中国科学: 数学 2018 年 第 48 卷 第 4 期: 547 ∼ 564
SCIENTIA SINICA Mathematica
《中国科学》杂志社 SCIENCE CHINA PRESS
论 文

线性等式与不等式组稀疏解的唯一性条件

张敏, 黄正海*

天津大学数学学院, 天津 300072
E-mail: minzhang@tju.edu.cn, huangzhenghai@tju.edu.cn

收稿日期: 2015-09-17; 接受日期: 2017-06-05; 网络出版日期: 2017-08-30; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 11431002) 资助项目

摘要 近年来, 稀疏优化广泛应用在信号处理、机器学习、图像去噪和计算机视觉等方面, 得到了深入的研究和快速的发展. 本文考虑含有一般线性等式和不等式约束的广义 l_0- 最小化问题. 尽管 l_0- 最小化问题是 NP- 困难的, 但已有多种计算方法可以用来克服这一计算上的困难, 其中一种常用的方法是, 通过一个凸优化问题来近似求解原问题. 具体地, 用 l_1- 范数代替 l_0- 范数得到 l_0- 最小化问题的一个凸松弛. 在这类方法中, 研究什么条件可以保证两个问题等价是非常重要的. 基于值域空间性质 (RSP) 的分析方法, 本文提出广义 l_0- 最小化问题的 RSP 性质, 并且证明在某些条件下, RSP 性质可以保证 l_0- 最小化问题与它的凸松弛 l_1- 最小化问题是等价的. 最后, 本文对所使用的条件给出一些说明.

关键词 稀疏优化 凸松弛 值域空间性质

MSC (2010) 主题分类 62B10, 90C26, 90C59

1 引言

近年来, 稀疏优化问题得到了深入的研究和快速的发展, 它的目标是求解欠定线性方程组的稀疏解. 本文考虑求解一般线性等式和不等式组的稀疏解问题, 它的数学模型如下:

$$\begin{aligned} \min_{x\in\mathbb{R}^n} \quad & \|x\|_0 \\ \text{s.t.} \quad & Ax=b, \quad Qx\geqslant q, \end{aligned} \tag{1.1}$$

其中 $\|x\|_0$ 是向量 x 的 l_0- 范数, 表示 x 的非零元素个数, $A\in\mathbb{R}^{m_1\times n}$, $Q\in\mathbb{R}^{m_2\times n}$, $b\in\mathbb{R}^{m_1}$ 且 $q\in\mathbb{R}^{m_2}$. 本文不要求 A 和 Q 是欠定的, 只假设问题 (1.1) 是可行的. 之所以称问题 (1.1) “广义”, 是因为它包含以下的重要问题:

英文引用格式: Zhang M, Huang Z H. Uniqueness conditions for the sparsest solution of linear systems (in Chinese). Sci Sin Math, 2018, 48: 547–564, doi: 10.1360/SCM-2015-0610

(1) 压缩感知 (CS). 当 $Q=0$, $q\leqslant 0$ 且 A 欠定 (即 $m_1<n$) 时, 问题 (1.1) 退化为基本的压缩感知问题:

$$\begin{aligned} \min_{x\in\mathbb{R}^n} \quad & \|x\|_0 \\ \text{s.t.} \quad & Ax=b. \end{aligned} \tag{1.2}$$

过去十年间, CS 作为一个快速发展的研究领域, 不断有新的应用出现在信号处理 [1,2]、机器学习 [3]、无线通信 [4,5] 和计算机视觉 [6] 等领域中.

(2) 含有非负约束的压缩感知. 当 $Q=I$, $q=0$ 且 A 欠定 (即 $m_1<n$) 时, 问题 (1.1) 退化为如下含有非负约束的压缩感知问题:

$$\begin{aligned} \min_{x\in\mathbb{R}^n} \quad & \|x\|_0 \\ \text{s.t.} \quad & Ax=b, \quad x\geqslant 0. \end{aligned} \tag{1.3}$$

尽管相比于压缩感知的基本模型 (1.2), 问题 (1.3) 仅增加了一个非负约束, 但在实际应用中, 这是一个自然且常见的要求. 特别地, 在信号和图像处理涉及多谱数据时, 或在模式识别中涉及非负分解 [7–12] 时, 都需要所处理的向量是非负的.

(3) 1- 字节压缩感知. 不同于 (1.2), 考虑用量化后的测量值来恢复一个稀疏信号, 特别地, 通过测量值的符号向量实现稀疏恢复的过程称为 1- 字节 CS [13,14]. 1- 字节 CS 的数学模型就是把 (1.2) 中的约束换成 $\operatorname{sign}(Ax)=b$. 特别地, Zhao 和 Xu [14] 给出了 1- 字节 CS 的一个新的等价转化, 并讨论了 1- 字节基追踪的解的唯一性条件. 文献 [14] 提出的等价转化形式如下:

$$\begin{aligned} \min_{x\in\mathbb{R}^n} \quad & \|x\|_0 \\ \text{s.t.} \quad & A_{J_+}x\geqslant e_{J_+}, \quad A_{J_-}x\leqslant -e_{J_-}, \quad A_{J_0}x=0, \end{aligned} \tag{1.4}$$

其中 $J_+=\{i\mid b_i=1\}$, $J_-=\{i\mid b_i=-1\}$, $J_0=\{i\mid b_i=0\}$, A_J 表示矩阵 A 对应指标集为 J 的行组成的子矩阵. 可以看到, (1.4) 本质上也是求解一个线性系统的稀疏解的问题.

(4) 绝对值方程组 (AVEs) 的稀疏解. 绝对值方程组等价于很多类优化问题, 包括线性互补问题、双线性规划问题以及混合整数问题 [15–18], 在金融、管理领域具有非常广泛的应用. 它的基本数学模型如下:

$$Bx-|x|=d, \tag{1.5}$$

其中 $B\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $d\in\mathbb{R}^n$, $|x|\in\mathbb{R}^n$ 表示由 x 的每个元素的绝对值所组成的向量. 在一个常用假设: B 的特征值都大于等于 1 的情形下, Ketabchi 和 Moosaei [19] 给出了绝对值方程组 (1.5) 的解集的一个精确刻画. 基于这一结论, 如果我们已知 (1.5) 的其中一个解是 x^*, 假设 B 的特征值都大于等于 1, 那么寻找绝对值方程组 (1.5) 的稀疏解的问题 [20] 就可以写成如下的优化问题:

$$\begin{aligned} \min_{x\in\mathbb{R}^n} \quad & \|x\|_0 \\ \text{s.t.} \quad & (B+I)x-d\geqslant 0, \quad (B-I)x-d\geqslant 0, \\ & (B^{\mathrm{T}}B-I)(x-x^*)=0, \quad d^{\mathrm{T}}B(x-x^*)=0. \end{aligned} \tag{1.6}$$

(1.6) 可以写成 (1.1) 的形式, 只需令

$$A=\begin{pmatrix} B^{\mathrm{T}}B-I \\ d^{\mathrm{T}}B \end{pmatrix}, \quad b=Ax^*, \quad Q=\begin{pmatrix} B+I \\ B-I \end{pmatrix}, \quad q=\begin{pmatrix} d \\ d \end{pmatrix}.$$

压缩感知问题 (1.2) 已被证明是 NP- 困难的[21], 求解它的一个常用方法是利用如下的 l_1- 最小化问题近似原问题:

$$\begin{aligned} &\min_{x\in\mathbb{R}^n} \ \|x\|_1 \\ &\text{s.t.} \quad Ax=b, \end{aligned} \tag{1.7}$$

其中 $\|x\|_1=\sum_i |x_i|$, 称为 x 的 l_1- 范数. 由于 l_1- 范数是一个凸函数, 问题 (1.7) 可以用凸优化的方法进行有效的求解. l_1- 最小化问题可看作 l_0- 最小化问题的凸松弛. 相同的技术也被用在问题 (1.3) 上.

类似地, 在 (1.1) 中, 用 l_1- 范数代替 l_0- 范数得到一个凸的近似, 从而可以通过求解如下的广义的 l_1- 最小化问题来近似原问题 (1.1):

$$\begin{aligned} &\min_{x\in\mathbb{R}^n} \ \|x\|_1 \\ &\text{s.t.} \quad Ax=b, \quad Qx\geqslant q. \end{aligned} \tag{1.8}$$

由于这只是原问题的近似, 因此一个自然的问题随之而来, 那就是, 什么样的条件能保证问题 (1.1) 与 (1.8) 等价? 根据 Zhao 在文献 [22] 中对于问题 (1.2) 与 (1.7) 等价性的定义, 我们给出如下定义:

定义 1 如果问题 (1.1) 存在一个最优解等于问题 (1.8) 的唯一最优解, 那么称问题 (1.1) 与 (1.8) 等价; 如果问题 (1.1) 存在唯一最优解等于问题 (1.8) 的唯一最优解, 那么称问题 (1.1) 与 (1.8) 强等价.

