中国科学: 数学 2021 年 第 51 卷 第 6 期: 847 ∼ 880
SCIENTIA SINICA Mathematica
自然科学基金项目进展专栏 综 述

《中国科学》杂志社
SCIENCE CHINA PRESS
CrossMark
click for updates

# Fourier 积分算子的局部光滑性及其相关研究

献给陈恕行教授 80 华诞

高传伟[1], 苗长兴[2*]
1. 北京大学北京国际数学研究中心, 北京 100871;
2. 北京应用物理与计算数学研究所, 北京 100088
E-mail: cwgao@pku.edu.cn, miao_changxing@iapcm.ac.cn

收稿日期: 2020-06-03; 接受日期: 2020-11-02; 网络出版日期: 2021-03-05; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 11926303 和 11831004) 和博士后基金 (批准号: 8206300279) 资助项目

**摘要** 本文综述满足电影型 (cinematic) 曲率条件的 Fourier 积分算子的局部光滑性及其相关研究. 电影型曲率条件包含非退化条件及曲率条件. 作为范例重点讨论如何通过双线性方法建立变系数版本的平方函数不等式, 进而改进了 Mockenhaupt-Seeger-Sogge 局部光滑性的结果. 与此同时, 本文还分析了解决局部光滑性猜想的困难、可能的途径, 以及它与其他数学猜想之间的联系.

**关键词** Fourier 积分算子 局部光滑性估计 平方函数不等式 双线性方法 电影型曲率条件

**MSC (2020) 主题分类** 35S30, 35L15

## 1 背景简介

Fourier 积分算子 (Fourier integral operators, FIOs) 起源于拟微分算子, 拟微分算子来源于构造椭圆方程的拟基本解, 它是研究椭圆型方程的基本工具 (参见文献 [1,2]). 而 Fourier 积分算子与构造强双曲方程的拟基本解紧密相关, 这方面的工作至少可以追溯到 Lax [3]. Fourier 积分算子的主旨是在余切丛框架下研究双曲型方程解的奇性传播和 FIOs 的局部光滑性等相关问题. 作为 Fourier 积分算子的典型范例, Euclid 空间的半波算子局部光滑性猜想是许多著名数学猜想的高级形式, 它直接意味着 Bochner-Riesz 猜想、限制性猜想和 Kakeya 猜想等, 体现了偏微分方程与调和分析、几何测度论和数论等不同数学领域之间的内在联系. 经过 Hörmander [4] 的奠基性工作以及 Stein [5,6] 等众多数学家的发展, Fourier 积分算子已经成为变系数 (或非平坦) 调和分析的核心. 特别是平方函数估计与变系数分离性 (decoupling) 理论的发展, 为研究以局部光滑性猜想为代表的一系列数学猜想提供了有力工具. 本文重点综述一类满足电影型 (cinematic) 曲率条件的 Fourier 积分算子的局部光滑性的研究进展, 分析局部光滑性猜想的困难及解决该猜想可能的途径. 与此同时, 讨论它与其他数学猜想之间的内在联系. 关于 FIOs 理论的奠基性工作, 可参见文献 [4,7]. 有关 FIOs 及相关的偏微分方程的基本理论, 可参见文献 [8–14].

英文引用格式: Gao C W, Miao C X. Local smoothness of Fourier integral operators and related research (in Chinese). Sci Sin Math, 2021, 51: 847–880, doi: 10.1360/SSM-2020-0173

© 2021《中国科学》杂志社 

### 1.1 Fourier 积分算子的定义

为了引入 FIOs, 考虑两个典型范例.

**例 1.1** FIOs 的原型来源于下面的半波算子:

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\sqrt{-\Delta}}f(x) := (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x\xi+t|\xi|)}\hat{f}(\xi)d\xi. \tag{1.1}$$

假设函数 $f_0$ 和 $f_1$ 满足适当的正则性, 记

$$f_+ := \frac{1}{2}(f_0-\mathrm{i}(\sqrt{-\Delta})^{-1}f_1),\quad f_- := \frac{1}{2}(f_0+\mathrm{i}(\sqrt{-\Delta})^{-1}f_1),$$

则

$$u(x,t) := \mathrm{e}^{\mathrm{i}t\sqrt{-\Delta}}f_+(x)+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\sqrt{-\Delta}}f_-(x) \tag{1.2}$$

是波动方程 Cauchy 问题

$$\begin{cases}(\partial_t^2-\Delta)u=0,\\ u(x,0)=f_0(x),\quad \partial_t u(x,0)=f_1(x)\end{cases} \tag{1.3}$$

的解. 容易看出, (1.2) 右边的两项均可表示成如下形式:

$$\mathscr{F}_t f(x) := (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x\xi\pm t|\xi|)}|\xi|^{-j}\hat{f}(\xi)d\xi,\quad j=0,1. \tag{1.4}$$

**例 1.2** 设 $(M,g)$ 为 $n$ 维 Riemann 紧流形, $\Delta_g$ 是 Laplace-Beltrami 算子, 则 $-\Delta_g$ 具有非负离散谱, 满足 (特征根的重数也计算在内)

$$0=\lambda_0^2<\lambda_1^2\leqslant\lambda_2^2\leqslant\lambda_3^2\leqslant\cdots.$$

因此,

$$-\Delta_g=\sum_{j=0}^{\infty}\lambda_j^2E_j,$$

其中 $E_j$ 为投影算子, 它把 $L^2(M)$ 中的函数投影到特征根 $\lambda_j^2$ 所对应的特征空间上, 详见文献 [15,16]. 定义流形 $(M,g)$ 上的半波算子

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\sqrt{-\Delta_g}}f := \sum_{j=0}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\lambda_j}E_jf. \tag{1.5}$$

若 $f_0$ 和 $f_1$ 为定义在 $M$ 上的函数, 用 $-\Delta_g$ 代替 $-\Delta$, 类似于例 1.1 定义的 $f_+$ 和 $f_-$, 则

$$u(x,t) := \mathrm{e}^{\mathrm{i}t\sqrt{-\Delta_g}}f_+(x)+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\sqrt{-\Delta_g}}f_-(x)$$

为方程

$$\begin{cases}(\partial_t^2-\Delta_g)u=0,\\ u(x,0)=f_0(x),\quad \partial_t u(x,0)=f_1(x)\end{cases} \tag{1.6}$$

的解. 在局部坐标下, 可以构造 (1.5) 的拟基本解, 即对某一时刻 $t_0$ 和所有的 $0<t<t_0$, 存在相函数 $\phi$ 和零阶象征 $a$ 使得

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\sqrt{-\Delta_g}}f(x) := \int_{\mathbb{R}^n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi(x,t,\xi)}a(x,t,\xi)\hat{f}(\xi)d\xi+R_tf(x), \tag{1.7}$$

其中 $R_t$ 为光滑算子, 即具有快速衰减象征的拟微分算子 (参见文献 [17]).

由上述两个例子, 可以诱导出如下经典 FIOs 的定义:

**定义 1.1** (Fourier 积分算子的定义)　设 $\mu \in \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 定义 $\mu$ 阶 Fourier 积分算子为

$$\mathscr{F} f(x) := \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi(x,\xi)} a(x,\xi) \hat{f}(\xi) d\xi, \tag{1.8}$$

其中 $\phi$ 和 $a$ 分别满足

(i) 相函数 $\phi: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 关于变量 $\xi$ 是 1- 次齐函数, 且在 $\xi = 0$ 之外光滑;

(ii) 振幅 $a(x,\xi) \in S^\mu$, 即 $a \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, 且满足对 $(\alpha,\beta) \in \mathbb{N}_0^n \times \mathbb{N}_0^n$, 有

$$|\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha a(x,\xi)| \lesssim_{\alpha,\beta} (1+|\xi|)^{\mu-\alpha}.$$

**注 1.1**　注意到 (1.8) 中定义的 FIOs 的核函数具有形式

$$K(x,y) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\langle y,\xi\rangle - \phi(x,\xi))} a(x,\xi) d\xi,$$

由此启发我们用振荡积分所决定的分布来定义 FIOs. 称光滑相函数 $\varphi(w,\theta): W \times \mathbb{R}^N \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ 是非退化的, 如果它满足下面的条件:

(i) $\varphi$ 关于变量 $\theta$ 是 1- 次齐次函数;

(ii) 对所有 $(w,\theta) \in W \times \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$, 均有 $\nabla_{w,\theta}\varphi(w,\theta) \neq 0$;

(iii) 如果 $\partial_\theta \varphi(w,\theta) = 0$, 则

$$\bigwedge_{j=1}^N \nabla_{w,\theta} \partial_{\theta_j} \varphi(w,\theta) \neq 0.$$

对非退化相函数 $\varphi$ 和光滑象征 $a \in S^\mu(W \times \mathbb{R}^N)$, 定义

$$I[\varphi,a](w) := \int_{\mathbb{R}^N} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(w,\theta)} a(w,\theta) d\theta, \quad w \in W.$$

从而可以得到 FIOs 定义的局部形式.

**定义 1.2**　称连续线性算子 $\mathscr{F}: C_c^\infty \to \mathcal{D}'(X)$ 为局部 Fourier 积分算子, 如果其 Schwartz 核函数是由某个齐次振荡积分 $I[\varphi,a]$ 给出的, 其中相函数 $\varphi: X \times Y \times \mathbb{R}^N \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ 为非退化的, 象征 $a \in S^\mu(X \times Y \times \mathbb{R}^N)$. 设 $X, Y \subset \mathbb{R}^n$, 给定实验函数 $f \in C_c^\infty(Y)$, 在分布意义下, $\mathscr{F}$ 可表示为

$$\mathscr{F} f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^N} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(w,\theta)} a(w,\theta) d\theta f(y) dy, \quad x \in X.$$

**注 1.2**　局部 FIOs 定义的缺点是不同 $(\varphi,a)$ 可能定义相同的振荡积分 $I[\varphi,a]$, 这样我们自然要问: 是否存在不依赖于 $[\varphi,a]$ 选取的定义方式? 答案是肯定的, 这就是整体 FIOs 的定义. 这种定义必求助于 FIOs 对应的 Schwartz 核函数奇性的几何特性, 从而导致了 FIOs 对应的典则关系构造. 根据 Hörmander 相函数的等价定理, FIOs 单纯依赖典则关系, 不依赖特定 $[\varphi,a]$ 的选择, 详见文献 [4,7,17]. 需要说明的是, 整体 Fourier 积分算子在局部坐标下可表现为 (1.8) 中的形式.

