

电子、磁单极子和光子的相互作用*(I)

杜东生 吴大峻 杨振宁

摘 要

利用处理磁单极谐函数所发展起来的方法,我们提出了电子、磁单极子和光子相互作用的二次量子化理论. 在第一篇文章中我们讨论相互作用的电子、磁单极子和电磁场系统. 其中,电子和磁单极子被当作自旋 $1/2$ 的狄拉克粒子,且暂不考虑负能态.

一、引 言

1931年 Dirac^[1] 指出,在量子力学中电子和磁单极子同时存在,这意味着电荷和磁荷的乘积要满足一个量子化条件 $eg = 1/2\hbar c \times \text{整数}$. 十七年后,他进而研究^[2]电子、磁单极子和光子的二次量子化理论. 近年来,吴大峻和杨振宁^[3]重新研究了静止磁单极有关的问题,并消去了麻烦的奇异弦. 我们的工作则在上述基础上作了推广,提出了相互作用的电子、磁单极子和光子的二次量子化理论. 这个理论同样消去了奇异弦.

我们使用的关键的数学工具是非平凡丛和截面的概念. 这些概念已在文献[3]中介绍过. 阅读文献[3]和我们的这组文章,并不需要丛和截面的基础.

相互作用的电子、磁单极子和电磁场系统的经典拉氏理论,已在文献[4]中归纳了¹⁾. 然而,我们并不沿着把这个理论量子化的路子走下去. 相反,我们的目的是直接给出哈密顿形式. 为此,我们先谈一下没有磁单极时通常的电子光子理论的费米形式^[5]. 在这种理论中,纵场已被消去了. 然后我们把费米形式和文献[3]中的方法结合起来,导出第三节中的哈密顿量[(3.1)式]. 其中的矢势 $\mathbf{A}$ 包含通常的横场部分,但也包含文献[3]中所建议的纵磁部分. 在其后的各节中将阐明,这个哈密顿量确实正确地描述了该相互作用系统.

二、电子-光子相互作用

在讨论电子、磁单极子、光子相互作用系统之前,我们首先介绍一下电子光子相互作用系统的费米形式的哈密顿量^[5],其中利用辅助条件已把纵场消去.

本文 1978 年 2 月 18 日收到.

* 本文是 1976 年 8 月中国科学院高能加速器考察组赴欧洲核子研究中心(CERN)考察时,高能物理研究所杜东生同志与美国哈佛大学教授吴大峻、纽约州立大学教授杨振宁着手合作研究,陆续完成的.

1) 二次量子化的费曼路径积分方法,可参阅夏道行:复旦学报,1977,4,13. 我们再次强调在该文中讨论过的一个观点:有奇异弦但无分区结构时,磁场 $\nabla \times \mathbf{A}$ 不是正确的磁单极场. 它包含沿奇异弦方向具有无穷大场强,但却有有限通量的返回场. 这一点首先被 Wentzel 在下述文章中强调指出,见 *Prog. Theor. Phys. Suppl.*, **37—38** (1966), 163.

$$\mathcal{H} = \sum_i \{ \mathbf{a}_i \cdot [\mathbf{p}_i - \varepsilon \mathbf{A}(\mathbf{x}_i)] + \beta_i m_i \} + \sum_{i>j} \varepsilon^2 / r_{ij} + \sum_r \omega a^+ a, \quad (2.1)$$

这里 $\sum_r =$ 对横光子动量 $\mathbf{k}$ 和极化求和, (2.2)

ε 是电子电荷, 并且是负的, $\omega = |\mathbf{k}|$ 是光子能量, V 是归一化体积. 矢势 $\mathbf{A}(\boldsymbol{\xi})$ 是完全横向的, 它由下式给出:

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{\xi}) = \sum_r (2\pi/\omega V)^{\frac{1}{2}} \mathbf{e} [a e^{i\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\xi}} + \text{h.c.}], \quad (2.3)$$

这里 h. c. 代表厄米共轭, $\mathbf{e}$ 是横向极化矢量, $\boldsymbol{\xi}$ 是三维坐标空间矢量. a 和 a^+ 是湮灭和产生算符. $\mathbf{x}_i$ 是第 i 个电子的位置矢量.

动力学变数 $\mathbf{x}_i, \mathbf{p}_i, \mathbf{a}_i, \beta_i, a, a^+$ 的对易关系和通常一样. (2.1) 式定义的哈密顿量在薛定谔表象中来研究是方便的. 然而, 为了鉴别动力学系统的意义, 我们必须用海森堡表象.

