



基于牛顿冷却定律的炉温曲线优化模型

熊欢欢¹, 秦 政², 秦诗童³, 李明奇^{4*}

(1. 电子科技大学 光电科学与工程学院 成都 611731; 2. 电子科技大学 信息与通信工程学院 成都 611731;
3. 电子科技大学 格拉斯哥学院, 成都 611731; 4. 电子科技大学 数学科学学院, 成都 611731)

摘要: 针对回焊炉加热电路板的炉温曲线优化问题, 利用牛顿冷却定律和热传导规律, 建立热传递模型和优化搜索模型。首先将整个加热过程分为 3 个区域, 并分别建立对应模型。对于小温区, 利用已知实验数据和最小二乘法求出时间参数; 对于间隙区, 先用热传导方程得到间隙区温度分布规律后求出时间常数; 对于冷却区, 采用多项式拟合的方法进行描述。然后, 针对不同的制程界限建立相应的优化目标, 采用蒙特卡洛模拟方法, 并用变步长搜索算法加速搜索过程, 得到相应条件下的最优炉温曲线。

关键词: 炉温曲线; 牛顿冷却定律; 目标优化模型; 蒙特卡洛模拟

中图分类号: O141

文献标志码: A

DOI: 10.12179/1672-4550.20210278

Optimal Model of Furnace Temperature Curve Based on Newton's Law of Cooling

XIONG Huanhuan¹, QIN Zheng², QIN Shitong³, LI Mingqi^{4*}

(1. School of Optoelectronic Science and Engineering, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu 611731, China;
2. School of Information and Communication Engineering, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu 611731, China;
3. Glasgow College, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu 611731, China;
4. School of Mathematical Sciences, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu 611731, China)

Abstract: Aiming at the optimization of the furnace temperature curve when the reflow oven heats circuit boards, the heat transfer model and the optimization search model are established based on Newton's law of cooling and law of heat conduction. First dividing the entire heating process into three areas. In the separated heating zone, the given experimental data and the least square method are applied to find the time parameters. In the gap zone, first using the heat conduction equation to obtain the pattern of temperature distribution in the gap area, and then obtaining the time constant. In the cooling zone, a polynomial fitting method is used to compute equations. Then, for different process limits, the corresponding optimization goals are established. The Monte Carlo simulation method and the variable step size algorithm are used to accelerate the search process, and the optimal furnace temperature curve under the corresponding conditions is obtained.

Key words: furnace temperature curve; Newton's law of cooling; target optimization model; Monte Carlo simulation

在集成电路板等电子产品生产中, 通过回焊炉可以加热印制电路板, 将电子元件自动焊接到电路板上。控制回焊炉的各部分保持工艺要求的温度, 对产品质量至关重要。回焊炉内部从功能上可分成 4 个大温区: 预热区、恒温区、回流区和冷却区。2020 年全国大学生数学建模竞赛 A 题,

需要在满足给定制程界限的条件下, 结合炉温曲线的要求确定各温区温度大小和传送带过炉速度。建模研究的整个过程基于以下基本假设:

- 1) 焊接区域在回焊炉中受热均匀, 且忽略形状对其吸热的影响;
- 2) 回焊炉启动后, 在短时间内炉内温度分布

收稿日期: 2021-06-02; 修回日期: 2021-09-25

基金项目: 电子科技大学研究生精品课程建设项目(JPKC20192-39); 国家自然科学基金(U2030205)。

作者简介: 熊欢欢(2000-), 男, 本科生, 光电信息科学与工程专业。

* 通信作者: 李明奇(1970-), 男, 副教授, 主要从事应用数学和算法设计方面的研究。E-mail: lmqi2000@126.com

达到稳定状态, 且不会发生变化;

3) 回焊炉内部各温区与间隙之间温度分布连续。

1 回焊炉温度变化模型

1.1 热对流模型

回焊炉内部可分为小温区和间隙区两部分, 由于问题中焊接区域厚度很薄, 且回焊炉内垂直传送带方向温度分布均匀, 因此可以忽略焊接区域形状^[1], 并将升温过程看作满足牛顿冷却定律的热传递模型。又因为炉内通过稳定喷射的热空气流进行加热, 小温区处于一个恒温热源内, 因此在热传递的类型上只需考虑热对流引起的效应^[2], 其模型示意图如图 1 所示。

