有限理性研究的博弈论模型

献给越民义教授 100 华诞

俞建¹, 贾文生^{2*}

1. 贵州大学数学与统计学院, 贵阳 550025;

2. 贵州大学科学技术研究院, 贵阳 550025

E-mail: jyu1@gzu.edu.cn, wsjia@gzu.edu.cn

收稿日期: 2019-08-26; 接受日期: 2020-04-23; 网络出版日期: 2020-09-08; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11561013) 资助项目

摘要 本文介绍有限理性研究中的博弈论模型. 本文指出在博弈论与经济学模型中考虑有限理性作用, 一般来说不会产生较大的影响和冲击, 因而对于建立在完全理性假设之上的模型分析结果, 大多数情况下仍然是合理的和可以接受的. 作为应用, 本文还对最优化问题给出了两个逼近定理.

关键词 博弈论 最优化 逼近定理

MSC (2010) 主题分类 91A10, 91A26, 91A44

1 引言

我们知道, Von Neumann 和 Nash 分别建立了矩阵博弈和 n 人非合作有限博弈的模型, 并证明了平衡点的存在性定理. 1954 年, Arrow 和 Debreu^[1] 应用广义博弈平衡点的存在性定理, 证明了数理经济学中一般均衡的存在性定理, 产生了巨大的影响, 因此分别在 1972 和 1983 年获得 Nobel 经济学奖. 近些年来, 博弈论研究极其活跃. 自 1994 年以来, Nobel 经济学奖已有 7 次授予博弈论研究与应用的大师.

无论是 Von Neumann 的矩阵博弈、Nash 的 n 人非合作有限博弈, 还是 Arrow-Debreu 数理经济学中的一般均衡模型, 其基础都建立在决策者完全理性的假设之上, 即每个决策者都能够在一定的约束条件下作出对自己最为有利的选择, 这就是经济学中的利益最大化原则, 它是当前经济学 (也是博弈论) 中的一个最基础、也是最核心的原则.

上述完全理性的模型是漂亮和精致的, 有关结论的数学证明是严格的, 但是它们的假设太理想了, 在应用中当然受到了一定的限制.

应当指出的是所谓利益, 不仅包括收入, 也包括风险、休闲、声望和社会责任等, 因此, 它可以是利己的, 也可以是利他或部分利他的.

英文引用格式: Yu J, Jia W S. Game model in the study of bounded rationality (in Chinese). Sci Sin Math, 2020, 50: 1375–1386, doi: 10.1360/SSM-2019-0208

数学在经济学中的应用,是与经济学中利益最大化原则密切相关的.如果在模型中决策者只有一个,那就应用种种最优化方法;如果在模型中决策者不止一个,每个决策者都追求自身利益的最大化,且他们的利益是相互关联的(在很多情况下是互有冲突的),那只有达到平衡,这就是博弈论,而平衡点就是不动点,就要应用非线性分析的方法.应当说,相比最优化方法,博弈论则更具普遍性,因为它是更加接近实际的行为互动的决策科学,它与当今世界经济和社会的发展潮流是一致的.当然,博弈论与最优化方法并不是对立的,很多博弈的平衡点,也还是要通过最优化方法来求得,例如,矩阵博弈的平衡点,就可以用线性规划的算法来求得.

Simon^[2]对完全理性的假设进行了深刻的质疑和批判:“在关于理性的论述方面,社会科学深受着‘精神分裂症’之苦.在一个极端,经济学家给经济人赋以一种全智全能的荒谬理性.这种经济人有一个完整而内在一致的偏好体系,使其总能够在他所面临的备选方案当中作出抉择;他总是完全了解有哪些备选的替代方案;他为择优而进行的计算,不受任何复杂性的限制;……他具有很大的智慧和美学魅力;但同具有血肉之躯的人的真实行为(或可能的行为),看不出有多大关系.”

Simon 提出了有限理性理论,而其核心是满意原则,就是使决策者感到满意的原则.他认为问题本身是近似的,其求解方法也是近似的,只能寻求某种近似的、但已经是足够好的、可以使决策者满意和放心的方案或策略.同时他还指出(参见文献[3]),有限理性理论“只能建立在心理学研究的基础之上”.

满意原则当然有它的合理性,但是什么是满意?究竟能否应用一些心理学理论,用实验数据对原有模型的系统性偏差进行种种修正,并据此替代利益最大化原则,从而为博弈论和经济学建立起严格而漂亮的新体系呢?这在学术界是有很多争论的.客观地说,这些年来有进展,但进展不是很大,至少还有很长的路要走.国际著名博弈论学者 Binmore^[4]就指出:“Simon 曾引入满意概念开辟了有限理性下的经济理论研究,但从那时到现在,这个领域的进展一直暧昧不明.”2017年,诺贝尔经济学奖获得者 Thaler 指出(参见文献[5]):“许多经济学家继续使用理性假设,因为他们认为没有更好的替代.”

大多数决策者总是理性的,在大多数情况下总是追求自身利益最大化的,这一点必须肯定.另一方面,每个决策者都有自己独立的价值体系,自身利益并不限于收入,它不必是利己的,可以是利他或部分利他的,这一点也必须肯定.我们应当思考这样的问题:在博弈论与经济学模型中考虑有限理性作用,是否会对建立在完全理性假设之上的模型分析结果产生影响或冲击呢?如果回答是基本正面的,即一般来说不会产生较大的影响或冲击,那么对于建立在完全理性假设之上的模型分析结果,大多数情况下仍然是合理的和可以接受的.本文的主要目的就是要介绍有限理性研究的博弈论模型,并对此问题作出基本正面的回答,同时也是对 Simon 质疑和批判的一个回应.