采用海森堡表象, 标势和场强定义为:

$$\phi(\boldsymbol{\xi}) = \sum_i \varepsilon |\boldsymbol{\xi} - \mathbf{x}_i|^{-1}, \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\boldsymbol{\xi}) &= -\nabla\phi - \dot{\mathbf{A}}, \\ \mathbf{H}(\boldsymbol{\xi}) &= \nabla \times \mathbf{A}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

如通常一样, 任何一个算符 B 的时间依赖性由下式给出:

$$i\dot{B} = B\mathcal{H} - \mathcal{H}B. \quad (2.6)$$

用这个公式我们可以导出所有动力学变数对时间的微商, 特别是可以得到:

$$\dot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{a}_i, \quad (2.7)$$

$$(\dot{\mathbf{p}}_i)_x = \varepsilon \mathbf{a}_j \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_j} \mathbf{A}(\mathbf{x}_j) - \varepsilon \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_j} \phi(\mathbf{x}_j) \quad (j \text{ 不求和}), \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} \dot{a} &= -i\omega a + i\varepsilon \sum_i (\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{e})(2\pi/\omega V)^{\frac{1}{2}} \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_i), \\ \dot{a}^+ &= i\omega a^+ - i\varepsilon \sum_i (\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{e})(2\pi/\omega V)^{\frac{1}{2}} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_i). \end{aligned} \quad (2.9)$$

利用(2.9)式, 可以计算出 $\mathbf{A}(\boldsymbol{\xi})$ 对时间的微商

$$\dot{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\xi}) = \sum_r (2\pi/\omega V)^{\frac{1}{2}} (-i\omega) \mathbf{e} [a e^{i\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\xi}} - \text{h.c.}], \quad (2.10)$$

在导出上式时, 我们用了

$$\sum_{\mathbf{p}_0} (\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{e}) \mathbf{e} = \mathbf{a}_i - \omega^{-2} (\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{k}) \mathbf{k}, \quad (2.11)$$

这里 $\sum_{\mathbf{p}_0}$ 表示在固定光子动量 $\mathbf{k}$ 下对两个横向极化态求和. 利用(2.7)式, 可得

$$\frac{d}{dt} [\mathbf{A}(\mathbf{x}_i)] = \dot{\mathbf{A}}(\mathbf{x}_i) + (\dot{\mathbf{x}}_i \cdot \nabla) \mathbf{A}(\mathbf{x}_i) = \dot{\mathbf{A}}(\mathbf{x}_i) + (\mathbf{a}_i \cdot \nabla) \mathbf{A}(\mathbf{x}_i), \quad (2.12)$$

故有

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [\mathbf{p}_i - \varepsilon \mathbf{A}(\mathbf{x}_i)]_x &= \varepsilon \mathbf{a}_j \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_j} \mathbf{A}(\mathbf{x}_j) - \varepsilon \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_j} \phi(\mathbf{x}_j) - \varepsilon \dot{\mathbf{A}}_x(\mathbf{x}_i) - \varepsilon (\mathbf{a}_j \cdot \nabla) \mathbf{A}_x(\mathbf{x}_j) \\ &= \varepsilon [\mathbf{E}(\mathbf{x}_j) + \dot{\mathbf{x}}_j \times \mathbf{H}(\mathbf{x}_j)]_x, \end{aligned}$$

即

$$\frac{d}{dt} [\mathbf{p}_i - e\mathbf{A}(\mathbf{x}_i)] = e[\mathbf{E}(\mathbf{x}_i) + \dot{\mathbf{x}}_i \times \mathbf{H}(\mathbf{x}_i)]. \quad (2.13)$$

我们称(2.7),(2.13)式为洛伦兹方程. 它们给出了电磁场作用于粒子的力.

现在让我们验证一下麦克斯韦方程组是否被满足. 首先,由(2.3)式,可得

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0. \quad (2.14)$$

由(2.5)式给出,

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{E}(\xi) = 4\pi e \sum_i \delta^3(\xi - \mathbf{x}_i). \quad (2.15)$$

显然,(2.5)式还可给出

$$\dot{\mathbf{H}} = -\nabla \times \mathbf{E}. \quad (2.16)$$

为了验证第四个麦克斯韦方程(安培定律),我们首先利用(2.10),(2.9)式来计算 $\ddot{\mathbf{A}}$,

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{A}}(\xi) &= \sum_r (2\pi/\omega V)^{\frac{1}{2}}(-i\omega)\mathbf{e}(-i\omega)[ae^{i\mathbf{k}\cdot\xi} + \text{h.c.}] \\ &+ \sum_r (2\pi/\omega V)^{\frac{1}{2}}(-i\omega)\mathbf{e} \sum_i i\epsilon(\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{e})(2\pi/\omega V)^{\frac{1}{2}}[e^{i\mathbf{k}\cdot(\xi-\mathbf{x}_i)} + \text{h.c.}], \end{aligned} \quad (2.17)$$