在压缩感知中, 大部分精确恢复条件方面的研究都集中在保证问题 (1.2) 与 (1.7) 强等价的条件, 包括互相干性分析[23, 24]、限制等距性质 (RIP)[25–27] 和零空间性质 (NSP)[28, 29]. Zhao 和 Li[30] 首先提出了矩阵的值域空间性质 (RSP) 的概念, 并且证明了, 若矩阵的转置具有这一性质, 则重新加权 l_1-算法能成功求解问题 (1.2). 随后, 在文献 [22] 中, Zhao 又提出了一个能保证问题 (1.2) 与 (1.7) 等价的新的矩阵性质, 也命名为值域空间性质 (RSP), 但与之前的概念[30] 并不相同. 同时, 对于问题 (1.3) 及其凸松弛的等价性, 相应的条件也在理论分析中被广泛的研究, 如限制等距条件[31]、零空间性质[32]、值域空间性质[11] 等 (参见文献 [33]). 最近, Zhao 和 Xu[14] 提出了限制值域空间性质 (RRSP) 的概念, 并基于它给出了 1- 字节 CS 的精确恢复条件. 基于 RSP 的分析方法, Zhang 等[20] 给出了求解绝对值方程组稀疏解的问题及其凸松弛等价的条件.

本文将讨论保证问题 (1.1) 与 (1.8) 等价的值域空间性质. 根据定义 1, 不论这两个问题等价还是强等价, 问题 (1.8) 必须存在唯一的最优解. 因此, 第 2 节将讨论问题 (1.8) 的最优解存在唯一的充分必要条件. 同时, 说明所得结论是文献 [11, 22] 中相关结论的推广. 第 3 节将在 RSP 条件和一个额外的假设下, 证明问题 (1.1) 与 (1.8) 是等价的, 同时说明在很多类具体问题中这些条件都成立. 结论将在最后一节中给出.

本文中, 记 $[n]:=\{1,2,\ldots,n\}$, $|J|$ 为指标集 J 的元素个数. 对任意矩阵 $B\in\mathbb{R}^{m\times n}$ 以及指标集 $J\subseteq[n]$ 和 $S\subseteq[m]$, $B_{S\times J}:=(B_{ij})_{\{i\in S,j\in J\}}$ 表示由矩阵 B 在 J 中的列和在 S 中的行相交所组成的子矩阵. 特别地, B_J 和 B^S 分别表示 B 对应 J 中的列所组成的子矩阵和 B 对应 S 中的行所组成的子矩阵. $I_{|J|}$ 表示一个 $|J|\times|J|$ 的单位矩阵. 类似地, $x_J\in\mathbb{R}^{|J|}$ 表示由向量 $x\in\mathbb{R}^n$ 对应指标集 J 中的元素所组成的向量. 对于任意向量 $u,v\in\mathbb{R}^n$, 将 $(u^{\mathrm{T}},v^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$ 简写为 (u,v). 另外, 记问题 (1.8) 的最优解集为 X^*.

2 最小 l_1- 范数解的唯一性

在讨论唯一性的充分必要条件之前, 首先回顾积极集的定义:

定义 2 考虑一般的约束优化问题

$$\begin{aligned}&\min_{x}\ f(x)\\&\text{s.t.}\ \ g_i(x)\geqslant 0,\quad i\in\{1,\dots,m\};\quad h_j(x)=0,\quad j\in\{1,\dots,l\}.\end{aligned}\tag{2.1}$$

如果问题 (2.1) 的一个可行点 $\bar{x}$ 满足 $g_i(\bar{x})=0$, 那么这个不等式约束称为在点 $\bar{x}$ 处的一个积极约束. 集合 $I(\bar{x})=\{i\mid g_i(\bar{x})=0\}$ 称为在点 $\bar{x}$ 处的一个积极集.

现在给出问题 (1.8) 的最优解唯一的充分必要条件:

定理 1 给定 $A\in\mathbb{R}^{m_1\times n}$ 和 $Q\in\mathbb{R}^{m_2\times n}$, $X^*=\{x^*\}$ 当且仅当矩阵

$$\hat{H}(x^*)=\begin{pmatrix}A_{J_+} & A_{J_-}\\ Q_{R_0\times J_+} & Q_{R_0\times J_-}\end{pmatrix}\tag{2.2}$$

列满秩, 并且存在 $\xi\in\mathbb{R}^{|R_0|}$ 和 $\eta\in\mathbb{R}^n$ 使得

$$\begin{cases}(Q^{R_0})^{\mathrm{T}}\xi+\eta\in\mathcal{R}(A^{\mathrm{T}}), & \xi<0,\\ \eta_i=1, & \forall\, i\in J_+:=\{i\mid x_i^*>0\},\\ |\eta_i|<1, & \forall\, i\in J_0:=\{i\mid x_i^*=0\},\\ \eta_i=-1, & \forall\, i\in J_-:=\{i\mid x_i^*<0\},\end{cases}\tag{2.3}$$

其中 R_0 是在 x^* 点处的积极集, $\mathcal{R}(A^{\mathrm{T}})$ 表示 A^{T} 的值域空间.

注 1 在定理 1 中, 矩阵 $\hat{H}(x^*)$ 表示由点 x^* 定义的矩阵, 具体地, 给定一个 x 都对应一个矩阵 $\hat{H}$. 同时, 指标集 J_+、J_0、J_- 和 R_0 都依赖于 x^*, 所以, 定理 1 中的 RSP 条件是一个非一致的恢复条件. 为了得到一致恢复条件, 需要让 RSP 条件对于所有可能选择的指标集合都成立.

注 2 沿用文献 [22] 中的名字, 条件 (2.3) 称为 A^{T} 在点 x^* 处的值域空间性质 (RSP). 定理 1 表明, RSP 条件 (2.3) 只依赖于等式约束以及最优解 x^* 处的积极约束.

注 3 问题 (1.8) 可以退化为一些已被广泛研究的特殊问题. 当问题 (1.8) 退化为特殊问题时, 定理 1 与相应的结果是一致的:

(1) 当 $Q=0$, $q\leqslant 0$ 且 A 欠定 $(m_1<n)$ 时, 问题 (1.8) 退化为问题 (1.7), 同时, 定理 1 退化为文献 [22] 中的定理 2.8.

(2) 当 $Q=I$, $q=0$ 且 A 欠定 $(m_1<n)$ 时, 问题 (1.8) 退化为

$$\Big\{\min_{x}\|x\|_1\mid Ax=b,x\geqslant 0\Big\},$$

同时, 定理 1 退化为文献 [11] 中的定理 2.6. 事实上, 当 $Q=I$ 且 $q=0$ 时, 容易看到 $J_-=\emptyset$, $R_0=J_0$, 因此, $(Q^{R_0})^{\mathrm{T}}=I_{J_0}$, 其中 $I\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 表示单位矩阵. 令 $\eta'=I_{J_0}\xi+\eta$, 其中 ξ 和 η 如定理 1 中的设置, 即

$$\xi<0,\quad \eta_i=1,\quad \forall\, i\in J_+,\quad |\eta_i|<1,\quad \forall\, i\in J_0.$$

从而, 根据定理 1, 有 $\eta'\in\mathcal{R}(A^{\mathrm{T}})$ 并且

$$\eta_i'=0+\eta_i=1,\quad \forall\, i\in J_+;\quad \eta_i'=\xi_i+\eta_i<\eta_i<1,\quad \forall\, i\in J_0.$$

另一方面, 由 (2.2) 定义的 $\hat{H}(x^*)$ 变为

$$\begin{pmatrix} A_{J_+} \\ I_{J_0\times J_+} \end{pmatrix}.$$

从而, $\hat{H}(x^*)$ 列满秩当且仅当 A_{J_+} 列满秩. 结合上述推导, 可以看到定理 1 退化为文献 [11] 中的定理 2.6.

注意到矩阵 $\hat{H}(x^*)$ 列满秩意味着 $|J_+|+|J_-|\leqslant m_1+|R_0|$. 又因为 $\|x^*\|_0=|J_+|+|J_-|$, 故得到以下推论:

推论 1　给定 $A\in\mathbb{R}^{m_1\times n}$ 和 $Q\in\mathbb{R}^{m_2\times n}$, 如果 $X^*=\{x^*\}$, 那么 $\|x^*\|_0\leqslant m_1+|R_0|$.

接下来先探讨最小 l_1- 范数解唯一的必要条件, 随后证明该条件的充分性, 进而得到定理 1. 为了接下来的证明, 先来看一个简单但重要的结果: $X^*=\{x^*\}$ 当且仅当 $V(x^*)=\{0\}$, 其中

$$V(x^*):=\{v: Av=0, Q(v+x^*)\geqslant q, \|v+x^*\|_1\leqslant\|x^*\|_1\}.$$

基于以上事实, 不难得到下面的引理:

引理 1　给定 $A\in\mathbb{R}^{m_1\times n}$ 和 $Q\in\mathbb{R}^{m_2\times n}$, $X^*=\{x^*\}$ 当且仅当 $(v,\gamma)=(0,|x^*|)$ 是下面线性规划的唯一最优解:

$$\begin{aligned} \min_{v,t}\ & 0 \\ \text{s.t.}\ & Av=0,\quad Qv\geqslant -Qx^*+q, \\ & -\gamma\leqslant v+x^*\leqslant\gamma,\quad \gamma\geqslant 0, \\ & e^{\mathrm{T}}\gamma\leqslant\|x^*\|_1, \end{aligned} \tag{2.4}$$

其中 $e\in\mathbb{R}^n$ 是一个全 1 的向量.