2 预备知识

为了叙述并证明本文的主要结果,需要以下预备知识.

2.1 Hausdorff 距离

设 (X, d) 是一个度量空间, A 是 X 中的一个非空有界子集, $\forall \epsilon > 0$, 记

$$\cup(\epsilon, A) = \{x \in X : \text{存在 } a \in A, \text{使得 } d(a, x) < \epsilon\}.$$

因为

$$\cup(\epsilon, A) = \bigcup_{a \in A} O(a, \epsilon),$$

而 $\forall a \in A$, $O(a, \epsilon)$ 是开集, 故 $\cup(\epsilon, A)$ 必是开集.

设 A 和 B 是 X 中的任意两个非空有界集, 定义

$$h(A, B) = \inf\{\epsilon > 0 : A \subset \cup(\epsilon, B), B \subset \cup(\epsilon, A)\},$$

称 $h(A, B)$ 为 A 与 B 之间的 Hausdorff 距离.

引理 2.1 设 (X, d) 是一个度量空间, h 是定义在 X 上的 Hausdorff 距离, 则

- (1) 对 X 中任意两个非空有界集 A 和 B , 有 $h(A, B) \geq 0$, 而 $h(A, B) = 0$ 当且仅当 $\bar{A} = \bar{B}$;
- (2) 对 X 中任意的两个非空有界集 A 和 B , 有 $h(A, B) = h(B, A)$;
- (3) 对 X 中任意的 3 个非空有界集 A 、 B 和 C , 有 $h(A, B) \leq h(A, C) + h(C, B)$.

设 $\{A_n\}$ 是度量空间 X 中的一列非空有界子集, A 是 X 中的一个非空有界子集, 如果 $h(A_n, A) \rightarrow 0$, 则称序列 $\{A_n\}$ 收敛于 A , 记作 $A_n \rightarrow A$.

以下两个引理参见文献 [6].

引理 2.2 设 $\{A_n\}$ 是度量空间 X 中的一列非空有界子集, A 是 X 中的一个非空有界子集, $A_n \rightarrow A$, 则

- (1) 如果 G 是 X 中的一个开集, $G \cap A \neq \emptyset$, 则存在正整数 N , 使得 $\forall n \geq N$, 有 $G \cap A_n \neq \emptyset$;
- (2) $\forall x \in A$, 存在 $x_n \in A_n$, $n = 1, 2, 3, \dots$, 使得 $x_n \rightarrow x$;
- (3) 如果 A 是紧的, $x_n \in A_n$, $n = 1, 2, 3, \dots$, 则存在 $\{x_n\}$ 的一个子序列 $\{x_{n_k}\}$, 使得 $x_{n_k} \rightarrow x \in A$.

引理 2.3 设 X 和 Y 是两个度量空间, $f: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ 连续, $\{y_n\}$ 是 Y 中的一个序列, $y_n \rightarrow y$, $\{A_n\}$ 是 X 中的一列紧集, $A_n \rightarrow A$, 其中 A 是 X 中的一个紧集, 则

$$\max_{w \in A_n} f(w, y_n) \rightarrow \max_{w \in A} f(w, y).$$

2.2 集值映射的连续性

设 X 和 Y 是两个度量空间, $P_0(Y)$ 是 Y 中所有非空子集的集合, $F: X \rightarrow P_0(Y)$ 是一个集值映射, 即 $\forall x \in X$, $F(x)$ 是 Y 中的一个非空子集.

$x \in X$, 如果对 Y 中的任意开集 G , $G \supset F(x)$, 存在 x 的开邻域 $O(x)$, 使得 $\forall x' \in O(x)$, 有 $G \supset F(x')$, 则称集值映射 F 在 x 是上半连续的; 如果对 Y 中的任意开集 G , $G \cap F(x) \neq \emptyset$, 存在 x 的开邻域 $O(x)$, 使得 $\forall x' \in O(x)$, 有 $G \cap F(x') \neq \emptyset$, 则称集值映射 F 在 x 是下半连续的; 如果 F 在 x 既上半连续又下半连续, 则称集值映射 F 在 x 是连续的.

引理 2.4 设 X 和 Y 是两个度量空间, 集值映射 $F: X \rightarrow P_0(Y)$ 满足 $\forall x \in X$, $F(x)$ 是 Y 中的非空紧集, 则

- (1) F 在 x 是上半连续的当且仅当 $\forall \epsilon > 0$, 存在 x 的开邻域 $O(x)$, 使得 $\forall x' \in O(x)$, 有

$$F(x') \subset \cup(\epsilon, F(x));$$

- (2) F 在 x 是下半连续的当且仅当 $\forall \epsilon > 0$, 存在 x 的开邻域 $O(x)$, 使得 $\forall x' \in O(x)$, 有

$$F(x) \subset \cup(\epsilon, F(x'));$$

(3) F 在 x 是连续的当且仅当 $\forall \epsilon > 0$, 存在 x 的开邻域 $O(x)$, 使得 $\forall x' \in O(x)$, 有

$$h(F(x), F(x')) < \epsilon,$$

其中 h 是 Y 上的 Hausdorff 距离.