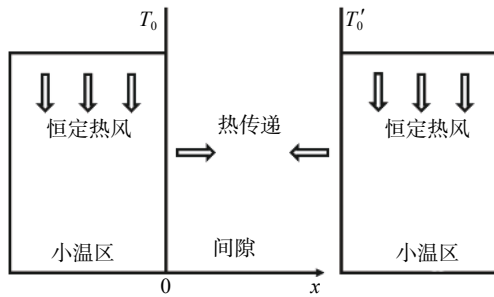


图 1 传热基本结构图

设 k 、 T_0 、 T_1 、 c_p 、 ρ 分别为空气与电热板之间的换热系数、环境温度、初始温度、电路板的比热容和密度。

此时, 电路板在小温区内受到稳定的加热, 因此可以假定 T 仅与 t 有关。

在导热过程中, 存在温差时, 单位时间从单位面积散失的热量与温差成正比, 即热流密度与温度成正比, 可以得到:

$$dQ = k(T_0 - T)dt$$

其中, T_0 为小温区内部的环境温度, T 为电路板温度。

由电路板的比热容 c_p 和密度 ρ , 能够得到焊接区域的升温模型为:

$$dQ = (c_p \rho dl) dT$$

结合牛顿冷却定律的推导公式, 可得到^[3-4]:

$$k(T_0 - T)dt = \rho c_p dT$$

等式两边积分, 可得:

$$\int_0^t \frac{k}{\rho c_p} ds = - \int_{T_1}^T \frac{1}{T_0 - h} d(T_0 - h) \quad (1)$$

其解为:

$$T(t) = T_0 - (T_0 - T_1)e^{-\lambda t}, \quad \lambda = \frac{k}{\rho c_p} \quad (2)$$

式中: $T(t)$ 表示一个小温区内, 温度随着时间的变化情况; λ 反映焊接区域对热源温度的响应速度。

1.2 小温区内部温度变化模型

回焊炉开始运行后, 通过稳定喷射的热空气流进行加热, 在此期间小温区内部空气的温度为恒定值, 处于一个恒定受热过程, 因此小温区内部的时间常数 λ 相同。

为了避免间隙处数据对拟合的影响, 在分析过程中去除间隙段, 只对小温区内部加热段数据进行分析。

利用已给出的实验测试升温数据 y_i , 结合式(2)进行最小二乘法拟合参数, 得到时间常数 λ_1 。最小二乘优化模型为:

$$\begin{aligned} \min S(\lambda_1) &= \sum_{i=1}^m (y_i - T(t_i)) \\ \text{s.t. } T(t_i) &= T_0 - (T_0 - T_1)e^{-\lambda_1 t_i} \end{aligned} \quad (3)$$

1.3 间隙区内部温度变化模型

炉内温度经过一定时间趋于稳定, 此时小温区内部环境温度不变。由于对间隙处和炉外区域不做特殊的温度控制, 间隙区受到两端小温区的热传递影响, 因此在回焊炉开启后达到稳定的这个阶段内, 间隙处的温度分布满足热对流条件下的热传递模型^[5-6]。因此, 只需要分析间隙区域的温度随位置的分布情况。回焊炉开始运行后, 间隙处的温度会逐渐上升, 并最终达到稳定状态。为此, 引入热传递方程^[3]:

$$C \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(a \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \right) \quad (4)$$

式中, a 为热传导系数, C 为空气材料的比热容, $T(x, t)$ 表示炉内间隙区域温度随时间和空间的分布。

根据间隙区域的边界条件, 可得小温区间隙处的热传递模型为:

$$\begin{cases} C \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(a \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \right) \\ T(0, t) = T_0, T(5, t) = T'_0 \\ T(x, 0) = 25, x \neq 0 \end{cases} \quad (5)$$

