ 和 $\bar{\alpha}$ 后, 也即给定了均布载荷和中心集中力后, 可由上述方法求解而获得精确解的解答, 从而得到中心挠度。为不失一般性, 取 $\bar{\beta} = 1$, 则在给定的 Q 下, 由不同的 $\bar{\alpha}$ 可得到不同的中心挠度值。于是, 在 Q 给定时, $W_m = W_m(\bar{\alpha})$ 。

对于中心挠度 $W_m = 0$ 的情形, 力 $\bar{\alpha}Q$ 相当于解除中间支座后的约束反力。此反力随均布载荷(外载)的大小 Q 而变化。在线性理论中, 由 $W_m = W(0) = 0$ 得:

$$\bar{\alpha} = \frac{2\lambda + 1}{4(\lambda + 1)} = \text{const}, \quad (\bar{\beta} = 1). \quad (5.3.1)$$

该式表明: 在线性理论中, 板中心支座反力的大小与外载的大小成正比而变化; 而在非线性理论中, 将本文精确解代入条件 $W(0) = 0$ 中得:

$$\begin{aligned} \bar{\alpha} - \bar{\alpha}_0 &= \frac{2\lambda + 1}{4(\lambda + 1)} + \frac{1}{Q(1 + \lambda)} \sum_{i=2}^{\infty} \sum_{j=0}^i \sum_{r=1}^{i-1} \sum_{s=0}^r A_{i-r,j-s} B_{rs} \left\{ \left(\frac{1 - \lambda}{j^{i+1}} - \frac{1}{(i-1)^{i+1}} \right) \right. \\ &\quad \times (-1)^j \cdot j! + \sum_{t=0}^i \frac{(-1)^j j!}{j^{i-t+1}} \left(\frac{1}{(i-1)^{t+1}} - \frac{1}{j^{t+1}} \right) \left. \right\}. \end{aligned} \quad (5.3.2)$$

由此可见, 求和号部分即为非线性理论对线性理论结果的修正。由于 A_{ij} 均与 Q 成非线性关系, 故该项是随 Q 而变化的。于是, 支承反力与外载 Q 的比不再是常数, 而是随 Q 大小而变化的函数, 即 $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}(Q)$ 。

若此时对 (5.1.3) 和 (5.3.2) 式联立求解 A_{10} , B_{10} 和 $\bar{\alpha}_0$, 由于计算 (5.3.2) 式较为费时, 因此, 我们采用了具有与实际物理意义相联系的割线法求解。

对于某一给定的外载 $Q(\bar{\beta} = 1)$, 首先放松条件 $W(0) = 0$, 而用 $\bar{\alpha}Q$ 来代替约束反力。于是, 输入一个 $\bar{\alpha}$, 就可由前面的精确求解得到对应的中心挠度值 $W_m = W(0)$ 。显然, 有函数关系(如图 2)

$$W_m = W_m(\bar{\alpha}).$$

由于在大挠度理论中考虑了在线性理论中没有考虑的薄膜力, 这样, 板在非线性情形的承载能力要比线性理论的大, 因而, 依非线性理论所求得的反力比依线性理论求得的要小。于是, 当以小挠度时的 $\bar{\alpha} = \frac{2\lambda + 1}{4(\lambda + 1)}$ 作为初值, 则可得: $W_m < 0$; 而 $\bar{\alpha} = 0$, 则得均布载荷作

用下的大挠度解, 其 $W_m > 0$, 以此作为割线法开始的两点, 就可进行计算。

记:

$$W_{m_1} = W_m(\bar{\alpha}_1) < 0,$$

$$W_{m_2} = W_m(\bar{\alpha}_2) > 0,$$

则得割线法的迭代格式为:

$$\bar{\alpha} = \bar{\alpha}_1 - \frac{\bar{\alpha}_2 - \bar{\alpha}_1}{W_{m_2} - W_{m_1}} \cdot W_{m_1}. \quad (5.3.3)$$

