

文章编号:1009-3087(2013)05-0103-06

改进概率量化分布式一致性算法

彭焕新^{1,2},戚国庆²,盛安冬²

(1. 南京工业职业技术学院 机械系,江苏 南京 210046;2. 南京理工大学 自动化学院,江苏 南京 210094)

摘要:为了提高量化通信下分布式一致性算法的收敛精度,对概率量化分布式一致性算法进行改进,提出改进概率量化分布式一致性算法。在改进概率量化分布式一致性算法中,节点利用自身状态值和邻接节点的概率量化信息进行节点的状态更新。对改进概率量化分布式一致性算法的收敛性和均方误差进行了分析、计算和仿真。结果表明改进概率量化分布式一致性虽然不能收敛到一致性,但是均方误差更小,收敛精度更高。

关键词:量化通信;分布式一致性;概率量化

中图分类号:TP274

文献标志码:A

Distributed Consensus Algorithm with Modified Probabilistic Quantization

PENG Huan-xin^{1,2}, QI Guo-qing², SHENG An-dong²

(1. Dept. of Mechanical Eng., Nanjing Inst. of Industry Technol., Nanjing 210046, China;

2. School of Automation, Nanjing Univ. of Sci. and Technol., Nanjing 210094, China)

Abstract: In order to improve the accuracy of distributed consensus algorithms under quantization communication, a modified probabilistic quantization distributed consensus algorithm was proposed based on the probabilistic quantization distributed consensus algorithm. In the proposed algorithm, states of nodes were updated by itself states and the probabilistic quantization values of the adjacent nodes. The convergence performance and the mean square error of the modified probabilistic quantization distributed consensus algorithm were analyzed and calculated. The results showed that the accuracy of modified probabilistic quantization distributed consensus algorithm is improved dramatically.

Key words: quantization communication; distributed consensus; probabilistic quantization

多智能体系统(multi-agent systems)的分布式一致性(distributed consensus)问题,是指在没有中心协调器或全局通信下,每个智能体利用自身的状态和相互通信的邻近智能体的状态进行状态更新,最后所有智能体状态能达到一个共同的输出值。Olfati-Saber 和 Murray 等基于 1 阶算法为分布式一致性问题建立了一套理论框架^[1-2]。近年来,多智能体系统的分布式一致性问题在许多领域应用广泛,已经引起了许多研究人员的兴趣。

目前,大多数分布式一致性算法主要分析研究模拟信号^[3-6]或者离散信号^[7-9]。由于受通信带宽或有限能量限制,在分布式一致性算法的实际应用过程中,通常采用量化通信。在量化通信过程中,需

要考虑量化误差对分布式一致性算法的影响。文献[10]提出考虑通信噪声对分布式一致性算法的影响。文献[11]首次提出量化一致性概念。量化一致性不是一个严格意义上的一致性,所有节点不一定能达到共同的输出值。在均匀量化^[12](uniform quantization)下分布式一致性算法的节点通常不能收敛到共同输出值。文献[13-14]提出采用抖动量化(dithered quantization)处理分布式一致性问题。抖动量化是在输入量中添加一个随机均匀分布噪声,再对输入量进行均匀量化。抖动量化能使分布式一致性算法的所有节点达到一个共同的输出值,但该输出值是一个随机值,而不是所有节点初始状态的平均值。文献[15]提出概率量化(probabilistic quantization)策略。文献[16]在文献[15]的基础上提出概率量化分布式一致性算法(probabilistic quantized distributed consensus algorithm, PQDC)。该算法通过均匀量化,利用节点自身的概率量化信息和

收稿日期:2013-03-05

基金项目:国家自然科学基金资助项目(61104186)

作者简介:彭焕新(1973—),男,博士生,讲师。研究方向:数据融合;非线性滤波。E-mail:penghx@niit.edu.cn

邻接节点的概率量化信息进行节点状态更新。文献[17]指出概率量化等同于抖动量化,基于概率量化的分布式一致性算法能收敛到共同输出值,该输出值等于某量化值。抖动量化和概率量化下分布式一致性算法中每个节点能收敛到共同输出值,但是该共同输出值是一个随机值,并不等于所有节点初始状态的平均值,因此,收敛精度比较差。

由于文献[16]所提出的概率量化分布式一致性算法对节点本身状态进行量化处理,很容易造成节点本身量化误差的累计。为了提高量化通信下分布式一致性算法的收敛精度,作者提出改进概率量化分布式一致性算法(modified probabilistic quantized distributed consensus algorithm, MPQDC)。该算法只对邻接节点的状态值进行量化处理,利用节点自身状态值和邻接节点量化值进行节点状态值更新,从而减少由于节点自身量化误差累计而造成的收敛精度降低。对改进概率量化分布式一致性算法的收敛性和均方误差(mean square error, MSE)进行了分析、仿真和比较。