式中, T_0 与 T'_0 分别为间隙左右小温区的温度。

1.4 冷却区温度变化模型

在焊接区域温度越接近凝固点 217 °C 时, 逼

近相变临界点, 分子结晶释放大晶格能, 比热容迅速增加^[7]。首先对冷却区(小温区 10~11)的温度变化数据进行差分运算, 得到冷却速率与时间函数。再选取 5 次多项式作函数拟合。最后, 对温度变化速率进行积分得到:

$$T_{\text{drop}}(t) = T_3 + \int_{t_3}^t \alpha(s) ds \quad (6)$$

式中, t_3 、 T_3 分别为进入冷却区的时刻和当前温度, α 为温差, T_{drop} 即为冷却过程中的温度变化函数。

2 参数求解

2.1 小温区时间常数求解

根据上面模型与已知条件, 炉内温度在空间的分布情况如表 1 所示。

表 1 炉内温度分布表

所在温区	小温区 1~5	小温区 6	小温区 7	小温区 8~9	小温区 10~11
温度/°C	175	195	235	255	25

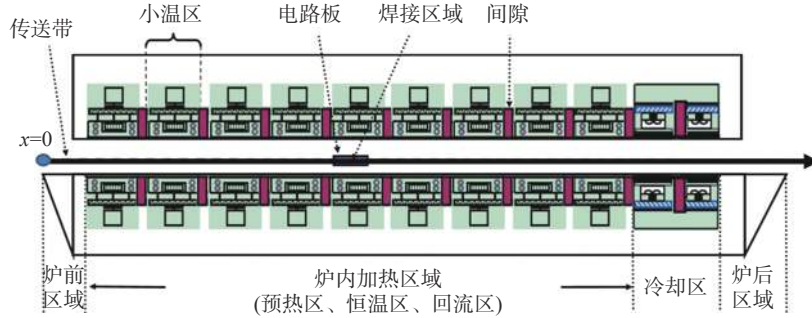


图 2 回焊炉截面坐标示意图

2.2.1 热传递模型的有限差分离散化

将得到的热传递模型利用有限差分^[6-7]的思想进行离散化, 通过解方程得到离散点的近似解作为原始模型的解。

首先, 将时间和空间进行离散化, 设 Δx 、 τ 分别表示空间和时间的步长, 则:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{T_i^{j+1} - T_i^j}{\tau} \\ \frac{\partial T}{\partial x} &= \frac{T_{i+1}^j - T_i^j}{\Delta x} \\ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} &= \frac{T_{i+1}^j - 2T_i^j + T_{i-1}^j}{\Delta x^2} \end{aligned}$$

式中, 下标 j 表示时间, i 表示空间。令 $a = k/(\rho c_p)$, 则热传导方程的有限差分形式^[7]为:

$$\frac{T_i^{j+1} - T_i^j}{\tau} = a \frac{T_{i+1}^{j+1} - 2T_i^{j+1} + T_{i-1}^{j+1}}{\Delta x^2} \quad (7)$$

其次根据边界和初始条件, 且令 $\alpha = a\tau/\Delta x^2$,

为求解时间常数, 我们选取了加热阶段(21.5~295 s), 在小温区内随机选取两处位置, 利用其温度变化数据拟合求解 λ_1 , 初步求得 λ_1 约为 0.034 5。再通过对附件数据的最小二乘拟合求解, 在 $[0, 0.04]$ 内搜索拟合误差最小的 λ_1 , 解得 $\lambda_1 = 0.016 6$ 。同理, 通过截取各间隙区域数据进行最小二乘拟合, 得到 $\lambda_2 = 0.018 0$ 。

2.2 间隙区模型求解

求解炉温变化模型需要根据已知的实验数据求出对应区域的参数, 即需计算得到间隙区域对应的参数 λ_2 。

在小温区温度固定的前提下, 对于间隙, 如果其相邻两个边界的温度相同, 那么间隙中的温度与边界温度相同; 如果边界温度不同, 则间隙的温度变化满足线性关系。

如图 2 所示, 以炉前区域起始点作为 $x=0$ 的点, 建立坐标轴。

将差分模型简化得:

$$\begin{cases} -\alpha T_{i-1}^{j+1} + (1+2\alpha)T_i^{j+1} - \alpha T_{i+1}^{j+1} = T_i^j \\ T_0^j = T_0 \\ T_k^0 = 25, k = 1, 2, \dots, m-1 \\ T_m^j = T_0' \end{cases} \quad (8)$$