按(2.14)式,第一项求和等于 $-\nabla \times \mathbf{H}$. 由(2.11)式,第二项求和等于

$$\begin{aligned} &\epsilon \sum_r \sum_i (2\pi/\omega V)\omega[\mathbf{a}_i - \omega^{-2}(\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{k})\mathbf{k}][e^{i\mathbf{k}\cdot(\xi-\mathbf{x}_i)} + \text{h.c.}]/2 \\ &= \epsilon \sum_{ir} \mathbf{a}_i(2\pi/V)[e^{i\mathbf{k}\cdot(\xi-\mathbf{x}_i)} + \text{h.c.}]/2 \\ &+ \epsilon \sum_{ir} (2\pi/\omega^2 V)(\mathbf{a}_i \cdot \nabla_\xi)\nabla_\xi[e^{i\mathbf{k}\cdot(\xi-\mathbf{x}_i)} + \text{h.c.}]/2 \\ &= 4\pi e \sum_i \mathbf{a}_i\delta^3(\xi - \mathbf{x}_i) + \epsilon \sum_i (\mathbf{a}_i \cdot \nabla_\xi)\nabla_\xi|\xi - \mathbf{x}_i|^{-1} \\ &= 4\pi e \sum_i \dot{\mathbf{x}}_i\delta^3(\xi - \mathbf{x}_i) - \sum_i (\dot{\mathbf{x}}_i \cdot \nabla_i)\nabla_\xi\phi(\xi). \end{aligned} \quad (2.18)$$

因此

$$\ddot{\mathbf{A}}(\xi) = -\Delta \times \mathbf{H} - \sum_i (\dot{\mathbf{x}}_i \cdot \nabla_i)[\nabla_\xi\phi(\xi)] + 4\pi e \sum_i \dot{\mathbf{x}}_i\delta^3(\xi - \mathbf{x}_i). \quad (2.19)$$

现在

$$\dot{\mathbf{E}}(\xi) = -\sum_i (\dot{\mathbf{x}}_i \cdot \nabla_i)[\nabla_\xi\phi(\xi)] - \ddot{\mathbf{A}}, \quad (2.20)$$

故我们正确地得到了第四个麦克斯韦方程:

$$\nabla \times \mathbf{H} - \dot{\mathbf{E}} = 4\pi e \sum_i \dot{\mathbf{x}}_i\delta^3(\xi - \mathbf{x}_i). \quad (2.21)$$

至此,我们已经证明了,以电子和横光子为动力学变量的费米哈密顿量(2.1)式,确实给出了一个动力学系统,这个系统在海森堡表象中满足麦克斯韦方程组和洛伦兹方程组.

三、电子、磁单极子和光子在薛定谔表象中的相互作用

现在我们把上节描写的动力学系统推广到包含有磁单极子的情形。在文献[3,6]中,我们曾讨论过比较简单的问题,即为什么必须把空间分区和为什么量子系统的希尔伯空间是截面的希尔伯空间¹⁾。推广是通过与这些简单的问题对比来进行的。

考虑 n 个电子(空间坐标为 $\mathbf{x}_i, i = 1, 2, \dots, n$)和 N 个磁单极子(空间坐标为 $\mathbf{X}_I, I = 1, 2, \dots, N$)的相互作用系统²⁾。电子和磁单极子均与电磁场相互作用,并被看作为自旋 1/2 的狄拉克粒子¹⁾。它们的动量由 $\mathbf{p}_i, \mathbf{P}_I$ 表示。狄拉克矩阵 α, β 由 $\alpha_i, \beta_i, \alpha_I, \beta_I$ 表示。哈密顿量为:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & \sum_i \{ \alpha_i \cdot (\mathbf{p}_i - e_i \mathbf{A}(\mathbf{x}_i)) + \beta_i M_i \} + \sum_I \{ \alpha_I \cdot (\mathbf{P}_I - g_I \mathbf{B}(\mathbf{X}_I)) + \beta_I M_I \} \\ & + \sum_{i>j} \varepsilon_i \varepsilon_j r_{ij}^{-1} + \sum_{I>J} g_I g_J r_{IJ}^{-1} + \sum_r \omega a^+ a_r. \end{aligned} \quad (3.1)$$