1 分布式一致性算法

设网络通信拓扑图为 $G = (V, E)$ 。其中: V 为节点集; E 为边集, 代表节点间的通信连接。设节点 $i, j \in V$, 用有序实数对 $(i, j) \in E$ 表示边。路径为某一有序节点集, 其任意相邻的 2 个节点所构成的边 $(i, j) \in E$ 。如果图 G 的任意 2 个节点之间总存在一条路径相连, 则称图 G 是连通图。对于节点 i , 所有满足 $(i, j) \in E$ 的节点的集合称为 i 的邻接节点集, 用 N_i 来表示。矩阵 $A = [a_{ij}]$ (a_{ij} 为边 (i, j) 的权重值, 通常取值为 $a_{ij} = 1$) 和矩阵 L 分别为 $G = (V, E)$ 对应的加权邻接矩阵和拉普拉斯矩阵, 设网络总节点个数为 n , 则拉普拉斯矩阵为:

$$L = \Delta - A \quad (1)$$

式中, $\Delta = \text{diag}\{\sum_{j=1}^n a_{1j}, \dots, \sum_{j=1}^n a_{nj}\}$ 。

1 阶连续分布式一致性算法^[1]可以写成:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= - \sum_{j \in N_i} a_{ij} (x_i(t) - x_j(t)), \\ \dot{\mathbf{x}}(t) &= -L\mathbf{x}(t) \end{aligned} \quad (2)$$

式中, $x_i(t)$ 表示 i 智能体的状态, $\mathbf{x}(t) = [x_1(t), \dots, x_n(t)]^T$, 其第 1 个式子为第 i 个智能体的状态更新方程, 第 2 个式子为整个网络中智能体的状态更新方程的向量表达形式。上述算法写成离散形式:

$$x_i(k+1) = x_i(k) - \varepsilon \sum_{j \in N_i} a_{ij} (x_i(k) - x_j(k)), \quad (3)$$

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{x}(k) - \varepsilon L\mathbf{x}(k)$$

式中, ε 为采样间隔。文献[3]根据最优权重提出的离散分布式一致性可以写成:

$$x_i(k) = W_{ii}x_i(k) + \sum_{j \in N_i} W_{ij}x_j(k) \quad (4)$$

式中, W_{ij} 为 Metropolis 权重值。

2 改进概率量化分布式一致性算法

2.1 改进概率量化一致性算法

首先, 对文献[15-16]提出的概率量化方法进行简单介绍。设图 G 为无向连通拓扑, 标量 $x_i(k)$ 的变化范围为 $[-U, U]$, 量化水平为 l_q ($l_q = 2^q$, q 为比特位数)。设 Δ 为量化间隔, $-U = \tau_0 < \dots < \tau_{l_q} = U$ 为每个量化间隔端点。均匀量化的每个量化间隔相等, 即 $\Delta = \tau_m - \tau_{m-1}$ ($m = 1, 2, \dots, l_q$), 每个量化间隔为 $\Delta = \frac{2U}{l_q}$ 。如果节点状态值满足 $\tau_{m-1} \leq x_i(k) \leq \tau_m$, 设 $x_i(k)$ 在 k 步时的量化值为 $q_i(k)$, 则采用概率方法选择量化值^[15-16]有:

$\Pr(q_i(k) = \tau_m) = r$, $\Pr(q_i(k) = \tau_{m-1}) = 1 - r$ 。式中, $\Pr(\cdot)$ 表示概率, $r = (\tau_m - x_i(k))/\Delta$ 。在量化过程中, 由于量化值不是节点实际状态值, 因此, 存在量化误差。设 Q 为量化映射, 量化误差为 $v_i(k)$, 则有:

$$q_i(k) = Q(x_i(k)), v_i(k) = q_i(k) - x_i(k) \quad (5)$$

引理^[16] 对于概率量化, 显然有 $E(q_i(k)) = x_i(k)$, $E(q_i(k) - x_i(k))^2 \leq \frac{\Delta^2}{4}$, 即量化值是节点状态值的无偏估计。