证明　问题 (2.4) 可解当且仅当问题 (2.4) 可行. 任一可行解 (v,γ) 满足如下可行性条件:

$$v\in V(x^*),\quad |v_i+x_i^*|\leqslant\gamma_i,\quad \forall\, i\in[n],\quad \sum_{i=1}^n\gamma_i\leqslant\|x^*\|_1.$$

首先, 由 $X^*=\{x^*\}$ 可以得到 $V(x^*)=\{0\}$, 从而,

$$v=0,\quad \sum_{i=1}^n|x_i^*|\leqslant\sum_{i=1}^n\gamma_i\leqslant\|x^*\|_1=\sum_{i=1}^n|x_i^*|.$$

因此, 可以得到 $\sum_{i=1}^n(\gamma_i-|x_i^*|)=0$. 由于 $|x_i^*|\leqslant\gamma_i, \forall\, i\in[n]$, 故 $\gamma_i=|x_i^*|, \forall\, i\in[n]$, 从而, $(v,\gamma)=(0,|x^*|)$. 因此, $(0,|x^*|)$ 是问题 (2.4) 的唯一可行解, 进而是唯一最优解.

其次, 若 $(v,\gamma)=(0,|x^*|)$ 是问题 (2.4) 的唯一最优解, 则 $0\in V(x^*)$. 假设存在一个非零 $v'\in V(x^*)$. 令 $\gamma'=|v'+x^*|$, 则 (v',γ') 是问题 (2.4) 的一个可行解, 即它是问题 (2.4) 的另一个最优解, 这与最优解的唯一性矛盾. 引理得证. □

引入松弛变量, 将 v 用非负的 $v'=Me-v$ 替代, 其中 $M=2\|x^*\|_1+1$, 问题 (2.4) 等价转换为如

下线性规划:

$$
\begin{aligned}
&\min_{v',\gamma,u^{(i)},\delta} \ 0 \\
&\text{s.t.} \quad \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Q & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ -I & -I & 0 & I & 0 & 0 \\ I & -I & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & e^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v' \\ \gamma \\ u^{(1)} \\ u^{(2)} \\ u^{(3)} \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AMe \\ QMe + Qx^* - q \\ -Me - x^* \\ Me + x^* \\ \|x^*\|_1 \end{pmatrix}, \\
&\qquad (v',\gamma,u^{(1)},u^{(2)},u^{(3)},\delta) \geqslant 0,
\end{aligned} \tag{2.5}
$$

其中问题 (2.5) 中出现的 I 表示具有适当维数的单位阵. 之所以 $v' > 0$, 是因为

$$
|v_i| \leqslant |x_i^*| + |v_i + x_i^*| \leqslant |x_i^*| + \gamma_i \leqslant 2\|x^*\|_1, \quad \forall\, i \in [n].
$$

通过引理 1 和上述等价转化可以得到如下引理:

引理 2 给定 $A \in \mathbb{R}^{m_1\times n}$ 和 $Q \in \mathbb{R}^{m_2\times n}$, 那么 $X^* = \{x^*\}$ 当且仅当问题 (2.5) 有唯一最优解 $(v',\gamma,u^{(1)},u^{(2)},u^{(3)},\delta) = (Me, |x^*|, Qx^* - q, |x^*| - x^*, |x^*| + x^*, 0)$.

此外, 根据问题 (2.5) 的线性约束和引理 2 可以得到以下引理:

引理 3 给定 $A \in \mathbb{R}^{m_1\times n}$ 和 $Q \in \mathbb{R}^{m_2\times n}$, 如果 $X^* = \{x^*\}$, 那么下面的矩阵列满秩:

$$
G(x^*) = \begin{pmatrix} A_{J_+} & A_{J_-} & 0 & 0 \\ Q_{R_0\times J_+} & Q_{R_0\times J_-} & 0 & 0 \\ Q_{R_1\times J_+} & Q_{R_1\times J_-} & Q_{R_1\times J_+} & -Q_{R_1\times J_-} \\ -I_{|J_+|} & 0 & -I_{|J_+|} & 0 \\ 0 & I_{|J_-|} & 0 & -I_{|J_-|} \\ 0 & 0 & e_{J_+}^{\mathrm{T}} & e_{J_-}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix},
$$

其中 J_+ 和 J_- 分别表示 x^* 中正的元素和负的元素所对应的指标集, R_0 表示 x^* 处的积极集, $R_1 = [m_2]\backslash R_0$, 所有的 0 都是适当维数的全零的子矩阵.

证明 假设矩阵 $G(x^*)$ 不是列满秩的, 那么一定存在 $0 \neq t \in \mathrm{Null}(G)$.

构造

$$
\vartheta = \begin{pmatrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \\ \vartheta_3 \\ \vartheta_4 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} Me_{J_+} \\ Me_{J_-} \\ x_{J_+}^* \\ -x_{J_-}^* \end{pmatrix} > 0.
$$

ϑ 是下面线性方程组的一个解:

$$G(x^*)\vartheta = \begin{pmatrix} A_{J_+}Me_{J_+} + A_{J_-}Me_{J_-} \\ Q_{R_0\times J_+}Me_{J_+} + Q_{R_0\times J_-}Me_{J_-} \\ Q_{R_1\times J_+}(Me_{J_+} + x^*_{J_+}) + Q_{R_1\times J_-}(Me_{J_-} + x^*_{J_-}) \\ -Me_{J_+} - x^*_{J_+} \\ Me_{J_-} + x^*_{J_-} \\ \|x^*_{J_+}\|_1 + \|x^*_{J_-}\|_1 \end{pmatrix}.$$

由于 $\vartheta > 0$ 且 $Q_{R_1}x^* > q_{R_1}$, 所以存在充分小的 $\varepsilon > 0$ 满足 $\vartheta' = \vartheta + \varepsilon t > 0$ 且

$$Q_{R_1}x^* + \varepsilon(Q_{R_1\times J_+}t_3 - Q_{R_1\times J_-}t_4) = Q_{R_1\times J_+}\vartheta'_3 - Q_{R_1\times J_-}\vartheta'_4 > q_{R_1}.$$

首先, 根据引理 2, 问题 (2.5) 有一个最优解 $(v', \gamma, u^{(1)}, u^{(2)}, u^{(3)}, \delta)$ 具有如下形式:

$$\begin{aligned}
&v'_{J_+} = \vartheta_1, \quad v'_{J_-} = \vartheta_2, \quad v'_{J_0} = Me_{J_0};\\
&\gamma_{J_+} = \vartheta_3, \quad \gamma_{J_-} = \vartheta_4, \quad \gamma_{J_0} = 0;\\
&u^{(3)}_{J_+} = 2\vartheta_3, \quad u^{(3)}_{J_-} = 0, \quad u^{(3)}_{J_0} = 0;\\
&u^{(1)}_{R_0} = 0, \quad u^{(1)}_{R_1} = Q_{R_1\times J_+}\vartheta_3 - Q_{R_1\times J_-}\vartheta_4 - q_{R_1};\\
&u^{(2)}_{J_+} = 0, \quad u^{(2)}_{J_-} = 2\vartheta_4, \quad u^{(2)}_{J_0} = 0;\\
&\delta = 0,
\end{aligned}$$

其中

$$J_0 = \{i : x^*_i = 0\} \in \mathbb{R}^{n-|J_+|-|J_-|}.$$

其次, 由于 $G(x^*)\vartheta' = G(x^*)\vartheta$, 容易验证具有如下形式的 $(\bar{v}', \bar{\gamma}, \bar{u}^{(1)}, \bar{u}^{(1)}, \bar{u}^{(2)}, \bar{u}^{(3)}, \bar{\delta})$ 也是问题 (2.5) 的一个最优解:

$$\begin{aligned}
&\bar{v}'_{J_+} = \vartheta'_1, \quad \bar{v}'_{J_-} = \vartheta'_2, \quad \bar{v}'_{J_0} = Me_{J_0};\\
&\bar{\gamma}_{J_+} = \vartheta'_3, \quad \bar{\gamma}_{J_-} = \vartheta'_4, \quad \bar{\gamma}_{J_0} = 0;\\
&\bar{u}^{(3)}_{J_+} = 2\vartheta'_3, \quad \bar{u}^{(3)}_{J_-} = 0, \quad \bar{u}^{(3)}_{J_0} = 0;\\
&\bar{u}^{(1)}_{R_0} = 0, \quad \bar{u}^{(1)}_{R_1} = Q_{R_1\times J_+}\vartheta'_3 - Q_{R_1\times J_-}\vartheta'_4 - q_{R_1} > 0;\\
&\bar{u}^{(2)}_{J_+} = 0, \quad \bar{u}^{(2)}_{J_-} = 2\vartheta'_4, \quad \bar{u}^{(2)}_{J_0} = 0;\\
&\bar{\delta} = 0.
\end{aligned}$$

从而, 用 ϑ 和 ϑ' 构造了问题 (2.5) 的两个不同的最优解, 与唯一性矛盾. 引理得证. □

对引理 3 中的矩阵 G 做以下初等行变换: 首先交换 G 的前 $m_1 + m_2$ 行和接下来的 $|J_+| + |J_-|$ 行, 然后将变换后矩阵的前 $|J_+| + |J_-|$ 行加到最后一行, 可以得到如下矩阵:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -I_{|J_+|} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_{|J_-|} \\ A_{J_+} & A_{J_-} & 0 & 0 \\ Q_{R_0\times J_+} & Q_{R_0\times J_-} & 0 & 0 \\ -e_{J_+}^{\mathrm{T}} & e_{J_-}^{\mathrm{T}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

由于初等行变换不改变矩阵的列秩, 所以 $G(x^*)$ 列满秩当且仅当下面的矩阵列满秩:

$$H(x^*) = \begin{pmatrix} A_{J_+} & A_{J_-} \\ Q_{R_0\times J_+} & Q_{R_0\times J_-} \\ -e_{J_+}^{\mathrm{T}} & e_{J_-}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}. \tag{2.6}$$

因此, 可以给出 $X^* = \{x^*\}$ 的另一个必要条件:

引理 4 给定 $A \in \mathbb{R}^{m_1\times n}$ 和 $Q \in \mathbb{R}^{m_2\times n}$, 若 $X^* = \{x^*\}$, 则由 (2.6) 定义的矩阵 $H(x^*)$ 列满秩.

