中国科学（A 辑）
第 30 卷 第 6 期　SCIENCE IN CHINA (Series A)　2000 年 6 月

中国科学院在代数方面的工作*

万哲先
（中国科学院系统科学研究所，北京 100080）

摘要　扼要综述了 50 年来中国科学院在代数方面的工作.

关键词　代数　除环　典型群　矩阵几何　有限域　编码学　密码学　Lie 群　Lie 代数　代数群　量子群

中国科学院在代数方面的研究工作是华罗庚教授开创的. 下面分 7 个方面介绍:(1) 除环,(2) 典型群,(3) 矩阵几何,(4) 有限域上典型群的几何学及其应用,(5) 编码学和密码学,(6) Lie 群和 Lie 代数,(7) 代数群和量子群及其他.

1　除环

1949 年以前,除环的研究极为罕见,除环的结果屈指可数. 华罗庚在 1949 ~ 1951 年间证明了除环的 3 个极为基本而且十分漂亮的定理:

定理 1　体的半自同构必为自同构或为反自同构.

定理 2　体的任意不等于它自身的正规子体必包在中心之中.

定理 3　不是域的体的乘法群必不可解.

在证明中,他巧妙地运用了恒等式的技巧. 在文献中,定理 1 被称为华的漂亮定理,定理 2 被称为 Cartan-Brauer-华定理.

利用定理 1,他还证明了特征不为 2 的体上一维射影几何的基本定理.

2　典型群

我国典型群的研究始于华罗庚 1948 年在 Annals of Mathematics 上发表的一篇论文. 在这篇论文中,他确定了特征不等于 2 的域上辛群的自同构. 他的方法也可以用于其他类型的典型群,其方法的特点是,先确定维数尽可能低的典型群的自同构,这往往是最困难的情形,然后用群论性质来区分 1-对合(或 2-对合)和其他对合,再用数学归纳法去确定高维典型群的自同构. 在低维情形几何直观起着重要的作用,在高维情形着重运用了矩阵运算的技巧.

1950 年华罗庚在清华大学开设典型群课程. 1951 年和 1957 年他又两次在中国科学院数学研究所领导典型群讨论班. 他选择典型群这个主题的原因之一是为了易于培养年轻的科研工作者. 预备知识需要得少,可以从简单处、具体处入手,从宽广处、抽象处着眼,而发展前途

1999-11-08 收稿
* 国家自然科学基金资助项目(批准号: 19831070)

又不太小，可以在研究过程中熟悉代数学、几何学中不少分支．换言之，开始时不受基础的限制，终了时不致局限于仄狭的领域之中．J. Dieudonné 1952 年发表了他关于典型群自同构研究的系统结果．他回避低维的困难情形，而是用群论性质来区分 1-对合（或 2-对合）和其他对合之后，直接运用射影几何基本定理去确定高维典型群的自同构．鉴于此，华罗庚的讲课和领导的讨论班致力于向较困难的低维典型群的自同构进攻，并将典型群自同构推广到环上（特别是整数环、非交换主理想整环、代数整数环等）．华罗庚还将酉群的单性定理推广到带对合的任意除环上．这期间，除了华罗庚本人外，做出科研成绩的还有万哲先、严士健、应玫茜等人，他们所获结果不一一列举．1960 年万哲先又主持了典型群讨论班，他和王仰贤也取得了一些成果．华罗庚和万哲先把我国学者关于典型群的结果总结在《典型群》一书中，该书 1963 年由上海科学技术出版社出版．该书在我国有许多读者，不少人是通过读这本书起步，从事典型群及其应用的研究的．1963～1964 年，华罗庚在中国科学技术大学数论代数专门化讲授典型群一课，即以这本书为教材，听课的学生后来大都在典型群及其应用或矩阵几何上做出了成绩．