引理 2.5 设 X 和 Y 是两个度量空间, 集值映射 $F : X \rightarrow P_0(Y)$ 在 $x \in X$ 是上半连续的且 $F(x)$ 是非空紧集, 则 $\forall x_n \rightarrow x, \forall y_n \in F(x_n), \{y_n\}$ 必有子序列 $\{y_{n_k}\}$, 使得

$$y_{n_k} \rightarrow y \in F(x).$$

设 X 是一个度量空间, 如果 X 中的子集 Q 包含一列在 X 中稠密的开集的交集, 则称 Q 是 X 中的一个剩余集 (residual set). 可数个无处稠密集集的并集称为第一纲集, 否则就称为第二纲集. 如果 X 是完备的, Q 是 X 中的一个剩余集, 则 Q 必是稠密的第二纲集. 如果 $\forall x \in Q$, 依赖于 x 的性质 P 成立, 则称性质 P 在 X 上是通有成立的, 因为在 Baire 分类的意义上或者在非线性和拓扑学的意义上, 第一纲集被认为是一个“小集”, 这样就可以说, 对大多数的 $x \in X$, 依赖于 x 的性质 P 是成立的.

引理 2.6^[7] 设 X 和 Y 是两个度量空间, $F : X \rightarrow P_0(Y)$ 是一个集值映射, $\forall x \in X, F(x)$ 是紧集且 F 在 x 是上半连续的, 则存在 X 中一个剩余集 Q , 使得 $\forall x \in Q$, 集值映射 F 在 x 是下半连续从而是连续的.

引理 2.7 设 X 和 Y 是两个度量空间, 其中 X 是完备的, $F : X \rightarrow P_0(Y)$ 是一个集值映射, $\forall x \in X, F(x)$ 是紧集且 F 在 x 是上半连续的, 则存在 X 中一个第二纲的稠密剩余集 Q , 使得 $\forall x \in Q$, 集值映射 F 在 x 是下半连续从而是连续的, 且

$$\lim_{x' \rightarrow x} h(F(x'), F(x)) = 0,$$

其中 h 是 X 上的 Hausdorff 距离.

注 2.1 注意到引理 2.7 和 2.6 是有差别的, 文献 [8] 就明确指出了这一点. 因为引理 2.6 由 Fort 较早提出, 证明也较难, 通常还是将引理 2.7 称为 Fort 定理.

2.3 伪连续函数

以下伪连续函数的定义参见文献 [9], 也可参见文献 [6].

设 X 是一个度量空间, 函数 $f : X \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in X$, 如果 $\forall x \in X, f(x) < f(x_0)$, 必有

$$f(x) < \lim_{z \rightarrow x_0} f(z),$$

则称函数 f 在 x_0 是下伪连续的.

如果 $\forall x \in X, f(x) > f(x_0)$, 必有

$$f(x) > \overline{\lim}_{z \rightarrow x_0} f(z),$$

则称函数 f 在 x_0 是上伪连续的.

如果 f 在 x_0 既下伪连续又上伪连续, 则称函数 f 在 x_0 是伪连续的 (pseudo continuous).

如果 f 在 x_0 下半连续, 则易知 f 在 x_0 必是下伪连续的, 反之不然, 但以下结果仍然成立: 如果 A 是 X 中的一个紧集, 而 $\forall x \in A, f$ 在 x 是下伪连续的, 则存在 $x^* \in A$, 使得

$$f(x^*) = \min_{x \in A} f(x).$$

引理 2.8 设 X 是一个度量空间, $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ 是一个函数.

(1) 如果 f 在 X 上是下伪连续的, $\forall x \in X, \forall z \in X, f(x) < f(z)$, 则存在 $\delta_0 > 0$, 使得

$$f(x) + \delta_0 < \liminf_{z' \rightarrow z} f(z');$$

(2) 如果 f 在 X 上是伪连续的, $\forall x \in X, \forall z \in X, f(x) < f(z)$, 则存在 $\delta_0 > 0$, 使得

$$\overline{\lim}_{x' \rightarrow x} f(x') + \delta_0 < \liminf_{z' \rightarrow z} f(z').$$

3 有限理性研究的博弈论模型

2001 年, Anderlini 和 Canning^[10] 用博弈论的语言建立了有限理性研究的抽象模型, 它是一类带有抽象理性函数的一般博弈 (general games). 模型 M 的建立是很有创新性的, 但是其假设条件太强, 很多重要的博弈论和经济学模型都无法满足. 文献 [11–15] 对此模型进行了必要的改造, 将文献 [10] 中的假设条件大大减弱, 不仅扩大了模型应用范围, 还得到了一系列新的相当深刻的定理.

设模型为 $M = \{\Lambda, X, f, \phi\}$, 其中 (Λ, ρ) 是一个度量空间, $\forall \lambda \in \Lambda, \lambda$ 表示一个博弈; $f: \Lambda \rightarrow \mathcal{P}_0(X)$ 是一个集值映射, 其中 (X, d) 是一个度量空间, $f(\lambda) \subset X$ 表示博弈 λ 的可行策略集; $\phi: \Lambda \times X \rightarrow \mathbb{R}$ 是理性函数, 当 $x \in f(\lambda)$ 时, 有 $\phi(\lambda, x) \geq 0$. $\forall \varepsilon > 0, E(\lambda, \varepsilon) = \{x \in f(\lambda) : \phi(\lambda, x) \leq \varepsilon\}$ 表示博弈 λ 的 ε -平衡点集, 它对应于有限理性; $E(\lambda) = \{x \in f(\lambda) : \phi(\lambda, x) = 0\}$ 表示博弈 λ 的平衡点集, 它对应于完全理性.