### 1.2　电影型曲率条件

引入电影型曲率条件之前, 考察例 1.1 中的相函数 $\phi(x,\xi) = x\xi + t|\xi|$. 它显然满足

($\mathrm{H}_1$) rank $\partial_{z\xi}^2 \phi(z,\xi) = n$;

$(\mathrm{H}_2)$ 定义 Gauss 映射 $G(z,\xi):=\frac{G_0(z,\xi)}{|G_0(z,\xi)|}$, 其中

$$G_0(z,\xi):=\bigwedge_{i=1}^{n}\partial_{\xi_i}\partial_z\phi(z,\xi), \tag{1.9}$$

曲率条件

$$\operatorname{rank}\,\partial^2_{\xi\xi}\langle\partial_z\phi(z,\xi),G(z,\xi_0)\rangle\,|_{\xi=\xi_0}=n-1. \tag{1.10}$$

例 1.2 中的半波算子 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\sqrt{-\Delta_{\mathrm{g}}}}$ 在局部坐标意义下可以写成

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\sqrt{-\Delta_{\mathrm{g}}}}f\cong\int\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\phi(x,t,\eta)}a(x,t,\eta)\hat{f}d\eta,$$

其中相函数 $\phi(x,t,\eta)$ 同样满足条件 $(\mathrm{H}_1)$ 和 $(\mathrm{H}_2)$.

一般地, 设 $n\geqslant 2$, $Z$ 和 $Y$ 为两个光滑紧流形, 其中 $Z$ 和 $Y$ 分别满足 $\dim Z=n+1$, $\dim Y=n$. 通过典则关系 $\mathscr{C}$ 定义的整体 Fourier 积分算子记为 $\mathscr{F}\in I^{\mu-\frac{1}{4}}(Z,Y;\mathscr{C})$. 在辛结构 $d\zeta\wedge dz-d\eta\wedge dy$ 下, $\mathscr{C}$ 为 $T^*Z\setminus 0\times T^*Y\setminus 0$ 上的齐次锥性质的 $2n+1$ 维闭 Lagrange 子流形. 对给定一点 $z_0\in Z$, 考虑自然投影算子图

$$\begin{tikzcd} & \mathscr{C} \arrow[dl, "\mathit{\Pi}_{T^*Y}"'] \arrow[d, "\mathit{\Pi}_Z"] \arrow[dr, "\mathit{\Pi}_{T^*_{z_0}Z}"] & \\ T^*Y\setminus 0 & Z & T^*_{z_0}Z\setminus 0, \end{tikzcd} \tag{1.11}$$

其中 $\mathit{\Pi}_{T^*Y}$、$\mathit{\Pi}_{T^*_{z_0}Z}$ 及 $\mathit{\Pi}_Z$ 是分别从 $\mathscr{C}$ 到 $T^*Y\setminus 0$、$T^*_{z_0}Z\setminus 0$ 及 $Z$ 的投影. 电影型曲率条件描述如下:

**非退化条件** (1.11) 中前两个投影是非退化的, 满足

$$\operatorname{rank}\,d\mathit{\Pi}_{T^*Y}\equiv 2n, \tag{1.12}$$

$$\operatorname{rank}\,d\mathit{\Pi}_Z\equiv n+1. \tag{1.13}$$

即说明投影映射是淹没.

**曲率条件** $\Gamma_{z_0}=\mathit{\Pi}_{T^*_{z_0}Z}(\mathscr{C})$ 为余切空间 $T^*_{z_0}Z\setminus 0$ 的浸入超曲面.

注意到 $\mathscr{C}$ 的齐次性质, 作为 (1.12) 和 (1.13) 的直接结果, 推出 $\Gamma_{z_0}$ 是 $T^*_{z_0}Z\setminus 0$ 的 $n$ 维光滑锥形超曲面.

**锥条件** 对任意的 $\zeta\in\Gamma_{z_0}$, $\Gamma_{z_0}$ 存在 $n-1$ 个非零主曲率.

称 $\mathscr{C}$ 满足电影型曲率条件, 如果它满足非退化条件、曲率条件和锥条件. 容易看出, 在局部坐标意义下, 非退化、曲率和锥条件可以解析表达成 $(\mathrm{H}_1)$ 和 $(\mathrm{H}_2)$.

### 1.3 相函数的标准形式

利用局部化和平移方法, 不妨假设 $\operatorname{supp}a\subset Z\times\Xi$, 其中 $Z=X\times T$, $X\subset B_1(0)\subset\mathbb{R}^n$, $T\subset(-1,1)$ 均是包含原点的小邻域, $\Xi\subset\Gamma_1$, 其中 $\Gamma_1$ 是以 $\boldsymbol{e}_n=(0,\ldots,0,1)\in\mathbb{R}^n$ 为中心的小扇形邻域. 在上述归结下, 存在合适局部坐标系, 使得满足条件 $(\mathrm{H}_1)$ 和 $(\mathrm{H}_2)$ 的相函数 $\phi(z,\eta)$ 具有如下标准形式. 具体地说, 记 $z=(x,t)$, 不妨假设曲面在 $(\mathbf{0},\boldsymbol{e}_n)$ 处的法向量 $G(z,\eta)$ 平行于 $t$ 坐标轴, 在不计可忽略因子的情形下, 相函数 $\phi$ 可以写成如下标准形式.

**引理 1.1** [18] 设 $n=2$, 在上述条件下, 有

$$\phi(x,t,\eta)=\langle x,\eta\rangle+\frac{t}{2}\partial_t\partial_{\eta_1}^2\phi(\mathbf{0},\boldsymbol{e}_2)\frac{\eta_1^2}{\eta_2}+\eta_2\mathcal{E}\left(x,t,\frac{\eta_1}{\eta_2}\right), \tag{1.14}$$

其中 $\eta=(\eta_1,\eta_2)$, $\mathcal{E}(x,t,s)$ 满足

$$\mathcal{E}(x,t,s)=O((|x|+|t|)^2s^2+(|x|+|t|)|s|^3). \tag{1.15}$$

## 2 Euclid 空间半波算子的局部光滑效应

设 $f$ 是 Schwartz 函数, 波动方程 Cauchy 问题

$$\begin{cases}(\partial_{tt}-\Delta)u=0,\\ u(0,x)=f,\quad \partial_t u(0,x)=0\end{cases} \tag{2.1}$$

的解 $u$ 可用半波算子 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\sqrt{-\Delta}}$ 表示成

$$u(x,t)=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\sqrt{-\Delta}}f+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\sqrt{-\Delta}}f).$$

对固定时刻 $t$, Peral [19] 和 Miyachi [20] 证明了下面最优的 $L^p$ 估计:

$$\|\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\sqrt{-\Delta}}f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\leqslant C_{t,p}\|f\|_{L^p_{s_p}},\quad s_p:=(n-1)\left|\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right|,\quad 1<p<\infty. \tag{2.2}$$

由上式估计容易推出下面的时空估计:

$$\left(\int_1^2\|\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\sqrt{-\Delta}}f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\lesssim\|f\|_{L^p_{s_p}(\mathbb{R}^n)}. \tag{2.3}$$

相对于 (2.2) 而言, (2.3) 没有从时间平均中赢得任何利润. 一个很自然的问题是, 相对固定时刻的估计, 能否通过时间平均获得一些正则性? 更准确地说, 是否存在一个 $\varepsilon>0$ 使得

$$\left(\int_1^2\|\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\sqrt{-\Delta}}f(x,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\lesssim\|f\|_{L^p_{s_p-\varepsilon}(\mathbb{R}^n)}? \tag{2.4}$$

Sogge [21] 在将 Bourgain 的圆 (circular) 极大函数估计推广到流形测地圆上极大函数估计的过程中, 提出了下面局部光滑性猜想:

**猜想 2.1** (局部光滑性猜想 [21]) 设 $n\geqslant 2$, 对所有的

$$\sigma<\begin{cases}\dfrac{1}{p},\quad 若\ \dfrac{2n}{n-1}<p<\infty,\\ s_p,\quad 若\ 2<p\leqslant\dfrac{2n}{n-1},\end{cases} \tag{2.5}$$

成立如下不等式:

$$\left(\int_1^2\|\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\sqrt{-\Delta}}f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\lesssim\|f\|_{L^p_{s_p-\sigma}(\mathbb{R}^n)}. \tag{2.6}$$

Sogge [21] 率先获得了 $p>2$、$n=2$ 情形下的部分结果. 随后, Mockenhaupt 等 [22] 通过平方函数估计方法改进了文献 [21] 的结果. 第一个最佳 (sharp) 正则性结果属于 Wolff [23]. Wolff 引入所谓的 "$\ell^p$- 分离性不等式" 的概念, 获得了 $n=2$、$p>74$ 时最佳正则性结果. 经历一系列工作 [24–26], 最优的 "$\ell^2$- 分离性不等式" 最终被 Bourgain 和 Demeter [27] 证明, 并形成了调和分析中崭新的分离性理论. 这一理论影响深远, 已经被广泛地应用在偏微分方程、数论和几何测度论等不同数学领域. 例如, Bourgain 等 [28] 对多项式曲线所建立的分离性定理, 一举解决了解析数论中沉睡百年的 Vinogradov 猜想; 对于局部光滑性估计而言, 作为其直接的推论, 解决了 $p\geqslant\frac{2(n+1)}{n-1}$、$n\geqslant 2$ 对应的局部光滑性估计. 最近, Guth 等 [29] 通过建立最佳平方函数不等式, 完全解决了 $n=2$ 情形下的局部光滑性猜想.

为方便问题转化与归结, 定义区域 $\Gamma\subset\mathbb{R}^n$ 如下:

$$\Gamma:=\{(\xi',\xi_n)\in\mathbb{R}^n\backslash\{0\}:1\leqslant\xi_n\leqslant 2,|\xi'|\leqslant\xi_n\},$$

对 $\Gamma$ 实施扇形分解. 假设 $R>1$, 在超平面 $x_n=1$ 的单位球 $B^{n-1}(0,1)\times\{1\}$ 中, 选取 $R^{-\frac{1}{2}}$- 极大分离的点 $\{(\xi_\nu,1)\}_\nu$. 定义扇形 $\nu$ 如下:

$$\nu:=\left\{(\xi',\xi_n)\in\mathbb{R}^n\backslash\{0\}:\left|\frac{\xi'}{\xi_n}-\xi_\nu\right|\leqslant R^{-\frac{1}{2}}\right\},$$

设 $\chi_\nu$ 为 $\nu$ 的特征函数, 并记 $f_\nu=\mathcal{F}^{-1}(\hat{f}\chi_\nu)$.