1976 年以后，万哲先继续主持典型群讨论班，虽然这项工作被迫停顿了十几年，但他和他的学生很快进入前沿，解决了一系列问题．例如，1982 年李尊贤确定了特征不等于 2 的域上 3 维定正型的正交群的换位子群的自同构，1987 年他更确定了特征不等于 2 的域上 4 维定正型的正交群的换位子群的自同构，并指出对某些域有例外自同构存在．1985～1986 年，李福安确定了特征 2 的域上无亏数的正交群的换位子群的自同构．1987 年，任宏硕、万哲先、武小龙确定了任意除环上 2 维射影特殊线性群的自同构和同构，从而除环上线性群的自同构和同构问题完全解决．1987 年李福安、李尊贤确定了含 1 的交换环 R 上 3 级一般线性群 $\mathrm{GL}_3(R)$，特殊线性群 $\mathrm{SL}_3(R)$，由平延生成的群 $E_3(R)$ 的自同构和同构，并指出有例外自同构存在，他们还指出环 $\mathbb{Z}_4$ 和 $\mathbb{F}_2[x]/(x^2)$ 不 Morita 等价，但它们上面的线性群却同构，这否定了 O. T. O'Meara 和 L. N. Vaserstein 的一个猜想．

通过环上典型群的研究，我们还开展了代数 K 理论的研究．刘木兰、李福安对一类群环给出了 G_0 群和 G_1 群的计算公式．Steinberg 群与 K_2 函子密切相关，李福安对交换环上 Steinberg 群的自同构和同构进行了研究，还给出了 Steinberg 群存在某种正规分解的充要条件．

一些高等院校通过派青年教师到中国科学院数学研究所来进修等方式，也开展起典型群的研究．例如，东北师范大学、哈尔滨工业大学、河北师范学院（今河北师范大学）、张家口师范专科学校等．

80 年代初，曾肯成指导他的学生李尚志、查建国研究任意除环（或域）上典型群的极大子群，后来李尚志一直从事这一问题的研究，取得了丰硕的成果．在这方面工作的还有李尚志的学生任金江等．李尚志把他们在典型群的子群结构方面的工作总结成“典型群的子群结构”一书，1998 年由上海科学技术出版社出版．

我国典型群的研究受到国外学者的高度评价，称我们为典型群的中国学派．1975 年访华的美国数学家代表团，在 1977 年以“中华人民共和国的纯粹数学与应用数学”为标题发表的访华报告中，将我国在典型群方面的工作列为中国数学的 5 项重要成就之一．

3 矩阵几何

矩阵几何是华罗庚于 20 世纪 40 年代中期由于研究多元复变函数论的需要所开创的一个

数学领域，因此他开始讨论的是复数域上的 4 类矩阵几何，即长方阵几何、对称阵几何、斜对称几何、和 Hermite 阵几何．在矩阵几何里，空间的点是一类矩阵，例如同样大小的长方阵、对称阵、斜对称阵或 Hermite 阵，还有一个变换群作用在这个空间上．以长方阵几何为例，设 D 是除环，m 和 n 都是大于 2 的整数，长方阵几何的空间由所有 $m\times n$ 矩阵组成，记作 $M_{m\times n}(D)$，$M_{m\times n}(D)$中的元素称为空间中的点．$M_{m\times n}(D)$中所有以下形状的变换：$X\to PXQ+R$，$\forall X\in M_{m\times n}(D)$，其中 $P\in GL_m(D)$，$Q\in GL_n(D)$，而 $R\in M_{m\times n}(D)$，组成空间 $M_{m\times n}(D)$的一个变换群，把它记作 $G_{m\times n}(D)$，那么 D 上的长方阵几何研究的问题就是$M_{m\times n}(D)$的图形（即子集）在 $G_{m\times n}(D)$作用下不变的性质．例如，对于任意两个 $m\times n$ 矩阵 X_1 和 X_2 组成的图形，$\mathrm{rank}(X_1-X_2)$就是在群 $G_{m\times n}(D)$作用下的不变量，称为 X_1 和 X_2 的算术距离．长方阵几何的一个基本问题就是研究用尽可能少的不变量来刻画这个几何的变换群，这个问题的答案通常称为这个几何的基本定理．

1945～1947 年间，华罗庚证明了复数域上 4 类矩阵几何的基本定理，他用来刻画变换群中变换的不变量，有双射、算术矩阵、调和点集、连续性等．1949 年他把对称阵几何的基本定理推广到特征不等于 2 的任意域上，而刻画变换群中变换的不变量减为双射和粘切（两个对称矩阵称为粘切，如果它们的算术距离为 1）；1951 年他又把长方阵几何的基本定理推广到元素个数大于 2 的任意除环 D 上．对 $D=\mathbb{F}_2$ 的情形，这个定理是万哲先和王仰贤 1962 年补证的．华罗庚证明这个定理的关键是引进了极大集的概念，两点粘切就是图论中的两个顶点有边相连，而极大集恰是 20 年后图论中出现的极大完全子图这一概念．

