中国科学: 数学 2021 年 第 51 卷 第 9 期: 1451～1460
SCIENTIA SINICA Mathematica
《中国科学》杂志社 SCIENCE CHINA PRESS

论 文

噪声干扰下 $\mathbf{m^2OLS}$ 算法的稀疏重构分析

李海锋[1,2], 谌稳固[1*], 温金明[3]

1. 北京应用物理与计算数学研究所, 北京 100088;
2. 河南师范大学数学与信息科学学院大数据工程实验室, 新乡 453007;
3. 暨南大学信息科学技术学院, 广州 510632

E-mail: lihaifengxx@126.com, chenwg@iapcm.ac.cn, jinming.wen@mail.mcgill.ca

收稿日期: 2020-02-29; 接受日期: 2020-08-28; 网络出版日期: 2021-01-20; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 61907014, 11871109, 11871248, 11701410 和 61901160)、博士后基金 (批准号: 2019M660557)、河南省重点研发与推广专项 (批准号: 192102310448)、河南师范大学青年基金 (批准号: 2019QK03) 和中国工程物理研究院创新发展基金 (批准号: CX20200027) 资助项目

摘要 修正的多重正交最小二乘 (modified multiple orthogonal least squares, $\mathrm{m^2OLS}$) 算法是在多重正交最小二乘算法 (multiple orthogonal least squares, mOLS) 的基础上提出的. 利用 $\mathrm{m^2OLS}$ 算法能够从模型 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{v}$ 中重构稀疏信号 $\boldsymbol{x}$. 借助预选取规则, $\mathrm{m^2OLS}$ 算法的复杂度低于 mOLS. 在三类噪声干扰下, 本文给出保证 $\mathrm{m^2OLS}$ 算法每次迭代至少选取一个正确指标的充分条件. 该条件是在约束等距性质 (restricted isometry property, RIP) 框架下给出的. 在第一次迭代中, 本文给出 $\mathrm{m^2OLS}$ 算法不能选取正确指标的条件. 与现有的结果相比, 本文中的结果具有一定优势.

关键词 压缩感知 正交最小二乘 约束等距性质

MSC (2020) 主题分类 94A12, 65F22, 65J22

1 引言

近年来, 压缩感知 [1,2] 受到广泛关注. 给定测量 $\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^m$ 和感知矩阵 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{m\times n}$, 压缩感知能够从模型

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{v} \tag{1.1}$$

中精确重构 K- 稀疏信号 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$ 的支撑集 (即 $|\mathrm{supp}(\boldsymbol{x})|\leqslant K$, $\mathrm{supp}(\boldsymbol{x})=\{i:x_i\neq0\}$ 是 $\boldsymbol{x}$ 的支撑集. $|\mathrm{supp}(\boldsymbol{x})|$ 指的是集合 $\mathrm{supp}(\boldsymbol{x})$ 中元素个数), 这里 $\boldsymbol{v}$ 指的是零均值噪声.

正交匹配追踪 (orthogonal matching pursuit, OMP) [3,4] 是非常重要的稀疏重构算法之一. 在每一次迭代中, 该算法要寻找矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中与残差最相关的一列, 将该列对应的指标作为估计的支撑. 不论是理论上, 还是在工程实际中, 该算法都表现出了很大的优势 (参见文献 [5]). 运用 RIP, 文献 [6–8] 讨论了 OMP 算法重构稀疏信号的理论性能.

英文引用格式: Li H F, Chen W G, Wen J M. Analysis of the modified multiple OLS ($\mathrm{m^2OLS}$) algorithm for sparse signal recovery with noise (in Chinese). Sci Sin Math, 2021, 51: 1451–1460, doi: 10.1360/SCM-2020-0165

另外一类运用比较广泛的稀疏重构算法是正交最小二乘 (orthogonal least squares, OLS)[9,10]. OLS 与 OMP 最主要的区别是选取指标的规则不同 (参见文献 [11]). 文献 [12] 指出, 与 OMP 相比, OLS 算法虽然复杂度较高但是具有更好的收敛性能.

mOLS[13] 算法可以看作 OLS 算法的一个推广. 与 OLS 算法不同的是, mOLS 在每次迭代中选取多个指标. 因此, 与 OLS 算法相比, 该算法具备更好的收敛性 (参见文献 [14,15]).

当然, 为了改进 OMP 算法的重构性能, 已有文献提出了多种贪婪算法. 如 A*OMP[16]、广义协方差匹配追踪 (generalized covariance-assisted matching pursuit)[17] 和广义正交匹配追踪 (generalized OMP, gOMP)[18–21] 等. 最近, 在 mOLS 算法基础上, Mukhopadhyay 等[22] 提出了 m^{2}OLS 算法. 借助预选取的指标, m^{2}OLS 算法能够取得比 mOLS 算法更好的性能. 在噪声干扰下, 本文提出改进的充分条件. 该充分条件能够保证 m^{2}OLS 算法精确重构稀疏信号的支撑集.