再以此 $\bar{\alpha}$ 求解 W_m , 若 $W_m > 0$, 则 $\bar{\alpha}$ 和 W_m 分别取代 $\bar{\alpha}_2$ 和 W_{m_2} ; 反之, 取代 $\bar{\alpha}_1$ 和 W_{m_1} 。重复计算, 直到 $|W_m| < 10^{-5}$ 为止。依此即可求得各 Q 作用下的 $\bar{\alpha}$ 值和其它量。所有计算结

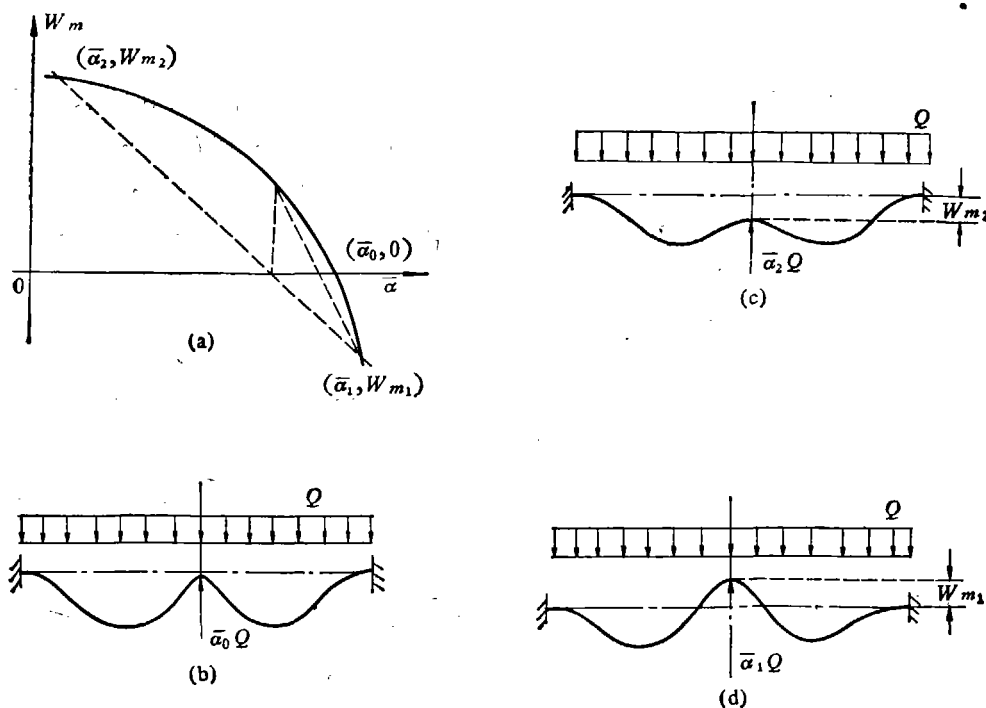


图 2

表 1

Q	W_m	D	ξ_1	ξ_2	$\bar{\alpha}$	A_{10}	B_{10}
0.5	$-3.7038134 \times 10^{-10}$	$2.5141140 \times 10^{-16}$	1.1278050×10^{-9}	1.5773583×10^{-8}	0.24999799	-0.25002837	3.0066702×10^{-8}
1.5	8.1013596×10^{-9}	$2.6167564 \times 10^{-16}$	$-1.5513731 \times 10^{-8}$	$-2.9685410 \times 10^{-9}$	0.24998182	-0.75076467	2.7026020×10^{-8}
2.5	4.9864424×10^{-8}	$1.2689630 \times 10^{-15}$	$-1.2775435 \times 10^{-8}$	$-1.0820784 \times 10^{-7}$	0.24994974	-1.2535262	7.4884005×10^{-8}
3.5	5.8886947×10^{-8}	$2.3535723 \times 10^{-15}$	1.1986050×10^{-7}	$-4.9122957 \times 10^{-7}$	0.24990210	-1.7596186	0.14622615
4.5	8.6201062×10^{-8}	$2.6653603 \times 10^{-15}$	1.2696204×10^{-7}	$-5.3161247 \times 10^{-7}$	0.24983941	-2.2702839	0.24053404
5.5	8.0567859×10^{-8}	$3.1982151 \times 10^{-15}$	8.2952859×10^{-8}	4.7629135×10^{-7}	0.24976240	-2.7866793	0.35714540
6.5	$-3.2478546 \times 10^{-8}$	$8.1849024 \times 10^{-15}$	$-1.0198981 \times 10^{-7}$	$-1.6380936 \times 10^{-7}$	0.24967186	-3.3098617	0.49527693
7.5	7.8778498×10^{-8}	$6.0092307 \times 10^{-15}$	$-1.2738061 \times 10^{-7}$	$-5.4597831 \times 10^{-7}$	0.24956875	-3.8407745	0.65403658
8.5	7.9605013×10^{-7}	6.567899×10^{-15}	$-3.5493939 \times 10^{-8}$	$-2.0053891 \times 10^{-7}$	0.24945389	-4.3802423	0.83246326
9.5	$-3.4904207 \times 10^{-7}$	$4.4758633 \times 10^{-15}$	$-4.8950985 \times 10^{-7}$	$-7.4280834 \times 10^{-8}$	0.24932864	-4.9289684	1.0295365