从引理可以看出, 量化值是节点值的无偏估计, 量化误差的均方值与量化间隔有关。

概率量化分布式一致性算法采用文献[3]提出的离散分布式一致性算法, 即式(4), 节点通过自身的量化值和邻接节点的量化值进行自身状态的更新, 概率量化分布式一致性算法可以写成^[16]:

$$x_i(k+1) = W_{ii}q_i(k) + \sum_{j \in N_i} W_{ij}q_j(k) \quad (6)$$

但是该算法必须事先知道整个通信网络拓扑结构, 当通信拓扑存在断链或者拓扑结构变化时, 每条连接的权重值必须重新计算。式(4)和(3)实质上是一样的^[3], 而式(3)在通信拓扑存在断链或转换拓扑时, 不需要重新计算权重值。为了方便起见, 作者采用文献[1-2]提出的分布式一致性算法, 即式

(3)进行量化一致性处理,则概率量化分布式一致性算法可以写成:

$$x_i(k+1) = q_i(k) - \varepsilon \sum_{j \in N_i} a_{ij}(q_i(k) - q_j(k)), \quad (7)$$

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{P}\mathbf{q}(k) = \mathbf{P}\mathbf{x}(k) - \mathbf{P}\mathbf{v}(k)$$

根据文献[3]可知,式(6)所示概率量化分布式一致性算法与式(7)所示概率量化分布式一致性算法是等价的。但是,式(7)所示算法在断链或转换拓扑时,不需要重新计算每条连接的权重值,所以,文中使用式(7)表示概率量化分布式一致性算法。

为了提高概率量化分布式一致性算法的收敛精度,作者在式(7)所示概率量化分布式一致性算法的基础上进行改进,提出改进概率量化分布式一致性算法。改进概率量化分布式一致性算法的各个节点通过自身的状态值和邻接节点的量化值进行状态更新,即:

$$x_i(k+1) = x_i(k) - \varepsilon \sum_{j \in N_i} a_{ij}(q_i(k) - q_j(k)) \quad (8)$$

将式(8)写成向量形式:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{x}(k) - \varepsilon \mathbf{L}\mathbf{q}(k) =$$

$$(\mathbf{I}_n - \varepsilon \mathbf{L})\mathbf{x}(k) - \varepsilon \mathbf{L}\mathbf{v}(k) = \mathbf{P}\mathbf{x}(k) - \varepsilon \mathbf{L}\mathbf{v}(k) \quad (9)$$

式中, $\mathbf{q}(k) = [q_1(k), \dots, q_n(k)]^T$, $\mathbf{P} = \mathbf{I} - \varepsilon \mathbf{L}$, $\mathbf{v}(k) = [v_1(k), \dots, v_n(k)]^T$ 。

当满足 $0 < \varepsilon < \frac{2}{\lambda_{\max}(\mathbf{L})}$ (其中, $\lambda_{\max}(\mathbf{L})$ 为矩阵 $\mathbf{L}$ 的最大特征值), 式(3)所示的一致性算法收敛到平均初始值^[1], 这时矩阵 $\mathbf{P}$ 存在唯一值为 1 的特征值, 其余特征值的模小于 1。对于矩阵 $\mathbf{P}$ 存在向量 $\mathbf{Y} = [1, \dots, 1]^T$, 满足 $\mathbf{P}\mathbf{Y} = \mathbf{Y}$, $\mathbf{Y}^T\mathbf{P} = \mathbf{Y}^T$ 。由于 $\mathbf{Y}^T\mathbf{L} = 0$, 从式(9)可以得到:

$\mathbf{Y}^T\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{Y}^T\mathbf{P}\mathbf{x}(k) - \varepsilon\mathbf{Y}^T\mathbf{L}\mathbf{v}(k) = \mathbf{Y}^T\mathbf{x}(k)$ 。从而可以推出:

$$\frac{1}{n}\mathbf{Y}^T\mathbf{x}(k+1) = \frac{1}{n}\mathbf{Y}^T\mathbf{x}(k) = \dots = \frac{1}{n}\mathbf{Y}^T\mathbf{x}(0) \quad (10)$$

即任何时刻节点状态的平均值都相等, 等于初始状态的平均值。从式(9)还可以推导出:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}(k+1) = \lim_{k \rightarrow \infty} \{\mathbf{P}\mathbf{x}(k) - \varepsilon\mathbf{L}\mathbf{v}(k)\} =$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \{\mathbf{P}^{k+1}\mathbf{x}(0) - \varepsilon \sum_{l=0}^k \mathbf{P}^{k-l}\mathbf{L}\mathbf{v}(l)\}。$$