接下来, 将通过线性规划的强对偶理论来证明定理 1 必要性的另一部分. 考虑线性规划

$$\begin{aligned} &\min_{x\in\mathbb{R}^n} \ c^{\mathrm{T}}x \\ &\text{s.t.} \quad Dx = p, \quad x \geqslant 0 \end{aligned} \tag{2.7}$$

和它的对偶规划

$$\begin{aligned} &\min_{z\in\mathbb{R}^m,\omega\in\mathbb{R}^n} \ p^{\mathrm{T}}z \\ &\text{s.t.} \qquad D^{\mathrm{T}}z + \omega = c, \quad \omega \geqslant 0, \end{aligned} \tag{2.8}$$

其中 $D \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $p \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$.

对偶理论中有一个关于互补条件的重要结论 (参见文献 [11,22]): 如果线性规划 (2.7) 及其对偶规划 (2.8) 都可行, 那么存在一个严格互补解对 $(x^*, (z^*, \omega^*))$, 即 x^* 和 (z^*, ω^*) 分别满足 (2.7) 和 (2.8) 的约束, 并且满足严格互补条件 $(x^*)^{\mathrm{T}}\omega^* = 0$, $x^* + \omega^* > 0$.

写出线性规划 (2.5) 的对偶规划:

$$\begin{aligned} \max_{z^{(i)},r} \ & (AMe)^{\mathrm{T}}z^{(1)} + (QMe + Qx^* - q)^{\mathrm{T}}z^{(2)} \\ & \quad -(Me + x^*)^{\mathrm{T}}z^{(3)} + (Me + x^*)^{\mathrm{T}}z^{(4)} + \|x^*\|_1 r \\ \text{s.t.} \ & A^{\mathrm{T}}z^{(1)} + Q^{\mathrm{T}}z^{(2)} - z^{(3)} + z^{(4)} \leqslant 0, \\ & -z^{(3)} - z^{(4)} + re \leqslant 0, \\ & z^{(2)} \leqslant 0, \quad z^{(3)} \leqslant 0, \\ & z^{(4)} \leqslant 0, \quad r \leqslant 0. \end{aligned} \tag{2.9}$$

引入松弛变量 $\omega^{(i)}$ $(i=1,\ldots,5)$ 和 ω, (2.9) 可以等价地转化为以下问题:

$$\begin{aligned}\max_{z^{(i)},r,\omega^{(i)},\omega}\quad & (AMe)^{\mathrm{T}}z^{(1)}+(QMe+Qx^*-q)^{\mathrm{T}}z^{(2)}\\ & \quad -(Me+x^*)^{\mathrm{T}}z^{(3)}+(Me+x^*)^{\mathrm{T}}z^{(4)}+\|x^*\|_1 r\\ \text{s.t.}\quad & A^{\mathrm{T}}z^{(1)}+Q^{\mathrm{T}}z^{(2)}-z^{(3)}+z^{(4)}+\omega^{(1)}=0,\\ & -z^{(3)}-z^{(4)}+re+\omega^{(5)}=0,\\ & z^{(2)}+\omega^{(2)}=0,\quad z^{(3)}+\omega^{(3)}=0,\\ & z^{(4)}+\omega^{(4)}=0,\quad r+\omega=0,\\ & (\omega^{(1)},\omega^{(2)},\omega^{(3)},\omega^{(4)},\omega^{(5)},\omega)\geqslant 0.\end{aligned}\tag{2.10}$$

将上面的对偶定理应用到线性规划 (2.5) 及其对偶规划 (2.10) 中, 可以得到如下引理:

引理 5 给定 $A\in\mathbb{R}^{m_1\times n}$ 和 $Q\in\mathbb{R}^{m_2\times n}$, 若 $X^*=\{x^*\}$, 令 R_0 表示 x^* 处的积极集, 则存在 $\xi\in\mathbb{R}^{|R_0|}$ 和 $\eta\in\mathbb{R}^n$ 使得 RSP 条件 (2.3) 在 x^* 处成立.

证明 根据对偶定理, 问题 (2.5) 及其对偶 (2.10) 的可行性保证了这两个问题存在一个严格互补解对, 记为 $(u',\gamma,u^{(1)},u^{(2)},u^{(3)},\delta)$ 和 $(z^{(1)},z^{(2)},z^{(3)},z^{(4)},r,\omega^{(1)},\omega^{(2)},\omega^{(3)},\omega^{(4)},\omega^{(5)},\omega)$, 它们满足

$$\begin{aligned}&v'^{\mathrm{T}}\omega^{(1)}=0,\quad v'+\omega^{(1)}>0;\quad \gamma^{\mathrm{T}}\omega^{(5)}=0,\quad \gamma+\omega^{(5)}>0;\quad (u^{(1)})^{\mathrm{T}}\omega^{(2)}=0,\quad u^{(1)}+\omega^{(2)}>0;\\ &(u^{(2)})^{\mathrm{T}}\omega^{(3)}=0,\quad u^{(2)}+\omega^{(3)}>0;\quad (u^{(3)})^{\mathrm{T}}\omega^{(4)}=0,\quad u^{(3)}+\omega^{(4)}>0;\quad \delta\omega=0,\quad \delta+\omega>0.\end{aligned}$$

根据引理 2, 有 $(v',\gamma,u^{(1)},u^{(2)},u^{(3)},\delta)=(Me,|x^*|,Qx^*-q,|x^*|-x^*,|x^*|+x^*,0)$. 那么 $v'=Me>0$, 从而 $\omega^{(1)}=0$. 因此,

$$A^{\mathrm{T}}z^{(1)}+Q^{\mathrm{T}}z^{(2)}-z^{(3)}+z^{(4)}=0.\tag{2.11}$$

因为 $u^{(1)}=Qx^*-q$, R_0 是 x^* 处的积极集且 $R_1=[m_2]\setminus R_0$, 所以有

$$u^{(1)}_{R_0}=Q^{R_0}x^*-q_{R_0}=0,\quad u^{(1)}_{R_1}=Q^{R_1}x^*-q_{R_1}>0,$$

故当 $i\in R_0$ 时, $\omega_i^{(2)}>0$; 当 $i\in R_1$ 时, $\omega_i^{(2)}=0$. 进而,

$$z_i^{(2)}=-\omega_i^{(2)}\begin{cases}<0, & 若\ i\in R_0,\\ =0, & 若\ i\in R_1.\end{cases}\tag{2.12}$$

将 (2.12) 代入 (2.11) 中, 得到

$$A^{\mathrm{T}}z^{(1)}+(Q^{R_0})^{\mathrm{T}}z^{(2)}_{R_0}-z^{(3)}+z^{(4)}=0,\quad z^{(2)}_{R_0}<0.\tag{2.13}$$

注意到 $\delta=0$, 故 $\omega>0$, 从而 $r=-\omega<0$.

考虑以下三种情形:

(1) 如果 $i\in J_+:=\{i:x_i^*>0\}$, 那么 $\gamma_i=x_i^*>0$, $u_i^{(2)}=0$, $u_i^{(3)}=2x_i^*>0$. 从而, $\omega_i^{(5)}=0$, $\omega_i^{(3)}>0$, $\omega_i^{(4)}=0$, 进而 $z_i^{(3)}=r<0$, $z_i^{(4)}=0$.

(2) 如果 $i\in J_0:=\{i:x_i^*=0\}$, 那么 $\gamma_i=u_i^{(2)}=u_i^{(3)}=0$. 从而, $\omega_i^{(j)}>0$, $\forall j\in\{3,4,5\}$, 进而 $z_i^{(3)}+z_i^{(4)}>r$, $z_i^{(3)}<0$, $z_i^{(4)}<0$.

(3) 如果 $i \in J_- := \{i : x_i^* < 0\}$, 那么 $\gamma_i = -x_i^* > 0$, $u_i^{(2)} = -2x_i^* > 0$, $u_i^{(3)} = 0$. 从而, $\omega_i^{(5)} = 0$, $\omega_i^{(3)} = 0$, $\omega_i^{(4)} < 0$, 进而 $z_i^{(3)} = 0$, $z_i^{(4)} = r < 0$.

令 $\xi = -\frac{z_{R_0}^{(2)}}{r}$, $\eta = \frac{z^{(3)} - z^{(4)}}{r}$. 利用 (2.13), 可以得到

$$(Q^{R_0})^{\mathrm{T}}\xi + \eta = A^{\mathrm{T}}\left(\frac{z^{(1)}}{r}\right) \in \mathcal{R}(A^{\mathrm{T}}) \quad 且 \quad \xi < 0.$$

(i) 如果 $i \in J_+$, 那么由 (1) 可知,

$$\eta_i = \frac{z_i^{(3)} - z_i^{(4)}}{r} = \frac{r - 0}{r} = 1.$$

(ii) 如果 $i \in J_0$, 那么根据 (2) 和 $r < 0$ 可知, $|\eta_i| < 1$, 因为

$$-1 < -\frac{z_i^{(3)} + z_i^{(4)}}{r} < -\frac{z_i^{(3)} + z_i^{(4)}}{r} + \frac{2z_i^{(3)}}{r} = \eta_i = \frac{z_i^{(3)} + z_i^{(4)}}{r} - \frac{2z_i^{(4)}}{r} < \frac{z_i^{(3)} + z_i^{(4)}}{r} < 1.$$

(iii) 如果 $i \in J_-$, 那么由 (3) 可知,

$$\eta_i = \frac{z_i^{(3)} - z_i^{(4)}}{r} = \frac{0 - r}{r} = -1.$$

引理得证. □

基于上述引理, 可以完成定理 1 的证明.