10.5	2.2365335×10^{-6}	$7.1987564 \times 10^{-15}$	4.9736200×10^{-7}	2.2509477×10^{-7}	0.24919362	-5.4875355	1.2442036
11.5	2.4347986×10^{-6}	$3.0791828 \times 10^{-15}$	8.3498034×10^{-8}	$-1.5186991 \times 10^{-7}$	0.24905015	-6.0564094	1.4754072
12.5	3.2256536×10^{-6}	$2.8795293 \times 10^{-15}$	1.1033398×10^{-7}	4.5702212×10^{-7}	0.24889920	-6.6359510	1.7220863
13.5	3.8907187×10^{-6}	$2.4396961 \times 10^{-15}$	4.2727670×10^{-8}	2.4018616×10^{-8}	0.24874175	-7.2264193	1.9832017
14.5	4.9584853×10^{-6}	$8.5328917 \times 10^{-15}$	1.5992427×10^{-7}	2.7229377×10^{-8}	0.24857891	-7.8279794	2.2577213
15.5	5.4692631×10^{-6}	$6.1254405 \times 10^{-15}$	4.5908159×10^{-8}	$-5.2721040 \times 10^{-7}$	0.24841249	-8.4407063	2.544597
16.5	6.4557459×10^{-6}	$2.7047501 \times 10^{-15}$	4.1123159×10^{-8}	$-2.2028404 \times 10^{-8}$	0.24824516	-9.0646182	2.8428122
17.5	9.7256805×10^{-6}	$1.2760662 \times 10^{-15}$	1.7606195×10^{-7}	$-3.1631971 \times 10^{-7}$	0.24807282	-9.7000081	3.1524485
18.5	8.1226424×10^{-6}	$3.7026641 \times 10^{-15}$	1.4594340×10^{-7}	$-8.5833792 \times 10^{-8}$	0.24782545	-10.349192	3.4810918
19.5	2.7202070×10^{-6}	$5.3716144 \times 10^{-15}$	$-2.0852371 \times 10^{-7}$	1.5201393×10^{-7}	0.24707593	-11.022189	3.8693910
20.5	6.8442852×10^{-7}	$7.5162769 \times 10^{-15}$	7.8258323×10^{-8}	$-1.8724289 \times 10^{-7}$	0.24463029	-11.725689	4.3846723
21.5	6.9254294×10^{-7}	$3.5777669 \times 10^{-15}$	2.8156732×10^{-8}	$-1.5339866 \times 10^{-7}$	0.24240735	-12.382572	4.8121388
22.5	5.6710654×10^{-6}	$4.9686120 \times 10^{-15}$	$-3.3576999 \times 10^{-8}$	$-9.7208519 \times 10^{-8}$	0.24017995	-12.940131	5.0314636