下面给出本文所用的符号. 令 $\Omega := \{1, 2, \ldots, n\}$. 集合 Γ 中元素个数为 $|\Gamma|$. $\Gamma^c = \Omega \setminus \Gamma$. 小写字母表示标量, 如 d. 小写黑体字母表示向量, 如 $\boldsymbol{x}$. 大写黑体字母表示矩阵, 如 $\boldsymbol{Z}$. x_i 代表向量 $\boldsymbol{x}$ 的第 i 个元素. $\Gamma = \mathrm{supp}(\boldsymbol{x}) = \{i \mid i \in \Omega, x_i \neq 0\}$ 表示向量 $\boldsymbol{x}$ 的支撑集. $\boldsymbol{a}_i$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 列. $\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}$ 表示向量 $\boldsymbol{a}_i$ 的转置. $\boldsymbol{x}_\Gamma \in \mathbb{R}^{|\Gamma|}$ 表示仅保留向量 $\boldsymbol{x}$ 中由 Γ 作为下标所标明的元素. 类似地, $\boldsymbol{A}_\Gamma \in \mathbb{R}^{m\times|\Gamma|}$ 表示仅保留矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中由 Γ 作为下标所标明的列. $\boldsymbol{I}_m$ 代表 m 维单位矩阵. $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的转置. $\mathcal{P}_\Lambda = \boldsymbol{A}_\Lambda \boldsymbol{A}_\Lambda^\dagger$ 表示空间 $\mathrm{span}(\boldsymbol{A}_\Lambda)$ 的正交投影, $\mathcal{P}_\Lambda^\perp = \boldsymbol{I} - \mathcal{P}_\Lambda$. 投影 $\mathcal{P}_\Lambda$ 具有如下性质: $\mathcal{P}_\Lambda = \mathcal{P}_\Lambda^{\mathrm{T}}$, $\mathcal{P}_\Lambda^2 = \mathcal{P}_\Lambda$.

下面给出本文余下内容的结构. 第 2 节给出 m^{2}OLS 算法和几个重要引理, 第 3 节讨论 ℓ_2 范数有界的噪声干扰下 m^{2}OLS 算法的理论性能, 第 4 节讨论 ℓ_∞ 范数有界的噪声干扰下 m^{2}OLS 算法的理论性能, 第 5 节讨论 Gauss 噪声干扰下 m^{2}OLS 算法的理论性能, 第 6 节讨论一个反例, 第 7 节总结本文.

2 预备知识

假设向量 $\boldsymbol{x}$ 是 K- 稀疏向量并且定义 $T := \mathrm{supp}(\boldsymbol{x})$, 则 $|T| \leqslant K$. 下面给出 m^{2}OLS 算法 (具体见算法 1).

算法 1 m^{2}OLS[22] 算法

输入: 感知矩阵 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, 测量 $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m$, 稀疏水平 K, 预选取指标个数 N, 每次迭代选取指标个数 L $(L \leqslant N)$.
初始化: $k = 0$, 残差 $\boldsymbol{r}^0 = \boldsymbol{y}$, $\mathcal{S}^0 = \emptyset$, $T^0 = \emptyset$.

1: **while** “停止准则未满足” **do**
2: $k = k + 1$;
3: 预选取指标: $S^k = \mathrm{argmax}_{\mathcal{S}:|\mathcal{S}|=N} \sum_{i\in\mathcal{S}} |\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{r}^{k-1}|^2$;
4: 选取: $H^k = \mathrm{argmin}_{\Lambda\subseteq S^k:|\Lambda|=L} \sum_{i\in\Lambda} \|\mathcal{P}_{T^{k-1}\cup\{i\}}^\perp \boldsymbol{y}\|_2^2$;
5: 合并: $T^k = T^{k-1} \cup H^k$;
6: 更新估计: $\boldsymbol{x}^k = \mathrm{argmin}_{\boldsymbol{u}:\mathrm{supp}(\boldsymbol{u})=T^k} \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{u}\|_2$;
7: 更新残差: $\boldsymbol{r}^k = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^k$.
8: **end while**

输出: 估计的支撑集和信号 $\hat{T} = \mathrm{argmax}_{\Lambda:|\Lambda|=K} \|\boldsymbol{x}_\Lambda^k\|_2$, $\hat{\boldsymbol{x}}_{\hat{T}} = \boldsymbol{A}_{\hat{T}}^\dagger \boldsymbol{y}$, $\hat{\boldsymbol{x}}_{\Omega\setminus\hat{T}} = \boldsymbol{0}$.

定义 2.1 对于任意正整数 K, 定义矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的约束等距常数 (restricted isometry constant, RIC) δ_K 为使得下式成立的最小常数:

$$(1 - \delta_K)\|\boldsymbol{h}\|_2^2 \leqslant \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{h}\|_2^2 \leqslant (1 + \delta_K)\|\boldsymbol{h}\|_2^2, \tag{2.1}$$

这里 $\boldsymbol{h}$ 为任意 K- 稀疏信号. (2.1) 称为 RIP.