半波算子的局部光滑性估计的研究方法主要分两种, 其一是建立平板 (slab)- 分解对应的平方函数估计, 结合 Kakeya 极大函数估计方法; 其二是 Wolff 型的 $\ell^p$- 分离性不等式

$$\left\|\sum_\nu \mathrm{e}^{\mathrm{i}t\sqrt{-\Delta}}f_\nu\right\|_{L^p(\mathbb{R}^{n+1})}\leqslant C_\varepsilon R^{\frac{n-1}{2}|\frac{1}{2}-\frac{1}{p}|+\varepsilon}\left(\sum_\nu\|\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\sqrt{-\Delta}}f_\nu\|^p_{L^p(\mathbb{R}^{n+1})}\right)^{\frac{1}{p}},\tag{2.7}$$

其中 $2\leqslant p\leqslant\frac{2(n+1)}{n-1}$. 作为 Bourgain-Demeter 的最佳分离性的直接推论, 在不计端点正则性的前提下, 可直接获得 $p\geqslant\frac{2(n+1)}{n-1}$ 情形下的最优局部光滑性估计. 直观上来看, 对于较大的可积指标, $\ell^p$- 分离性不等式方法比较有效. 但当 $p$ 接近于端点 $\frac{2n}{n-1}$ 时, 分离性不等式方法的作用已不再有效. 基于这个观察, 我们可以尝试建立下面更强的平方函数不等式:

$$\left\|\sum_\nu \mathrm{e}^{\mathrm{i}t\sqrt{-\Delta}}f_\nu\right\|_{L^p(\mathbb{R}^{n+1})}\leqslant C_\varepsilon R^\varepsilon\left\|\left(\sum_\nu|\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\sqrt{-\Delta}}f_\nu|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^p(\mathbb{R}^{n+1})},\quad 2\leqslant p\leqslant\frac{2n}{n-1}.\tag{2.8}$$

Guth 等 [29] 建立了 $2+1$ 维空间中几乎最佳平方函数不等式 (2.8). 利用文献 [22] 中的标准方法, 我们可以得到 $2+1$ 维情形对应的最佳局部光滑性估计. 我们将在附录 A 中给出详细细节, 并列举一些相关公开问题.

## 3 局部光滑性估计的应用—举例

局部光滑性猜想与调和分析中其他核心问题紧密相关, 如 Bochner-Riesz 求和及其衍生的极大 Bochner-Riesz 猜想. Bochner-Riesz 求和源于如何定义 Fourier 逆变换, 即在什么意义下, 成立

$$\lim_{R\to\infty}(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\int_{|x|\leqslant R}\hat{f}(\xi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}d\xi=f(x)?\tag{3.1}$$

容易看出, (3.1) 在分布意义下成立, 但是进一步要问: (3.1) 是否在点态意义下成立? 为了回答这一问题, 可以引入 $\Phi(\xi)$- 求和法. 具体而言, 设 $\Phi$ 为快速衰减可积函数, 且 $\Phi(0)=1$. 点态收敛问题就转化为算子 $S_t$:

$$S_tf(x):=\int_{\mathbb{R}^n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}\Phi\left(\frac{\xi}{t}\right)\hat{f}(\xi)d\xi,\quad t>0 \tag{3.2}$$

在 $t\to\infty$ 时的性态. 当 $\Phi$ 是 Gauss 函数时, 对应着 Gauss 求和法. 如果取 $\Phi(\xi)=(1-|\xi|)_+^\delta$, $\delta>0$, 则对应着 Bochner-Riesz 求和法. 考虑 Bochner-Riesz 平均算子 $S_t^\delta$:

$$\int_{\mathbb{R}^n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}\left(1-\left|\frac{\xi}{t}\right|\right)_+^\delta\hat{f}(\xi)d\xi. \tag{3.3}$$

记

$$\delta(p):=\max\left\{n\left|\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right|-\frac{1}{2},0\right\}.$$

**猜想 3.1** (极大 Bochner-Riesz 猜想) 设 $n\geqslant 2$, $2\leqslant p<\infty$, $\delta>\delta(p)$, 则

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n}\sup_{t>0}|S_t^\delta f(x)|^pdx\right)^{\frac{1}{p}}\lesssim\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \tag{3.4}$$

如果 (3.4) 成立, 采用常规方法不难推出, 对满足上述条件的 $\delta$、$n$ 和 $p$, 有

$$S_t^\delta f\to f \text{ 几乎处处成立},\quad \forall f\in L^p(\mathbb{R}^n).$$

下面来说明局部光滑性猜想 2.1 意味着极大 Bochner-Riesz 猜想.

**命题 3.1** 局部光滑性猜想意味着极大 Bochner-Riesz 猜想.

我们可选择合适的 $\psi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, 把 $(1-|\xi|)_+^\delta$ 分解成

$$(1-|\xi|)_+^\delta=r(|\xi|)+\sum_{k=1}^\infty 2^{-k\delta}\psi(2^k(1-|\xi|)),$$

其中 $r(|\xi|)\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. 注意到

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}r(|\xi|)\hat{f}(\xi)d\xi\right|\lesssim\boldsymbol{M}f(x),$$

其中 $\boldsymbol{M}$ 表示 Hardy-Littlewood 极大函数. 注意到

$$\|\boldsymbol{M}f\|_{L^p}\lesssim\|f\|_{L^p},\quad p\geqslant 2,$$

只需要估计剩余项. 由 Minkowski 不等式

$$\begin{aligned}&\left(\int_{\mathbb{R}^n}\sup_{t>0}\left|\int\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}\sum_{k=1}^\infty 2^{-k\delta}\psi(2^k(1-|t\xi|))\hat{f}(\xi)d\xi\right|^pdx\right)^{\frac{1}{p}}\\ &\quad\lesssim\sum_{k=1}^\infty 2^{-k\delta}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\sup_{t>0}\left|\int\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}\psi(2^k(1-|t\xi|))\hat{f}(\xi)d\xi\right|^pdx\right)^{\frac{1}{p}},\end{aligned}$$

从而问题归结为证明对任意 $\varepsilon>0$, 有

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n}\sup_{t>0}\left|\int\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}\psi(2^k(1-|t\xi|))\hat{f}(\xi)d\xi\right|^pdx\right)^{\frac{1}{p}}\lesssim 2^{k(\delta(p)+\varepsilon)}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \tag{3.5}$$

记

$$A_t^\lambda f(x) := \int \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}\psi(\lambda - |t\xi|)\hat{f}(\xi)d\xi,$$

令 $\lambda \gg 1$, (3.5) 等价于证明

$$\|\sup_{t>0}|A_t^\lambda f|\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \lesssim \lambda^{\delta(p)+\varepsilon}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \tag{3.6}$$

由 Littlewood-Paley 定理和正交性, 仅需证明

$$\Big\|\sup_{t\in(1,2)}|A_t^\lambda f|\Big\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \lesssim \lambda^{\delta(p)+\varepsilon}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad \operatorname{supp}\hat{f}(\xi) \subset \left(\frac{\lambda}{2}, \lambda\right). \tag{3.7}$$

显然, (3.7) 可从下面的估计得到:

$$\|A_{t(x)}^\lambda f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \lesssim \lambda^{\sigma(p)+\varepsilon}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \tag{3.8}$$

其中 $t(x) \in (1,2)$ 为可测函数.

为方便使用局部光滑性估计, 实施如下转换:

$$\begin{aligned}\psi(\lambda - |t(x)\xi|) &= \int_{\mathbb{R}} \check{\psi}(s)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda s}\mathrm{e}^{\mathrm{i}st(x)|\xi|}ds \\ &= t(x)^{-1}\int_{\mathbb{R}} \check{\psi}\left(\frac{s}{t(x)}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda s/t(x)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}s|\xi|}ds.\end{aligned} \tag{3.9}$$

将 (3.9) 代入到 (3.7), 利用局部光滑性估计 (2.6), 注意到 $1 \leqslant t(x) \leqslant 2$ 及 $\check{\psi}$ 的快速衰减性质, 容易推出 (3.8). 这说明局部光滑性猜想 2.1 意味着极大 Bochner-Riesz 猜想.

极大 Bochner-Riesz 猜想与下面几个著名的猜想紧密相关:

**猜想 3.2** [5] (Bochner-Riesz 猜想) 设 $1 \leqslant p \leqslant \infty$. 如果 $\delta > \delta(p)$, 则

$$\|S_1^\delta f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \tag{3.10}$$

**猜想 3.3** [5] (限制性猜想) 设 $n \geqslant 2$, $(p,q)$ 满足

$$\left\{(p,q) : \frac{1}{q} = \frac{n+1}{n-1}\frac{1}{p'}, 1 \leqslant p < \frac{2n}{n-1}\right\}, \tag{3.11}$$

则

$$\|\hat{f}|_S\|_{L^q(S,d\sigma)} \leqslant C\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad \forall\, f \in L^p(\mathbb{R}^n).$$

**猜想 3.4** (Kakeya 极大函数猜想 (离散版本)) 设 $\Omega \subset S^{n-1}$ 为一组极大 $\delta^{1/2}$ 分离的点集构成的集合, 设 $\{T_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ 为一列尺度为 $\delta^{-1} \times \delta^{-1/2} \times \cdots \times \delta^{-1/2}$ 的长方体的集合, 其中 $T_\omega$ 的方向为 $\omega$, 则

$$\Big\|\sum_{\omega\in\Omega}\chi_{T_\omega}\Big\|_{L^{\frac{n}{n-1}}(\mathbb{R}^n)} \lessapprox \Big(\sum_{\omega\in\Omega}|T_\omega|\Big)^{\frac{n-1}{n}}. \tag{3.12}$$

**猜想 3.5** (Kakeya 猜想) 称集合 $E \subset \mathbb{R}^n$ 为 Kakeya 集, 如果 $E$ 中包含有任意方向的单位线段, 则任一 Kakeya 集的 Hausdorff 维数是 $n$.

**注 3.1** 上述几个猜想之间有如下联系:

$$
\begin{tikzcd}
\boxed{\text{局部光滑性猜想}} \arrow[d, Rightarrow, "\text{Sogge}"] & \\
\boxed{\text{极大 Bochner-Riesz 猜想}} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow, "\text{Tao}"] & \boxed{\text{Bochner-Riesz 猜想}} \\
\boxed{\text{限制性猜想}} \arrow[d, Rightarrow, "\text{Bourgain}"] & \\
\boxed{\text{Kakeya 极大函数猜想}} \arrow[r, Rightarrow] & \boxed{\text{Kakeya 猜想}},
\end{tikzcd}
$$

更多的讨论可参见文献 [30–37].

## 4 基本工具

为了完整起见, 接下来不加证明地给出 Whitney 分解引理, 详细的讨论可参见文献 [18,38,39].

**引理 4.1** (Whitney 分解引理) 设 $\xi,\eta\in\mathbb{R}^n$, 则存在唯一的二进制正方体对 $(Q_1,Q_2)\subset\mathbb{R}^n$ 满足

(i) $\xi\in Q_1$, $\eta\in Q_2$;

(ii) $\ell(Q_1)=\ell(Q_2)$;

(iii) $\ell(Q_1)\leqslant\operatorname{dist}(Q_1,Q_2)\leqslant 4\sqrt{n}\ell(Q_1)$,

其中 $\ell(Q_1)$ 和 $\ell(Q_2)$ 分别表示正方体 $Q_1$ 和 $Q_2$ 的边长.

总假设 $(\mathrm{H}_1)$ 和 $(\mathrm{H}_2)$ 的定量版本: 对给定充分大的 $N>1$, 相函数的高阶导数满足一致估计

$$|\partial_\eta^\beta\partial_z^\alpha\phi(z,\eta)|\leqslant\frac{1}{2},\quad 0\leqslant|\beta|\leqslant N,\quad |\alpha|=2,\quad \text{对所有的 } (z,\eta)\in\operatorname{supp} a. \tag{4.1}$$

否则选取 $A\gg 1$, 用新的相函数 $A\phi(z/A,\eta)$ 去替换 $\phi(z,\eta)$, 则对新的相函数总有 (4.1) 成立. 详细讨论可参见文献 [18,40–42].