表 2 $Q=20.0$, $\bar{\alpha}=0.24615159$, $\alpha_{10}=-11.072629$, $B_{10}=4.1147178$, $D=2.0111352 \times 10^{-13}$, $W_m=5.3637660 \times 10^{-4}$,

$$W\left(\frac{r}{a}\right) = \sum_{j=0}^J C_{1j} \left(\frac{r}{a}\right)^{2j} \ln^2\left(\frac{r}{a}\right)$$

r/a	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
5	0	0.16474446	0.40425541	0.70281729	0.70711182	0.62105663	0.46280105	0.22827354	-0.16242502
	5	0.16474453	0.40426643	0.70234456	0.70287186	0.60618292	0.43524938	0.21112541	-0.12404097
10	0	0.16474454	0.40426604	0.70285092	0.70509794	0.61209572	0.44818436	0.25539531	0.10897568
	5	0.16474454	0.40426604	0.70285054	0.70508545	0.61200563	0.44770487	0.25330128	0.099459869
	10	0.16474454	0.40426604	0.70285050	0.70508581	0.61197621	0.44761902	0.25322217	0.097450414
15	0	0.16474454	0.40426604	0.70285060	0.70508580	0.61195206	0.44727073	0.25036208	0.074713171
	10	0.16474454	0.40426604	0.70285060	0.70508580	0.61195198	0.44727665	0.25046891	0.075699207
	15	0.16474454	0.40426604	0.70285060	0.70508580	0.61195201	0.44727662	0.25046892	0.075699207
20	0	0.16474454	0.40426604	0.70285060	0.70508580	0.61195189	0.44727586	0.25051361	0.077266416
	15	0.16474454	0.40426604	0.70285060	0.70508580	0.61195189	0.44727588	0.25051208	0.077211803
	20	0.16474454	0.40426604	0.70285060	0.70508580	0.61195189	0.44727588	0.25051208	0.077211803
25	0	0.16474454	0.40426604	0.70285060	0.70508580	0.61195189	0.44727589	0.25051183	0.077131962
	20	0.16474454	0.40426604	0.70285060	0.70508580	0.61195189	0.44727589	0.25051184	0.077133691
	25	0.16474454	0.40426604	0.70285060	0.70508580	0.61195189	0.44727589	0.25051184	0.077133691
30		0.16474454	0.40426604	0.70285060	0.70508580	0.61195189	0.44727589	0.25051184	0.077137794

表 3

Q	$\bar{\alpha}$	s	$\bar{Q}$	$\frac{ Q - \bar{Q} }{Q} \times 100\%$	Q	$\bar{\alpha}$	s	$\bar{Q}$	$\frac{ Q - \bar{Q} }{Q} \times 100\%$
1.0	0.24999192	0.031697	1.0000484	0.00484	12.0	0.2489755	0.3343229	10.94986	8.75116
2.0	0.24996774	0.0632135	1.9964335	0.178325	13.0	0.24882122	0.3553533	11.695378	10.03555
3.0	0.24992782	0.0942373	2.9818216	0.6059466	14.0	0.24866093	0.3752266	12.409642	11.35970
4.0	0.24987262	0.1229637	3.8982174	2.544565	15.0	0.24849602	0.393926	13.090933	12.72711
5.0	0.24980269	0.1545266	4.9133851	1.732298	16.0	0.24832877	0.4113623	13.73474	14.15787
6.0	0.24971879	0.1834678	5.8529755	2.45040	17.0	0.24816097	0.4275407	14.339865	15.64785
7.0	0.24962181	0.2114378	6.77061	3.27842	18.0	0.24797106	0.4444743	14.981661	16.76855
8.0	0.24951269	0.2383347	7.6630409	4.21198	19.0	0.24757268	0.4760731	16.203851	14.71657
8.5	0.24945389	0.2508954	8.0836601	4.89811	20.0	0.24615159	0.5596906	19.615451	1.92274
9.0	0.24939258	0.2640787	8.5278756	5.24582	21.0	0.24351186	0.6526601	23.796086	13.31469
9.5	0.24932864	0.2765337	8.9503541	5.78574	22.0	0.24137895	0.6996923	26.139557	18.81616
11.0	0.24912290	0.3120986	10.172798	7.520018	23.0	0.24861698	0.7421556	28.45274	23.70756