$\lambda \in \Lambda$, 如果 $\forall \delta > 0$, 存在 $\bar{\varepsilon} > 0$, 当 $\varepsilon < \bar{\varepsilon}, \rho(\lambda, \lambda') < \bar{\varepsilon}$ 时, 有

$$h(E(\lambda', \varepsilon), E(\lambda')) < \delta,$$

则称模型 M 在 λ 对 ε -平衡点集是鲁棒的, 其中 h 是 X 上的 Hausdorff 距离. 如果平衡映射 $E: \Lambda \rightarrow \mathcal{P}_0(X)$ 在 λ 是连续的, 则称模型 M 在 λ 是结构稳定的. 如果平衡映射 E 在某些 $\lambda \in \Lambda$ 不是连续的, 则称这样的 λ 为临界参数值, 简称临界值. 以下是本节主要结果 (定理 3.1 和 3.2) 的一些假设条件:

(H₁) 集值映射 $f: \Lambda \rightarrow \mathcal{P}_0(X)$ 在 Λ 上是上半连续的, 且 $\forall \lambda \in \Lambda, f(\lambda)$ 是非空紧集;

(H₂) 函数 $\phi: \Lambda \times X \rightarrow \mathbb{R}$ 满足当 $x \in f(\lambda)$ 时 $\phi(\lambda, x) \geq 0$, 且此时 $\phi(\lambda, x)$ 对 (λ, x) 是下伪连续的;

(H₃) $\forall \lambda \in \Lambda, E(\lambda) \neq \emptyset$.

定理 3.1 如果 (H₁)–(H₃) 成立, 则

(1) 平衡映射 $E: \Lambda \rightarrow \mathcal{P}_0(X)$ 在 Λ 上是上半连续的, 且 $\forall \lambda \in \Lambda, E(\lambda)$ 是非空紧集;

(2) 如果 Λ 是完备度量空间, 则存在 Λ 中的一个第二纲的稠密剩余集 Q , 使得 $\forall \lambda \in Q, M$ 在 λ 是结构稳定的;

(3) 如果 M 在 $\lambda \in \Lambda$ 是结构稳定的, 则 M 在 λ 对 ε -平衡点集必是鲁棒的, 因而, 如果 Λ 是完备度量空间, 则 $\forall \lambda \in Q, M$ 在 λ 对 ε -平衡点集也必是鲁棒的.

证明 (1) $\forall \lambda \in \Lambda$, 首先证明 $E(\lambda)$ 是非空紧集. 由 (H_3) 知, $E(\lambda) \neq \emptyset$. 因 $E(\lambda) \subset f(\lambda)$, 而由 (H_1) 知, $f(\lambda)$ 是非空紧集, 故只需证明 $E(\lambda)$ 是闭集. $\forall x_n \in E(\lambda)$, $x_n \rightarrow x$, 由 $x_n \in f(\lambda)$ 得 $x \in f(\lambda)$, 且 $\forall n = 1, 2, 3, \dots$, 有 $\phi(\lambda, x_n) = 0$. 如果 $x \notin E(\lambda)$, 则 $\phi(\lambda, x) > 0$. 因 $0 = \phi(\lambda, x_1) < \phi(\lambda, x)$, 由 (H_2) , 有

$$0 = \phi(\lambda, x_1) < \lim_{n \rightarrow \infty} \phi(\lambda, x_n) = 0,$$

矛盾, 故 $x \in E(\lambda)$, $E(\lambda)$ 是闭集从而是紧集.

以下用反证法. 如果集值映射 E 在 $\lambda \in \Lambda$ 不是上半连续的, 则存在 X 中的开集 O , $E(\lambda) \subset O$, 存在 $\lambda_n \in \Lambda$, $\lambda_n \rightarrow \lambda$, 存在 $x_n \in E(\lambda_n)$, 而 $x_n \notin O$, $n = 1, 2, 3, \dots$. 因 $x_n \in f(\lambda_n)$, $\lambda_n \rightarrow \lambda$, (H_1) 成立, 由引理 2.5 知, 存在 $\{x_n\}$ 的子序列 $\{x_{n_k}\}$, 使得

$$x_{n_k} \rightarrow x \in f(\lambda).$$

如果 $x \notin E(\lambda)$, 则 $\phi(\lambda, x) > 0$, 因为 $0 = \phi(\lambda_{n_1}, x_{n_1}) < \phi(\lambda, x)$, 由 (H_2) , 有

$$0 = \phi(\lambda_{n_1}, x_{n_1}) < \lim_{n_k \rightarrow \infty} \phi(\lambda_{n_k}, x_{n_k}) = 0,$$

矛盾, 故 $x \in E(\lambda) \subset O$, 这与 O 是开集、 $x_{n_k} \rightarrow x$ 、而 $x_{n_k} \notin O$ 矛盾, 故平衡映射 E 在 λ 必是上半连续的.

(2) 因 Λ 是完备度量空间, 由 (1) 和引理 2.7 知, 存在 X 中的一个第二纲的稠密剩余集 Q , 使得 $\forall \lambda \in Q$, 平衡映射 E 在 λ 是下半连续从而是连续的, 故模型 M 在 $\lambda \in Q$ 是结构稳定的.

(3) 用反证法, 如果结论不成立, 则存在 $\delta_0 > 0$, 存在 $\lambda_n \rightarrow \lambda$, $\varepsilon_n \rightarrow 0$, 使得

$$h(E(\lambda_n, \varepsilon_n), E(\lambda_n)) \geq \delta_0.$$

因 $E(\lambda_n) \subset E(\lambda_n, \varepsilon_n)$, 可选取 $x_n \in E(\lambda_n, \varepsilon_n)$, 使得

$$\min_{w \in E(\lambda_n)} d(x_n, w) > \frac{\delta_0}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

因 $x_n \in E(\lambda_n, \varepsilon_n)$, 有 $x_n \in f(\lambda_n)$, 又因 $\lambda_n \rightarrow \lambda$, (H_1) 成立, 由引理 2.5 知, 必存在 $\{x_n\}$ 的子序列 $\{x_{n_k}\}$, 使得

$$x_{n_k} \rightarrow x \in f(\lambda).$$

如果 $x \notin E(\lambda)$, 则

$$\phi(\lambda, x) > 0.$$

因 $\phi(\lambda_{n_k}, x_{n_k}) \leq \varepsilon_{n_k}$, 且 $\varepsilon_{n_k} \rightarrow 0$, 故当 n_{k_0} 充分大时, 有 $\phi(\lambda_{n_{k_0}}, x_{n_{k_0}}) < \phi(\lambda, x)$. 由 (H_2) , 必有

$$0 \leq \phi(\lambda_{n_{k_0}}, x_{n_{k_0}}) < \lim_{n_k \rightarrow \infty} \phi(\lambda_{n_k}, x_{n_k}) = 0,$$

矛盾, 故 $x \in E(\lambda)$.