由于 $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{P}^{k+1} = \frac{1}{n}\mathbf{Y}\mathbf{Y}^T$, 显然存在某个较大的整数 m , 使得 $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{P}^{k-m} = \frac{1}{n}\mathbf{Y}\mathbf{Y}^T$ 。所以有:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}(k+1) = \frac{1}{n}\mathbf{Y}\mathbf{Y}^T\mathbf{x}(0) - \lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon \sum_{l=0}^m \mathbf{P}^{k-l}\mathbf{L}\mathbf{v}(l) -$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon \sum_{l=m+1}^k \mathbf{P}^{k-l}\mathbf{L}\mathbf{v}(l) = \frac{1}{n}\mathbf{Y}\mathbf{Y}^T\mathbf{x}(0) -$$

$$\varepsilon \sum_{l=0}^m \frac{1}{n}\mathbf{Y}\mathbf{Y}^T\mathbf{L}\mathbf{v}(l) - \lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon \sum_{l=m+1}^k \mathbf{P}^{k-l}\mathbf{L}\mathbf{v}(l)。$$

由于 $\mathbf{Y}^T\mathbf{L} = 0$, 因此, 上式能写成:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}(k+1) = \frac{1}{n}\mathbf{Y}\mathbf{Y}^T\mathbf{x}(0) - \lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon \sum_{l=m+1}^k \mathbf{P}^{k-l}\mathbf{L}\mathbf{v}(l) \quad (11)$$

定理 1 对于改进概率量化分布式一致性算法, 有 $E\{\lim_{k \rightarrow \infty}(\mathbf{x}(k+1))\} = \frac{1}{n}\mathbf{Y}\mathbf{Y}^T\mathbf{x}(0)$, 即节点状态值极限值的均值等于初始状态的平均值。

证明: $E(\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}(k+1)) = \lim_{k \rightarrow \infty} E(\mathbf{x}(k+1)) =$

$\frac{1}{n}\mathbf{Y}\mathbf{Y}^T\mathbf{x}(0) - \lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon \sum_{l=m}^k E(\mathbf{P}^{k-l}\mathbf{L}\mathbf{v}(l))$ 。根据引理可知 $E(\mathbf{v}(k)) = 0$, 从而有 $\lim_{k \rightarrow \infty} E(\mathbf{x}(k+1)) = \frac{1}{n}\mathbf{Y}\mathbf{Y}^T\mathbf{x}(0)$, 即节点值的极限的均值等于初始状态的平均值。证毕。

2.2 均方误差分析

下面计算 $k+1$ 迭代步时, 节点状态值到初始状态平均值的均方误差。假设各节点的量化误差在时间和空间上互不相关, 从式(9)可以得到:

$$E\|\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{J}\mathbf{x}(0)\|_2^2 = \|\mathbf{P}^{k+1}\mathbf{x}(0) - \mathbf{J}\mathbf{x}(0)\|_2^2 + E\left(\sum_{l=0}^k (\mathbf{P}^l \varepsilon \mathbf{L}\mathbf{v}(k-l))^T (\mathbf{P}^l \varepsilon \mathbf{L}\mathbf{v}(k-l))\right)。$$

式中, $\mathbf{J} = \frac{1}{n}\mathbf{Y}\mathbf{Y}^T$ 。

由于 $(\mathbf{P} - \mathbf{J})(\mathbf{P} - \mathbf{J}) = \mathbf{P}^2 - \mathbf{J}$, 从而推出 $(\mathbf{P} - \mathbf{J})^{k+1} = \mathbf{P}^{k+1} - \mathbf{J}$ 。由于 $\mathbf{Y}^T\mathbf{L} = 0$, 从而有 $\frac{1}{n}\mathbf{Y}\mathbf{Y}^T \varepsilon \mathbf{L}\mathbf{v}(k-l) = 0$, 即 $\mathbf{P}^l \varepsilon \mathbf{L}\mathbf{v}(k-l) = (\mathbf{P}^l - \mathbf{J}) \varepsilon \mathbf{L}\mathbf{v}(k-l)$ 。当通信拓扑为无向连通拓扑时, $(\mathbf{P} - \mathbf{J})^{k+1}$ 为实对称矩阵, 因此, $\|(\mathbf{P} - \mathbf{J})^{k+1}\|_2^2 = \rho^{2(k+1)}(\mathbf{P} - \mathbf{J})$, 其中, $\|\cdot\|_2$ 表示矩阵的 2 范数, $\rho(\cdot)$ 为对应均值的谱半径。则均方误差为:

$$E\|\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{J}\mathbf{x}(0)\|_2^2 = \|(\mathbf{P} - \mathbf{J})^{k+1}\mathbf{x}(0)\|_2^2 + \left(\sum_{l=0}^k E(\|(\mathbf{P} - \mathbf{J})^l \varepsilon \mathbf{L}\mathbf{v}(k-l)\|_2^2)\right) \leq \rho^{2(k+1)}(\mathbf{P} - \mathbf{J})\|\mathbf{x}(0)\|_2^2 + \left(\sum_{l=0}^k E(\|(\mathbf{P} - \mathbf{J})^l \varepsilon \mathbf{L}\mathbf{v}(k-l)\|_2^2)\right)。$$