这里 $\sum_r$ 仍指对横光子求和,

$$\mathbf{B}(\mathbf{X}_I) = - \sum_i \varepsilon_i \mathbf{A}_{iI} + \sum_r (2\pi/\omega V)^{\frac{1}{2}} \omega^{-1} (\mathbf{k} \times \mathbf{e}) [a \mathbf{e}^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{X}_I} + \text{h.c.}] \quad (3.2)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}_i) = \sum_I g_I \mathbf{A}_{iI} + \sum_r (2\pi/\omega V)^{\frac{1}{2}} \mathbf{e} [a \mathbf{e}^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_i} + \text{h.c.}]. \quad (3.3)$$

且 $\mathbf{A}_{\xi I}$ 是 $\mathbf{X}_I$ 点的磁单极在 ξ 点处产生的瞬时矢势:

$$\mathbf{A}_{\xi I} = \frac{1 - \cos \vartheta_{\xi I}}{r_{\xi I}^2 \sin^2 \vartheta_{\xi I}} \hat{z} \times \mathbf{x}_{\xi I}, \quad \text{当 } \mathbf{x}_{\xi I} \equiv \xi - \mathbf{X}_I \text{ 在 } R_a \text{ 内}, \quad (3.4)$$

$$\mathbf{A}_{\xi I} = -\frac{1 + \cos \vartheta_{\xi I}}{r_{\xi I}^2 \sin^2 \vartheta_{\xi I}} \hat{z} \times \mathbf{x}_{\xi I}, \quad \text{当 } \mathbf{x}_{\xi I} \text{ 在 } R_b \text{ 中}. \quad (3.5)$$

$\mathbf{A}_{iI}$ 为 $\mathbf{A}_{\xi I}$ 在 $\xi = \mathbf{x}_i$ 点的值,两个区域 R_a, R_b 由文献[3]中的(2),(3)两式定义。 $\hat{z}$ 是沿正 z 轴的单位矢量。 $\mathbf{A}_{\xi I}$ 恰好是文献[3]中 $\mathbf{X}_I$ 处静止磁单极子在 ξ 点产生的矢势。这个矢势当磁单极子不是静止时仍然可用,其理由是,在海森堡表象所有麦克斯韦方程和洛伦兹方程均得到满足,下节将证明。

哈密顿量(3.1)式包含动力学变数 $\mathbf{x}_i, \mathbf{X}_I, \mathbf{p}_i, \mathbf{P}_I, \alpha_i, \beta_i, \alpha_I, \beta_I, a$ 和 a^+ 。这些动力学变数满足通常的对易关系。哈密顿量作用的希尔伯空间是截面的希尔伯空间^[3,6]。换言之,如果我们把 $\mathbf{x}_i, \mathbf{X}_I, a^+ a, \beta_i, \beta_I, \alpha_{ix} \alpha_{iy}, \alpha_{Ix} \alpha_{Iy}$ 同时对角化,波截面

$$\Phi(\mathbf{x}_i, \mathbf{X}_I, a^+ a, \beta_i, \beta_I, \alpha_{ix} \alpha_{iy}, \alpha_{Ix} \alpha_{Iy})$$

仍然依赖于所选的区域。区域总数为 2^{nN} 个,每个区域根据 ϑ_{iI} 的大小来决定。在 $\vartheta_{iI} = \pi/2$ 附近的重迭区,两个不同区域中的 $\mathbf{A}(\mathbf{x}_i)$ [和 $\mathbf{B}(\mathbf{X}_I)$] 的差为:

1) 文献[3]中探讨的分区的原因在文献[6]中有更全面的阐述。

2) 我们只有一个时间坐标 t ,它对所有四变量坐标都是相同的。因此, $\xi, \mathbf{x}_i, \mathbf{X}_I$ 都具有同一时间 t 。这与第二节的

情况一样, ξ 是一个计算场变量的坐标点,黑点($\cdot$)表示对时间 t 的偏微商 $\frac{\partial}{\partial t}$ 。

$$\delta \mathbf{A}(\mathbf{x}_i) = g_J \delta \mathbf{A}_{iJ} = -2g_J \nabla_i \phi_{iJ}, \quad (3.6)$$

$$\delta \mathbf{B}(\mathbf{X}_J) = -\varepsilon_i \delta \mathbf{A}_{iJ} = -2\varepsilon_i \nabla_J \phi_{iJ}, \quad (3.7)$$

这里 ϕ_{iJ} 为 $\mathbf{x}_{iJ} = \mathbf{x}_i - \mathbf{X}_J$ 的方位角. 显然, 这些方程是文献[3]中方程(6)的推广. 它们给出构成 $\vartheta_{iJ} = \pi/2$ 附近两重迭区域之间规范变换的跃迁函数 S .