引理 2.1 [23] 假设 $\boldsymbol{v}$ 是 Gauss 噪声, $\boldsymbol{v} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{0}, \sigma^2 \boldsymbol{I}_m)$. 对于 $\eta > 0$, 有

$$\mathrm{P}(\|\boldsymbol{v}\|_2 \leqslant \sigma\sqrt{m + 2\sqrt{m\log m}}) \geqslant 1 - \frac{1}{m}. \tag{2.2}$$

引理 2.2 (参见文献 [10, 引理 3]) 给定 $I \subseteq \Omega$ 和列归一化的矩阵 $\boldsymbol{A}$. 如果 $\boldsymbol{A}$ 满足 $|I|+1$ 阶的 RIP, 则 $j \in \Omega \setminus I$,

$$\|\mathcal{P}_I^{\perp}\boldsymbol{a}_j\|_2^2 \geqslant 1 - \delta_{|I|+1}^2.$$

引理 2.3 (参见文献 [13, 命题 1]) 考虑 m^{2}OLS 算法的第 $k+1$ 次迭代. 算法 1 的第 4 步与下式等价:

$$H^{k+1} = \underset{\Lambda \subseteq S^{k+1}:|\Lambda|=L}{\operatorname{argmax}} \sum_{i\in\Lambda} \frac{|\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r}^k|}{\|\mathcal{P}_{T^k}^{\perp}\boldsymbol{a}_i\|_2}. \tag{2.3}$$

令

$$W^k = \{j_1, j_2, \ldots, j_N\} \subset \Omega \setminus (T \setminus T^k). \tag{2.4}$$

这里

$$|\boldsymbol{a}_{j_1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r}^k| \geqslant |\boldsymbol{a}_{j_2}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r}^k| \geqslant \cdots \geqslant |\boldsymbol{a}_{j_N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r}^k| \geqslant |\boldsymbol{a}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r}^k|, \tag{2.5}$$

j 是集合 $(\Omega \setminus (T \setminus T^k)) \setminus W^k$ 中的元素.

引理 2.4 (参见文献 [8, 引理 1]) 考虑算法 1. 假设向量 $\boldsymbol{x}$ 是 K- 稀疏的, 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列归一化. 在第 $k+1$ 步迭代中, 有

$$\alpha_1^k = \max_{i\in T\setminus T^k} |\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r}^k| \geqslant \frac{\|\mathcal{P}_{T^k}^{\perp}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|_2^2}{\sqrt{T\setminus T^k}\|\boldsymbol{x}_{T\setminus T^k}\|_2} - \|\boldsymbol{A}_{T\setminus T^k}^{\mathrm{T}}\mathcal{P}_{T^k}^{\perp}\boldsymbol{v}\|_\infty \tag{2.6}$$

和

$$\begin{aligned} \beta_N^k &= |\boldsymbol{a}_{j_N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r}^k| \\ &\leqslant \frac{\|\mathcal{P}_{T^k}^{\perp}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|_2^2}{\sqrt{T\setminus T^k}\|\boldsymbol{x}_{T\setminus T^k}\|_2} - \frac{(1-\sqrt{\frac{|T|}{N}+1}\delta_{T^k\cup(T\setminus T^k)\cup W^k})\|\boldsymbol{x}_{T\setminus T^k}\|_2}{\sqrt{|T\setminus T^k|}} + \|\boldsymbol{A}_{W^k}^{\mathrm{T}}\mathcal{P}_{T^k}^{\perp}\boldsymbol{v}\|_\infty. \end{aligned} \tag{2.7}$$

令

$$U^k = \{t_1, t_2, \ldots, t_L\} \subset S^{k+1} \setminus (T \setminus T^k). \tag{2.8}$$

这里

$$\frac{|\boldsymbol{a}_{t_1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r}^k|}{\|\mathcal{P}_{T^k}^{\perp}\boldsymbol{a}_{t_1}\|_2} \geqslant \frac{|\boldsymbol{a}_{t_2}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r}^k|}{\|\mathcal{P}_{T^k}^{\perp}\boldsymbol{a}_{t_2}\|_2} \geqslant \cdots \geqslant \frac{|\boldsymbol{a}_{t_L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r}^k|}{\|\mathcal{P}_{T^k}^{\perp}\boldsymbol{a}_{t_L}\|_2} \geqslant \frac{|\boldsymbol{a}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r}^k|}{\|\mathcal{P}_{T^k}^{\perp}\boldsymbol{a}_j\|_2}, \tag{2.9}$$

j 是集合 $S^{k+1} \setminus (T \setminus T^k) \setminus U^k$ 中的元素.

引理 2.5 (参见文献 [15, 定理 3]) 考虑算法 1. 假设 $\boldsymbol{x}$ 是 K- 稀疏的, 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列已归一化. 在第 $k+1$ 步迭代中, 有

$$p_1^k = \max_{i \in S^{k+1} \cap T \setminus T^k} \frac{|\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{r}^k|}{\|\mathcal{P}_{T^k}^{\perp} \boldsymbol{a}_i\|_2} \geqslant \frac{\|\mathcal{P}_{T^k}^{\perp} \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|_2^2}{\sqrt{T \setminus T^k} \|\boldsymbol{x}_{T \setminus T^k}\|_2} - \|\boldsymbol{v}\|_2 \tag{2.10}$$