由于假设量化误差 $\mathbf{v}(k)$ 在时间和空间上互不相关, 根据引理有:

$$E \| (\mathbf{P} - \mathbf{J})^l \varepsilon \mathbf{L} \mathbf{v}(k-l) \|_2^2 \leq \rho^{2l} (\mathbf{P} - \mathbf{J}) E (\| \varepsilon \mathbf{L} \mathbf{v}(k-l) \|_2^2) \leq \rho^{2l} (\mathbf{P} - \mathbf{J}) \varepsilon^2 \| \mathbf{L} \|_2^2 \Delta^2 / 4.$$

所以,均方误差满足不等式:

$$E \| \mathbf{x}(k+1) - \mathbf{J}\mathbf{x}(0) \|_2^2 \leq \rho^{2(k+1)} (\mathbf{P} - \mathbf{J}) \| \mathbf{x}(0) \|_2^2 + \frac{1 - \rho^{2(k+1)} (\mathbf{P} - \mathbf{J})}{1 - \rho^2 (\mathbf{P} - \mathbf{J})} \varepsilon^2 \lambda_{\max}^2 (\mathbf{L}) (\Delta^2 / 4) \quad (12)$$

式(12)右端为改进概率量化分布式一致性算法的均方误差的上限。当通信拓扑为无向连通拓扑,矩阵 $\mathbf{P}$ 为双随机矩阵,因此,除了矩阵 $\mathbf{P}$ 的 1 特征值被 $(\mathbf{P} - \mathbf{J})$ 的 0 特征值代替外,矩阵 $\mathbf{P}$ 和 $(\mathbf{P} - \mathbf{J})$ 具有相同的特征值^[18]。当矩阵 $\mathbf{P}$ 只有一个值为 1 的特征值,其余特征值的模小于 1,即 $\rho(\mathbf{P} - \mathbf{J}) < 1$ 。当 $k \rightarrow \infty$, 则得到:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} E \| \mathbf{x}(k+1) - \mathbf{J}\mathbf{x}(0) \|_2^2 \leq \frac{\varepsilon^2 \lambda_{\max}^2 (\mathbf{L}) (\Delta^2 / 4)}{1 - \rho^2 (\mathbf{P} - \mathbf{J})} \quad (13)$$

定理 2 假设通信拓扑 G 为无向连通拓扑,当满足 $0 < \varepsilon < \frac{2}{\lambda_{\max} (\mathbf{L})}$, 则改进概率量化分布式一致性算法的均方误差上限为:

$$E \| \mathbf{x}(k+1) - \mathbf{J}\mathbf{x}(0) \|_2^2 \leq \rho^{2(k+1)} (\mathbf{P} - \mathbf{J}) \| \mathbf{x}(0) \|_2^2 + \frac{1 - \rho^{2(k+1)} (\mathbf{P} - \mathbf{J})}{1 - \rho^2 (\mathbf{P} - \mathbf{J})} \varepsilon^2 \lambda_{\max}^2 (\mathbf{L}) (\Delta^2 / 4),$$

其极限时刻的均匀误差满足:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} E \| \mathbf{x}(k+1) - \mathbf{J}\mathbf{x}(0) \|_2^2 \leq \frac{\varepsilon^2 \lambda_{\max}^2 (\mathbf{L}) (\Delta^2 / 4)}{1 - \rho^2 (\mathbf{P} - \mathbf{J})}.$$

证明:假设图 G 无向连通,当满足 $0 < \varepsilon < \frac{2}{\lambda_{\max} (\mathbf{L})}$, 则式(3)收敛,矩阵 $\mathbf{P}$ 存在唯一值为 1 的特征值,其余特征值的模小于 1,根据上面的分析,可以得到:

$$E \| \mathbf{x}(k+1) - \mathbf{J}\mathbf{x}(0) \|_2^2 \leq \rho^{2(k+1)} (\mathbf{P} - \mathbf{J}) \| \mathbf{x}(0) \|_2^2 + \frac{1 - \rho^{2(k+1)} (\mathbf{P} - \mathbf{J})}{1 - \rho^2 (\mathbf{P} - \mathbf{J})} \varepsilon^2 \lambda_{\max}^2 (\mathbf{L}) (\Delta^2 / 4),$$