$$\phi^{(a)} = S \phi^{(b)}, \quad (3.8)$$

$$\text{这里} \quad S = \exp[2i\varepsilon_i g_J \phi_{iJ}]. \quad (3.9)$$

象在文献[3]中一样, 为了使希尔伯空间有意义, 我们需要引入狄拉克条件

$$2\varepsilon_i g_J = \text{整数} \quad (3.10)$$

同样如文献[3]中所讨论过的, 跃迁函数使算符 $\mathbf{p}_i - \varepsilon_i \mathbf{A}(\mathbf{x}_i)$ 和 $\mathbf{P}_J - g_J \mathbf{B}(\mathbf{X}_J)$ 成为作用于希尔伯空间上适宜的算符(对所有的 i 和 J). 因而(3.1)式的哈密顿量是一个适宜的算符.

小结: (3.1)式中的 $\mathcal{H}$ 是一个作用于具有跃迁函数(3.9)式的截面希尔伯空间上的算符. 它定义了一个薛定谔表象中的动力学系统. 它包含了电子、磁单极子和横光子的动力学变量.

四、海森堡表象中电子、磁单极子、光子的相互作用

象第二节一样, 第三节中的动力学系统的意义只有利用海森堡表象才能看清楚. 在海森堡表象中任何算符对时间的微商由(2.6)式给出, 因而有:

$$\dot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{a}_i, \quad \dot{\mathbf{X}}_J = \mathbf{a}_J, \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} \dot{a} = & -i\omega a + i \sum_i \varepsilon_i (\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{e}) (2\pi/\omega V)^{\frac{1}{2}} \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_i) \\ & + i \sum_J g_J \omega^{-1} \mathbf{a}_J \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{e}) (2\pi/\omega V)^{\frac{1}{2}} \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{X}_J), \end{aligned} \quad (4.2)$$

a^+ = 上面式子的厄米共轭.

$\mathbf{p}_i - \varepsilon_i \mathbf{A}(\mathbf{x}_i)$ 与 $\mathcal{H}$ 的对易子的计算稍长一些. 为了避免混淆起见, 我们由下式定义横场 $\mathbf{A}^T$ 和 $\mathbf{B}^T$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\xi) &= \sum_i g_i \mathbf{A}_{i\xi} + \mathbf{A}^T(\xi), \\ \mathbf{B}(\xi) &= -\sum_i \varepsilon_i \mathbf{A}_{i\xi} + \mathbf{B}^T(\xi). \end{aligned} \quad (4.3)$$

现在我们可以由(4.2)式算出 $\mathbf{A}^T(\xi)$ 和 $\mathbf{B}^T(\xi)$ 对时间的微商,

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{A}}^T(\xi) = & \sum_r (2\pi/\omega V)^{\frac{1}{2}} (-i\omega) \mathbf{e} [a e^{i\mathbf{k} \cdot \xi} - \text{h.c.}] \\ & + \sum_{r,l} (2\pi/\omega V) i g_l (\mathbf{a}_l \times \mathbf{k}) \omega^{-1} [a e^{i\mathbf{k} \cdot (\xi - \mathbf{X}_l)} - \text{h.c.}] (1/2) \end{aligned} \quad (4.4)$$

这里第一项求和与(2.10)式相同, 第二项求和来自(4.2)式的第二项. 在(4.4)式的第二项求和中, 我们已用了恒等式

$$\sum_{\text{P.O.}} \mathbf{e} |\mathbf{a}_l \cdot \mathbf{k} \times \mathbf{e}| = \mathbf{a}_l \times \mathbf{k}. \quad (4.5)$$

(4.4)式中第一项求和易见为:

$$\nabla_\xi \times \mathbf{B}^T(\xi).$$

注意到对每个 $\mathbf{k}$ 有两个极化自由度, 第二项求和为: $\sum_l g_l (\mathbf{a}_l \times \nabla_{\xi}) |\xi - \mathbf{X}_l|^{-1}$. 因此

$$\dot{\mathbf{A}}^T(\xi) = \nabla \times \mathbf{B}^T + \sum_l g_l \mathbf{a}_l \times \nabla_{\xi} |\xi - \mathbf{X}_l|^{-1}; \quad (4.6)$$

类似地

$$\dot{\mathbf{B}}^T(\xi) = -\nabla \times \mathbf{A}^T - \sum_i \varepsilon_i \mathbf{a}_i \times \nabla_{\xi} |\xi - \mathbf{x}_i|^{-1}. \quad (4.7)$$