设 $\Upsilon_{x,t}:\eta\to\partial_x\phi(x,t,\eta)$. 选取 $\varepsilon_0$ 充分小, 使得映射 $\Upsilon_{x,t}$ 在 $B(\boldsymbol{e}_2,\varepsilon_0)$ 上是微分同胚. 若用 $\Psi_{x,t}(\xi)=\Upsilon_{x,t}^{-1}(\xi)$ 表示 $\Upsilon_{x,t}$ 的逆映射, 容易看出

$$\partial_x\phi(x,t,\Psi_{x,t}(\xi))=\xi. \tag{4.2}$$

对 (4.2) 两边关于 $\xi$ 求导, 直接推知

$$[\partial_{x,\eta}^2\phi](x,t,\Psi_{x,t}(\xi))\,\partial_\xi\Psi_{x,t}(\xi)=\mathrm{Id}. \tag{4.3}$$

这表明

$$\det\partial_\xi\Psi_{x,t}(\xi)\neq 0,\quad \forall\,(x,t)\in B(\mathbf{0},\varepsilon_0),\quad \forall\,\xi\in\Upsilon_{x,t}(B(\boldsymbol{e}_2,\varepsilon_0)). \tag{4.4}$$

设

$$q(x,t,\xi)=\partial_t\phi(x,t,\Psi_{x,t}(\xi)), \tag{4.5}$$

则

$$\partial_t\phi(x,t,\eta)=q(x,t,\partial_x\phi(x,t,\eta)). \tag{4.6}$$

设 $j=1,2$, 考虑如下两个振荡积分算子:

$$W_\lambda^j f(z)=\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda\phi_j(z,\eta)}a_j(z,\eta)f(\eta)d\eta,\quad z=(x,t)\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}, \tag{4.7}$$

其中 $\phi_j$ 满足 $(\mathrm{H}_1)$ 和 $(\mathrm{H}_2)$ 以及 $a_j\in C_c^\infty(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^2)$.

我们拟采用下面双线性振荡积分估计建立平方函数估计, 双线性振荡估计是 Wolff [43] 双线性限制性定理在变系数情形下的自然推广. 特别地, 对于每一个多重指标 $\beta\in\mathbb{N}^3$, 假设

$$\text{对于所有的 } (z,\eta)\in\operatorname{supp} a,\quad |\partial_z^\beta\phi_j(z,\eta)|\leqslant A_\beta,\quad 0\leqslant|\beta|\leqslant N,\quad j=1,2, \tag{4.8}$$

我们有下面的振荡积分估计:

**定理 4.1** [18] 设 $j=1,2$, $\phi_j$ 为关于变量 $\eta$ 的 1- 次齐次光滑函数, 且满足条件 $(\mathrm{H}_1)$ 和 $(\mathrm{H}_2)$. 假设 $a_j$ 的支集充分小, 使得在 $\operatorname{supp} a_j$ 上 $\phi_j$ 满足 (4.6), $\partial_x\phi_j\neq0$, 以及

$$\operatorname{rank}\,\partial_{\eta\eta}^2 q_j(x,t,\partial_x\phi_j(x,t,\eta^{(j)}))=1. \tag{4.9}$$

此外, 对 $(z,\eta^{(1)})\in\operatorname{supp} a_1$ 和 $(z,\eta^{(2)})\in\operatorname{supp} a_2$, 下面条件成立:

$$\left|\left\langle\frac{\partial_x\phi_j(z,\eta^{(j)})}{|\partial_x\phi_j(z,\eta^{(j)})|},\partial_\eta q_1(z,\partial_x\phi_1(z,\eta^{(1)}))-\partial_\eta q_2(z,\partial_x\phi_2(z,\eta^{(2)}))\right\rangle\right|\geqslant c_0>0, \tag{4.10}$$

则对任意的 $p\geqslant\frac{5}{3}$, 总成立下面双线性振荡积分估计:

$$\|W_\lambda^1 f W_\lambda^2 g\|_{L^p(\mathbb{R}^{2+1})}\leqslant C(A_\beta,\varepsilon,c_0)\lambda^{-\frac{3}{p}+\varepsilon}\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\|g\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}, \tag{4.11}$$

其中隐性常数只涉及有限的多重指标 $\beta$.

## 5 双线性方法

当 $n=2$ 时, 利用 Beltran 等 [41] 建立的最佳型 $L^6$- 估计与平凡的 $L^2$- 估计插值, 只能重新获得文献 [22] 中的 $L^4$-$L^4$ 相应结果. 然而, 通过双线性方法, 可以改进文献 [22] 中对应的局部光滑性估计.

**定理 5.1** [44] 设 $Z$ 和 $Y$ 是分别满足 $\dim Z=3$ 和 $\dim Y=2$ 的光滑紧 Riemann 流形. 假设 $\mathscr{F}\in I^{\sigma-\frac{1}{4}}(Z,Y;\mathscr{C})$, 典则关系 $\mathscr{C}$ 满足电影型曲率条件, 则估计

$$\|\mathscr{F}f\|_{L^p_{\mathrm{loc}}(Z)}\leqslant C\|f\|_{L^p_{\mathrm{comp}}(Y)},\quad \sigma<-\sigma(p) \tag{5.1}$$

成立, 其中 $2\leqslant p\leqslant 6$,

$$\sigma(p)=\begin{cases}\dfrac{1}{8}-\dfrac{1}{4p}, & 2\leqslant p\leqslant\dfrac{10}{3},\\ \dfrac{5}{16}-\dfrac{7}{8p}, & \dfrac{10}{3}\leqslant p\leqslant 6.\end{cases} \tag{5.2}$$

**注 5.1** (i) 对 $\mathscr{F}\in I^{\sigma-\frac{1}{4}}(Z,Y;\mathscr{C})$ 而言, 以 $L^4$-$L^4$ 估计为标准仅需要 $\sigma<-\frac{3}{32}$. 这与文献 [22] 中的结果相比较, 正则性指标提升了 $\frac{1}{32}$;

(ii) 该问题也可采用多线性方法, 适当提升正则性指标, 详见文献 [45–47].

我们沿用 Mockenhaupt 等 [22] 的策略, 证明定理 5.1 的关键因素之一是变系数 Kakeya 极大函数估计, 这种估计曾出现在 Córdoba [48] 关于 Bochner-Riesz 乘子定理的研究工作中.

设 $(y,\xi)\in \Pi_{T^*Y}(\mathscr{C})$, 令

$$\gamma_{y,\xi}=\{z\in Z:(z,\zeta,y,\xi)\in\mathscr{C},\ \text{对于某些}\ \zeta\} \tag{5.3}$$

是嵌入到 $Z$ 中的光滑曲线. 取定 $Z$ 上的光滑度量并选择 $\delta>0$ 充分小, 定义

$$R^\delta_{y,\xi}:=\{z\in Z:\operatorname{dist}(z,\gamma_{y,\xi})<\delta\}.$$

设 $\alpha\in C_0^\infty(Y\times Z)$, 令

$$\mathcal{M}_\delta g(y)=\sup_{\xi\in\Pi_{T_y^*Y}(\mathscr{C})}\frac{1}{\operatorname{Vol}(R^\delta_{y,\xi})}\bigg|\int_{R^\delta_{y,\xi}}\alpha(y,z)g(z)dz\bigg|,$$

利用下面定理 5.2 和平凡的 $L^\infty\to L^\infty$ 估计进行插值, 容易推出

$$\|\mathcal{M}_\delta\|_{L^p\to L^p}\leqslant C\bigg(\log\frac{1}{\delta}\bigg)^{\frac12},\quad \forall\,2\leqslant p\leqslant\infty. \tag{5.4}$$

**定理 5.2** [22] 假设 $Z$ 和 $Y$ 分别是维数为 3 和 2 的准紧光滑流形并被赋予光滑度量. 假设典则关系 $\mathscr{C}$ 满足电影型曲率条件, 则存在常数 $C$ 使得

$$\|\mathcal{M}_\delta g\|_{L^2(Y)}\leqslant C\sqrt{\log\frac{1}{\delta}}\,\|g\|_{L^2(Z)},\quad \forall\,g\in L^2(Z). \tag{5.5}$$

类似于 Euclid 情形, 借助于变系数极大 Kakeya 函数估计 (5.5)、Littlewood-Paley 分解、尺度伸缩 (rescaling) 技术与角分解, 可把 (5.1) 的证明归结成如下的平方函数估计:

$$\|T_\lambda f\|_{L^p(\mathbb{R}^{2+1})}\lessapprox\lambda^{-\sigma(p)}\bigg\|\bigg(\sum_\nu|T_\lambda^\nu f|^2\bigg)^{\frac12}\bigg\|_{L^p(\mathbb{R}^{2+1})}+\operatorname{RapDec}(\lambda)\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}, \tag{5.6}$$

其中

$$\begin{cases}T_\lambda(f)(z):=\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda\phi(z,\eta)}a(z,\eta)f(\eta)d\eta,\quad \forall\,\lambda\gg1,\\ T_\lambda f(z)=\displaystyle\sum_\nu T_\lambda^\nu f(z),\quad T_\lambda^\nu f(z)=\int_{\mathbb{R}^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda\phi(z,\eta)}a^\nu(z,\eta)f(\eta)d\eta,\\ a^\nu(z,\eta):=\chi_\nu(\eta)a(z,\eta),\quad a(z,\eta)\in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2+1}\times\mathbb{R}^2),\end{cases} \tag{5.7}$$

$\{\chi_\nu(\eta)\}$ 是单位圆上特征函数对应的单位分解在 $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ 上的零齐次扩张, 满足

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{0\leqslant\nu\leqslant N_\lambda}\chi_\nu(\eta)\equiv1,\qquad \forall\,\eta\in\mathbb{R}^2\setminus\{0\},\\ |\partial^\alpha\chi_\nu(\eta)|\leqslant C_\alpha\lambda^{\frac{|\alpha|}{2}},\quad \forall\,\alpha\in\mathbb{N}^2,\quad |\eta|=1.\end{cases}$$

根据振荡积分的稳定性定理, 我们可不妨假设振幅函数 $a$ 是变量可分离的, 即

$$a(z,\eta)=a_1(z)a_2(\eta)=a_1(x,t)a_2(\eta),$$

其中 $a_1 \in C_c^\infty(B(0,\varepsilon_0))$, $a_2 \in C_c^\infty(B(\boldsymbol{e}_2,\varepsilon_0))$.

对一般情形, 总可以通过如下变换:

$$T_\lambda f(z) = \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle z,\xi\rangle} \bigg( \int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda\phi(z,\eta)} \psi(z) \widehat{a}(\xi,\eta) f(\eta) d\eta \bigg) d\xi$$

归结成变量可分离情形. 容易看出 $\xi \mapsto \widehat{a}(\xi,\eta)$ 是 Schwartz 函数, 其中 $\psi(z)$ 是一个具有紧支撑的光滑函数且在 $\mathrm{supp}_z a$ 上恒等于 1.