由于 $\rho(\mathbf{P} - \mathbf{J}) < 1$, 从而可以得到:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} E \| \mathbf{x}(k+1) - \mathbf{J}\mathbf{x}(0) \|_2^2 \leq \frac{\varepsilon^2 \lambda_{\max}^2 (\mathbf{L}) (\Delta^2 / 4)}{1 - \rho^2 (\mathbf{P} - \mathbf{J})}.$$

证毕。

定理 2 表明改进概率量化分布式一致性算法的均方误差的上限与采样周期、通信拓扑结构以及量化间隔有关。

从式(11)可以看出,在改进概率量化分布式一致性算法中,量化误差逐步累积,因此,分布式一致

性算法的精度由量化误差来确定,每步的量化误差越小,则分布式一致性算法精度越高。前 m 步的量化误差随时间增加趋向 0,只有从第 m 步后的量化误差才开始累积。通过比较式(7)~(8)可以发现,概率量化分布式一致性算法利用自身的量化值进行本身状态更新,造成了节点自身的量化误差的累积,改进概率量化分布式一致性算法利用自身状态值进行更新,因此,相对概率量化分布式一致性算法,量化误差累积小,虽然改进概率量化分布式一致性算法不能保证收敛到共同输出值,但是收敛精度更高。

3 仿真与分析

为了验证上述分析结果,采用图 1 的无向随机拓扑进行仿真分析。

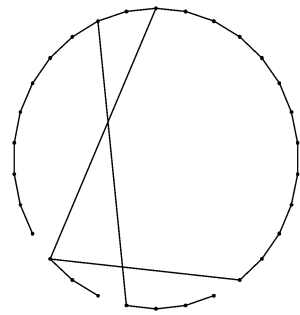


图 1 无向拓扑图

Fig. 1 Undirected topology graph

图 1 为 30 个节点的无向随机拓扑,如无特别指出,选择采样间隔 $\varepsilon = 0.02$ s,由于权重值 a_{ij} 对分布式一致性算法的收敛性没有影响^[1],因此,为了简单起见,每条边的权重值 $\{a_{ij} | (i, j) \in E\}$ 取值为 1,各个节点初始状态分别取 0~30 之间的随机值。通过 1 000 次蒙特卡洛仿真,得到概率量化分布式一致性(PQDC)算法^[16]、改进概率量化分布式一致性(MPQDC)算法、非量化算法的仿真结果,如图 2~6 所示。其中,将第 k 步的均方误差定义为 $MSE(k) = \| \mathbf{x}(k) - \mathbf{J}\mathbf{x}(0) \|_2^2$ 。

图 2、3 和图 4、5 分别为 $q = 2, q = 4$ 时,不同采样周期下的概率量化分布式一致性(PQDC)算法(式(7)所示)与改进概率量化分布式一致性(MPQDC)算法(式(8)所示)在相同条件下的均方误差比较,图中实线为改进概率量化分布式一致性算法的均方误差上限。

图 6 是节点初始状态值分别为 1~30 的情况下,改进概率量化算法($q = 2, q = 4$)、概率量化算法($q = 4$)以及非量化算法的收敛曲线。

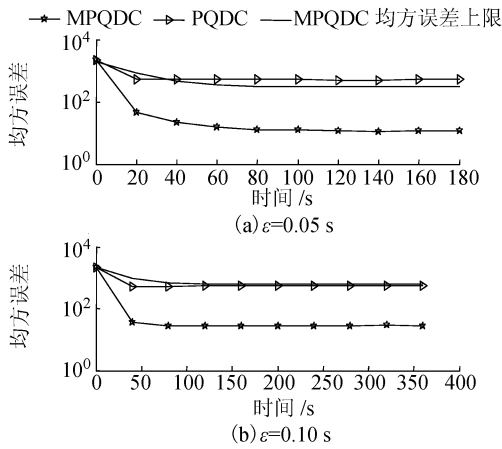


图2 $q=2, \varepsilon=0.05\text{ s}$ 和 0.10 s 时改进概率量化与概率量化的 MSE 比较

Fig. 2 Comparison about MSE between MPQDC and PQDC when $q=2, \varepsilon=0.05\text{ s}$ and 0.10 s