60 年代前期，万哲先组织了一支力量来继续矩阵几何的研究，得到的结果有前面所说的万哲先和王仰贤的结果，裴定一关于除环 D 上长方阵射影几何（即 D 上的 Grassmann 流形）基本定理的详细证明（华罗庚仅给出了一个提纲式的摘要），刘木兰关于任意域上 $n\geqslant 4$ 时 $n\times n$ 交错阵几何的基本定理（这个定理也仅用双射和粘切这两个不变量来刻画变换群）和交错阵射影几何的基本定理．

90 年代前期，万哲先又回来研究矩阵几何，他证明了任意域 F 上，$n\geqslant 2$ 时，$n\times n$ 对称矩阵的基本定理（$n=2$，F 是特征 2 的域的情形是高家富、万哲先、冯荣权、王殿军证明的），带对合的任意除环 D 上，$n\geqslant 2$ 时，$n\times n$ Hermite 阵几何的基本定理，但当 $n=2$ 时，还要限定 D 是域．

各种类型的矩阵几何的基本定理在代数、几何和图论中均有应用．特别，它们可以叙述成图自同构定理．例如长方阵几何的基本定理可叙述成长方阵组成的图的自同构的定理．因此，华罗庚 1949 年关于对称阵几何的基本定理的论文和 1951 年关于长方阵几何的基本定理的论文是我国最早的图论论文，也是我国代数组合论最早的工作．

万哲先把我国数学家在矩阵几何方面的工作总结成《矩阵几何》（英文）一书，1996 年由新加坡 World Scientific 出版社出版．

4　有限域上典型群的几何学及其应用

我们关于有限域上典型群几何学的研究实际上是典型群研究的继续和发展．

假定有限域$\mathbb{F}_q$上的n维向量空间$\mathbb{F}_q^n$上有一个n级典型群G_n作用着．这个G_n可以是

$GL_n(\mathbb{F}_q)$,$Sp_n(\mathbb{F}_n)(n=2\nu)$,$U_n(\mathbb{F}_q)(q=q_0^2)$,$O_n(\mathbb{F}_q)(n=2\nu+\delta,\delta=0,1$ 或 $2)$,或 $Ps_n(\mathbb{F}_q)(q=2^e,n=2\nu+\delta,\delta=1$ 或 $2)$. 我们可以提出下面的问题:(1) 怎样刻画子空间的轨道? (2) 一共有多少条轨道? (3) 每条轨道的长度是多少? (4) 含有一个给定的子空间的一条轨道中子空间的个数是多少? (5) 一个给定的子空间所含的另一条轨道中子空间的个数是多少? 当 $G_n=GL_n(\mathbb{F}_q)$时,这几个问题的答案是熟知的. 1963~1964 年万哲先带领他的学生戴宗铎、冯绪宁、阳本傅,对 $G_n=Sp_{2\nu}(\mathbb{F}_q)$,$U_n(\mathbb{F}_{q_0^2})$和 $O_{2\nu+\delta}(\mathbb{F}_q)(\delta=0,1$ 或 $2)$研究了问题(3),得到了每条轨道长度的公式. 他们还用各种类型几何学中的 1 维(或极大)全迷向子空间作点(或称处理)构造了一些结合方案,并计算了它们的参数,再用任一子空间轨道中的子空间作区组构造了一些 PBIB 设计,也计算了它们的参数. 他们的结果总结在《有限几何与不完全区组设计的研究》这部专著中,1966 年由科学出版社出版. 他们的工作在国内外多次被引用. 1976 年以后,我国有些高等院校追随他们,用有限域上典型群的几何学构造更多的 PBIB 设计,其中有河北师范学院(今河北师范大学)、成都师范专科学校、四川大学、上海交通大学、东北师范大学、哈尔滨工业大学、张家口师范专科学校等.