定理 1 的证明 首先证明必要性. 由引理 5 可知, RSP 条件 (2.3) 成立, 即存在 $\zeta \in \mathbb{R}^{m_1}$ 和 $\xi \in \mathbb{R}^{|R_0|}$ 使得

$$\begin{cases} e_{J_+}^{\mathrm{T}} = \zeta^{\mathrm{T}} A_{J_+} - \xi^{\mathrm{T}} Q_{R_0 \times J_+}, \\ -e_{J_-}^{\mathrm{T}} = \zeta^{\mathrm{T}} A_{J_-} - \xi^{\mathrm{T}} Q_{R_0 \times J_-}. \end{cases}$$

从而, 根据引理 4 可知, 如果 $X^* = \{x^*\}$, 那么由 (2.2) 定义的矩阵 $\hat{H}(x^*)$ 列满秩. 进一步地, 结合引理 5 可以得到必要性成立.

接下来证明充分性. 假设存在 $\xi \in \mathbb{R}^{|R_0|}$ 和 $\eta \in \mathbb{R}^n$ 使得 RSP 条件 (2.3) 在 x^* 处成立, 那么存在某个 $\zeta \in \mathbb{R}^{m_1}$ 使得 $\eta = A^{\mathrm{T}}\zeta - (Q^{R_0})^{\mathrm{T}}\xi$. 因为 $|\eta_i| < 1$, $\forall i \in J_0$, 故存在充分小的正数 $\epsilon > 0$ 使得 $|\eta_i| + \epsilon < 1$, $\forall i \in J_0$. 因此, 可以构造对偶问题 (2.9) 的一个可行解:

$$\begin{gathered} r = -1, \quad z^{(1)} = -\zeta, \quad z^{(2)} = \begin{cases} \xi, & i \in R_0, \\ 0, & i \in R_1, \end{cases} \\ z_i^{(3)} = \begin{cases} -1, & i \in J_+, \\ \dfrac{-\eta_i - 1 + \epsilon}{2}, & i \in J_0, \\ 0, & i \in J_-, \end{cases} \quad z_i^{(4)} = \begin{cases} 0, & i \in J_+, \\ \dfrac{\eta_i - 1 + \epsilon}{2}, & i \in J_0, \\ -1, & i \in J_-. \end{cases} \end{gathered} \tag{2.14}$$

事实上,

$$z^{(3)} - z^{(4)} = -\eta = A^{\mathrm{T}} z^{(1)} + (Q^{R_0})^{\mathrm{T}}\xi + (Q^{R_1})^{\mathrm{T}}0 = A^{\mathrm{T}} z^{(1)} + Q^{\mathrm{T}} z^{(2)},$$

$$
\begin{aligned}
&z_i^{(3)}+z_i^{(4)}=-1=r, \quad \forall\, i\notin J_0,\\
&z_i^{(3)}+z_i^{(4)}=-1+\epsilon>-1=r, \quad \forall\, i\in J_0,
\end{aligned}
$$

并且 $z^{(i)}\leqslant 0$ $(i=2,\ldots,4)$, $r\leqslant 0$. 同时, 问题 (2.9) 在该可行解处的目标函数值为 0, 即

$$
\begin{aligned}
&(AMe)^{\mathrm{T}}z^{(1)}+(QMe+Qx^*-q)^{\mathrm{T}}z^{(2)}-(Me+x^*)^{\mathrm{T}}z^{(3)}+(Me+x^*)^{\mathrm{T}}z^{(4)}+\|x^*\|_1 r\\
&\quad=Me^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}}z^{(1)}+Q^{\mathrm{T}}z^{(2)}-z^{(3)}+z^{(4)})+(Qx^*-q)^{\mathrm{T}}z^{(2)}-(z^{(3)}-z^{(4)})^{\mathrm{T}}x^*+\|x^*\|_1 r\\
&\quad=-\eta^{\mathrm{T}}x^*-\|x^*\|_1=-\sum_{i\in J_+}x_i^*+\sum_{i\in J_-}x_i^*-\|x^*\|_1=0,
\end{aligned}
$$

其中第二个等式是因为 $A^{\mathrm{T}}z^{(1)}+Q^{\mathrm{T}}z^{(2)}-z^{(3)}+z^{(4)}=0$ 且 $z_i^{(2)}=0, \forall\, i\in R_1$. 根据弱对偶定理, 对偶问题 (2.9) 的最优值小于等于原问题 (2.5) 的最优值. 而问题 (2.5) 的最优值恒等于 0. 因此, 由 (2.14) 构造的点 $(y^{(1)},y^{(2)},y^{(3)},y^{(4)},r)$ 是问题 (2.9) 的一个最优解. 从而, 不难得到 (2.10) 中的松弛变量满足以下性质:

$$
\begin{aligned}
&\omega^{(1)}=0, \quad \omega_i^{(5)}\begin{cases}=0, & i\notin J_0,\\ >0, & i\in J_0,\end{cases} \quad \omega_i^{(2)}\begin{cases}>0, & i\in R_0,\\ =0, & i\in R_1,\end{cases}\\
&\omega_i^{(3)}\begin{cases}=0, & i\in J_-,\\ >0, & i\notin J_-,\end{cases} \quad \omega_i^{(4)}\begin{cases}=0, & i\in J_+,\\ >0, & i\notin J_+,\end{cases} \quad \omega>0.
\end{aligned}
\tag{2.15}
$$

令 $(v',\gamma,u^{(1)},u^{(2)},u^{(3)},\delta)$ 是原问题 (2.5) 的任意最优解, 则它和 $(z^{(1)},z^{(2)},z^{(3)},z^{(4)},r)$ 组成 (2.5) 和 (2.10) 的一个最优解对, 满足

$$
v'^{\mathrm{T}}\omega^{(1)}=0, \quad \gamma^{\mathrm{T}}\omega^{(5)}=0, \quad (u^{(1)})^{\mathrm{T}}\omega^{(2)}=0, \quad (u^{(2)})^{\mathrm{T}}\omega^{(3)}=0, \quad (u^{(3)})^{\mathrm{T}}\omega^{(4)}=0, \quad \delta\omega=0.
$$

由 (2.15) 可得

$$
\gamma_i=0, \quad \forall\, i\in J_0; \quad u_i^{(1)}=0, \quad \forall\, i\in R_0; \quad u_i^{(2)}=0, \quad \forall\, i\notin J_-; \quad u_i^{(3)}=0, \quad \forall\, i\notin J_+; \quad \delta=0. \tag{2.16}
$$

将 (2.16) 代入问题 (2.5) 的约束中, 可以得到以下结果:

$$
Av'=AMe, \tag{2.17}
$$

$$
Q^{R_0}v'=Q^{R_0}Me, \tag{2.18}
$$

$$
Q^{R_1}v'+u_{R_1}^{(1)}=Q^{R_1}Me+Q^{R_1}x^*-q_{R_1}, \tag{2.19}
$$

$$
v'_{J_0}=Me_{J_0}, \tag{2.20}
$$

$$
v'_{J_+}+\gamma_{J_+}=Me_{J_+}+x^*_{J_+}, \quad v'_{J_-}-\gamma_{J_-}=Me_{J_-}+x^*_{J_-}, \quad \gamma_{J_0}=0. \tag{2.21}
$$

令

$$
d=\begin{pmatrix} d_1\\ d_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(v'-Me)_{J_+}\\ (v'-Me)_{J_-}\end{pmatrix},
$$

由 (2.17)、(2.18) 和 (2.20), 有

$$
\hat{H}(x^*)d=\begin{pmatrix} A_{J_+}d_1+A_{J_-}d_2\\ Q_{R_0\times J_+}d_1+Q_{R_0\times J_-}d_2\end{pmatrix}=0. \tag{2.22}
$$

因为矩阵 $\hat{H}(x^*)$ 列满秩, 故 $d=0$, 即 $v'_{J_+}=Me_{J_+}$ 且 $v'_{J_-}=Me_{J_-}$. 再由 (2.20) 可知 $v'=Me$. 将它代入 (2.21) 和 (2.19) 中, 有 $\gamma=|x^*|$, $u^{(1)}_{R_1}=Q^{R_1}x^*-q_{R_1}$. 类似地, 根据问题 (2.5) 的约束区域, 可以得到 $(v',\gamma,u^{(1)},u^{(2)},u^{(3)},\delta)$ 具有引理 2 中问题 (2.5) 的唯一最优解的形式, 从而 $X^*=\{x^*\}$. 定理得证. □

3 广义稀疏恢复问题与其凸松弛的等价性

在本节中, 首先给出问题 (1.1) 和 (1.8) 在下面假设下等价的条件; 然后对该假设及保证等价的条件进行一些探讨.