因 M 在 λ 是结构稳定的, 故集值映射 E 在 λ 是连续的, $h(E(\lambda_{n_k}), E(\lambda)) \rightarrow 0$. 因

$$\min_{w \in E(\lambda_{n_k})} d(x_{n_k}, w) > \frac{\delta_0}{2}, \quad x_{n_k} \rightarrow x,$$

由引理 2.3, 必有

$$\min_{w \in E(\lambda)} d(x, w) \geq \frac{\delta_0}{2},$$

这与 $x \in E(\lambda)$ 矛盾, 故 M 在 λ 对 ε -平衡点集必是鲁棒的. 如果 Λ 是完备度量空间, 则相关结论由 (2) 即推出. $\square$

定理 3.2 如果 (H_1) – (H_3) 成立, Λ 是完备度量空间, 则存在 Λ 中的一个第二纲的稠密剩余集 Q , 使得 $\forall \lambda \in Q, \forall \lambda_n \rightarrow \lambda, \forall \varepsilon_n \rightarrow 0$, 有

$$h(E(\lambda_n, \varepsilon_n), E(\lambda)) \rightarrow 0.$$

证明 由定理 3.1(2) 和 3.1(3), 因 $\lambda \in Q, \lambda_n \rightarrow \lambda, \varepsilon_n \rightarrow 0$, 有

$$\begin{aligned} h(E(\lambda_n), E(\lambda)) &\rightarrow 0, \\ h(E(\lambda_n, \varepsilon_n), E(\lambda_n)) &\rightarrow 0. \end{aligned}$$

再由

$$h(E(\lambda_n, \varepsilon_n), E(\lambda)) \leq h(E(\lambda_n, \varepsilon_n), E(\lambda_n)) + h(E(\lambda_n), E(\lambda)),$$

得

$$h(E(\lambda_n, \varepsilon_n), E(\lambda)) \rightarrow 0.$$

证毕. $\square$

注 3.1 由定理 3.1(2), 如果 Λ 是完备度量空间, 则存在 Λ 中的一个第二纲的稠密剩余集 Q , 使得 $\forall \lambda \in Q, M$ 在 λ 是结构稳定的. 注意到 M 在 λ 是结构稳定的, 即表示平衡映射 $E: \Lambda \rightarrow \mathcal{P}_0(X)$ 在 λ 是连续的, 即博弈 λ 是本质的 (essential). Wu 和 Jiang^[16] 首先对 n 人非合作有限博弈提出了本质平衡点的概念, 并得到了任何 n 人非合作有限博弈都可以通过本质博弈 (即其所有平衡点都是本质的) 作任意逼近的深刻结果. 关于他们工作的背景等介绍, 可参见文献 [17]. 他们的结果又被文献 [18–20] 等推广至一般的 n 人非合作博弈、广义博弈和许多非线性问题解集的稳定研究中去.

注 3.2 由定理 3.2 知, $\forall \lambda \in Q, \forall \lambda_n \rightarrow \lambda, \varepsilon_n \rightarrow 0$, 有

$$h(E(\lambda_n, \varepsilon_n), E(\lambda)) \rightarrow 0.$$

这表明当 $\lambda \in Q$ 时, 虽然博弈 λ_n 是近似的 ($\lambda_n \rightarrow \lambda$), 求解方法也是近似的 ($\varepsilon_n \rightarrow 0$), 但可以用有限理性得到的 ε_n -平衡点集 $E(\lambda_n, \varepsilon_n)$ 来近似代替完全理性得到的平衡点集 $E(\lambda)$. Q 是第二纲的稠密剩余集, 这表明在 Baire 分类的意义上, 或者在非线性和拓扑学的意义上, 有限理性的引入不会对完全理性假设之上的模型分析结果产生较大的影响或冲击, 这是一个很有理论意义的结果, 也是对之前 Simon 的质疑和批判的一个回应.

注 3.3 当 $\lambda \notin Q$ 又将如何? 由定理 3.1(1), 因平衡映射 $E: \Lambda \rightarrow \mathcal{P}_0(X)$ 在 λ 是上半连续的, 故 $\forall \lambda_n \rightarrow \lambda, \forall \delta > 0$, 存在正整数 N , 使得 $\forall n \geq N$, 有

$$E(\lambda_n) \subset \cup(\delta, E(\lambda)).$$

实际上, 还可以进一步证明 $\forall \lambda_n \rightarrow \lambda, \forall \varepsilon_n \rightarrow 0, \forall \delta > 0$, 存在正整数 N , 使得 $\forall n \geq N$, 有

$$E(\lambda_n, \varepsilon_n) \subset \cup(\delta, E(\lambda)).$$

证明如下. 用反证法. 如果结论不成立, 则存在 $\delta_0 > 0$, 存在 $\lambda_n \rightarrow \lambda, \varepsilon_n \rightarrow 0$, 存在 $x_n \in E(\lambda_n, \varepsilon_n)$, 而 $x_n \notin \cup(\delta_0, E(\lambda))$.