我们由下式定义 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{H}$:

$$\phi(\xi) = \sum_i \varepsilon_i |\xi - \mathbf{x}_i|^{-1} + \sum_l g_l \mathbf{a}_l \cdot \mathbf{A}_{\xi l}, \quad (4.8)$$

$$\mathbf{E}(\xi) = -\nabla_{\xi} \phi - \dot{\mathbf{A}}, \quad (4.9)$$

$$\mathbf{H}(\xi) = \nabla_{\xi} \times \mathbf{A}(\xi). \quad (4.10)$$

由(4.3)式及上述方程, 我们有

$$\mathbf{E}(\xi) = -\nabla_{\xi} \sum_i \varepsilon_i |\xi - \mathbf{x}_i|^{-1} - \dot{\mathbf{A}}^T(\xi) - \sum_l g_l \mathbf{a}_l \times (\nabla_{\xi} \times \mathbf{A}_{\xi l}), \quad (4.11)$$

由于

$$(\nabla_{\xi} + \nabla_l)(\mathbf{A}_{\xi l} \text{ 的任意分量}) = 0, \quad (4.12)$$

(4.11)式可改写为:

$$\mathbf{E}(\xi) = -\dot{\mathbf{A}}^T + \sum_i \mathbf{E}_i^c - \sum_l \mathbf{a}_l \times \mathbf{H}_l^g. \quad (4.13a)$$

其中

$$\mathbf{E}_i^c = \mathbf{x}_i \text{ 点静止的电子在 } \xi \text{ 点产生的电场.} \quad (4.14)$$

$$\mathbf{H}_l^g = \mathbf{X}_l \text{ 点静止的磁单极在 } \xi \text{ 点产生的磁场.} \quad (4.15)$$

利用(4.10), (4.3)式, 磁场可改写为:

$$\mathbf{H}(\xi) = \nabla \times \mathbf{A}^T + \sum_l \mathbf{H}_l^g. \quad (4.13b)$$

方程(4.13)式用 $\mathbf{A}^T$, $\mathbf{x}_i$, $\mathbf{X}_l$ 表示出 $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$. 应当强调指出, $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ 的表达式与希尔伯空间的分区结构无关. 这一点与文献[3]中一样, 那里磁场 $\mathbf{H}$ 也与分区结构无关.

五、 $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{H}$, $\mathbf{H} \rightarrow -\mathbf{E}$ 变换下的对称性质

利用(4.6), (4.7)式, 我们可把(4.13)式改写为:

$$\mathbf{E}(\xi) = -\nabla \times \mathbf{B}^T + \sum_i \mathbf{E}_i^c, \quad (5.1a)$$

$$\mathbf{H}(\xi) = -\dot{\mathbf{B}}^T + \sum_l \mathbf{H}_l^g + \sum_i \mathbf{a}_i \times \mathbf{E}_i^c. \quad (5.1b)$$

这些方程与(4.13)式显示出在下述变换下的对称性,

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{H}, \mathbf{H} \rightarrow -\mathbf{E}, \mathbf{A}^T \rightarrow \mathbf{B}^T, \mathbf{B}^T \rightarrow -\mathbf{A}^T, \\ \mathbf{x}_i \longleftrightarrow \mathbf{X}_l, \varepsilon_i \rightarrow g_l, g_l \rightarrow -\varepsilon_i. \end{aligned} \quad (5.2)$$

方程(5.1)把 $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$, 用 $\mathbf{B}^T$, $\mathbf{x}_i$, $\mathbf{X}_l$ 表示出来.

六、海森堡表象中电子、磁单极子、光子的相互作用(续)

我们将证明,在海森堡表象,洛伦兹方程组和麦克斯韦方程组均得到满足. 作为开始,由 $\mathbf{A}^T(\mathbf{x}_i)$ 与 $\mathcal{H}$ 的对易子有

$$\frac{d}{dt} \mathbf{A}^T(\mathbf{x}_i) = \dot{\mathbf{A}}^T(\mathbf{x}_i) + (\mathbf{a}_i \cdot \nabla_i) \mathbf{A}^T(\mathbf{x}_i), \quad (6.1)$$

这与(2.12)式一样. 同样,

$$\frac{d}{dt} \mathbf{B}^T(\mathbf{X}_l) = \dot{\mathbf{B}}^T(\mathbf{X}_l) + (\mathbf{a}_l \cdot \nabla_l) \mathbf{B}^T(\mathbf{X}_l). \quad (6.2)$$