假设 1 给定 $A\in\mathbb{R}^{m_1\times n}$ 和 $Q\in\mathbb{R}^{m_2\times n}$, 矩阵 $\hat{H}(x^*)$ 由 x^* 定义为 (2.2) 中的形式. 记 $\hat{H}(x^*)$ 的零空间为 $\mathrm{Null}(\hat{H})$. 要么 $\mathrm{Null}(\hat{H})=\{0\}$, 要么存在非零的 $\nu=(\nu',\nu'')\in\mathrm{Null}(\hat{H})$, 其中 $\nu'\in\mathbb{R}^{|J_+|}$ 且 $\nu''\in\mathbb{R}^{|J_-|}$ 使得

$$\min_{j\in J_+\cup J_-}\left\{\frac{|x_j^*|}{|\tilde{\nu}_j|}\;\middle|\;\tilde{\nu}_j\neq 0\right\}\leqslant\min_{i\in R_1}\left\{\frac{(Q^{R_1}x^*-q_{R_1})_i}{|(Q^{R_1}\tilde{\nu})_i|}\;\middle|\;(Q^{R_1}\tilde{\nu})_i\neq 0\right\},\tag{3.1}$$

其中 $\tilde{\nu}\in\mathbb{R}^n$ 满足 $\tilde{\nu}_{J_+}=\nu'$ 和 $\tilde{\nu}_{J_-}=\nu''$, 并且 $\tilde{\nu}$ 的其他元素均为零.

3.1 两个问题的等价性

在假设 1 下, 可以证明 RSP 条件 (2.3) 保证问题 (1.1) 和 (1.8) 是等价的.

定理 2 给定 $A\in\mathbb{R}^{m_1\times n}$ 和 $Q\in\mathbb{R}^{m_2\times n}$. 令 $x^*\in\mathbb{R}^n$ 是问题 (1.1) 的最稀疏解, 其他记号均与假设 1 中的记号一致. 在假设 1 下, 如果存在 $\xi\in\mathbb{R}^{|R_0|}$ 和 $\eta\in\mathbb{R}^n$ 使得 RSP 条件 (2.3) 在 x^* 点处成立, 那么 $X^*=\{x^*\}$.

证明 由定理 1 知, 存在 $\xi\in\mathbb{R}^{|R_0|}$ 和 $\eta\in\mathbb{R}^n$ 使得 RSP 条件 (2.3) 成立并且矩阵 $\hat{H}(x^*)$ 列满秩当且仅当 x^* 是问题 (1.8) 的唯一最优解. 因此, 只需证明在假设 1 下, $\hat{H}$ 在最稀疏的解 x^* 处是列满秩的, 就可以得到定理 2 的结论.

假设 $\hat{H}$ 在 x^* 处不是列满秩的, 那么 $\mathrm{Null}(\hat{H})\neq\{0\}$, 即存在非零 $\nu\in\mathrm{Null}(\hat{H})$. 根据假设 1 中的记号, 有

$$A_{J_+}\nu'+A_{J_-}\nu''=0,\quad Q_{R_0\times J_+}\nu'+Q_{R_0\times J_-}\nu''=0.$$

由于 x^* 是问题 (1.1) 的最稀疏的解, 故它一定满足 (1.1) 的约束. 利用 R_0 和 R_1 的定义, 可以得到

$$Ax^*=b,\quad Q^{R_0}x^*-q_{R_0}=0,\quad Q^{R_1}x^*-q_{R_1}>0.$$

选取 ϵ 使得

$$|\epsilon|\leqslant\min_{i\in R_1}\left\{\frac{(Q^{R_1}x^*-q_{R_1})_i}{|(Q^{R_1}\tilde{\nu})_i|}\;\middle|\;(Q^{R_1}\tilde{\nu})_i\neq 0\right\},$$

则 $y=x^*+\epsilon\tilde{\nu}$ 是问题 (1.1) 的一个可行解.

首先, 容易计算

$$\begin{aligned}Ay&=A(x^*+\epsilon\tilde{\nu})=A_{J_+}(x^*_{J_+}+\epsilon\nu')+A_{J_-}(x^*_{J_-}+\epsilon\nu'')\\&=(A_{J_+}x^*_{J_+}+A_{J_-}x^*_{J_-})+\epsilon(A_{J_+}\nu'+A_{J_-}\nu'')=b,\\Q^{R_0}y&=Q^{R_0}(x^*+\epsilon\tilde{\nu})=Q_{R_0\times J_+}(x^*_{J_+}+\epsilon\nu')+Q_{R_0\times J_-}(x^*_{J_-}+\epsilon\nu'')\\&=(Q_{R_0\times J_+}x^*_{J_+}+Q_{R_0\times J_-}x^*_{J_-})+\epsilon(Q_{R_0\times J_+}\nu'+Q_{R_0\times J_-}\nu'')\\&=q_{R_0}.\end{aligned}\tag{3.2}$$

其次, 因为

$$-\epsilon(Q^{R_1}\tilde{\nu})_i \leqslant |\epsilon(Q^{R_1}\tilde{\nu})_i| \leqslant (Q^{R_1}x^* - q_{R_1})_i, \quad \forall\, i \in R_1,$$

所以有

$$\epsilon(Q^{R_1}\tilde{\nu})_i \geqslant -(Q^{R_1}x^* - q_{R_1})_i, \quad \forall\, i \in R_1,$$

即 $\epsilon Q^{R_1}\tilde{\nu} \geqslant -(Q^{R_1}x^* - q_{R_1}) = -Q^{R_1}x^* + q_{R_1}$. 从而可以得到

$$Q^{R_1}y = Q^{R_1}(x^* + \epsilon\tilde{\nu}) = Q^{R_1}x^* + \epsilon Q^{R_1}\tilde{\nu} \geqslant Q^{R_1}x^* - Q^{R_1}x^* + q_{R_1} = q_{R_1}. \tag{3.3}$$

结合 (3.2) 和 (3.3), 可得 $Ay = b$ 和 $Qy \geqslant q$, 故 y 满足问题 (1.1) 的约束.

根据假设 1 和 $v \neq 0$, 令 j_0 表示取到 $\frac{|x_j^*|}{|\tilde{v}_j|}$ 最小值的指标, 其中 $\tilde{v}_j \neq 0$. 取 $\epsilon = -\frac{x_{j_0}^*}{\tilde{v}_{j_0}}$, 那么 $y_{j_0} = 0$ 且 $\|y\|_0 < \|x^*\|_0$, 这与 x^* 是问题 (1.1) 的最稀疏的解矛盾. □

根据定理 2 可以看到, 在假设 1 下, RSP 条件 (2.3) 保证问题 (1.1) 与 (1.8) 的等价性. 事实上, 在假设 1 下, 如果 RSP 条件 (2.3) 在问题 (1.1) 的一个最优解 x^* 处成立, 那么问题 (1.8) 有唯一的最优解且该最优解就是 x^*. 因此, 在假设 1 下, 如果 x^* 是问题 (1.1) 的唯一最优解, 那么问题 (1.8) 强等价于问题 (1.1); 否则, 如果问题 (1.1) 有多个解, RSP 条件 (2.3) 保证问题 (1.8) 等价于问题 (1.1).

3.2　关于假设和 RSP 条件的讨论

本节将探讨定理 2 中的条件. 假设 1 看起来似乎很严格, 但事实上它对许多问题都是自然成立的. 下面的讨论给出具体的说明.

首先, 构造例 1 来验证定理 2 中的条件成立, 由于 $\hat{H}$ 在某个稀疏解 x^* 处列满秩, 因此, RSP 条件 (2.3) 保证问题 (1.1) 和 (1.8) 的等价性.

例 1　考虑问题 (1.1) 和 (1.8) 含有

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & -9 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

通过直接的计算, 不难验证 $x^* = (\frac{4}{9}, 0, 0, \frac{1}{9})^{\mathrm{T}}$ 是问题 (1.8) 的唯一最优解, 并且问题 (1.1) 除 x^* 以外还有下面两个最优解:

$$x^{(1)} = (1, -1, 0, 0)^{\mathrm{T}}, \quad x^{(2)} = (0, 0, 2, 1)^{\mathrm{T}}.$$

因此, 问题 (1.1) 与 (1.8) 等价, 但不强等价.

下面验证定理 2 中的条件在这个具体问题中是成立的. 换句话讲, 将验证 $\mathrm{Null}(\hat{H}) = \{0\}$, 且 RSP 条件在 x^* 处成立. 事实上, 在 x^* 处, $J_+ = \{1, 4\}$, $J_- = \emptyset$, $J_0 = \{2, 3\}$, 并且 $x_3^* \geqslant 0$ 是 x^* 处的一个积极约束. 因此, 有

$$Q^{R_0} = (\,0\ 0\ 1\ 0\,), \quad Q^{R_1} = (\,1\ 0\ 0\ 1\,).$$

从而, $\hat{H}$ 在 x^* 处有如下形式:

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -9 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

易看到 $\mathrm{Null}(\hat{H})=\{0\}$. 此外, 存在

$$\xi=-1,\quad \eta=\left(1,\frac{4}{9},\frac{7}{9},1\right)^{\mathrm{T}},\quad \zeta=\left(1,\frac{4}{9}\right)^{\mathrm{T}},$$

使得 $(Q^{R_0})^{\mathrm{T}}\xi+\eta=A^{\mathrm{T}}\zeta\in\mathcal{R}(A^{\mathrm{T}})$, 这说明 RSP 条件 (2.3) 在 x^* 处成立.