因 $x_n \in f(\lambda_n)$, $\lambda_n \rightarrow \lambda$, 且 (H_1) 成立, 由引理 2.5, 不妨设 $x_n \rightarrow x^* \in f(\lambda)$. 如果 $x^* \notin E(\lambda)$, 则 $\phi(\lambda, x^*) > 0$. 因 $\phi(\lambda_n, x_n) \leq \varepsilon_n$, 而 $\varepsilon_n \rightarrow 0$, 故当 n_0 充分大时, 必有

$$\phi(\lambda_{n_0}, x_{n_0}) < \phi(\lambda, x^*).$$

因 (H_2) 成立, 故必有

$$0 \leq \phi(\lambda_{n_0}, x_{n_0}) < \lim_{n \rightarrow \infty} \phi(\lambda_n, x_n) = 0,$$

矛盾, 故 $x^* \in E(\lambda)$.

因 $x_n \notin \cup(\delta_0, E(\lambda))$, 而 $x^* \in E(\lambda)$, 故

$$x_n \notin O(x^*, \delta_0),$$

这与 $x_n \rightarrow x^*$ 矛盾.

注 3.4 对平衡点集稳定性更加深入的研究是其本质连通区的存在性问题, 可参见文献 [20–26].

4 最优化问题与逼近定理

文献 [27] 指出 “有时将大自然和人看作一对局中人也是极有好处的”, 文献 [28] 也指出 “决策论也可被认为是一种两人博弈, 只不过其中一方是一个虚构的参与者—自然”.

由此, 可以将最优化等决策问题看作决策者与虚拟的决策者 “自然” 之间的博弈问题. 当决策者是完全理性时, 他就得到最优解; 而当决策者是有限理性时, 他就得到 ε - 最优解. 一个最优化算法, 往往是通过迭代, 通过 f 在 A 上的 ε_n - 最优解的一个序列 ($\varepsilon_n \rightarrow 0$) 来逼近 f 在 A 上的最优解; 或者更一般地, 往往是通过迭代, 通过 f_n (满足 $f_n \rightarrow f$) 在 A_n (满足 $A_n \rightarrow A$) 上的 ε_n - 最优解的一个序列 ($\varepsilon_n \rightarrow 0$) 来逼近 f 在 A 上的最优解. 推而广之, 数学中各种迭代算法, 或者说逐次逼近算法, 往往都是通过有限理性来逼近完全理性.

以下是两个最优化问题逼近定理.

定理 4.1 设 (X, d) 和 Y 是两个度量空间, 其中 Y 是描述与决策者心理等有关的参数空间, 而 $y^* \in Y$ 对应于决策者完全理性时的特定参数值, $f: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ 是伪连续的, 假设

(i) $\{f_n\}$ 是一列定义在 $X \times Y$ 上的实值函数, 满足

$$\sup_{(x,y) \in X \times Y} |f_n(x, y) - f(x, y)| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty);$$

(ii) $\{A_n\}$ 是 X 中的一列非空子集, 满足 Hausdorff 距离

$$h(A_n, A) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

其中 A 是 X 中的一个非空紧集;

(iii) $\{y_n\} \subset Y, y_n \rightarrow y^* (n \rightarrow \infty)$;

(iv) $\forall n = 1, 2, 3, \dots, x_n \in A_n$ 满足 $d(x_n, A_n) \rightarrow 0$, 且

$$f_n(x_n, y_n) \leq \inf_{x \in A_n} f_n(x, y_n) + \varepsilon_n,$$

其中 $\varepsilon_n \geq 0, \varepsilon_n \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$, 则

(1) 序列 $\{x_n\}$ 必有子序列 $\{x_{n_k}\}$, 使得 $\{x_{n_k}\} \rightarrow x^* \in A$;

(2) $f(x^*, y^*) = \min_{x \in A} f(x, y^*)$;

(3) 如果 $f(x, y^*)$ 在 $x \in A$ 上的极小点集是单点集 $\{x^*\}$, 则必有 $x_n \rightarrow x^*$.

证明 (1) $\forall n = 1, 2, 3, \dots$, 由 $d(x_n, A_n) \rightarrow 0$ 知, 存在 $x'_n \in A_n$, 使得 $d(x_n, x'_n) \rightarrow 0$. 因 (ii) 成立, 故由引理 2.2(3) 知, 存在 $\{x'_n\}$ 的子序列 $\{x'_{n_k}\}$, 使得 $x'_{n_k} \rightarrow x^* \in A$, 因 $d(x_{n_k}, x'_{n_k}) \rightarrow 0$, 故

$$x_{n_k} \rightarrow x^* \in A.$$

(2) 由以上 (1), 不妨设 $x_n \rightarrow x^* \in A$. 以下用反证法. 如果 (2) 的结论不成立, 则存在 $u_0 \in A$, 使得

$$f(u_0, y^*) < f(x^*, y^*).$$

因 f 在 $X \times Y$ 上是伪连续的, 故由引理 2.8(2) 知, 存在 $\delta_0 > 0$, 使得

$$\overline{\lim}_{(u', y') \rightarrow (u_0, y^*)} f(u', y') + \delta_0 < \underline{\lim}_{(x', y') \rightarrow (x^*, y^*)} f(x', y').$$