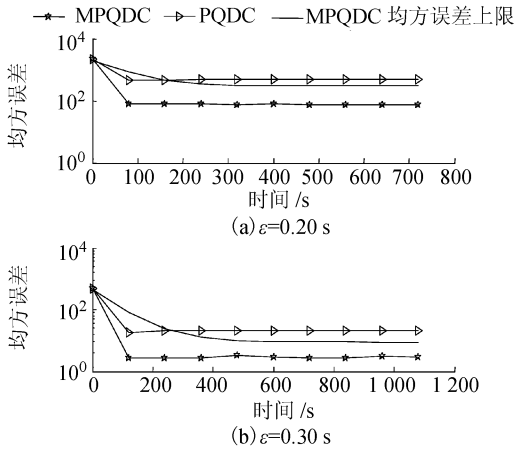


图3 $q=2, \varepsilon=0.20\text{ s}$ 和 0.30 s 时改进概率量化与概率量化的 MSE 比较

Fig. 3 Comparison about MSE between MPQDC and PQDC when $q=2, \varepsilon=0.20\text{ s}$ and 0.30 s

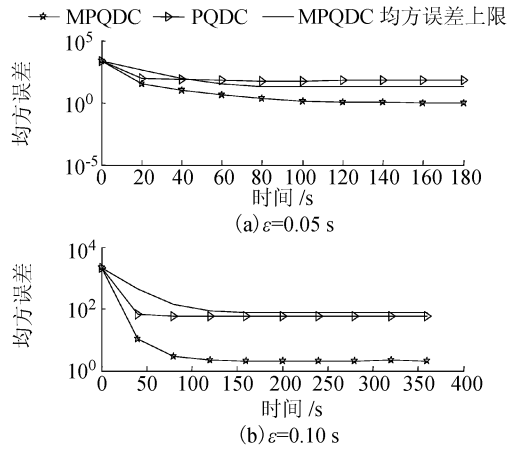


图4 $q=4, \varepsilon=0.05\text{ s}$ 和 0.10 s 时改进概率量化与概率量化的 MSE 比较

Fig. 4 Comparison about MSE between MPQDC and PQDC when $q=4, \varepsilon=0.05\text{ s}$ and 0.10 s

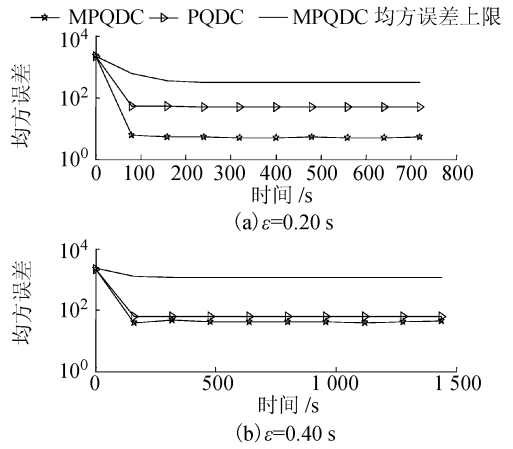


图5 $q=4, \varepsilon=0.20\text{ s}$ 和 0.40 s 时改进概率量化与概率量化的 MSE 比较

Fig. 5 Comparison about MSE between MPQDC and PQDC when $q=4, \varepsilon=0.20\text{ s}$ and 0.40 s

从图2~5可以看出,在相同条件下,改进概率量化分布式一致性算法的均方误差远小于概率量化分布式一致性算法的均方误差;改进概率量化分布式一致性算法的均方误差与采样间隔、量化间隔有关,采样间隔越小,量化间隔越小,均方误差越小;改进概率量化分布式一致性算法的均方误差始终小于其均方误差上限,即式(12)所示结果,同时,其均方误差的上限随时间增加逐渐趋向某一稳定值。图2~5可以验证前面对改进概率量化分布式一致性算法的分析的正确性。

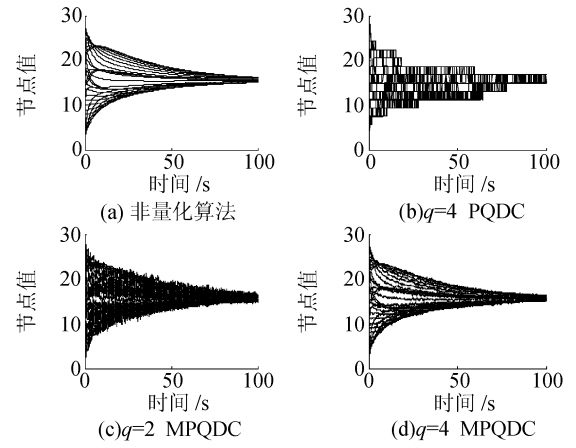


图6 2种概率量化与非量化的一致性收敛曲线

Fig. 6 Convergence curves of two probabilistic quantization algorithms and non quantization algorithm