例 2 考虑当 $Q=I$ 且 $q=0$ 时的问题 (1.1) 和 (1.8).

此时, 约束 $Qx\geqslant q$ 退化为 $x\geqslant 0$. 从而可以得到

$$J_-=\emptyset,\quad R_0=\{i\mid x_i^*=0\}=J_0,\quad R_1=\{i\mid x_i^*>0\}=J_+,\quad Q^{R_1}x^*-q_{R_1}=x^*_{J_+}.$$

因此, 根据以下计算可以验证假设 1 在此情形下成立:

$$\min_{i\in R_1}\left\{\frac{(Q^{R_1}x^*-q_{R_1})_i}{|(Q^{R_1}\tilde{\nu})_i|}\;\middle|\;(Q^{R_1}\tilde{\nu})_i\neq 0\right\}=\min_{i\in J_+}\left\{\frac{x_i^*}{|\tilde{\nu}_i|}\;\middle|\;\tilde{\nu}_i\neq 0\right\}.$$

由上边的推导和注 1 可以得到, 对于此类问题, 定理 2 退化为文献 [11] 中的定理 2.6.

例 3 考虑绝对值方程组

$$Bx-\tau|x|=d,\quad \tau\geqslant 0. \tag{3.4}$$

当 $\tau=0$ 时, (3.4) 退化为线性方程 $Bx=d$. Zhang 等 [20] 讨论了在下面假设成立时 (3.4) 的 l_1- 范数最小解的唯一性条件, 也证明了在此条件下唯一的最小 l_1- 范数解就是绝对值方程组最稀疏的解.

假设 2 假设 B 的特征值都大于等于 τ.

根据文献 [20, 引理 2.4], 在假设 2 成立时, 如果已知 x^* 是 (3.4) 的一个解, 那么求解 (3.4) 的最稀疏解和最小 l_1- 范数解就是分别求解问题 (1.1) 和 (1.8), 其中

$$A=\begin{pmatrix}B^{\mathrm{T}}B-\tau^2I\\ d^{\mathrm{T}}B\end{pmatrix},\quad b=Ax^*,\quad Q=\begin{pmatrix}B+\tau I\\ B-\tau I\end{pmatrix},\quad q=\begin{pmatrix}d\\ d\end{pmatrix}.$$

接下来将把本文得到的结论应用在问题 (3.4) 上, 可以看到这些结论将会退化为文献 [20] 中的对应结果. 下面将说明以下两个结果:

(1) 令 x^* 是问题 (1.8) 的一个最优解, 那么本文的定理 1 将退化为文献 [20] 中的定理 3.4;

(2) 令 x^* 是问题 (1.1) 的一个最优解, 那么假设 1 成立, 且定理 2 退化为文献 [20] 中的定理 4.1.

首先, 先写出问题 (1.8) 在此特殊情形下的最优解 x^* 处的积极线性约束. 假设 $(B+\tau I)^Rx^*=d_R$ 和 $(B-\tau I)^{R'}x^*=d_{R'}$, 即 $R_0=\{i\in[2n]:i\in R$ 或 $i-n\in R'\}$ 是 x^* 处的积极集, 那么有

$$-\tau x_R^*=B^Rx^*-d_R,\quad \tau x_{R'}^*=B^{R'}x^*-d_{R'}. \tag{3.5}$$

因为 x^* 是问题 (1.8) 的一个最优解, 从而它是 (3.4) 的一个解, 即 $Bx^*-\tau|x^*|=d$. 因此可以得到

$$B^Rx^*-d_R=\tau|x_R^*|,\quad B^{R'}x^*-d_{R'}=\tau|x_{R'}^*|. \tag{3.6}$$

结合 (3.5) 和 (3.6) 可以得到 $-\tau x_R^*=\tau|x_R^*|$ 且 $\tau x_{R'}^*=\tau|x_{R'}^*|$. 从而有

$$R=\{i:x_i^*\leqslant 0\}=J_-\cup J_0,\quad R'=\{i:x_i^*\geqslant 0\}=J_+\cup J_0.$$

其次, 由 (2.2) 定义的矩阵 $\hat{H}$ 在 x^* 处的形式如下:

$$\begin{aligned}\hat{H}(x^*) &= \begin{pmatrix} A_{J_+} & A_{J_-} \\ (B+\tau I)_{(J_-\cup J_0)\times J_+} & (B+\tau I)_{(J_-\cup J_0)\times J_-} \\ (B-\tau I)_{(J_+\cup J_0)\times J_+} & (B-\tau I)_{(J_+\cup J_0)\times J_-} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A_{J_+} & A_{J_-} \\ (B-\tau I)_{(J_-\cup J_0)\times J_+} & (B+\tau I)_{(J_-\cup J_0)\times J_-} \\ (B-\tau I)_{(J_+\cup J_0)\times J_+} & (B+\tau I)_{(J_+\cup J_0)\times J_-} \end{pmatrix},\end{aligned}$$

其中第二个等式是因为只有当 $i=j$ 时, $(B+\tau I)$ 和 $B-\tau I$ 在 (i,j) 处的元素才与矩阵 B 在 (i,j) 处的元素不相等, 即若 $S\cap J=\emptyset$, 则 $(B+\tau I)_{S\times J}=(B-\tau I)_{S\times J}$. 从而, 经过行的初等变换, $\hat{H}(x^*)$ 列满秩当且仅当下面的矩阵列满秩:

$$\begin{pmatrix} A_{J_+} & A_{J_-} \\ (B-\tau I)_{J_+} & (B+\tau I)_{J_-} \end{pmatrix}.$$

第三, 由于

$$Q^{R_0}=\begin{pmatrix} (B+\tau I)^R \\ (B-\tau I)^{R'} \end{pmatrix},$$

因此有

$$(Q^{R_0})^{\mathrm{T}}=(((B+\tau I)^R)^{\mathrm{T}}((B-\tau I)^{R'})^{\mathrm{T}}).$$

若 RSP 条件 (2.3) 在 x^* 处成立, 则存在 $\xi\in\mathbb{R}^{|R_0|}$ 使得

$$(Q^{R_0})^{\mathrm{T}}\xi+\eta\in\mathcal{R}(A^{\mathrm{T}}) \quad 且 \quad \xi<0.$$

将 ξ 分成以下两部分:

$$\xi=\begin{pmatrix}\xi' \\ \xi''\end{pmatrix},$$

其中 $\xi'\in\mathbb{R}^{|R|}$, $\xi''\in\mathbb{R}^{|R'|}$, 然后将 ξ' 和 ξ'' 用零填补其他位置, 分别扩充为 $\vartheta\in\mathbb{R}^n$ 和 $\zeta\in\mathbb{R}^n$, 可得

$$\begin{aligned}(Q^{R_0})^{\mathrm{T}}\xi+\eta &= ((B+\tau I)^R)^{\mathrm{T}}\xi'+((B-\tau I)^{R'})^{\mathrm{T}}\xi''+\eta \\ &= (B+\tau I)^{\mathrm{T}}\vartheta+(B-\tau I)^{\mathrm{T}}\zeta+\eta,\end{aligned}$$

其中当 $i\in R=J_-\cup J_0$ 时, $\vartheta_i=\xi'_i$, 否则 $\vartheta_i=0$; 并且当 $i\in R'=J_+\cup J_0$ 时, $\zeta_i=\xi''_i$, 否则 $\zeta_i=0$. 因此, RSP 条件 (2.3) 变为以下形式:

$$\begin{cases}(B+\tau I)^{\mathrm{T}}\vartheta+(B-\tau I)^{\mathrm{T}}\zeta+\eta\in\mathcal{R}(A^{\mathrm{T}}), \\ \vartheta_i=0, \quad \zeta_i<0, \quad \eta_i=1, \quad \forall\, i\in J_+, \\ \vartheta_i<0, \quad \zeta_i<0, \quad |\eta_i|<1, \quad \forall\, i\in J_0, \\ \vartheta_i<0, \quad \zeta_i=0, \quad \eta_i=-1, \quad \forall\, i\in J_-,\end{cases}$$

这与文献 [20] 中的结果是相同的. 因此, 应用定理 1, 可以得到文献 [20] 中的定理 3.4.