利用 Lee [18] 建立的双线性振荡积分估计可提升文献 [22] 中的平方函数估计, 从而进一步改进满足电影型曲率条件的 Fourier 积分算子的局部光滑性估计. 实现该目标涉及两个重要步骤, 其一是采用 Whitney 分解引理和抛物尺度变换技术, 把问题归结成证明与之等价的双线性平方函数估计; 其二, 如何将双线性平方函数估计转化成双线性振荡积分估计, 这需要利用局部常数性质、正交性和扰动性引理来实现这个目的.

### 5.1 双线性等价形式

根据上面的讨论, (5.1) 的证明归结为证明 (5.6) 在 $p = \frac{10}{3}$ 情形下对应的特例. 为此我们采用文献 [25, 39] 中发展的双线性方法与扰动方法. 扰动方法的理念意味着在物理空间尺度充分小的意义下, 振荡积分算子可以被相应的延拓算子逼近.

我们的思路是将 (5.6) 转化成等价的双线性形式, 以方便地使用双线性振荡积分估计. 利用 Hölder 不等式, 线性估计 (5.6) 意味着双线性估计. 然而反方向的蕴涵关系需要细致的分析.

**命题 5.1** 假设 $\Omega$ 和 $\Omega'$ 是分别包含 $\nu$ 和 $\nu'$ 的两个方向集, 满足如下角向分离条件:

$$\mathrm{Ang}(\theta_\nu, \theta_{\nu'}) \approx_{\varepsilon_0} 1, \quad \forall\, (\nu,\nu') \in \Omega\times\Omega', \tag{5.8}$$

其中 $\mathrm{Ang}(\theta_\nu,\theta_{\nu'})$ 刻画扇形 $\theta_\nu$ 与 $\theta_{\nu'}$ 之间的夹角. 设 $T_\lambda^\nu$ 是 (5.7) 中定义的算子, 其中相函数 $\phi$ 满足条件 $(\mathrm{H}_1)$、$(\mathrm{H}_2)$ 和 $a \in C_c^\infty(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^2)$. 如果对于任意的函数 $g$ 和 $h$, 在不计余项 $\mathrm{RapDec}(\lambda)$ 的情形下,

$$\begin{aligned} &\bigg\| \sum_{\nu\in\Omega} T_\lambda^\nu g \sum_{\nu'\in\Omega'} T_\lambda^{\nu'} h \bigg\|_{L^{\frac{5}{3}}(\mathbb{R}^{2+1})} \\ &\quad\lessapprox \lambda^{1/10} \bigg\| \bigg( \sum_{\nu\in\Omega} |T_\lambda^\nu g|^2 \bigg)^{\frac{1}{2}} \bigg\|_{L^{\frac{10}{3}}(\mathbb{R}^{2+1})} \bigg\| \bigg( \sum_{\nu'\in\Omega} |T_\lambda^{\nu'} h|^2 \bigg)^{\frac{1}{2}} \bigg\|_{L^{\frac{10}{3}}(\mathbb{R}^{2+1})}, \end{aligned} \tag{5.9}$$

其中隐性常数依赖于 (4.10) 中的常数 $c_0$ 和有限 $\beta$ 的常数 $A_\beta$, 则有 (5.6), 其中 $p = \frac{10}{3}$.

**证明** 首先在二进制框架下, 对两扇形区域的笛卡尔积所构成的集合实施非齐次 Whitney 分解, 使得二进尺度落在 $(\lambda^{-1/2}, 1)$ 上. 其次分离出远离对角线且落在相同二进尺度中的双线性项. 为了利用引理中的假设, 最后采用抛物尺度伸缩技术把落在相同尺度中双线性项化成引理 5.1 中出现的标准情形.

**第 1 步 正交性技术**

设 $j_0$ 是使得 $2^{j_0} \leqslant \lambda^{1/2}$ 成立的最大整数. 对任意的 $j\in\mathbb{Z}$ 满足 $|\log_2\varepsilon_0| \leqslant j \leqslant j_0$, 用 $\{\theta_{j,\ell}\}_\ell$ 表示尺度为 $\approx 2^{-j}$ 的扇形构成的集合, 其中 $\ell\in\{1,2,\dots,\ell_j\}$. 设 $\ell_j\approx 2^j$, 对任意的 $\ell$, 记 $\theta_{j,\ell}$ 是包含 $\approx 2^{-j}\lambda^{1/2}$ 个连续扇形 $\theta_\nu$ 的集合.

对集合 $\mathcal{C}(\boldsymbol{e}_2,\varepsilon_0)\times\mathcal{C}(\boldsymbol{e}_2,\varepsilon_0)$ 做如下 Whitney 分解:

$$\mathcal{C}(\boldsymbol{e}_2,\varepsilon_0)\times\mathcal{C}(\boldsymbol{e}_2,\varepsilon_0)$$

$$= \Bigg( \bigcup_{j:\varepsilon_0^{-1}\leqslant 2^j\leqslant \varepsilon_0^3 2^{j_0}} \bigcup_{\mathrm{Ang}(\theta_{j,\ell},\theta_{j,\ell'})\approx 2^{-j}} \theta_{j,\ell}\times\theta_{j,\ell'} \Bigg) \cup \Bigg( \bigcup_{\mathrm{Ang}(\theta_{j_0,\ell},\theta_{j_0,\ell'})\leqslant \varepsilon_0^{-3}2^{-j_0}} \theta_{j_0,\ell}\times\theta_{j_0,\ell'} \Bigg),$$

其中 $\mathrm{Ang}(\theta_{j,\ell},\theta_{j,\ell'})\approx 2^{-j}$ 表示 $2^{-(j+1)}\leqslant \mathrm{Ang}(\theta_{j,\ell},\theta_{j,\ell'})\leqslant 2^{-(j-1)}$.

对 $1\leqslant \ell\leqslant \ell_j$, 令

$$\chi_{j,\ell}(\eta)=\sum_{\nu:\,\theta_\nu\subset\theta_{j,\ell}}\chi_\nu(\eta),\quad a^{j,\ell}(x,t,\eta)=\chi_{j,\ell}(\eta)a(x,t,\eta).$$

定义

$$(T_\lambda^{j,\ell}f)(x,t)=\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda\phi(x,t,\eta)}a^{j,\ell}(x,t,\eta)f(\eta)d\eta. \tag{5.10}$$

简单计算有

$$\begin{aligned}((T_\lambda f)(x,t))^2=&\sum_{(\ell,\ell')\in\Lambda_{j_0}}(T_\lambda^{j_0,\ell}f)(x,t)(T_\lambda^{j_0,\ell'}f)(x,t)\\&+\sum_{j:\,\varepsilon_0^{-1}\leqslant 2^j\leqslant\varepsilon_0^3 2^{j_0}}\sum_{(\ell,\ell')\in\Lambda_j}(T_\lambda^{j,\ell}f)(x,t)(T_\lambda^{j,\ell'}f)(x,t),\end{aligned}\tag{5.11}$$

其中 $\Lambda_j$ 表示所有满足条件 $\mathrm{Ang}(\theta_{j,\ell},\theta_{j,\ell'})\approx 2^{-j}$, $\varepsilon_0^{-1}\leqslant 2^j\leqslant\varepsilon_0^3 2^{j_0}$ 的指标 $(\ell,\ell')$ 的集合, $\Lambda_{j_0}$ 表示所有满足条件 $\mathrm{Ang}(\theta_{j_0,\ell},\theta_{j_0,\ell'})\leqslant\varepsilon_0^{-3}2^{-j_0}$ 的指标 $(\ell,\ell')$ 的集合. 由 Minkowski 不等式得

$$\begin{aligned}\|T_\lambda f\|^2_{L^{\frac{10}{3}}_{x,t}}&=\|(T_\lambda f)^2\|_{L^{\frac53}_{x,t}}\\&\leqslant\Bigg\|\sum_{(\ell,\ell')\in\Lambda_{j_0}}(T_\lambda^{j_0,\ell}f)(T_\lambda^{j_0,\ell'}f)\Bigg\|_{L^{\frac53}_{x,t}}\\&\quad+\sum_{j:\,\varepsilon_0^{-1}\leqslant 2^j\leqslant\varepsilon_0^3 2^{j_0}}\Bigg\|\sum_{(\ell,\ell')\in\Lambda_j}(T_\lambda^{j,\ell}f)(T_\lambda^{j,\ell'}f)\Bigg\|_{L^{\frac53}_{x,t}}.\end{aligned}\tag{5.12}$$

对 (5.12) 不等式右端第一项而言, 注意到每个 $\theta_{j_0,\ell}$ 仅包含有限多 $\theta_\nu$, 根据 Schur 准则, 有

$$\Bigg\|\sum_{(\ell,\ell')\in\Lambda_{j_0}}(T_\lambda^{j_0,\ell}f)(T_\lambda^{j_0,\ell'}f)\Bigg\|_{L^{\frac53}(\mathbb{R}^{2+1}_{x,t})}\lesssim\Bigg\|\Bigg(\sum_\nu|T_\lambda^\nu(f)|^2\Bigg)^{\frac12}\Bigg\|^2_{L^{\frac{10}{3}}(\mathbb{R}^{2+1}_{x,t})}.$$

下面利用条件 (5.9) 实施 (5.12) 的估计. 在不计余项 $\mathrm{RapDec}(\lambda)$ 的意义下, 通过充分开发正交性质证明不等式

$$\Bigg\|\sum_{(\ell,\ell')\in\Lambda_j}(T_\lambda^{j,\ell}f)(T_\lambda^{j,\ell'}f)\Bigg\|_{L^{\frac53}(\mathbb{R}^{2+1}_{x,t})}\lessapprox\Bigg(\sum_{(\ell,\ell')\in\Lambda_j}\|(T_\lambda^{j,\ell}f)(T_\lambda^{j,\ell'}f)\|^{\frac53}_{L^{\frac53}(\mathbb{R}^{2+1}_{x,t})}\Bigg)^{\frac35}\tag{5.13}$$

成立.