式中, 下标 m 表示间隙末端格点。

根据简化差分方程模型构建非齐次线性方程组 $\mathbf{AX}=\mathbf{B}$, $\mathbf{B}$ 表示上一时刻温度的空间分布, $\mathbf{X}$ 表示下一时刻的温度空间分布^[8-10], 其中:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1+2\alpha & -\alpha & & & \\ -\alpha & 1+2\alpha & -\alpha & & \\ & -\alpha & 1+2\alpha & \ddots & \\ & & -\alpha & \ddots & -\alpha \\ & & & \ddots & 1+2\alpha & -\alpha \\ & & & & -\alpha & 1+2\alpha & -\alpha \\ & & & & & -\alpha & 1+2\alpha \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} T_1^{j-1} + \alpha T_0^j \\ T_2^{j-1} \\ \vdots \\ T_{m-2}^{j-1} \\ T_{m-1}^{j-1} + \alpha T_m^j \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} T_1^j \\ T_2^j \\ \vdots \\ T_{m-2}^j \\ T_{m-1}^j \end{bmatrix}$$

2.2.2 离散化线性方程求解

系数矩阵 A 为三对角矩阵, 可以利用追赶法进行求解。求解结果如图 3 所示, 即当炉内空气温度区域稳定时, 间隙内部温度数值随位置改变呈线性分布。

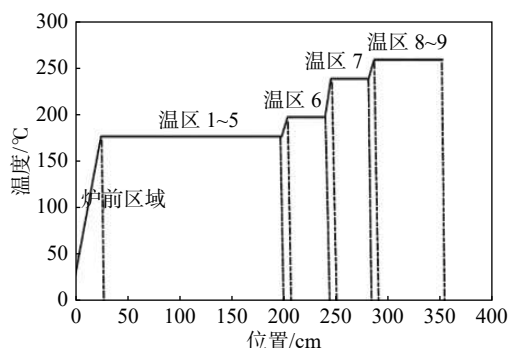


图 3 炉内温度分布图

为了进一步分析线性关系, 对间隙内部温度随位置的分布线性进行检验。截取两侧不同温度的间隙稳定时温度随位置分布曲线, 并进行线性回归分析, 能够得到 $R^2 = 0.998$ (接近于 1), 且 $F(1, 48) = 25\,226.047$ 通过了 F 检验, 温度曲线表明, 温度变化与位置分布有很强的线性关系。

如果间隙的边界与相邻小温区的温度相同, 则根据线性分布原理, 整个间隙内部温度都一致。如果间隙的两个边界的温度不同, 则间隙内部的温度随位置变化满足线性关系。在各温区温度确定的情况下, 炉内温度随空间的分布如图 4 所示。

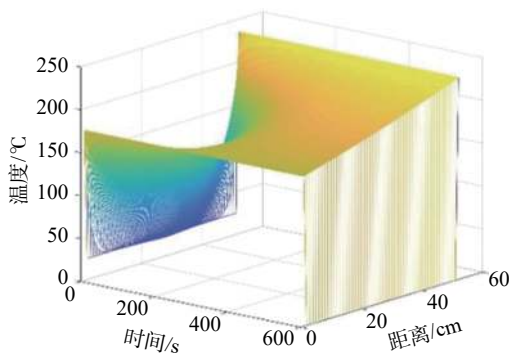


图 4 炉内温度空间分布图

2.3 冷却区温度变化求解

对冷却区温度变化, 选用五次多项式进行最小二乘拟合, 得到速率-温差关系式^[11-12]为:

$$v = m_0 + m_1 x + m_2 x^2 + m_3 x^3 + m_4 x^4 + m_5 x^5 \quad (9)$$

拟合参数如表 2 所示。

表 2 拟合参数表

系数	系数值	系数	系数值
m_5	$1.823\,93 \times 10^{-9}$	m_2	$-0.073\,69$
m_4	$-1.461\,51 \times 10^{-6}$	m_1	$5.781\,57$
m_3	$4.656\,87 \times 10^{-4}$	m_0	$-1.803\,78 \times 10^2$