接下来证明假设 1 对该问题是成立的. 易找出 x^* 处的非积极集为

$$(B+\tau I)^{J_+}x^* \geqslant d_{J_+} \quad 和 \quad (B-\tau I)^{J_-}x^* \geqslant d_{J_-}.$$

记 $\alpha = Q_{R_1}x^* - q_{R_1}$. 由于 $Bx^* - \tau|x^*| = d$, 故 $\alpha = (\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)})$, 其中

$$\alpha^{(1)} = (B+\tau I)^{J_+}x^* - d_{J_+} = 2\tau x^*_{J_+}, \quad \alpha^{(2)} = (B-\tau I)^{J_-}x^* - d_{J_-} = -2\tau x^*_{J_-}. \tag{3.7}$$

从而, 对某个 $\nu = (\nu', \nu'') \in \mathrm{Null}(\hat{H})$, 其中 $\nu' \in \mathbb{R}^{|J_+|}$ 且 $\nu'' \in \mathbb{R}^{|J_-|}$, 根据 $\mathrm{Null}(\hat{H})$ 的形式, 有

$$(B-\tau I)_{J_+}\nu' + (B+\tau I)_{J_-}\nu'' = 0.$$

因此,

$$\begin{aligned} Q^{R_1}\tilde{v} &= \begin{pmatrix} (B+\tau I)_{J_+\times J_+}\nu' + (B+\tau I)_{J_+\times J_-}\nu'' \\ (B-\tau I)_{J_-\times J_+}\nu' + (B-\tau I)_{J_-\times J_-}\nu'' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (B+\tau I)_{J_+\times J_+}\nu' - (B-\tau I)_{J_+\times J_+}\nu' \\ -(B+\tau I)_{J_-\times J_-}\nu'' + (B-\tau I)_{J_-\times J_-}\nu'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\tau\nu' \\ -2\tau\nu'' \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{3.8}$$

结合 (3.7) 和 (3.8), 可以得到 (3.1) 成立. 事实上,

$$\begin{aligned} \min_{i\in R_1}\left\{ \frac{\alpha_i}{|(Q^{R_1}\tilde{\nu})_i|} \,\middle|\, (Q^{R_1}\tilde{\nu})_i \neq 0 \right\} &= \min_{i\in J_+, j\in J_-}\left\{ \frac{x^*_i}{|\nu'_i|}, \frac{-x^*_j}{|\nu''_j|} \,\middle|\, \nu'_i \neq 0, \nu''_j \neq 0 \right\} \\ &= \min_{j\in J_+\cup J_-}\left\{ \frac{|x^*_j|}{|\tilde{\nu}_j|} \,\middle|\, \tilde{\nu}_j \neq 0 \right\}. \end{aligned}$$

因此证明了假设 1 在此问题中是成立的. 进而可以得到, 在 RSP 条件下, 绝对值方程组 (3.4) 的最小 l_1-范数解就是它的一个最稀疏的解, 这与文献 [20] 中的定理 4.1 一致.

4 结论

本文考虑了在含有等式与不等式的线性约束下的广义 l_0- 最小化问题. 该问题包含几个重要的问题作为特例. 利用 l_1- 范数替换 l_0- 范数, 可以得到一个容易计算的凸逼近, 从而克服 l_0- 最小化问题的 NP- 困难性. 根据 l_0- 最小化问题和 l_1- 最小化问题等价与强等价的定义, 需要要求凸松弛的最优解是唯一的. 本文给出了保证凸松弛最优解唯一的充分必要条件, 并且证明了原问题与其凸松弛在某些条件下是等价的. 当考虑的问题退化到一些重要的特殊情形时, 本文得到的唯一性结果与相应的结论一致[11,22]. 尽管假设 1 在很多问题中都成立, 但它仍值得更多的讨论. 此外, l_p- 最小化问题 ($p \in (0,1)$) 受到越来越多的关注, 因此将 RSP 条件推广到非凸松弛 l_p- 最小化问题 ($p \in (0,1)$) 也是一个有意义的课题.

参考文献

1 Zhu L, Qiu C T. Application of compressed sensing theory to radar signal processing. In: Proceedings of the 3rd IEEE International Conference on Computer Science and Information Technology (ICCSIT). Chengdu: IEEE, 2010, 315–318

2 Li L C, Li D J, Pan Z H. InSAR signal sparse sampling and processing based on compressed sensing. In: Proceedings of the 10th European Conference on Synthetic Aperture Radar. Berlin: VDE Publishing, 2014, 1–4

3 Fang J, Shen Y, Li H, et al. Pattern-coupled sparse Bayesian learning for recovery of block-sparse signals. IEEE Trans Signal Process, 2014, 63: 360–372

4 Masood M, Afify L H, Al-Naffouri T Y. Efficient coordinated recovery of sparse channels in massive MIMO. IEEE Trans Signal Process, 2014, 63: 104–118

5 Rao X B, Lau V K N. Distributed compressive CSIT estimation and feedback for FDD multi-user massive MIMO systems. IEEE Trans Signal Process, 2014, 62: 3261–3271

6 Eldar Y C, Kutyniok G. Compressed Sensing: Theory and Applications. Cambridge: Cambridge University Press, 2012

7 Chu M, Plemmons R J. Nonnegative matrix factorization and applications. Image, 2005, 34: 1–5

8 Pauca V P, Piper J, Plemmons R J. Nonnegative matrix factorization for spectral data analysis. Linear Algebra Appl, 2006, 416: 29–47

9 Shashua A, Hazan T. Non-negative tensor factorization with applications to statistics and computer vision. In: Proceedings of the 22nd international conference on Machine learning. New York: Association for Computing Machinery, 2005, 792–799

10 Vo N, Moran B, Challa S. Nonnegative-least-square classifier for face recognition. In: Advances in Neural Networks-ISNN2009. Lecture Notes in Computer Science, vol. 5553. New York: Springer, 2009, 449–456

11 Zhao Y B. Equivalence and strong equivalence between the sparsest and least ℓ_1-norm nonnegative solutions of linear systems and their applications. J Oper Res Soc China, 2014, 2: 171–193

12 He R, Zheng W, Hu B, et al. Nonnegative sparse coding for discriminative semisupervised learning. In: Proceeding of IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR). Springs: IEEE, 2011, 2849–2856

13 Boufounos P T, Baraniuk R G. 1-Bit compressive sensing. In: IEEE 42nd Annual Conference on Information Sciences and Systems. Princeton: IEEE, 2008, 16–21

14 Zhao Y B, Xu C L. 1-Bit compressive sensing: Reformulation and RRSP-based sign recovery theory. Sci China Math, 2016, 59: 2049–2074

15 Mangasarian O L, Meyer R R. Absolute value equations. Linear Algebra Appl, 2006, 419: 359–367

16 Mangasarian O L. Absolute value programming. Comput Optim Appl, 2007, 36: 43–53

17 Prokopyev O. On equivalent reformulations for absolute value equations. Comput Optim Appl, 2009, 44: 363–372

18 Hu S L, Huang Z H. A note on absolute value equations. Optim Lett, 2010, 4: 417–424

19 Ketabchi S, Moosaei H. Minimum norm solution to the absolute value equation in the convex case. J Optim Theory Appl, 2012, 154: 1080–1087

20 Zhang M, Huang Z H, Li Y F. The sparsest solution to the system of absolute value equations. J Oper Res Soc China, 2015, 3: 31–51

21 Natarajan B K. Sparse approximate solutions to linear systems. SIAM J Comput, 1995, 24: 227–234

22 Zhao Y B. RSP-based analysis for sparest and least l_1-norm solutions to underdetermined linear systems. IEEE Trans Signal Process, 2013, 61: 5777–5788

23 Candes E J, Romberg J, Tao T. Robust uncertainty principles: Exact signal reconstruction from highly impcomplete frequency information. IEEE Trans Inform Theory, 2006, 52: 489–509

24 Candés E J, Romberg J K, Tao T. Stable signal recovery from incomplete and inaccurate measurements. Comm Pure Appl Math, 2006, 59: 1207–1223

25 Candes E J, Tao T. Decoding by linear programming. IEEE Trans Inform Theory, 2005, 51: 4203–4215

26 Zhou S L, Kong L C, Xiu N H. New bounds for RIC in compressed sensing. J Oper Res Soc China, 2013, 1: 227–237

27 Cai T T, Zhang A. Sparse representation of a polytope and recovery of sparse signals and low-rank matrices. IEEE Trans Inform Theory, 2014, 60: 122–132

28 Cohen A, Dahmen W, Devore R. Compressed sensing and best k-term aproximation. J Amer Math Soc, 2009, 22: 211–231

29 Zhang Y. Theory of compressive sensing via ℓ_1-minimization: A non-RIP analysis and extensions. J Oper Res Soc China, 2013, 1: 79–105

30 Zhao Y B, Li D. Reweighted ℓ_1-minimization for sparse solutions to underdetermined linear systems. SIAM J Optim,

2012, 22: 1065–1088

31 Bruckstein A M, Elad M, Zibulevsky M. On the uniqueness of nonnegative sparse solutions to underdetermined systems of equations. IEEE Trans Inform Theory, 2008, 54: 4813–4820

32 Khajehnejad M, Dimakis A G, Xu W, et al. Sparse recovery of positive signals with minimal expansion. ArXiv: 0902.4045, 2009

33 Donoho D L, Tanner J. Sparse nonnegative solution of underdetermined linear equations by linear programming. Proc Natl Acad Sci USA, 2005, 102: 9446–9451

Uniqueness conditions for the sparsest solution of linear systems

Min Zhang & Zhenghai Huang

Abstract Sparse optimization has attracted extensive attention and has developed rapidly in recent years with a range of applications including signal processing, machine learning, image inpainting and computer vision. In this paper, we consider a general l_0-minimization problem with linear constraints. Unfortunately, l_0-minimization problem is NP-hard in general, but several algorithmic approaches, especially l_1-minimization which replaces l_0-norm by l_1-norm, are applied to overcome the computational bottleneck. Accordingly, as l_1-minimization can be regarded as a heuristic to l_0-minimization, it is of great importance to figure out what conditions can guarantee the equivalence between the two problems. Based on the methodology of the range space property (RSP) analysis, we propose the corresponding RSP conditions for the concerned problem and use RSP to prove that l_0-minimization problem is equivalent to its heuristic l_1-minimization under some conditions. In addition, we point out that these conditions can be met for many classes of problems.

Keywords sparse optimization, convex heuristic, the range space property (RSP)

MSC(2010) 62B10, 90C26, 90C59

doi: 10.1360/SCM-2015-0610