存在 u_0 在 X 中的开邻域 $O(u_0)$ 、 y^* 在 Y 中的开邻域 $U(y^*)$ 和 x^* 在 X 中的开邻域 $O(x^*)$, 使得 $\forall u' \in O(u_0), \forall y' \in U(y^*), \forall x' \in O(x^*)$, 有

$$f(u', y') + \delta_0 < f(x', y').$$

因 $y_n \rightarrow y^*, x_n \rightarrow x^*, u_0 \in A, A_n \rightarrow A$, 故由引理 2.2(1) 知, 存在正整数 N_1 , 使得 $\forall n \geq N_1$, 有 $y_n \in U(y^*), x_n \in O(x^*)$ 且 $O(u_0) \cap A_n \neq \emptyset$. 取 $u_n \in O(u_0) \cap A_n$, 则 $\forall n \geq N_1$, 有

$$f(u_n, y_n) + \delta_0 < f(x_n, y_n).$$

由 $\sup_{(x, y) \in X \times Y} |f_n(x, y) - f(x, y)| \rightarrow 0$ 且 $\varepsilon_n \rightarrow 0$ 可知, 存在正整数 N_2 , 不妨设 $N_2 > N_1$, 使得 $\forall n \geq N_2$, 有

$$\sup_{(x, y) \in X \times Y} |f_n(x, y) - f(x, y)| < \frac{\delta_0}{3}, \quad \text{且} \quad \varepsilon_n < \frac{\delta_0}{3}.$$

这样, $\forall n \geq N_2$, 有

$$f_n(x_n, y_n) > f(x_n, y_n) - \frac{\delta_0}{3} > f(u_n, y_n) + \frac{2}{3}\delta_0 > f_n(u_n, y_n) + \frac{\delta_0}{3} > f_n(u_n, y_n) + \varepsilon_n,$$

这与 $u_n \in A_n$ 和 $f_n(u_n, y_n) + \varepsilon_n \geq f_n(x_n, y_n)$ 矛盾, 故 (2) 的结论必成立.

(3) 用反证法. 如果 (3) 的结论不成立, 则存在 $\delta > 0$ 及 $\{x_n\}$ 的一个子序列 $\{x_{n_k}\}$, 使得

$$d(x_{n_k}, x^*) \geq \delta, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

由 (1), $\{x_{n_k}\}$ 又必有子序列, 不妨假设为 $\{x_{n_k}\}$, 使得 $x_{n_k} \rightarrow \bar{x} \in A$, 且由 (2), 有

$$f(\bar{x}, y^*) = \min_{x \in A} f(x, y^*).$$

因 $f(x, y^*)$ 在 $x \in A$ 上的极小点集是单点集 $\{x^*\}$, 故 $\bar{x} = x^*$, 这与 $d(x_{n_k}, x^*) \geq \delta$ 矛盾, 故 (3) 的结论必成立, $x_n \rightarrow x^*$. $\square$

注 4.1 定理 4.1 的结果是很有理论意义的: 目标函数是近似的, 可行解集是近似的, 参数是近似的, 求解精度也是近似的, 如此得到的是一个逼近序列 $\{x_n\}$, $\{x_n\}$ 必有收敛子列 $\{x_{n_k}\}$, 即

$$x_{n_k} \rightarrow x^* \in A,$$

而 x^* 必是最优化问题的解, 这显示了有限理性对完全理性的逼近.

定理 4.2 设 (X, d) 是一个度量空间, $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ 是下伪连续的, 假设

(i) $\{f_n\}$ 是一列定义在 X 上的实值函数, 满足

$$\sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty);$$

(ii) A 是 X 中的一个非空紧集;

(iii) $\forall n = 1, 2, 3, \dots, x_n \in X$, 满足 $d(x_n, A) \rightarrow 0$ 且

$$f_n(x_n) \leq \inf_{x \in A} f_n(x) + \varepsilon_n,$$

其中 $\varepsilon_n \geq 0, \varepsilon_n \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$, 则

(1) 序列 $\{x_n\}$ 必有子序列 $\{x_{n_k}\}$, 使得 $x_{n_k} \rightarrow x^* \in A$;

(2) $f(x^*) = \min_{x \in A} f(x)$;

(3) 如果 $f(x)$ 在 $x \in A$ 上的极小点集是单点集 $\{x^*\}$, 则必有 $x_n \rightarrow x^*$.

证明 (1) $\forall n = 1, 2, 3, \dots$, 由 $d(x_n, A) \rightarrow 0$ 知, 存在 $x'_n \in A$, 使 $d(x_n, x'_n) \rightarrow 0$. 因 A 是紧集, 故存在 $\{x'_n\}$ 的子序列 $\{x'_{n_k}\}$, 使得 $x'_{n_k} \rightarrow x^* \in A$. 因 $d(x_{n_k}, x'_{n_k}) \rightarrow 0$, 所以,

$$x_{n_k} \rightarrow x^* \in A.$$

(2) 由 (1), 不妨设 $x_n \rightarrow x^* \in A$. 以下用反证法. 若 (2) 的结论不成立, 则存在 $u_0 \in A$, 使得

$$f(u_0) < f(x^*).$$

因 f 在 X 上是下伪连续的, 由引理 2.8(1) 知, 存在 $\delta_0 > 0$, 使得

$$f(u_0) + \delta_0 < \liminf_{x' \rightarrow x^*} f(x').$$

存在 x^* 在 X 中的开邻域 $O(x^*)$, 使得 $\forall x' \in O(x^*)$, 有

$$f(u_0) + \delta_0 < f(x').$$

因 $x_n \rightarrow x^*$, 存在正整数 N_1 , 使得 $\forall n \geq N_1$, 有 $x_n \in O(x^*)$, 故

$$f(u_0) + \delta_0 < f(x_n).$$

由 $\sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0$ 且 $\varepsilon_n \rightarrow 0$ 知, 存在正整数 N_2 , 不妨设 $N_2 > N_1$, 使得 $\forall n \geq N_2$, 有

$$\sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| < \frac{\delta_0}{3}, \quad \text{且} \quad \varepsilon_n < \frac{\delta_0}{3}.$$

这样, $\forall n \geq N_2$, 有

$$f_n(x_n) > f(x_n) - \frac{\delta_0}{3} > f(u_0) + \frac{2}{3}\delta_0 > f_n(u_0) + \frac{\delta_0}{3} > f_n(u_0) + \varepsilon_n,$$

这与 $u_0 \in A$ 和 $f_n(u_0) + \varepsilon_n \geq f_n(x_n)$ 矛盾, 故 (2) 的结论必成立.