1990 年起万哲先又研究了上述问题(1)、(2)、(4)、(5),并得到了完整的结果,他还对于 $G_n=Ps_{2\nu+\delta}(\mathbb{F}_q)(q=2^e$ 而 $\delta=1$ 或 $2)$研究了上述几个问题. 为了研究(4),他引进了奇异典型群的概念,并对奇异典型群也研究了上述几个问题. 他的结果,连同 60 年代中他和他的学生关于前述问题(3)的工作总结在《有限域上典型群的几何学》(英文)一书中,1993 年由瑞典 Studentlitteratur 出版社和英国 Chatwell-Bratt 出版社联合出版.

60 年代中期,万哲先是由于数理统计中实验设计(特别是结合方案和区组设计)的需要而研究有限域上典型群的几何学. 90 年代初他又研究它,是由于他发现用有限域上典型群的几何学可以构造许多认证码(在这方面工作的还有万的学生冯荣权以及哈尔滨工业大学的游宏等). 后来他又将有限域上典型群的几何学用于以下这些问题:(ⅰ) 某些射影码的广义 Hamming 重量及重量谱的计算. 在这方面工作的还有万的学生吴新文. (ⅱ) 有限域上用一个型(双线性型、交错型、Hermite 型或二次型等)表另外一个同类型的个数的计算. 这个问题解决得非常完整和彻底. (ⅲ) 有限典型群作用下子空间轨道生成的格. 在这方面工作的还有霍元极(张家口师范专科学校)等,他们的部分成果总结在万哲先、霍元极合著的《有限典型群子空间轨道生成的格》中,该书 1997 年由科学出版社出版. (ⅳ) 有限向量空间的临界问题.

5　编码学和密码学

1972 年,万哲先在中国科学院数学研究所组织编码讨论班,介绍国际上编码学和密码学的新发展. 除本所同志外还有北京大学、中国科学技术大学、中国科学院计算技术研究所、北京邮电学院(今北京邮电大学)、邮电科学研究院等单位的同志参加. 万哲先还多次组织编码学和密码学的讲座,由他和他的学生戴宗铎、刘木兰、冯绪宁介绍编码学和密码学的知识以及他们的科研成果. 这个讨论班和这些讲座都印有讲义,为我国普及编码学和密码学知识做出了贡献. 国内不少从事编码和密码研究的学者后来都说到,他们是从这个讨论班和这些讲座的讲义起步的. 1976 年万哲先的《代数和编码》一书由科学出版社出版,1978 年他和他的学生的专著《非线性移位寄存器》也由科学出版社出版. 这两本书在国内已成为相关领域的经典文献. 在关于 M 序列的构造,关于 m 序列的前馈序列的分析及综合的研究等课题上,他们都有

系统的工作．数学研究所的编码讨论班一直延续到 1977 年．

80 年代以后，研究领域逐步扩大．从 80 年代中开始，曾肯成、戴宗铎和他们的学生黄民强等研究了环$\mathbb{Z}_{2^e}$上极大长线性递归序列的最高权位序列，或更一般地最高权位和其他低权位组合生成的二元序列，这些序列统称为环导出序列．环导出序列可视为二元域上 m 序列的非线性前馈序列，其非线性次数高达 2^{e-1}．他们给出了多项式作为$\mathbb{Z}_{2^e}$上极大长线性递归序列的极小特征多项式的充要条件，环导出序列的周期，线性跨度的上界和下界．他们的结果说明，环导出序列有非线性次数高、周期长、线性跨度大等优点．他们还证明，从环$\mathbb{Z}_{2^e}$上的极大长线性递归序列到环导出序列这种压缩映射是单射，这为密钥更换有效性提供了根据．

从 1994 年以来，戴宗铎和叶顶峰等对有限自动机进行了研究，他们的研究分为线性和非线性两部分．基于陶仁骥 1976 年的专著《线性有限自动机的可逆性》和他的一系列论文，线性部分主要是将域 F 上弱可逆线性有限自动机的传输函数和自由响应矩阵视为局部环 $F[z]_{(z)}$上的矩阵，对弱可逆线性有限自动机实行了分类，并给出每类元素的参数化表示．非线性部分是将域上输入存储有限自动机全体组成的空间视为一个拟环 $\mathscr{F}$，其中线性元全体构成一个子环，可表作矩阵环，并参与运算．他们讨论了 $\mathscr{F}$中弱可逆元素的生成方法．$\mathscr{F}$中元素决定的输入输出方程有解的充要条件，给出了这种方程(等价于 $\mathscr{F}$中的元素)的一种分解方法，并讨论了求解这种方程的方法．