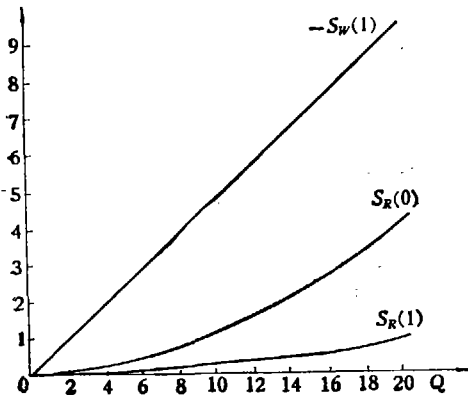


图 3

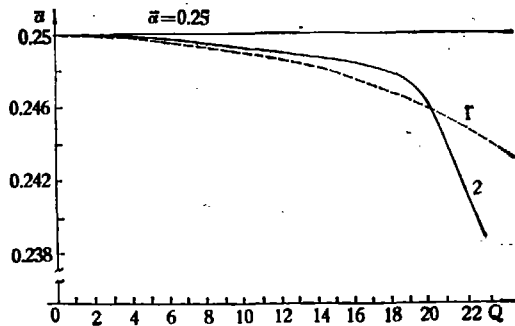
(1——摄动解^[3], 2——精确解)

图 4

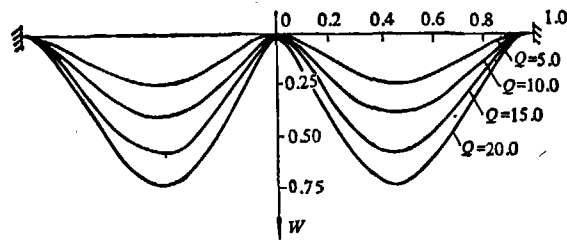


图 5

果精确到小数点后第 5 位。对于固定夹紧边界 ($\lambda = 0$, $\mu = 2.857$, $\nu = 0.3$) 的情形, 其计算结果、精度和收敛速度见图 3, 4, 5 和表 1, 表 2。由结果可知, $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}(Q)$ 曲线是随 Q 的增大而减小的

本文计算结果是在 DPS/58 (Honeywell) 系统上进行的。对于中心挠度为零的情形, 给定 Q 值求解精确解的 CPU 时间每次约为 30 秒钟。

六、关于摄动解的精度

在文献[1]中,对于某一给定的 α ,由文献[1]中的(2.13), (2.16), (2.20), (3.3), (2.22)式(其中 $q_1 = 2/\sqrt{A}$, $q_3 = -\frac{Bq_1^3}{A}$),便可得到以平均挠角为摄动参数的摄动解求解中心挠度为零的圆板所需的外载荷 Q (均布载荷值)。将本文求得的 α 以 $-\alpha$ 代替文献[2]公式的 α ,可得到由摄动解求出的 Q 值的大小。具体见表3中的 $\bar{Q}$ 。该表列出了摄动解的 Q 值与本文 Q 值的相对误差。由此可见,其相对误差一般是随载荷 Q 值的增加而增大的。摄动解的 Q 在 $1 < Q \leq 19.0$ 时,一般小于精确解的 Q 值;在 $Q \geq 21.0$ 时,则大于精确解的值,且增长的幅度很大。

因此,若以相对误差小于5%为标准,则摄动解在 $Q \leq 8.5$ 内有效,此时,摄动参数满足 $\epsilon \leq 0.25$ 。

本文是在叶开沅教授的指导下完成的,在此表示感谢。

参 考 文 献

- [1] 黄黔,应用数学和力学,4(1983),5: 711—720.
- [2] 钱伟长、叶开沅,物理学报,10(1954),3: 209—238.
- [3] 胡海昌,物理学报,10(1954),383—394.
- [4] 叶开沅、郑晓静、周又和,An analytical formula of exact solution to Karman's Equations of circular plate under a concentrated load, Proc. ICNM., Shanghai, Science press, Beijing, China, 1985, 386—391.
- [5] Way, S., Trans. Appl. Mech., 56(1934), 627—636
- [6] 叶开沅、郑晓静、王新志, On some properties and calculation of the exact solution to Karman's Equations of circular plate under a concentrated load, Proc. ICNM, Shanghai; Science Press, Beijing, China, 1985, 379—385.