和

$$\begin{aligned} q_L^k &= \frac{|\boldsymbol{a}_{t_L}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{r}^k|}{\|\mathcal{P}_{T^k}^{\perp} \boldsymbol{a}_{t_L}\|_2} \\ &\leqslant \frac{\|\mathcal{P}_{T^k}^{\perp} \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|_2^2}{\sqrt{T \setminus T^k} \|\boldsymbol{x}_{T \setminus T^k}\|_2} - \frac{(1 - \sqrt{\frac{|T \setminus T^k|}{L \|\mathcal{P}_{T^k}^{\perp} \boldsymbol{a}_{t_L}\|_2^2} + 1} \delta_{T \cup T^k \cup U^k}) \|\boldsymbol{x}_{T \setminus T^k}\|_2}{\sqrt{|T \setminus T^k|}} + \frac{|\boldsymbol{a}_{t_L}^{\mathrm{T}} \mathcal{P}_{T^k}^{\perp} \boldsymbol{v}|}{\|\mathcal{P}_{T^k}^{\perp} \boldsymbol{a}_{t_L}\|_2}. \end{aligned} \tag{2.11}$$

3 $\boldsymbol{\ell_2}$ 范数有界的噪声

本节在噪声干扰下, 给出基于 RIP 的充分条件, 该条件保证 m^{2}OLS 算法精确重构稀疏信号的支撑集. ℓ_2 范数有界的噪声意味着 $\|\boldsymbol{v}\|_2 \leqslant \epsilon$.

定理 3.1 考虑模型 (1.1). 假设向量 $\boldsymbol{x}$ 是 K- 稀疏的, 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列已归一化, 并且 $\|\boldsymbol{v}\|_2 \leqslant \epsilon$. 给定停止准则 $\|\boldsymbol{r}\|_2 \leqslant \epsilon$, 如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足

$$\delta_{LK+N-L+1} < \frac{1}{\sqrt{\frac{K}{L} + 2 - \frac{1}{L}}} \tag{3.1}$$

和

$$\min_{i \in T} |x_i| > \frac{2\epsilon}{1 - \sqrt{\frac{K}{L} + 2 - \frac{1}{L}} \delta_{LK+N-L+1}}, \tag{3.2}$$

则 m^{2}OLS 算法最多运行 K 步就能够重构稀疏信号 $\boldsymbol{x}$ 的支撑集.

证明 为方便起见, 如果 m^{2}OLS 算法在某次迭代中至少选取一个正确指标, 则称算法在本次迭代中是成功的. 该定理的证明受文献 [22] 启发.

(1) 第一次迭代. 此时, $T^{k-1} = T^0 = \emptyset$, 则 m^{2}OLS 算法退化为 mOLS 算法. 由文献 [15, 定理 3] 可知, (3.1) 和 (3.2) 能够保证 m^{2}OLS 算法在第一次迭代中是成功的.

(2) 第 $k+1$ 次迭代: 对迭代步数 k 运用数学归纳法. 假设 m^{2}OLS 算法在前 k $(1 \leqslant k < K)$ 次迭代都是成功的. 我们证明 (3.1) 和 (3.2) 保证 m^{2}OLS 算法在第 $k+1$ 步是成功的. 由假设可知, $k \leqslant |T \cap T^k|$. 为了保证 m^{2}OLS 算法在第 $k+1$ 步是成功的, 只需证明

$$S^{k+1} \cap (T \setminus T^k) \neq \emptyset \tag{3.3}$$

和

$$H^{k+1} \cap (T \setminus T^k) \neq \emptyset \tag{3.4}$$

同时成立.

根据算法 1 的第 3 步和引理 2.4, 为了证明 (3.3) 成立, 只需证明

$$\alpha_1^k > \beta_N^k. \tag{3.5}$$

由引理 2.4 可知,

$$\frac{(1-\sqrt{\frac{|T|}{N}+1}\delta_{T^k\cup(T\setminus T^k)\cup W^k})\|\boldsymbol{x}_{T\setminus T^k}\|_2}{\sqrt{|T\setminus T^k|}} > 2\|\boldsymbol{v}\|_2 \tag{3.6}$$

能够保证 (3.5) 成立.

由

$$\|\boldsymbol{x}_{T\setminus T^k}\|_2 \geqslant \sqrt{|T\setminus T^k|}\min_{i\in T\setminus T^k}|x_i|, \tag{3.7}$$

可得

$$\min_{i\in T}|x_i| > \frac{2\|\boldsymbol{v}\|_2}{1-\sqrt{\frac{K}{N}+1}\delta_{LK+N-L+1}} \tag{3.8}$$

能保证 (3.6) 成立. 因此, 由 (3.2) 可知, (3.3) 成立. □

接下来证明 (3.1) 和 (3.2) 保证 (3.4) 成立.

考虑集合 $S^{k+1}\backslash(T\backslash T^k)$. 如果 $|S^{k+1}\backslash(T\backslash T^k)| < L$, 则 (3.4) 成立. 因此, 仅考虑 $|S^{k+1}\backslash(T\backslash T^k)| \geqslant L$. 根据算法 1 的第 4 步和引理 2.5, 为了证明 (3.4) 成立, 只需证明

$$p_1^k > q_L^k. \tag{3.9}$$

由引理 2.5 可知, (3.9) 与下式等价:

$$\frac{(1-\sqrt{\frac{|T\setminus T^k|}{L\|\mathcal{P}_{T^k}^{\perp}\boldsymbol{a}_{t_L}\|_2^2}+1}\delta_{T\cup T^k\cup U^k})\|\boldsymbol{x}_{T\setminus T^k}\|_2}{\sqrt{|T\setminus T^k|}} > \|\boldsymbol{v}\|_2 + \frac{|\boldsymbol{a}_{t_L}^{\mathrm{T}}\mathcal{P}_{T^k}^{\perp}\boldsymbol{v}|}{\|\mathcal{P}_{T^k}^{\perp}\boldsymbol{a}_{t_L}\|_2}. \tag{3.10}$$

根据引理 2.2、(3.7) 和 (3.1), 化简后可得 (3.2) 能够保证 (3.10) 成立. 因此, (3.4) 成立.