下面采用 Lee[18] 的方法证明. 设 $\psi(x)$ 是支撑在 $B(0,\varepsilon_0)$ 上的光滑函数, 令 $\psi_j^\mu(x):=\psi(2^jx-\mu)$, 则有

$$\sum_{\mu\in\varepsilon_0\mathbb{Z}^2}\psi_j^\mu(x)\equiv 1.\tag{5.14}$$

令 $\Phi(x,t,\eta,\eta')=\phi(x,t,\eta)+\phi(x,t,\eta')$, 定义

$$\mathcal{P}^{\mu,j}_{\lambda,\ell,\ell'}(\xi,t,\eta,\eta')=\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda\Phi(x,t,\eta,\eta')-\mathrm{i}x\cdot\xi}A^{\lambda,j}_{\ell,\ell'}(x,t,\eta,\eta')\psi^{\mu}_j(x)dx,$$
$$\mathcal{A}^{\mu,j}_{\lambda,\ell,\ell'}(f)(x,t)=\psi^{\mu}_j(x)\iint \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda\Phi(x,t,\eta,\eta')}A^{\lambda,j}_{\ell,\ell'}(x,t,\eta,\eta')f(\eta)f(\eta')d\eta d\eta',$$

其中

$$A^{\lambda,j}_{\ell,\ell'}(x,t,\eta,\eta')=a^{j,\ell}_{\lambda}(x,t,\eta)a^{j,\ell'}_{\lambda}(x,t,\eta').$$

记 $r=|\eta|$, $r'=|\eta'|$, 用 $\kappa^{\ell}_j$ 和 $\kappa^{\ell'}_j$ 分别表示 $\theta_{j,\ell}$ 和 $\theta_{j,\ell'}$ 的中心. 注意到 $\psi^{\mu}_j(x)$ 的支集性质及锥条件, 有

$$\partial_x(\lambda\Phi(x,t,\eta,\eta')-x\xi)=\lambda\partial_x\Phi(2^{-j}\mu,t,r\kappa^{\ell}_j,r'\kappa^{\ell'}_j)-\xi+O(\lambda 2^{-j}).$$

对 $(\ell,\ell')\in\Lambda_j$, $\angle(\eta,\kappa^{\ell}_j)\leqslant\varepsilon_0 2^{-j}$ 和 $\angle(\eta',\kappa^{\ell'}_j)\leqslant\varepsilon_0 2^{-j}$, 由分部积分推出映射 $\xi\to\mathcal{P}^{\mu,j}_{\lambda,\ell,\ell'}(\xi,t,\eta,\eta')$ 在长方形

$$\mathcal{R}^{\mu,j}_{\lambda,\ell}(t):=\{\xi\in\mathbb{R}^2:|\xi-\lambda r\partial_x\phi(2^{-j}\mu,t,\kappa^{\ell}_j)|\lessapprox\lambda 2^{-j},r\in(2-2\varepsilon_0,2+2\varepsilon_0)\}$$

之外快速衰减. 由 $\lambda^{\varepsilon}\mathcal{R}^{\mu,j}_{\lambda,\ell}(t)$ 可以诱导定义一个光滑的 bump 函数 $R^{\mu,j}_{\lambda,\ell}(\xi,t)$, 从而有

$$\|(\mathrm{Id}-R^{\mu,j}_{\lambda,\ell}(D_x,t))\mathcal{A}^{\mu,j}_{\lambda,\ell,\ell'}(f)(t,\cdot)\|_{L^{10/3}(\mathbb{R}^2_x)}\lesssim\mathrm{RapDec}(\lambda)\|f\|^2_{L^{10/3}(\mathbb{R}^2)}. \tag{5.15}$$

因为函数 $R^{\mu,j}_{\lambda,\ell}(\xi,t)$ 关于变量 $\xi$ 的支集包含在 $\lambda^{\varepsilon}\mathcal{R}^{\mu,j}_{\lambda,\ell}$ 内, 且相函数满足非退化性质, 我们推出, 对固定的 $\lambda^{\varepsilon}\mathcal{R}^{\mu,j}_{\lambda,\ell}$, 至多存在 $\approx\lambda^{\varepsilon}$ 同形集合与之相交. 利用该有限重叠性质, 在不计快速衰减项的情形下, 成立

$$\Big\|\sum_{(\ell,\ell')\in\Lambda_j}(T^{j,\ell}_{\lambda}f)(T^{j,\ell'}_{\lambda}f)\Big\|_{L^{\frac{5}{3}}(\mathbb{R}^{2+1}_{x,t})}\lessapprox\Big(\sum_{(\ell,\ell')\in\Lambda_j}\|(T^{j,\ell}_{\lambda}f)(T^{j,\ell'}_{\lambda}f)\|^{\frac{5}{3}}_{L^{\frac{5}{3}}(\mathbb{R}^{2+1}_{x,t})}\Big)^{\frac{3}{5}}. \tag{5.16}$$

现在回归 (5.13) 的证明. 在相差一可忽略项的意义下, 仅需证明如下不等式:

$$\begin{aligned}&\|(T^{j,\ell}_{\lambda}f)(T^{j,\ell'}_{\lambda}f)\|_{L^{5/3}(\mathbb{R}^{2+1}_{x,t})}\\&\quad\lessapprox(\lambda 2^{-2j})^{\frac{1}{10}}\Big\|\Big(\sum_{\nu:\theta_\nu\subset\theta_{j,\ell}}|T^{\nu}_{\lambda}(f)|^2\Big)^{\frac12}\Big\|_{L^{\frac{10}{3}}(\mathbb{R}^{2+1}_{x,t})}\Big\|\Big(\sum_{\nu':\theta_{\nu'}\subset\theta_{j,\ell'}}|T^{\nu'}_{\lambda}(f)|^2\Big)^{\frac12}\Big\|_{L^{\frac{10}{3}}(\mathbb{R}^{2+1}_{x,t})}.\end{aligned} \tag{5.17}$$

事实上, 把 (5.17) 代入到 (5.13), 利用 Cauchy-Schwarz 不等式和 $\ell^2\hookrightarrow\ell^{10/3}$, 在不计余项 $\mathrm{RapDec}(\lambda)$ 的情形下, 有

$$\Big\|\sum_{(\ell,\ell')\in\Lambda_j}(T^{j,\ell}_{\lambda}f)(T^{j,\ell'}_{\lambda}f)\Big\|_{L^{\frac{5}{3}}(\mathbb{R}^{2+1}_{x,t})}\lessapprox(\lambda 2^{-2j})^{\frac{1}{10}}\Big\|\Big(\sum_{\nu}|T^{\nu}_{\lambda}(f)|^2\Big)^{\frac12}\Big\|^2_{L^{\frac{10}{3}}(\mathbb{R}^{2+1}_{x,t})}.$$

上式两边对 $j$ 求和, 得到了 (5.6).

**第 2 步 抛物尺度伸缩变换**

这一步将利用条件 (5.9) 完成 (5.17) 的证明. 为此需要抛物尺度变换技术和验证角向分离条件等. 设 $\eta^{j,\ell}$ 为 $\theta_{j,\ell}$ 的中心, 令 $\alpha^{\ell}_j=\eta^{j,\ell}_1/\eta^{j,\ell}_2$. 对任意 $\eta\in\theta_{j,\ell}$, 容易看出

$$\left|\frac{\eta_1}{\eta_2}-\alpha^{\ell}_j\right|\leqslant 2^{-j}.$$

通过变量替换 $\eta_1 \to \alpha_j^\ell \eta_2 + \eta_1$, 把 $\theta_{j,\ell}$ 的中心旋转到坐标轴 $\boldsymbol{e}_2$ 上. 相应地对空间变量 $x$ 作如下变量替换:

$$\begin{cases} x_1 + \alpha_j^\ell t = x_1^{(1)}, \\ \alpha_j^\ell x_1 + x_2 + \dfrac{1}{2}(\alpha_j^\ell)^2 t = x_2^{(1)}, \\ t = t^{(1)}, \end{cases} \tag{5.18}$$

其中 $x^{(1)} := (x_1^{(1)}, x_2^{(1)})$. 注意到变换 (5.18) 是微分同胚, 用 $\Phi^{(1)}(x^{(1)}, t^{(1)})$ 表示 (5.18) 中的逆映射. 在新坐标系下, 相函数 $\phi$ 变换成

$$\phi^{(1)}(x^{(1)}, t^{(1)}, \eta) = \langle x^{(1)}, \eta \rangle + \frac{1}{2} t^{(1)} \frac{\eta_1^2}{\eta_2} + \eta_2 \mathcal{E}_1 \bigg( x^{(1)}, t^{(1)}, \frac{\eta_1}{\eta_2} + \alpha_j^\ell \bigg), \tag{5.19}$$

其中

$$\mathcal{E}_1 \bigg( x^{(1)}, t^{(1)}, \frac{\eta_1}{\eta_2} + \alpha_j^\ell \bigg) = \mathcal{E} \bigg( \Phi^{(1)}(x^{(1)}, t^{(1)}), \frac{\eta_1}{\eta_2} + \alpha_j^\ell \bigg).$$

然后, 对 $\mathcal{E}_1(x^{(1)}, t^{(1)}, \eta_1/\eta_2 + \alpha_j^\ell)$ 按照如下方式进行 Taylor 展开:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1 \bigg( x^{(1)}, t^{(1)}, \frac{\eta_1}{\eta_2} + \alpha_j^\ell \bigg) &= \mathcal{E}_1(x^{(1)}, t^{(1)}, \alpha_j^\ell) + \partial_s \mathcal{E}_1(x^{(1)}, t^{(1)}, \alpha_j^\ell) \frac{\eta_1}{\eta_2} \\ &\quad + \frac{1}{2} \partial_s^2 \mathcal{E}_1(x^{(1)}, t^{(1)}, \alpha_j^\ell) \bigg( \frac{\eta_1}{\eta_2} \bigg)^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^1 \partial_s^3 \mathcal{E}_1 \bigg( x^{(1)}, t^{(1)}, s\frac{\eta_1}{\eta_2} + \alpha_j^\ell \bigg) \bigg( \frac{\eta_1}{\eta_2} \bigg)^3 (1-s)^2 ds. \end{aligned}$$

利用坐标变换

$$\begin{cases} x_1^{(1)} + \partial_s \mathcal{E}_1(x^{(1)}, t^{(1)}, \alpha_j^\ell) = x_1^{(2)}, \\ x_2^{(1)} + \mathcal{E}_1(x^{(1)}, t^{(1)}, \alpha_j^\ell) = x_2^{(2)}, \\ \dfrac{1}{2} t^{(1)} + \dfrac{1}{2} \partial_s^2 \mathcal{E}_1(x^{(1)}, t^{(1)}, \alpha_j^\ell) = \dfrac{1}{2} t^{(2)}, \end{cases} \tag{5.20}$$

用 $\Phi^{(2)}(x^{(2)}, t^{(2)})$ 表示 (5.20) 中的逆映射, (5.19) 中的相函数变成

$$\phi^{(2)}(x^{(2)}, t^{(2)}, \eta) = \langle x^{(2)}, \eta \rangle + \frac{1}{2} t^{(2)} \frac{\eta_1^2}{\eta_2} + \mathcal{E}_2 \bigg( x^{(2)}, t^{(2)}, \frac{\eta_1}{\eta_2} \bigg), \tag{5.21}$$

其中

$$\mathcal{E}_2 \bigg( x^{(2)}, t^{(2)}, \frac{\eta_1}{\eta_2} \bigg) = \frac{1}{2} \int_0^1 \partial_s^3 \mathcal{E} \bigg( \Phi^{(1)} \circ \Phi^{(2)}(x^{(2)}, t^{(2)}), s\frac{\eta_1}{\eta_2} + \alpha_j^\ell \bigg) \bigg( \frac{\eta_1}{\eta_2} \bigg)^3 (1-s)^2 ds. \tag{5.22}$$