从图6可以看出,改进概率量化分布式一致性算法虽然不能收敛到共同输出值,但是节点状态值不断地接近初始状态的平均值。从收敛图形上看,与非量化分布式一致性算法的收敛图形非常接近;且 q 值越大,量化间隔越小,改进概率量化收敛曲线

越光滑,越接近非量化下的一致性算法收敛曲线。

4 结 论

概率量化分布式一致性算法,虽然能收敛到同一输出值,但输出值不等于初始状态的平均值,收敛精度差。作者在概率量化基础上,利用节点自身的状态值和邻接节点的量化进行节点状态更新,与概率量化一致性算法相比,改进的概率量化一致性算法由于少了节点自身量化所带来的量化误差累积,量化精度更高。通过分析和仿真可以得出,虽然改进概率量化分布式一致性算法不能收敛到共同输出值,但是收敛图形非常接近非量化下的分布式一致性算法的收敛图形,收敛精度远大于概率量化分布一致性算法的收敛精度。

参考文献:

- [1] Olfati-Saber R, Murray R M. Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2004, 49 (9): 1520 – 1533.
- [2] Olfati-Saber R, Fax J A, Murray R M. Consensus and cooperation in networked multi-agent systems [J]. Proceedings of the IEEE, 2007, 95 (1): 215 – 233.
- [3] Franceschelli M, Giua A, Seatzu C. Distributed averaging in sensor networks based on broadcast gossip algorithms [J]. IEEE Sensors Journal, 2011, 11 (3): 808 – 817.
- [4] Rajagopal R, Wainwright M J. Network-based consensus averaging with general noisy channels [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2011, 59 (1): 373 – 385.
- [5] Li T, Fu M, Xie L, et al. Distributed consensus with limited communication data rate [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2011, 56 (2): 279 – 292.
- [6] Aysal T C, Yildiz M E, Sarwate A D, et al. Broadcast gossip algorithms for consensus [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2009, 57 (7): 2748 – 2761.
- [7] Xiao L, Boyd S. Fast linear iterations for distributed averaging [C]//Proceedings of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control. Maui, Hawaii, USA: IEEE, 2003: 4997 – 5002.
- [8] Peng Huanxin, Qi Guoqing, Sheng Andong. Pseudo multi-hop relay distributed consensus algorithm [J]. Control Theory

and Application, 2012, 29 (5): 623 – 628. [彭换新, 戚国庆, 盛安冬. 伪多跳中继分布式一致性算法 [J]. 控制理论与应用, 2012, 29 (5): 623 – 628.]

- [9] Zhang Ya, Tian Yuping. Consensus of data-sampled multi-agent systems with random communication delay and packet loss [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2010, 55 (4): 939 – 943.
- [10] Xiao L, Boyd S, Kim S J. Distributed average consensus with least mean square deviation [J]. Journal of Parallel and Distributed Computing, 2007, 67 (1): 33 – 46.
- [11] Kashyap A, Basar T, Srikant R. Quantized consensus [J]. Automatica, 2007, 43 (7): 1192 – 1203.
- [12] Yildiz M E, Scaglione A. Differential nested lattice encoding for consensus problems [C]//Proceedings of the Information Processing in Sensor Networks. Cambridge, MA: IEEE, 2007: 89 – 98.
- [13] Aysal T C, Coates M J, Rabbat M G. Distributed average consensus with dithered quantization [J]. IEEE Transaction on Signal Processing, 2008, 56 (10): 4905 – 4918.
- [14] Kar S, Moura J M F. Distributed consensus algorithms in sensor networks: Quantized data and random link failure [J]. IEEE Transaction on Signal Processing, 2010, 58 (3): 1383 – 1400.
- [15] Xiao J J, Luo Z Q. Decentralized estimation in an inhomogeneous sensing environment [J]. IEEE Transaction on Information Theory, 2005, 51 (10): 3564 – 3575.
- [16] Aysal T C, Coates M J, Rabbat M G. Distributed average consensus using probabilistic quantization [C]. IEEE/SP 14th Workshop on Statistical Signal Processing, Madison, WI, USA, 2007: 640 – 644.
- [17] Aysal T C, Coates M J, Rabbat M G. Distributed average consensus with dithered quantization [J]. IEEE Transaction on Signal Processing, 2008, 56 (10): 4905 – 4918.
- [18] Frasca P, Carli R, Fagnani F, et al. Average consensus on networks with quantized communication [J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2009, 19 (16): 1787 – 1816.