为了计算 $\frac{d}{dt} \left[\mathbf{p}_i - \varepsilon_i \sum_l g_l \mathbf{A}_{il} \right]$, 我们首先算出

$$\begin{aligned} & \left[\left(\mathbf{p}_i - \varepsilon_i \sum_l g_l \mathbf{A}_{il} \right)_x, \left(\mathbf{p}_l - \varepsilon_l \sum_i g_l \mathbf{A}_{il} \right)_y \right] \\ &= i \delta_{il} \varepsilon_l \sum_i g_l (\nabla_l \times \mathbf{A}_{il})_z, \end{aligned} \quad (6.3)$$

$$\left[\left(\mathbf{p}_i - \varepsilon_i \sum_l g_l \mathbf{A}_{il} \right)_x, \left(\mathbf{P}_L + g_L \sum_i \varepsilon_i \mathbf{A}_{iL} \right)_x \right] = 0, \quad (6.4)$$

$$\begin{aligned} & \left[\left(\mathbf{p}_i - \varepsilon_i \sum_l g_l \mathbf{A}_{il} \right)_x, \left(\mathbf{P}_L + g_L \sum_i \varepsilon_i \mathbf{A}_{iL} \right)_y \right] \\ &= -i g_L \varepsilon_i (\nabla_i \times \mathbf{A}_{iL})_z. \end{aligned} \quad (6.5)$$

$$\left[\left(\mathbf{p}_i - \varepsilon_i \sum_l g_l \mathbf{A}_{il} \right)_x, \mathbf{A}^T(\mathbf{x}_j) \right] = -i \frac{\partial}{\partial x_j} \mathbf{A}^T(\mathbf{x}_i). \quad (6.6)$$

因此有

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\mathbf{p}_i - \varepsilon_i \sum_l g_l \mathbf{A}_{il} \right] &= \varepsilon_i \sum_l g_l (\mathbf{a}_j - \mathbf{a}_l) \times (\nabla_j \times \mathbf{A}_{jl}) \\ &\quad + \varepsilon_i \nabla [\mathbf{a}_j \cdot \mathbf{A}^T(\mathbf{x}_i)] - \varepsilon_i \nabla_j \sum_i \varepsilon_i r_{ij}^{-1}. \end{aligned} \quad (6.7)$$

由(6.1), (6.7)式一并给出,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon_i} \frac{d}{dt} [\mathbf{p}_i - \varepsilon_i \mathbf{A}(\mathbf{x}_i)] &= -\dot{\mathbf{A}}^T(\mathbf{x}_i) + \mathbf{a}_j \times [\nabla \times \mathbf{A}^T(\mathbf{x}_i)] \\ &\quad + \sum_l g_l (\mathbf{a}_j - \mathbf{a}_l) \times (\nabla_j \times \mathbf{A}_{jl}) \\ &\quad - \nabla_j \sum_i \varepsilon_i r_{ij}^{-1}. \end{aligned} \quad (6.8)$$

这里我们已经用了

$$-(\mathbf{a}_j \cdot \nabla_j) \mathbf{A}^T(\mathbf{x}_j) + \nabla [\mathbf{a}_j \cdot \mathbf{A}^T(\mathbf{x}_j)] = \mathbf{a}_j \times [\nabla \times \mathbf{A}^T(\mathbf{x}_j)]. \quad (6.9)$$

利用(4.13a)和(4.13b)式, (6.8)式可变为:

$$\frac{d}{dt} \{ \mathbf{p}_i - \varepsilon_i \mathbf{A}(\mathbf{x}_i) \} = \varepsilon_i \mathbf{E}(\mathbf{x}_i) + \varepsilon_i \dot{\mathbf{x}}_i \times \mathbf{H}(\mathbf{x}_i). \quad (6.10)$$

这是洛伦兹方程组中的一个方程. 另一个方程可由 $\mathbf{P}_j - g_j \mathbf{B}(\mathbf{X}_j)$ 与 $\mathcal{H}$ 的对易子类似地得

到:

$$\begin{aligned} \frac{1}{g_J} \frac{d}{dt} [\mathbf{P}_J - g_J \mathbf{B}(\mathbf{X}_J)] &= -\dot{\mathbf{B}}^T(\mathbf{X}_J) + \mathbf{a}_J \times [\nabla \times \mathbf{B}^T(\mathbf{X}_J)] \\ &\quad - \sum_i \varepsilon_i (\mathbf{a}_J - \mathbf{a}_i) \times (\nabla_J \times \mathbf{A}_{iJ}) \\ &\quad - \nabla_J \sum_i g_I r_{iJ}^1. \end{aligned} \quad (6.11)$$

利用(5.1a)和(5.1b)式,此方程可化为:

$$\frac{d}{dt} [\mathbf{P}_J - g_J \mathbf{B}(\mathbf{X}_J)] = g_J \mathbf{H}(\mathbf{X}_J) - g_J \mathbf{a}_J \times \mathbf{E}(\mathbf{X}_J), \quad (6.12)$$

这是磁单极的洛伦兹方程.