接下来证明 m^{2}OLS 算法不会停止直至所有正确指标被选取. 假设 m^{2}OLS 算法在第 k $(k<K)$ 步已经选取了所有正确指标, 即 $T\subseteq T^k$, 则

$$\|\boldsymbol{r}^k\|_2 = \|\mathcal{P}_{T^k}^{\perp}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \mathcal{P}_{T^k}^{\perp}\boldsymbol{v}\|_2 = \|\mathcal{P}_{T^k}^{\perp}\boldsymbol{v}\|_2 \leqslant \epsilon. \tag{3.11}$$

因此, 算法停止.

假设在第 k $(k<K)$ 步迭代, 存在部分正确指标未被 m^{2}OLS 算法选取, 即 $|T\cap T^k| = k' < K$, 则

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{r}^k\|_2 &= \|\mathcal{P}_{T^k}^{\perp}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \mathcal{P}_{T^k}^{\perp}\boldsymbol{v}\|_2 \\
&\geqslant \sqrt{1-\delta_{Lk+K-k'}}\|\boldsymbol{x}_{T\setminus T^k}\|_2 - \epsilon \\
&\geqslant \sqrt{1-\delta_{LK+N-L+1}}\sqrt{K-k'}\min_{i\in T}|x_i| - \epsilon \\
&\overset{\text{(a)}}{\geqslant} \sqrt{1-\delta_{LK+N-L+1}}\frac{2\epsilon}{1-\sqrt{\frac{K+2L-1}{L}}\delta_{LK+N-L+1}} - \epsilon
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\geqslant \sqrt{1-\delta_{LK+N-L+1}}\frac{2\epsilon}{1-\delta_{LK+N-L+1}}-\epsilon \\
&\geqslant \epsilon,
\end{aligned}
$$

这里, (a) 成立是根据 $K-k'\geqslant 1$ 和 (3.2).

4 ℓ_∞ 范数有界噪声

如果噪声 $\boldsymbol{v}$ 满足 $\|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}\|_\infty\leqslant\epsilon$, 称其为 ℓ_∞ 范数有界噪声. 给定停止准则 $\|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r}^k\|_\infty\leqslant\epsilon$, 下面给出保证 m^{2}OLS 算法精确重构稀疏向量 $\boldsymbol{x}$ 支撑集的充分条件.

定理 4.1 假设 $\|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}\|_\infty\leqslant\epsilon$. 假设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列已作归一化处理并且满足 (3.1). 给定停止准则

$$
\|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r}^k\|_\infty\leqslant\bigg(1+\frac{\sqrt{KL}}{\sqrt{1-\delta_R}}\bigg)\epsilon,
$$

如果

$$
\min_{i\in T}|x_i|>\frac{2}{(1-\sqrt{\frac{K}{L}+2-\frac{1}{L}}\delta_R)(1-\delta_R^2)}\bigg(1+\frac{\sqrt{LK}}{\sqrt{1-\delta_R}}\bigg)\epsilon, \tag{4.1}
$$

这里, $R:=LK+N-L+1$, 则 m^{2}OLS 算法能够从 (1.1) 中重构 $\boldsymbol{x}$ 的支撑集.

证明 假设 m^{2}OLS 算法在前 k $(0\leqslant k<K)$ 次迭代全部成功. 现在证明在 (3.1) 和 (4.1) 成立的条件下, m^{2}OLS 在第 $k+1$ 次迭代中仍然成功.

由定理 3.1 可知, 为了证明 m^{2}OLS 算法在第 $k+1$ 次迭代中成功, 只需证明 (3.5) 和 (3.9) 成立. 另一方面, (3.6) 和 (3.10) 分别能够保证 (3.5) 和 (3.9) 成立. 只需证明 (3.6) 和 (3.10) 成立.

由引理 2.2 和

$$
\|\mathcal{P}_{T^k}\boldsymbol{v}\|_2^2=\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_{T^k}(\boldsymbol{A}_{T^k}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_{T^k})^{-1}\boldsymbol{A}_{T^k}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}\leqslant\frac{1}{1-\delta_{LK+1}}\|\boldsymbol{A}_{T^k}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}\|_2^2\leqslant\frac{Lk\|\boldsymbol{A}_{T^k}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}\|_\infty^2}{1-\delta_{LK+1}}<\frac{KL\|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}\|_\infty^2}{1-\delta_{LK+1}},
$$

可得

$$
\|\boldsymbol{A}_{T\setminus T^k}^{\mathrm{T}}\mathcal{P}_{T^k}^{\perp}\boldsymbol{v}\|_\infty+\|\boldsymbol{A}_{W^k}^{\mathrm{T}}\mathcal{P}_{T^k}^{\perp}\boldsymbol{v}\|_\infty<2\bigg(1+\frac{\sqrt{KL}}{\sqrt{1-\delta_{LK+1}}}\bigg)\|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}\|_\infty \tag{4.2}
$$