通过伸缩变换 $\eta_1 \to 2^{-j}\eta_1$, 相应的振幅函数变成

$$\begin{aligned} a_2^{j,\ell}(x^{(2)}, t^{(2)}, \eta) &= a(\Phi^{(1)} \circ \Phi^{(2)}(x^{(2)}, t^{(2)}), 2^{-j}\eta_1 + \alpha_j^\ell \eta_2, \eta_2) \chi_{j,\ell}(\alpha_j^\ell \eta_2 + 2^{-j}\eta_1, \eta_2), \\ a_2^{j,\ell,\ell'}(x^{(2)}, t^{(2)}, \eta) &= a(\Phi^{(1)} \circ \Phi^{(2)}(x^{(2)}, t^{(2)}), 2^{-j}\eta_1 + \alpha_j^\ell \eta_2, \eta_2) \chi_{j,\ell'}(\alpha_j^\ell \eta_2 + 2^{-j}\eta_1, \eta_2), \end{aligned}$$

其中二者关于变量 $\eta$ 的支集分别包含在

$$\begin{cases} D_1 = \left\{\eta : \left|\dfrac{\eta_1}{\eta_2}\right| \leqslant \dfrac{\varepsilon_0}{4}, |\eta_2 - 1| \leqslant \varepsilon_0\right\}, \\ D_2 = \left\{\eta' : \left|\dfrac{\eta_1'}{\eta_2'} - \alpha_j^{\ell,\ell'}\right| \leqslant \dfrac{\varepsilon_0}{4}, |\eta_2' - 1| \leqslant \varepsilon_0\right\} \end{cases}$$

中, 这里

$$\alpha_j^{\ell,\ell'} = 2^j\left(\frac{\eta_1^{j,\ell'}}{\eta_2^{j,\ell'}} - \frac{\eta_1^{j,\ell}}{\eta_2^{j,\ell}}\right).$$

容易看出 $|\alpha_j^{\ell,\ell'}| \geqslant \varepsilon_0$, 且 $|\alpha_j^{\ell,\ell'}|$ 不依赖于 $j$、$\ell$ 和 $\ell'$. 因此, (5.17) 的证明归结为证明

$$\begin{aligned} &\|\mathcal{T}_\lambda^{j,\ell} f \mathcal{T}_\lambda^{j,\ell,\ell'} f\|_{L^{\frac{5}{3}}(\mathbb{R}^3)} \\ &\lesssim (\lambda 2^{-2j})^{\frac{1}{10}} \left\|\left(\sum_{\nu:\theta_\nu\subset\theta_{j,\ell}} |\mathcal{T}_\lambda^\nu f|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^{\frac{10}{3}}(\mathbb{R}^3)} \left\|\left(\sum_{\nu':\theta_{\nu'}\subset\theta_{j,\ell'}} |\mathcal{T}_\lambda^{\nu'} f|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^{\frac{10}{3}}(\mathbb{R}^3)}, \end{aligned} \tag{5.23}$$

其中

$$\begin{aligned} &\mathcal{T}_\lambda^{j,\ell} f = \sum_{\nu:\theta_\nu\subset\theta_{j,\ell}} \mathcal{T}_\lambda^\nu f, \quad \mathcal{T}_\lambda^{j,\ell,\ell'} f = \sum_{\nu:\theta_{\nu'}\subset\theta_{j,\ell'}} \mathcal{T}_\lambda^{\nu'} f, \\ &\mathcal{T}_\lambda^{j,\ell} f(x^{(2)}, t^{(2)}) = \int e^{i\lambda\phi^{(3)}(x^{(2)},t^{(2)},\eta)} a_2^{j,\ell}(x^{(2)}, t^{(2)}, \eta) f(\eta) d\eta, \\ &\mathcal{T}_\lambda^{j,\ell,\ell'} f(x^{(2)}, t^{(2)}) = \int e^{i\lambda\phi^{(3)}(x^{(2)},t^{(2)},\eta)} a_2^{j,\ell,\ell'}(x^{(2)}, t^{(2)}, \eta) f(\eta) d\eta, \\ &\mathcal{T}_\lambda^\nu f(x^{(2)}, t^{(2)}) = \int e^{i\lambda\phi^{(3)}(x^{(2)},t^{(2)},\eta)} a_2^\nu(x^{(2)}, t^{(2)}, \eta) f(\eta) d\eta, \\ &a_2^\nu(x^{(2)}, t^{(2)}, \eta) = a(\Phi^{(1)} \circ \Phi^{(2)}(x^{(2)}, t^{(2)}), 2^{-j}\eta_1 + \alpha_j^\ell \eta_2, \eta_2) \chi_\nu(\alpha_j^\ell \eta_2 + 2^{-j}\eta_1, \eta_2), \end{aligned}$$

相函数为

$$\phi^{(3)}(x^{(2)}, t^{(2)}, \eta) = 2^{-j} x_1^{(2)} \eta_1 + x_2^{(2)} \eta_2 + 2^{-2j} t^{(2)} \eta_1^2 (2\eta_2)^{-1} + \eta_2 \mathcal{E}_2\left(x^{(2)}, t^{(2)}, 2^{-j}\frac{\eta_1}{\eta_2}\right). \tag{5.24}$$

设 $\{R_\mu\}_\mu$ 是尺度 $\sim 2^{-j} \times 2^{-2j}$ 的长方形所构成的集合, 要求这些长方形集合覆盖球 $B(0, \varepsilon_0) \subset \mathbb{R}^2$. 对每个 $\mu$, 用 $x_\mu$ 表示 $R_\mu$ 的中心, $R_\mu^{\varepsilon_0} = R_\mu \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$. 对 $B(0, \varepsilon_0) \subset \mathbb{R}^3$, 有

$$B_{\varepsilon_0} := B(0, \varepsilon_0) \subset \bigcup_\mu R_\mu^{\varepsilon_0}. \tag{5.25}$$

因此, 对每个 $R_\mu^{\varepsilon_0}$, 仅需证明

$$\begin{aligned} &\|\mathcal{T}_\lambda^{j,\ell} f \mathcal{T}_\lambda^{j,\ell,\ell'} f\|_{L^{\frac{5}{3}}(R_\mu^{\varepsilon_0})} \\ &\lesssim (\lambda 2^{-2j})^{\frac{1}{10}} \left\|\left(\sum_{\nu:\theta_\nu\subset\theta_{j,\ell}} |\mathcal{T}_\lambda^\nu f|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^{\frac{10}{3}}(w_{R_\mu^{\varepsilon_0}})} \left\|\left(\sum_{\nu':\theta_\nu\subset\theta_{j,\ell'}} |\mathcal{T}_\lambda^{\nu'} f|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^{\frac{10}{3}}(w_{R_\mu^{\varepsilon_0}})}, \end{aligned} \tag{5.26}$$

其中隐形常数关于 $\mu$ 是一致有界的. 事实上, 注意到

$$\sum_\mu w_{R_\mu^{\varepsilon_0}} = w_{B_{\varepsilon_0}},$$

(5.26) 的两边对所有 $\mu$ 进行求和, 利用 Cauchy-Schwarz 不等式, 我们得到 (5.23).

通过变量替换 $x^{(2)} \to x_\mu + (2^{-j}\tilde{x}_1, 2^{-2j}\tilde{x}_2)$, $t \to \tilde{t}$, (5.26) 可归结为证明

$$\begin{aligned}&\|\tilde{\mathcal{T}}^{j,\ell}_{\lambda 2^{-2j}} f \tilde{\mathcal{T}}^{j,\ell,\ell'}_{\lambda 2^{-2j}} f\|_{L^{\frac{5}{3}}(B_{\varepsilon_0})}\\ &\lesssim (\lambda 2^{-2j})^{\frac{1}{10}} \bigg\| \bigg( \sum_{\nu:\theta_\nu \subset \theta_{j,\ell}} |\tilde{\mathcal{T}}^{\nu}_{\lambda 2^{-2j}} f|^2 \bigg)^{\frac{1}{2}} \bigg\|_{L^{\frac{10}{3}}(w_{B_{\varepsilon_0}})} \bigg\| \bigg( \sum_{\nu':\theta_{\nu'} \subset \theta_{j,\ell'}} |\tilde{\mathcal{T}}^{\nu'}_{\lambda 2^{-2j}} f|^2 \bigg)^{\frac{1}{2}} \bigg\|_{L^{\frac{10}{3}}(w_{B_{\varepsilon_0}})},\end{aligned} \tag{5.27}$$

其中 $\tilde{\mathcal{T}}^{j,\ell}_{\lambda 2^{-2j}} f$ 和 $\tilde{\mathcal{T}}^{j,\ell,\ell'}_{\lambda 2^{-2j}} f$ 中的相函数和振幅函数分别为

$$\begin{cases}\tilde{\phi}^j(\tilde{x},\tilde{t},\eta) = \tilde{x}\eta + \dfrac{1}{2}\tilde{t}\dfrac{\eta_1^2}{\eta_2} + 2^{2j}\eta_2 \mathcal{E}_2\bigg(x_\mu + (2^{-j}\tilde{x}_1, 2^{-2j}\tilde{x}_2), t, 2^{-j}\dfrac{\eta_1}{\eta_2}\bigg),\\ \tilde{a}^{j,\ell}(\tilde{x},\tilde{t},\eta) = a_2^{j,\ell}(x_\mu + (2^{-j}\tilde{x}_1, 2^{-2j}\tilde{x}_2), \tilde{t}, \eta),\\ \tilde{a}^{j,\ell,\ell'}(\tilde{x},\tilde{t},\eta) = a_2^{j,\ell,\ell'}(x_\mu + (2^{-j}\tilde{x}_1, 2^{-2j}\tilde{x}_2), \tilde{t}, \eta).\end{cases} \tag{5.28}$$

我们将会看到 (4.10) 中的常数不依赖于 $j$, 有限多的 $A_\beta$ 是一致有界的. 注意到余项 $\mathcal{E}_2$ 在

$$\|\partial_z^\beta \tilde{\phi}^j - \partial_z^\beta \phi_\infty\|_{L^\infty} \to 0, \quad j \to \infty, \quad |\beta| \leqslant N \tag{5.29}$$

意义下收敛, 从 (5.22) 容易得到

$$\tilde{\phi}_\infty = x\eta + \frac{t}{2}\frac{\eta_1^2}{\eta_2}. \tag{5.30}$$

利用 (5.9), 只需把 $\lambda$ 替换成 $\lambda 2^{-2j}$, 就能得到 (5.27). □

### 5.2 双线性振荡积分的应用

根据前面讨论, 从命题 5.1 推出 (5.6). 因此, 本小节的主要任务是证明 (5.9). 证明的方式是双线性振荡积分估计技术. 定义伸缩函数 $\phi^\lambda$ 和 $a_\lambda$ 分别为

$$\phi^\lambda(z,\eta) := \lambda\phi\bigg(\frac{z}{\lambda},\eta\bigg), \quad a_\lambda(z,\eta) := a\bigg(\frac{z}{\lambda},\eta\bigg). \tag{5.31}$$