两个洛伦兹方程(6.10)和(6.12)式,由对称变换(5.2)相联系.

为了证明麦克斯韦方程组也满足,我们现从最简单的恒等式开始.

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{A}^T &= 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{E}_i^c &= 4\pi \varepsilon_i \delta^3(\boldsymbol{\xi} - \mathbf{x}_i), \\ \nabla \cdot (\mathbf{a}_i \times \mathbf{H}_i^c) &= 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{H}_i^c &= 4\pi g_i \delta^3(\boldsymbol{\xi} - \mathbf{X}_i). \end{aligned} \quad (6.13)$$

这些方程与(4.13)式联合立刻给出两个麦克斯韦方程:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= \sum_i 4\pi \varepsilon_i \delta^3(\boldsymbol{\xi} - \mathbf{x}_i), \\ \nabla \cdot \mathbf{H} &= \sum_i 4\pi g_i \delta^3(\boldsymbol{\xi} - \mathbf{X}_i). \end{aligned} \quad (6.14)$$

因 $\nabla \times \mathbf{E}_i^c = 0$, 则由(4.13)式立刻得到,

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} + \dot{\mathbf{H}} &= -\sum_i \nabla_{\boldsymbol{\xi}} \times (\mathbf{a}_i \times \mathbf{H}_i^c) + \sum_i \dot{\mathbf{H}}_i^c \\ &= -\sum_i \mathbf{a}_i (\nabla \cdot \mathbf{H}_i^c) + \sum_i (\mathbf{a}_i \cdot \nabla_{\boldsymbol{\xi}}) \mathbf{H}_i^c + \sum_i \dot{\mathbf{H}}_i^c. \end{aligned}$$

因 $\mathbf{a}_i = \dot{\mathbf{X}}_i$, $\mathbf{H}_i^c$ 是 $\boldsymbol{\xi} - \mathbf{X}_i$ 的函数,最后两项互相抵消. 故

$$\nabla \times \mathbf{E} + \dot{\mathbf{H}} = -\sum_i 4\pi g_i \dot{\mathbf{X}}_i \delta^3(\boldsymbol{\xi} - \mathbf{X}_i), \quad (6.15)$$

这是麦克斯韦方程组中的一个方程. 类似地,不从(4.13)式而是从(5.1)式出发,我们有

$$\nabla \times \mathbf{H} - \dot{\mathbf{E}} = \sum_i 4\pi \varepsilon_i \dot{\mathbf{x}}_i \delta^3(\boldsymbol{\xi} - \mathbf{x}_i), \quad (6.16)$$

这是第四个麦克斯韦方程. (6.16)式也可由(6.15)式经对称运算(5.2)式得到. 这正是我们所期望的.

至此,我们已经证明了,哈密顿量(3.1)确实给出了描写电子、磁单极子、光子间的相互作用的正确的动力学方程组.

七、几点说明

1. 在本文中, 我们已经讨论了有限数目的电子、磁单极子与电磁场的相互作用系统. 负能态暂未考虑在内.

2. 严格地说, 算符 $E(\mathbf{x}_i)$ 是无限的, 这因自电场是无限的. 这个问题和没有磁单极的通常理论是一样的. 重正化手续(这一点我们将在以后的文章中讨论)将部分地回答这个问题.

3. 如果我们以 J 表示(5.2)式给出的对称运算, 则它具有下述性质

$$J^4 = 1.$$

这与虚数 $i = \sqrt{-1}$ 的乘法运算相似.

本工作是作者1976年夏访问欧洲核子研究中心(CERN)时开始的, 该中心理论部为我们进行该项研究提供了方便条件, 对此我们表示深切的感谢.

参 考 文 献

- [1] Dirac, P. A. M., *Proc. Roy. Soc.*, **A133** (1931), 60.
- [2] Dirac, P. A. M., *Phys. Rev.*, **74** (1948), 817; Schwinger, J., *Particles, Sources and Fields*, Addison-Wseley, Reading, Mass., 1970 and 1973.
- [3] 吴大峻、杨振宁, *Nucl. Phys.*, **B107** (1976), 365; *Phys. Rev.*, **D16** (1977), 1018
- [4] 吴大峻、杨振宁, *Phys. Rev.*, **D14** (1976), 437.
- [5] Fermi, E., *Rev. Mod. Phys.*, **4** (1932), 125.
- [6] 杨振宁, *Annals of N. Y. Acad. Science*, **294** (1977), 86.