和

$$
\begin{aligned}
\frac{|\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\mathcal{P}_{T^k}^{\perp}\boldsymbol{v}|}{\|\mathcal{P}_{T^k}^{\perp}\boldsymbol{a}_i\|_2}+\frac{|\boldsymbol{a}_{t_L}^{\mathrm{T}}\mathcal{P}_{T^k}^{\perp}\boldsymbol{v}|}{\|\mathcal{P}_{T^k}^{\perp}\boldsymbol{a}_{t_L}\|_2}&\leqslant\frac{1}{1-\delta_{LK+1}^2}(|\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\mathcal{P}_{T^k}^{\perp}\boldsymbol{v}|+|\boldsymbol{a}_{t_L}^{\mathrm{T}}\mathcal{P}_{T^k}^{\perp}\boldsymbol{v}|) \\
&<\frac{2}{1-\delta_{LK+1}^2}\bigg(1+\frac{\sqrt{KL}}{\sqrt{1-\delta_{LK+1}}}\bigg)\|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}\|_\infty.
\end{aligned}
$$

因此,

$$
\frac{(1-\sqrt{\frac{|T|}{N}+1}\delta_{T^k\cup(T\setminus T^k)\cup W^k})\|\boldsymbol{x}_{T\setminus T^k}\|_2}{\sqrt{|T\setminus T^k|}}>2\bigg(1+\frac{\sqrt{KL}}{\sqrt{1-\delta_{LK+1}}}\bigg)\|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}\|_\infty \tag{4.3}
$$

和

$$\frac{\left(1-\sqrt{\frac{|T\setminus T^k|}{L\|\mathcal{P}_{T^k}^{\perp}\boldsymbol{a}_{t_L}\|_2^2}+1}\,\delta_{T\cup T^k\cup U^k}\right)\|\boldsymbol{x}_{T\setminus T^k}\|_2}{\sqrt{|T\setminus T^k|}} > \frac{2}{1-\delta_{LK+1}^2}\left(1+\frac{\sqrt{KL}}{\sqrt{1-\delta_{LK+1}}}\right)\|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}\|_\infty \tag{4.4}$$

能够分别保证 (3.6) 和 (3.10) 成立.

(4.1) 能够保证 (4.3) 和 (4.4) 成立. 因此, m^2OLS 算法能够重构 $\boldsymbol{x}$ 的所有支撑集. □

接下来证明 m^2OLS 算法不会停止直到所有正确指标被选取. 假设 $|T\setminus T^k|\neq\emptyset$. 由三角不等式可知,

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r}^k\|_\infty &= \|\boldsymbol{A}_{T\setminus T^k}^{\mathrm{T}}(\mathcal{P}_{T^k}^{\perp}\boldsymbol{A}_{T\setminus T^k}\boldsymbol{x}_{T\setminus T^k}+\mathcal{P}_{T^k}^{\perp}\boldsymbol{v})\|_\infty\\
&\geqslant \|\boldsymbol{A}_{T\setminus T^k}^{\mathrm{T}}\mathcal{P}_{T^k}^{\perp}\boldsymbol{A}_{T\setminus T^k}\boldsymbol{x}_{T\setminus T^k}\|_\infty - \|\boldsymbol{A}_{T\setminus T^k}^{\mathrm{T}}\mathcal{P}_{T^k}^{\perp}\boldsymbol{v}\|_\infty\\
&\overset{\text{(a)}}{\geqslant} \frac{\|\mathcal{P}_{T^k}^{\perp}\boldsymbol{A}_{T\setminus T^k}\boldsymbol{x}_{T\setminus T^k}\|_2^2}{\sqrt{|T\setminus T^k|}\|\boldsymbol{x}_{T\setminus T^k}\|_2} - |\boldsymbol{a}_{i_0}^{\mathrm{T}}\mathcal{P}_{T^k}^{\perp}\boldsymbol{v}|\\
&\overset{\text{(b)}}{\geqslant} \frac{(1-\delta_{LK+N-L+1})\|\boldsymbol{x}_{T\setminus T^k}\|_2^2}{\sqrt{|T\setminus T^k|}\|\boldsymbol{x}_{T\setminus T^k}\|_2} - \epsilon - \frac{\sqrt{KL}\epsilon}{\sqrt{1-\delta_{LK+1}}}\\
&\overset{\text{(c)}}{>} \frac{2(1-\delta_{LK+N-L+1})}{(1-\sqrt{\frac{K}{L}+2-\frac{1}{L}}\delta_R)(1-\delta_R^2)}\left(1+\frac{\sqrt{LK}}{\sqrt{1-\delta_R}}\right)\epsilon - \left(1+\frac{\sqrt{KL}}{\sqrt{1-\delta_{LK+1}}}\right)\epsilon\\
&= \left(1+\frac{\sqrt{KL}}{\sqrt{1-\delta_{LK+1}}}\right)\epsilon,
\end{aligned}$$

这里 (a) 成立是根据文献 [8, 引理 1], (b) 成立是依据 RIP 和 (4.2), (c) 成立是因为 (4.1).