从 80 年代末以来，刘木兰带领她的学生开展了线性递归阵列和 Gröbner 基的研究．1990 年她和林东岱确定了线性递归 m 阵列的代数结构，证明了有限域上任意线性递归 m 阵列均可由“合拢”线性递归 m 序列得到，并给出了求生成给定的有限阵列的最短线性递归关系的一个算法．为了研究域上的一般线性递归阵列，刘木兰将计算代数中的 Gröbner 基理论用于阵列的研究．1994 年她和胡磊证明，生成域上二维阵列 A 的线性递归关系的最小级数等于其在多项式环 $F[x, y]$中的零化理想 I_A 的约化 Gröbner 基的多项式首项所决定的梯形窗口中整格点数，进而对零维理想 I 的阵列零点构成的线性空间 $G(I)$给出一组基的解析表示和阵列的迹表示．1998 年，她和陆佩忠利用交换代数中的局部化方法，研究了域上、Quasi-Frobenius 环上、Galois环上以及唯一因子分解整环上的线性递归阵列．他们给出了环 $F[x_1, \cdots, x_n]$中零维理想是一个阵列零化理想的可计算的判别公式，找出了序列综合的 Berlekamp-Massey 算法与某个适当理想的约化 Gröbner 基之间的关系．陆佩忠还给出了 Quasi-Frobenius 环上多项式环的理想与其阵列零点的 Hilbert 对应关系，并解决了 Nechaev 的一个问题．

此外，还有万哲先、熊荣华和余敏安关于 de Bruijn-Good 图的研究，裴定一关于认证理论的研究，吴新文关于代数几何码的研究，刘木兰和周展飞关于密钥共享体制的研究，等等．

6　Lie 群和 Lie 代数

1985 年万哲先和北京师范大学的郝炳新、首都师范大学的卢才辉共同组织 Lie 代数讨论班，讨论班以 Kac-Moody 代数为主，但也涉及其他主题．讨论班坚持至今(断断续续)，做出了不少科研成果，也培养了一批科研人才．下面扼要介绍一下中国科学院系统科学研究所 3 位博士毕业生苏育才、张贺春、赵开明在 Lie 代数方面的工作．

Virasoro 代数是一类重要的无限维代数．V.G.Kac 关于 Virasoro 代数的表示有一个猜想，即 Virasoro 代数的任意不可约 Harish-Chandra 模一定是 3 类模之一，即(1) 最高权模，(2) 最低

权模,(3) 一类权空间都是 1 维的不可约模 $V'_{\alpha,\beta}$. 1988 年苏育才部分地证明了 Kac 的猜想(Kac 的猜想后来被 O. Mathieu 完全证明),并把它推广到高阶 Virasoro 代数和 Virasoro 超代数上. 关于 Virasoro 代数的非 Harish-Chandra 表示的研究,目前结果还很少. 1996 年张贺春证明 Virasoro 代数的任意最高权模与 $V'_{\alpha,\beta}$的张量积一定是非 Harish-Chandra 不可分解模,并进一步证明了其中的一大类是不可约模. 从而第一个构造出了 Virasoro 代数的一类非 Harish-Chandra 不可约模. 赵开明利用两个 $V'_{\alpha,\beta}$的张量积也构造出一类非 Harish-Chandra 不可约模. 张和赵合作又构造了一类量子 Virasoro 代数的权空间都是 1 维的不可分解模,并找出了其中的酉模.

1990 年,张贺春证明了 Kac-Moody 代数的一个可积最高权模和一个可积最低权模的张量积是不可分解的,他称之为泛可积模. 进一步,他还证明了 Kac-Moody 代数的任意不可约模一定是某个泛可积模的商模.

近年来,苏育才主要从事 Lie 超代数的研究,他完全分类了 Lie 超代数 $B(0,1)$的无限维 Harish-Chandra 不可分解模,sl(2/1)的不可分解模,以及 sl(m/n)的 singly atypical 不可分解模. 苏与 B. Hughes 合作,对 sl(m/n)的 Kac 模的结构进行研究,建立了 Kac 模的本原权与可允许数码之间的关系.