2.4 未知参数求解

根据上面模型建立以及求解的结果, 得到各个阶段的参数, 进而得到实验数据与模型结果如图 5 所示。通过模型得到的数据与实验数据有一定的误差, 但在可接受范围内。

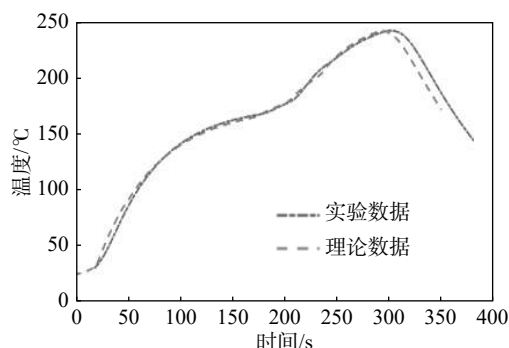


图 5 炉温曲线图

3 模型应用

3.1 求解最大过炉速度

实际情况中传送带过炉速度可变, 制程界限对炉温曲线存在限制, 求解满足限制条件的最大过炉速度。

在回焊炉电路板焊接生产中, 炉温曲线需要满足制程界限的要求, 根据制程界限可以确定约束条件。

1) 温度斜率限制: $|T_{j+1} - T_j| < 1.5$ 。

2) 温度范围限制:

$$60 < t_2 - t_1 < 120$$

$$40 < t_4 - t_3 < 90$$

$$240 < T_{\max} < 250$$

其中,

t_1 : 上升过程中温度到达 $150\,^{\circ}\text{C}$ 时间;

t_2 : 上升过程中温度到达 $190\,^{\circ}\text{C}$ 时间;

t_3 : 上升过程中温度第一次超过 217 °C 的时刻;

t_4 : 下降过程中温度第一次低于 217 °C 的时刻。

采用分步搜索的方法得到满足条件的范围, 利用限制条件缩小范围, 得到最大的过炉速度, 如算法 1。

算法 1: 变步长搜索算法

1) 进行遍历, 得到可行范围解为 [65, 89]。

2) 利用峰值温度限制条件, 缩小范围并以 0.1 的步长进行搜索, 得到可行解范围: [67.8, 76.2]。

最后得到满足条件的速度为 [67.8, 76.2], 即在上述温度下, 温度上升和下降的斜率均在 [-3, 3] 之间。这时, 最大速度为 76.2 cm/min。在最大速度情况下, 炉温曲线如图 6 所示。

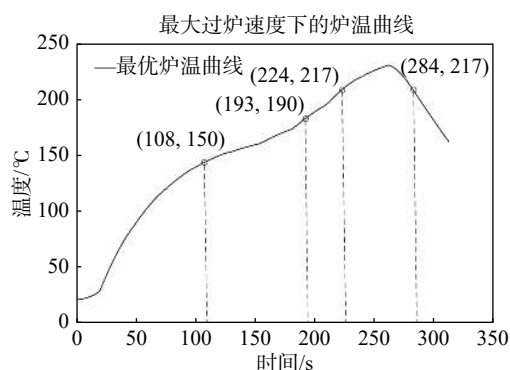


图 6 炉温曲线图

3.2 单目标优化模型

焊接过程中, 焊接区域中心的温度超过 217 °C 的时间不宜过长, 峰值温度也不宜过高。将各温区的设定温度和传送带的过炉速度求解问题转化为超过 217 °C 到峰值温度所覆盖的面积最优化问题。通过设置不同温区的温度以及传送带的速度, 可以使面积尽量小, 使炉温曲线接近理想值。