下面证明, 当 $|T\cap T^k|=K$ 时, 停止准则被满足, m^2OLS 算法停止迭代:

$$\|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r}^k\|_\infty = \|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\mathcal{P}_{T^k}^{\perp}\boldsymbol{A}_T\boldsymbol{x}_T+\mathcal{P}_{T^k}^{\perp}\boldsymbol{v})\|_\infty = \|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\mathcal{P}_{T^k}^{\perp}\boldsymbol{v}\|_\infty \leqslant \left(1+\frac{\sqrt{KL}}{\sqrt{1-\delta_{LK+1}}}\right)\epsilon. \tag{4.5}$$

这里, (4.5) 成立的依据是 (4.2).

5 Gauss 噪声

在 Gauss 噪声干扰下, 本节给出 m^2OLS 算法的理论性能.

定理 5.1 假设 $\boldsymbol{v}$ 是 Gauss 噪声, $\boldsymbol{v}\sim\mathcal{N}(\boldsymbol{0},\sigma^2\boldsymbol{I}_m)$ 并且矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 (3.1). 给定停止准则

$$\|\boldsymbol{r}^k\|_2\leqslant\sigma\sqrt{m+2\sqrt{m\log m}},$$

如果

$$\min_{i\in T}|x_i| > \frac{2\sigma\sqrt{m+2\sqrt{m\log m}}}{1-\sqrt{\frac{K}{L}+2-\frac{1}{L}}\delta_{LK+N-L+1}}, \tag{5.1}$$

则 m^2OLS 算法从 (1.1) 中以不小于 $1-\frac{1}{m}$ 的概率重构稀疏信号 $\boldsymbol{x}$ 的支撑集.

证明 该定理可利用定理 3.1 中的部分结果得到证明. □

6 反例

本节给出一个模型, 运用 m^{2}OLS 算法重构该模型时, 第一次迭代不会成功.

第一次迭代中 m^{2}OLS 算法退化为 mOLS 算法. 文献 [15] 给出了 mOLS 算法在第一次不会成功的条件

$$\sqrt{\frac{L}{K}} \leqslant \delta_{LK-L+2} \leqslant 1.$$

因此,

$$0 < \delta^\star = \delta_{LK+N-L+1} < \sqrt{\frac{L}{K}} \tag{6.1}$$

是 m^{2}OLS 算法成功的必要条件. 下面给出一个矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 (6.1)、但是 m^{2}OLS 算法在第一次迭代中不成功的例子.

定理 6.1 考虑模型 (1.1). 对于任意正整数 N、L 和 K, 总存在满足 (6.1) 且列归一化的矩阵 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{R\times R}$ $(R := LK + N - L + 1)$ 和噪声向量 $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^R$ $(\|\boldsymbol{v}\|_2 \leqslant \epsilon)$, 以及满足

$$\min_{i\in T} |x_i| < \sqrt{\frac{K}{L}}\delta^\star - \frac{\epsilon\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-(\delta^\star)^2}}{2}}}{\sqrt{K}} + \frac{\epsilon\sqrt{\frac{1+\sqrt{1-(\delta^\star)^2}}{2}}}{\sqrt{L}} \tag{6.2}$$

的 K- 稀疏向量 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^R$, 使得 m^{2}OLS 算法在第一次迭代中不能选取正确指标.

证明 定理的证明思路来源于文献 [15, 定理 2]. 令

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x} &= (\boldsymbol{0}_{1\times L} \quad \boldsymbol{0}_{1\times d} \quad \gamma\boldsymbol{1}_{1\times K})^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^R,\\
\boldsymbol{v} &= \left(\frac{\epsilon}{\sqrt{L}}\boldsymbol{1}_{1\times L} \quad \boldsymbol{0}_{1\times d} \quad \boldsymbol{0}_{1\times K}\right)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^R,\\
\boldsymbol{A} &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_L - \frac{c}{L}\boldsymbol{1}_{L\times L} & \boldsymbol{0}_{L\times d} & \frac{\sqrt{2c-c^2}}{\sqrt{LK}}\boldsymbol{1}_{L\times K} \\ \boldsymbol{0}_{d\times L} & \boldsymbol{I}_d & \boldsymbol{0}_{d\times K} \\ \frac{\sqrt{2c-c^2}}{\sqrt{LK}}\boldsymbol{1}_{K\times L} & \boldsymbol{0}_{K\times d} & \boldsymbol{I}_K - \frac{c}{K}\boldsymbol{1}_{K\times K} \end{pmatrix}_{R\times R},
\end{aligned} \tag{6.3}$$

这里 $\boldsymbol{0}_{L\times K}$ 和 $\boldsymbol{1}_{L\times K}$ 分别表示 $L\times K$ 维的满 0 和 1 矩阵, $\boldsymbol{I}_L$ 是 L 维的单位阵,

$$c = 1 - \sqrt{\frac{1+\sqrt{1-(\delta^\star)^2}}{2}}, \quad d = LK + N - 2K - L + 1.$$

容易看出向量 $\boldsymbol{x}$ 的支撑集是 $T = \{L+d+1, L+d+2, \ldots, L+d+K\}$. 由文献 [15, 定理 2] 可知, 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列归一化并且满足 $\delta_{LK+N-L+1} = \delta^\star$.

计算测量 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{v}$. 对于 $j \in \{1, 2, \ldots, L\}$ 和 $i \in T$, 由 (6.2) 可得

$$|\boldsymbol{a}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}| > |\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}|.$$

证毕. □

7 结论

在不同类型噪声干扰下, 本文讨论了 m^2OLS 算法的理论性能, 给出了 m^2OLS 算法在第一步迭代中不能选取正确指标的条件.