自 1995 年起,张贺春与 H. P. Jacobsen 合作研究量子代数,他们首先完全确定了量子矩阵代数的中心和 Dipper-Donkin 量子代数的中心,解决了这两个遗留很长时间的问题. 在量子代数的表示理论中有一个著名的 De Concini-Kac-Procesi 猜想,猜测量子代数的不可约表示与对应的 Poisson 流型的 symplectic leaf 的维数密切相关. 他们证明了这个猜想对于量子辛空间的坐标代数和量子 Euclid 空间的坐标代数都成立.

早在 1954 年,I. Kaplansky 就定义了一种 W 型的广义 Cartan 型 Lie 代数,但当时并未引起人们的注意,直到 80 年代初,N. Kawamoto 和 T. Iheda 才试图研究这类 Lie 代数的导子表示,2 上同调群以及两个这类 Lie 代数同构的充要条件. 这些问题 1998 年由赵开明和 D. Z. Djokovic 彻底解决. 赵开明又分别与 D. Z. Djokovic 和 J. M. Osborn 定义了 W 型与 S 型的广义 Cartan 型 Lie 代数和 H 型与 K 型的广义 Cartan 型 Lie 代数,并解决了以下两个基本问题:(1) 它们是单代数的充要条件,(2) 两个同类 Lie 代数同构的充要条件. 此外,它们还确定了除 K 型外,各种类型的广义 Cartan 型 Lie 代数的 2 上同调群.

目前在美国工作的中国科学院系统科学研究所的博士毕业生董崇英和 J. Lepowsky 合作在广义顶点算子上以及和李海生、G. Mason 合作在广义空想猜想(generalized moonshine conjecture)上有重要工作.

还有,许以超在 Lie 群和 Lie 代数方面做了许多工作. 对于齐性 Kähler 流形 M,在连通可递变换群 G 为实半单 Lie 群时,他证明了 M 的最大全纯等度量变换群 $\mathrm{Aut}(M)^0 = G$ 也为实半单 Lie 群. 关于实 Riemann 流形 M,如果 $\mathrm{Aut}(M)$中有连通实半单 Lie 子群 G 在 M 上可递,Onishchik猜想 G 等于 $\mathrm{Aut}(M)$的单位分支. 这个猜想在紧的情形被 Onishchik 肯定. 在非紧时,许在齐性 Kähler 流形情形,肯定了这个猜想,且进一步给出了当 $\mathrm{Aut}(M)$为连通实半单 Lie 群时的齐性 Kähler 流形的完全分类.

理论物理中的超弦理论,期望对仿射代数给出顶点算子及其表示. Kac-Lepowski 首先给出了 A, D, E 型第一类仿射 Lie 代数的顶点算子表示,但未顾及 B, C, G, F 型第一类仿射 Lie 代数. 后来,Goddard, Olive 等人虽然建立过一种顶点算子表示,但是他们的定义与原意不太一致.

许以超给出了一般的第一类仿射 Lie 代数的顶点算子的定义，它在 A，D，E 的情形和 Kac-Lepowski的定义一致，且给出了顶点算子表示．

此外，许以超用代数方法，特别是华罗庚学派的矩阵技巧，对多复变函数论和统计物理中的问题进行了研究，得到许多结果．例如，他引进了 N-Siegel 域的概念，它依赖于一组适合特定矩阵方程组的矩阵集，证明了齐性 Siegel 域线性等价于 N-Siegel 域，且任意两个 N-Siegel 域全纯同构当且仅当它们线性同构．这就将 Siegel 域的分类化为矩阵组的标准型理论这样一个初等问题．在对称有界域的两个例外典型域的情形，许以超找到了具体的描述．

7　代数群和量子群及其他

中国科学院代数群的研究最初有中国科学院系统科学研究所博士毕业生陈宇（目前在意大利工作）的工作，后来有中国科学院数学研究所席南华的工作．陈宇在他的博士论文中确定了从除环上特殊线性群到代数群中像集 Zariski 稠密的同态映射，后来他又与 R. Carter 合作确定了仿射 Kac-Moody 群的自同构．下面着重介绍席南华在代数群和量子群中的工作．