在特定范围内寻找不同温区的温度值以及传送带速度, 建立优化模型, 找到最优炉温曲线。

1) 当给定各温区温度大小以及过炉速度时, 焊接区域的温度变化曲线便确定, 此时利用离散化求和思想, 将温度变化曲线离散化, 间隔为 0.5, 温度大于 217 °C 的曲线面积为:

$$S = \sum_{j=a}^b (T_{li=j} - 217) \times 0.5 \quad (10)$$

得到单目标函数为:

$$\min \left(\sum_{j=a}^b (T_{li=j} - 217) \times 0.5 \right)$$

2) 制程条件不变, 最优化模型为:

$$\min \left(\sum_{j=a}^b (T_{li=j} - 217) \times 0.5 \right) \quad (11)$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} |T_{j+1} - T_j| < 1.5 \\ 60 < t_2 - t_1 < 120 \\ 40 < t_4 - t_3 < 90 \\ 240 < T_{\max} < 250 \end{cases}$$

采用蒙特卡洛法求解, 具体步骤如算法 2。

算法 2: 蒙特卡罗算法

1) 初始面积 S_0 为无穷大, 初始化 para 用于存储各温区温度和传送带速度, 初始化模拟次数 $N=1e5$ 。

2) 在温度范围为 [165, 185]、[185, 205]、[225, 245]、[245, 265] 生成 4 个随机温度, 在速度范围为 [65, 100] 生成随机速度。

3) 利用生成的温度以及速度求解温度。

4) 判断温度是否满足制程界限, 若满足, 接步骤 5; 否则, 接步骤 2。

5) 求出温度超过 217 °C 到峰值温度所覆盖的面积 S ; 如果 $S < S_0$, 则用 para 存储生成的参数值, 并且 $S_0 = S$, 接步骤 2; 否则, 接步骤 6。

6) 模拟次数结束时, 输出 para 参数值。

找出满足约束条件且目标函数最小值, 得到最小面积约为 601.799 4, 此时各温区的温度以及传送带的速度分别为: 174.260 5 °C, 192.002 7 °C, 227.291 0 °C, 264.862 5 °C, 88.463 7 cm/min。

3.3 双目标的炉温曲线优化模型

根据实际情况, 在温度超过 217 °C 时温度上升和下降趋势要求相近, 同时要求焊接区域到达熔点(217 °C)之后, 吸收热量尽可能小。因此反映在炉温曲线上, 要求炉温曲线在超过 217 °C 的部分关于最高点尽量对称, 同时曲线面积应尽量小。

设 Q_1 为相同温度时上升处与冷却处温度变化速率的绝对值之和, 作为对称性相关的评判标准。为了方便利用所给的数据进行计算, 将斜率进行离散化表示, 如图 7 所示。设斜率为:

$$\omega_0 = \left. \frac{dT}{dt} \right|_{t=t_1-t_0}, \omega_0' = \left. \frac{dT}{dt} \right|_{t=t_1+t_0}$$

其中, t_1 为温度达到最高点时的时刻, t_0 为时间间隔长度。

评价指标设为:

$$Q_1 = \sum |\omega_0 - \omega'_0|$$

设 Q_2 为温度超过 217 °C 部分面积最小的指标, 根据式 (10), 能够得到:

$$Q_2 = S = \sum_{j=a}^b (T - 217)|_{T=j} \times 0.5 \quad (12)$$

设 G 代表某种综合评价函数, 作为最优化目标函数 $Q = G(Q_1, Q_2)$ 。由于 Q_1, Q_2 的量纲不同, 首先对两个评价指标进行归一化处理:

$$Q'_1 = \frac{Q_1 - Q_{1\min}}{Q_{1\max} - Q_{1\min}}, \quad Q'_2 = \frac{Q_2 - Q_{2\min}}{Q_{2\max} - Q_{2\min}}$$

考虑到对于超过 217 °C 曲线对称性的优先要求, 得到最优化目标函数:

$$Q = 0.7Q'_1 + 0.3Q'_2$$

最优炉温曲线的优化模型为:

$$\begin{aligned} \min(Q) \\ \text{s.t.} \quad \begin{cases} |T_{j+1} - T_j| < 1.5 \\ 60 < t_1 - t_2 < 120 \\ 40 < t_3 - t_4 < 90 \\ 240 < T_{\max} < 250 \end{cases} \end{aligned} \quad (13)$$