(3) 同定理 4.1(3) 的证明. □

致谢 作者感谢两位审稿老师中肯、富有建设性的意见, 这些宝贵意见修改时已采纳. 本文的主要结果曾在 2019 年 6 月由中国科学院数学与系统研究院等单位主办的“运筹学前沿国际研讨会”上报告, 作者对胡晓东教授的邀请表示感谢; 本文的部分结果曾以“有限理性与逼近定理”为题, 在 2017 年 10 月中国科学院数学与系统科学研究院系统科学研究所“关肇直讲座”上报告, 作者对杨晓光教授的邀请表示感谢.

参考文献

- 1 Arrow K J, Debreu G. Existence of an equilibrium for a competitive economy. *Econometrica*, 1954, 22: 265–290
- 2 Simon H A. 管理行为. 杨砾等, 译. 北京: 北京经济学院出版社, 1991
- 3 Durlauf S N, Blume L E. 新帕尔格雷夫经济学大辞典. 贾拥民等, 译. 北京: 经济科学出版社, 2016
- 4 Binmore K. 博弈论教程. 谢识予等, 译. 上海: 格致出版社, 2010
- 5 Roth A E. 经济学中的实验室实验六种观点. 聂庆, 译. 北京: 中国人民大学出版社, 2013
- 6 俞建. 有限理性与博弈论中平衡点集的稳定性. 北京: 科学出版社, 2017
- 7 Fort M K. Points of continuity of semicontinuous functions. *Publ Math Debrecen*, 1951, 2: 100–102
- 8 Carbonell-Nicolau O. Essential equilibria in normal-form games. *J Econom Theory*, 2010, 145: 421–431
- 9 Morgan J, Scalzo V. Pseudocontinuous functions and existence of Nash equilibria. *J Math Econom*, 2007, 43: 174–183
- 10 Anderlini L, Canning D. Structural stability implies robustness to bounded rationality. *J Econom Theory*, 2001, 101: 395–422
- 11 Yu C, Yu J. On structural stability and robustness to bounded rationality. *Nonlinear Anal*, 2006, 65: 583–592
- 12 Yu C, Yu J. Bounded rationality in multiobjective games. *Nonlinear Anal*, 2007, 67: 930–937
- 13 Yu J, Yang H, Yu C. Structural stability and robustness to bounded rationality for non-compact cases. *J Global Optim*, 2009, 44: 149–157
- 14 俞建. 博弈论与非线性分析续论. 北京: 科学出版社, 2011
- 15 Yu J, Yang Z, Wang N F. Further results on structural stability and robustness to bounded rationality. *J Math Econom*, 2016, 67: 49–53
- 16 Wu W T, Jiang J H. Essential equilibrium points of N -person noncooperative games. *Sci Sinica*, 1962, 11: 1307–1322
- 17 俞建. 本质博弈与 Nash 平衡点集的本质连通区. *系统工程理论与实践*, 2010, 30: 1798–1802
- 18 俞建. 对策论中的本质平衡. *应用数学学报*, 1993, 16: 153–157
- 19 Yu J. Essential equilibria of n -person noncooperative games. *J Math Econom*, 1999, 31: 361–372
- 20 俞建. 博弈论与非线性分析. 北京: 科学出版社, 2008
- 21 Jiang J H. Essential components of the set of fixed points of the multi-valued maps and its applications to the theory of games. *Sci Sinica*, 1963, 12: 951–964
- 22 Kohlberg E, Mertens J F. On the strategic stability of equilibria. *Econometrica*, 1986, 54: 1003–1037
- 23 Yu J, Xiang S W. On essential components of the set of Nash equilibrium points. *Nonlinear Anal*, 1999, 38: 259–264
- 24 Yu J, Luo Q. On essential components of the solution set of generalized games. *J Math Anal Appl*, 1999, 230: 303–310
- 25 Yang H, Yu J. Essential components of the set of weakly Pareto-Nash equilibrium points. *Appl Math Lett*, 2002, 15: 553–560
- 26 Zhou Y H, Yu J, Xiang S W. Essential stability in games with infinitely many pure strategies. *Internat J Game Theory*, 2007, 35: 493–503
- 27 中国科学院数学研究所第二室. 对策论 (博弈论) 讲义. 北京: 人民教育出版社, 1960
- 28 Montet C, Serra D. 博弈论与经济学. 张琦, 译. 北京: 经济管理出版社, 2005

Game model in the study of bounded rationality

Jian Yu & Wensheng Jia

Abstract In this paper, we introduce the game model in the study of bounded rationality. We point out that it generally does not have a great impact in game theory and economic models when considering the role of bounded rationality. Therefore, the model and its results based on the assumption of complete rationality are still reasonable and acceptable in most cases. As applications, two approximation theorems are also given for optimization problems.

Keywords game theory, optimization, approximation theorem

MSC(2010) 91A10, 91A26, 91A44

doi: 10.1360/SSM-2019-0208