根据 Kazhdan-Lusztig 理论，Coxeter 群及其 Hecke 代数对研究 Lie 群的结构和表示很重要．该理论的中心概念包括 KL 多项式，KL 基，（左，右）胞腔．仿射 Weyl 群是一类非常重要的 Coxeter 群．1988 年，席南华和 G. Lusztig 合作证明了仿射 Weyl 群的每一个双边胞腔含唯一的典范左胞腔，该左胞腔有很好的性质，最近人们发现这个工作在表示论中有应用．基环对理解 KL 基、（左、右）胞腔、仿射 Hecke 代数等很有意义．席南华证明了仿射 Weyl 群的最低双边胞腔的基环同构于一个等变 K 群，并用这个同构讨论了仿射 Hecke 代数的表示．

对 p-adic 群的某些不可约表示的分类，有一个 Deligne-Langlands 猜想．该猜想可用仿射 Hecke 代数的语言表达．D. Kazhdan 和 G. Lusztig 证明，当仿射 Hecke 代数的参数 q 为非单位根时，该猜想成立．席南华在专著《Representations of Affine Hecke Algebras》（1994 年由德国 Springer 出版社出版）中证明：如果 q 的阶大于一个 Weyl 群 W_0 的最大指数，那么对相应的仿射 Hecke 代数 $H_q(q \in C^*)$，Deligne-Langlands 猜想成立．如果 $\sum_{w \in W_0} q^{l(w)} = 0$，则 Deligne-Langlands 猜想需要修改．此外，他还刻画了仿射 Weyl 群的最低双边胞腔，确定了秩 2 的仿射 Weyl 群的双边胞腔的基环等．

单位根处的量子群的表示论和代数群的有理表示论的中心问题之一是理解不可约表示．席南华找到了不可约表示的一个清楚具体的实现，利用这个实现，他确定了 Weyl 模中的极大及本原元素，Frobenius 核的基座，某些不可约模的性质等．

PBW 基是研究量子群的基本工具之一，其基本成分是根向量．席南华证明了量子群中（同一级）的根向量线性无关，他还得到一些可对称化 Cartan 矩阵的根系的有趣结论．Kashiwara 双线性型对理解典范基是很基本的．席南华证明了某些 PBW 基是 Kashiwara 双线性型的正交基，这使该双线性型很易计算．计算典范基是不容易的，席南华计算了 B_2，A_3 型的典范基．

我们在代数学的姐妹分支：代数数论和代数几何上也有一些工作．如陆洪文、冯克勤在代数数论上的工作，裴定一、冯绪宁在模形式上的工作，罗昭华、李克正、戴新生、胥鸣伟、孙笑涛在代数几何上的工作．但由于作者知识面的局限，就不能详细介绍了．

上面提到的工作,很多是在《中国科学》和《科学通报》(或其前身《科学记录》)上刊出,而后受到国际同行注意的. 例如,华罗庚关于除环上一维射影几何的基本定理,华罗庚、万哲先等关于典型群的工作,万哲先和他的学生关于有限域上典型群的几何学,陶仁骥、戴宗铎等关于有限自动机,刘木兰和她的学生关于线性递归阵列和 Gröbner 基的工作,苏育才、张贺春、赵开明关于无限维 Lie 代数的工作,等等. 值此《中国科学》和《科学通报》创刊 50 周年之际,谨向两刊致以热烈的祝贺并表示衷心的感谢. 祝两刊在刊登和介绍我国重要科技成果上做出更大的成绩.

最后还应该特别提到的就是我们实现了全国广大代数学家长久的心愿,我国代数专业性的学术刊物《代数集刊》于 1994 年问世,由李福安负责,中国科学院数学研究所编辑出版发行.

今天,中国科学院在数学研究所、应用数学研究所、系统科学研究所和计算数学研究所的基础上组建成数学与系统科学研究院,这必将团结全院的数学力量,并团结全国数学界,把我国的数学发展推向更高的水平,中国科学院代数方面的工作也会踏上一个更高的台阶.

致谢 在本文撰写过程中得到许多同志的帮助,包括提供资料和打字、校对,谨此致谢.