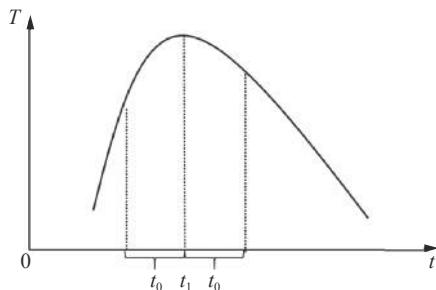


图 7 对称指标参数示意图

使用蒙特卡罗法来求解, 得到 Q 的最小值为 0.006 9, 在温度大于 217 °C 的曲线满足一定的对称性, 并且考虑到该曲线的面积要尽量小, 其峰值只有 240 °C, 满足炉温曲线的要求。此时对称性评价指标为 7.047 3, 曲线覆盖的面积为 604.525。

基于双目标优化模型, 在考虑超过 217 °C 部分对称性的基础上, 同时能使覆盖面积最小。这样在实际的工业生产过程中, 相对于单目标优化方案考虑到了更多实际工艺上的需求, 达到更好的效果^[13]。

4 结束语

本文对电路板在回焊炉中加热过程热传递模型进行了深入研究, 建立了基于热传递定律和牛顿冷却定律的炉温曲线模型。使用了有限差分法

和最小二乘拟合, 所得结果和给定实验数据具有高度一致性。模型具有较好的可扩展性, 能够在不同制程界限^[14]条件下求出最优炉温与过炉速度。模型可通过采用模拟退火、遗传算法等现代优化算法进行全部数据检索计算, 通过一次求解即可得到准确的结果。

参考文献

- [1] 洪健, 许志辉. 基于有限元理论的回流焊工艺仿真研究[C]//2018中国高端SMT学术会集. [S. l.]: 四川省电子学会SMT专委会, 2018.
- [2] 陈忠, 张宪民. 无铅回流炉技术发展综述[J]. 机电工程技术, 2011, 40(6): 13-14.
- [3] 高金刚. 表面贴装工艺生产线上回流焊曲线的优化与控制[D]. 上海: 上海交通大学, 2007.
- [4] MARUYAMA S, MORIYA S. Newton's Law of Cooling: Follow up and exploration[J]. International Journal of Heat and Mass Transfer, 2021, 164: 120544.
- [5] STRAUBINGER D, BOZSÓKI I, ILLÉS B, et al. Analytical solution of heat distribution inside a printed circuit board during vapour phase soldering[C]//2019 42nd International Spring Seminar on Electronics Technology (ISSE). [S. l.]: [s. n.], 2019.
- [6] 李鑫东, 魏强, 李玉中, 等. 基于有限差分法的大线能量焊接热模拟试件的温度分布[J]. 工业加热, 2020, 49(1): 1-4.
- [7] 闫学伟, 唐宁, 刘孝福, 等. 液态金属冷却定向凝固数值模拟与试验研究[J]. 特种铸造及有色合金, 2016(1): 1-4.
- [8] 李明奇, 杜鸿飞. 热传导实验数据分析与教学设计[J]. 实验科学与技术, 2020, 18(5): 18-23.
- [9] 孙浩然, 吴宏聪, 张嘉堉, 等. 高温环境下热防护服的温度分布研究[J]. 实验科技与技术, 2020, 18(4): 1-6.
- [10] 李晓文, 苏新宇, 李聪毅, 等. 基于有限差分法的专用服装温度分布模型[J]. 实验科学与技术, 2020, 18(4): 7-11.
- [11] 司守奎, 孙兆亮. 数学建模算法与应用[M]. 2版. 北京: 国防工业出版社, 2015.
- [12] 黎志明, 李春明, 秦凤华, 等. 冷轧不锈钢连续退火炉加热工艺分析及系统设计[J]. 金属热处理, 2021, 46(3): 191-196.
- [13] TAN J T, XIA J, GU M S, et al. Research on heat conduction model of special equipment based on difference equation[J]. Journal of Physics: Conference Series, 2020, 1670(1): 012035.
- [14] 罗令. 高密度多层PCB组件再流焊工艺改进及可靠性研究[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2014.

编辑 张俊