致谢 感谢审稿人在本文撰写过程中给予的宝贵意见.

参考文献

1 Candès E, Romberg J, Tao T. Robust uncertainty principles: Exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information. IEEE Trans Inform Theory, 2006, 52: 489–509
2 Candès E, Tao T. Decoding by linear programming. IEEE Trans Inform Theory, 2005, 51: 4203–4215
3 Mallat S, Zhang Z. Matching pursuits with time-frequency dictionaries. IEEE Trans Signal Process, 1993, 41: 3397–3415
4 Pati Y, Rezaiifar R, Krishnaprasad P. Orthogonal matching pursuit: Recursive function approximation with applications to wavelet decomposition. In: Proceedings of 27th Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers. Pacific Grove: IEEE, 1993, 40–44
5 Tropp J, Wright S. Computational methods for sparse solution of linear inverse problems. Proc IEEE, 2010, 98: 948–958
6 Li H, Liu G. An improved analysis for support recovery with orthogonal matching pursuit under general perturbations. IEEE Access, 2018, 6: 18856–18867
7 Ding J, Chen L, Gu Y. Perturbation analysis of orthogonal matching pursuit. IEEE Trans Signal Process, 2013, 61: 398–410
8 Wen J, Zhou Z, Wang J, et al. A sharp condition for exact support recovery with orthogonal matching pursuit. IEEE Trans Signal Process, 2017, 65: 1370–1382
9 Chen S, Cowan C, Grant P. Orthogonal least squares learning algorithm for radial basis function networks. IEEE Trans Neural Netw, 1991, 2: 302–309
10 Wen J, Wang J, Zhang Q. Nearly optimal bounds for orthogonal least squares. IEEE Trans Signal Process, 2017, 65: 5347–5356
11 Blumensath T, Davies M. On the difference between orthogonal matching pursuit and orthogonal least squares. University of Southampton, Southampton, UK, Technical Report, 2007. [Online]. Http://www.personal.soton.ac.uk/tb1m08/papers/BDOMPvsOLS07.pdf
12 Herzet C, Soussen C, Idier J, et al. Exact recovery conditions for sparse representations with partial support information. IEEE Trans Inform Theory, 2013, 59: 7509–7524
13 Wang J, Li P. Recovery of sparse signals using multiple orthogonal least squares. IEEE Trans Signal Process, 2017, 65: 2049–2062
14 Li H, Zhang J, Zou J. Improving the bound on the restricted isometry property constant in multiple orthogonal least squares. IET Signal Process, 2018, 12: 666–671
15 Kim J, Shim B. A near-optimal restricted isometry condition of multiple orthogonal least squares. IEEE Access, 2019, 7: 46822–46830
16 Li H, Liu G, Zou J. Improved RIP-based performance guarantee for sparse signal recovery via A*OMP. Electron Lett, 2018, 54: 1216–1218
17 Li H, Wen J. Generalized covariance-assisted matching pursuit. Signal Process, 2019, 163: 232–237
18 Wang J, Kwon S, Shim B. Generalized orthogonal matching pursuit. IEEE Trans Signal Process, 2012, 60: 6202–6216
19 Shen Y, Li B, Pan W, et al. Analysis of generalised orthogonal matching pursuit using restricted isometry constant. Electron Lett, 2014, 50: 1020–1022
20 Wen J, Zhou Z, Li D, et al. A novel sufficient condition for generalized orthogonal matching pursuit. IEEE Commun Lett, 2017, 21: 805–808
21 Chen W, Ge H. A sharp bound on RIC in generalized orthogonal matching pursuit. Canad Math Bull, 2018, 61: 40–54
22 Mukhopadhyay S, Satpathi S, Chakraborty M. A modified multiple OLS (m^2OLS) algorithm for signal recovery in compressive sensing. Signal Process, 2020, 168: 107337
23 Ben-Haim Z, Eldar Y, Elad M. Coherence-based performance guarantees for estimating a sparse vector under random noise. IEEE Trans Signal Process, 2010, 58: 5030–5043

Analysis of the modified multiple OLS (m^{2}OLS) algorithm for sparse signal recovery with noise

Haifeng Li, Wengu Chen & Jinming Wen

Abstract Based on the multiple orthogonal least squares (mOLS), the modified mOLS (m^{2}OLS) has been proposed to recover the support of sparse signals $\boldsymbol{x}$ from $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{v}$. By using a pre-selected subset of columns of $\boldsymbol{A}$, m^{2}OLS can realize computational simplicity over mOLS. In the framework of restricted isometry property (RIP), under three kinds of noise, we present some sufficient conditions on RIP and the minimum magnitude of the nonzero elements of the sparse coefficients, which can guarantee that m^{2}OLS identifies at least one index in the support of any sparse signal in each iteration in the noisy case. We also present a condition under which m^{2}OLS fails to recover the support of $\boldsymbol{x}$ at the first iteration. Our results are better than the existing results.

Keywords **compressed sensing, orthogonal least squares, restricted isometry property**

MSC(2020) **94A12, 65F22, 65J22**

doi: 10.1360/SCM-2020-0165