相应地定义 $\mathscr{T}_\lambda$ 为

$$(\mathscr{T}_\lambda f)(z) := (T_\lambda f)\bigg(\frac{z}{\lambda}\bigg) = \int e^{i\phi^\lambda(x,t,\eta)} a_\lambda(x,t,\eta) f(\eta) d\eta. \tag{5.32}$$

按照上述的方法做角向分解, $\mathscr{T}_\lambda f$ 可以写成

$$\begin{aligned}\mathscr{T}_\lambda f(z) &= \sum_\nu \mathscr{T}_\lambda^\nu f(z),\\ \mathscr{T}_\lambda^\nu f(z) &= \int e^{i\phi^\lambda(x,t,\eta)} a_\lambda^\nu(x,t,\eta) f(\eta) d\eta,\end{aligned} \tag{5.33}$$

其中振幅函数 $a_\lambda^\nu$ 定义为 $a_\lambda^\nu(z,\eta) = a_\lambda(z,\eta)\chi_\nu(\eta)$. 在伸缩后的相函数和振幅函数的框架下, 我们可以重新表述 (5.9) 如下:

**命题 5.2** 设 $(\Omega,\Omega')$ 满足 (5.8) 中的角向分离条件. 在不计可忽略的余项的情形下, 有

$$\begin{aligned}&\bigg\| \sum_{\nu\in\Omega} \mathscr{T}_\lambda^\nu f \sum_{\nu'\in\Omega'} \mathscr{T}_\lambda^{\nu'} f \bigg\|_{L^{\frac{5}{3}}(\mathbb{R}^{2+1})}\\ &\lessapprox \lambda^{\frac{1}{10}} \bigg\| \bigg( \sum_{\nu\in\Omega} |\mathscr{T}_\lambda^\nu f|^2 \bigg)^{\frac{1}{2}} \bigg\|_{L^{\frac{10}{3}}(\mathbb{R}^{2+1})} \bigg\| \bigg( \sum_{\nu'\in\Omega'} |\mathscr{T}_\lambda^{\nu'} f|^2 \bigg)^{\frac{1}{2}} \bigg\|_{L^{\frac{10}{3}}(\mathbb{R}^{2+1})}.\end{aligned} \tag{5.34}$$

**定义 5.1** (局部常数性质)　对于 $n\geqslant 1$, 给定函数 $F:\mathbb{R}^n\to[0,\infty)$. 如果 $|x-y|\leqslant C_0\rho$, 就有 $F(x)\approx F(y)$, 其中, $\approx$ 中的隐性常数可以依赖结构常数 $C_0$, 则称 $F$ 在尺度 $\rho$ 上满足局部常数性质.

定义延拓性算子

$$Ef(x,t):=\int_{\mathbb{R}^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x\eta+th(\eta))}a_2(\eta)f(\eta)d\eta, \tag{5.35}$$

其中 $h(\eta)$ 是齐次度为 1 并在原点之外光滑的函数, 满足

$$\operatorname{rank}\partial^2_{\eta\eta}h=1,\quad \text{对所有的 } \eta\in\operatorname{supp}a_2. \tag{5.36}$$

对于 $r\geqslant 1$, 如果 $f$ 是支撑在 $\eta_0\in\operatorname{supp}a_2$ 的 $r^{-1}$ 邻域内, 则 $\operatorname{supp}\widehat{Ef}$ 的支集同样包含在半径为 $r^{-1}$ 的球内. 由不确定性原理, 可粗略认为 $|Ef|$ 在尺度为 $r$ 的球内满足局部常数性质. 然而对振荡积分算子 $\mathscr{T}_\lambda$ 而言, 上述性质未必成立. 虽然如此, 在不计相旋转及可忽略余项意义下, 仍可重新获得局部常数性质.

**引理 5.1** [49]　对 (5.32) 定义的算子 $\mathscr{T}_\lambda$ 而言, 一定存在一个快速衰减的光滑函数 $\varrho:\mathbb{R}^3\to[0,\infty)$: $\operatorname{supp}\hat{\varrho}\subset B(0,1)$, 使得对任意 $\varepsilon>0$, $1\leqslant r\leqslant\lambda^{1-\varepsilon}$, $f$ 支撑在一个中心为 $\bar{\eta}$、尺度为 $r^{-1}$ 的正方形内, 对所有 $z\in\mathbb{R}^3$,

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi^\lambda(z,\bar{\eta})}\mathscr{T}_\lambda f(z)=([\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi^\lambda(\cdot,\bar{\eta})}\mathscr{T}_\lambda f(\cdot)]*\varrho_r)(z)+\operatorname{RapDec}(\lambda)\|f\|_{L^{\frac{10}{3}}(\mathbb{R}^2)} \tag{5.37}$$

成立, 其中 $\varrho_r(z)=r^{-3}\varrho(z/r)$.

**注 5.2**　选取合适的函数 $\varrho$ 使其在尺度为 1 的球上满足局部常数性质. 我们可以视 $\varrho_r$ 在尺度为 $r$ 的球上为常数.

**证明**　由 $\operatorname{supp}f\subset B(\bar{\eta},r^{-1})$, 有

$$[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi^\lambda(\cdot,\bar{\eta})}\mathscr{T}_\lambda f]^\wedge(\xi)=\int_{\mathbb{R}^2}K^\lambda(\xi,\eta)f(\eta)d\eta, \tag{5.38}$$

其中核函数 $K^\lambda$ 可表示为

$$K^\lambda(\xi,\eta)=\lambda^3\int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda(\langle z,\xi\rangle)-\phi(z,\eta)+\phi(z,\bar{\eta})}a(z,\eta)dz. \tag{5.39}$$

注意到

$$|\partial_z\phi(z,\eta)-\partial_z\phi(z,\bar{\eta})|\lesssim r^{-1},\quad (z,\eta)\in\operatorname{supp}_{z,\eta}a(z,\eta),$$

根据驻相分析方法, 若 $|\xi|\geqslant r^{-1}$, 则利用分部积分, 可得

$$|K^\lambda(\xi,\eta)|\leqslant\lambda^{-N}(1+|\xi|)^{-4}.$$

设 $\varrho$ 为 $\mathbb{R}^3$ 上的 Schwartz 函数, 满足对于 $|\xi|\leqslant C$ 有 $\hat{\varrho}(\xi)=1$. 由 (5.38), 得到

$$[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi^\lambda(\cdot,\bar{\eta})}\mathscr{T}_\lambda f]^\wedge(\xi)\hat{\varrho}_r(\xi)+\lambda^{-N}(1+|\xi|)^{-(n+1)}\|f\|_{L^{\frac{10}{3}}(\mathbb{R}^2)},$$

由此推出 (5.37). □

为了证明命题 5.2, 我们需要充分开发局部常数性质. 为此, 对映射 $\eta\to a^\nu_\lambda(z,\eta)$ 的支集进行径向分解. 设 $\rho\in C^\infty_c(\mathbb{R}^2)$ 满足

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}^2}\rho(\eta-j)\equiv 1,\quad \eta\in\mathbb{R}^2. \tag{5.40}$$

令 $\varepsilon>0$ 足够小, $\mathbf{Q}=\{Q_k\}_k$ 是一组边长为 $\lambda^{1/2-\varepsilon}$ 的方体, 方体中心落在格点 $\lambda^{1/2-\varepsilon}\mathbb{Z}^{2+1}$ 上. 记每个 $Q_k\in\mathbf{Q}$ 的中心为 $z_k$, 令

$$\mathscr{T}_{\lambda,k}^{\nu,j}f(z)=\int e^{i\phi^\lambda(z,\eta)}a_{\lambda,k}^{\nu,j}(z,\eta)f(\eta)d\eta,$$
$$a_{\lambda,k}^{\nu,j}(z,\eta)=a_\lambda^\nu(z,\eta)\rho(\lambda^{\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{2}}\partial_x\phi^\lambda(z_k,\eta)-j),$$

则 $\eta\to a_{\lambda,k}^{\nu,j}(z,\cdot)$ 的支集是包含在一个边长 $\approx\lambda^{-1/2+\varepsilon/2}$ 的方体内, 记该方体为 $\mathcal{D}_k^{\nu,j}$. 我们得到

$$\mathscr{T}_\lambda f(z)\,|_{z\in Q_k}=\sum_{\nu,j}\mathscr{T}_{\lambda,k}^{\nu,j}f(z),\quad \mathscr{T}_\lambda^\nu f(z)\,|_{z\in Q_k}=\sum_{j}\mathscr{T}_{\lambda,k}^{\nu,j}f(z).\tag{5.41}$$

设 $\eta_k^{\nu,j}$ 是 $\mathcal{D}_k^{\nu,j}$ 的中心, 余下部分固定 $R=\lambda^{1/2-\varepsilon/2}$, 则证明命题 5.2 的关键是建立如下的离散双线性平方函数估计.

**命题 5.3** 设 $Q_k\in\mathbf{Q}$, $(\nu,\nu')\in\Omega\times\Omega'$ 满足 (5.8) 中的角向分离条件, 则

$$\bigg\|\sum_{\nu,j}e^{i\phi^\lambda(z,\eta_k^{\nu,j})}c^{\nu,j}\sum_{\nu',j'}e^{i\phi^\lambda(z,\eta_k^{\nu',j'})}c^{\nu',j'}\bigg\|_{L^{\frac{5}{3}}(Q_k)}\lessapprox\lambda\bigg(\sum_{\nu,j}|c^{\nu,j}|^2\bigg)^{\frac{1}{2}}\bigg(\sum_{\nu',j'}|c^{\nu',j'}|^2\bigg)^{\frac{1}{2}}.\tag{5.42}$$

**证明** 不失一般性, 假设 $z_k=\mathbf{0}$, 通过变换 $\psi^\lambda(z,\eta)=\phi^\lambda(z,\eta)-\phi^\lambda(\mathbf{0},\eta)$ 规范化相函数. 设

$$b_k^{\nu,j}(z,\eta)=\bigg(\int_{\mathcal{D}_k^{\nu,j}}e^{i[\psi^\lambda(z,\eta)-\psi^\lambda(z,\eta_k^{\nu,j})]}d\eta\bigg)^{-1}\chi_{\mathcal{D}_k^{\nu,j}}(\eta),\tag{5.43}$$

其中 $\chi_{\mathcal{D}_k^{\nu,j}}$ 表示 $\mathcal{D}_k^{\nu,j}$ 的特征函数. 容易看出, 对于充分大的 $\lambda$, 有

$$|b_k^{\nu,j}(z,\eta)|\leqslant R^2,\quad |\partial_z^\alpha b_k^{\nu,j}(z,\eta)|\leqslant R^{2-|\alpha|},\quad \forall\, z\in Q_k.\tag{5.44}$$

我们的目标转化为估计

$$\bigg\|\bigg(\int e^{i\psi^\lambda(z,\eta)}\sum_{\nu,j}b_k^{\nu,j}(z,\eta)c^{\nu,j}d\eta\bigg)\bigg(\int e^{i\psi^\lambda(z,\eta')}\sum_{\nu',j'}b_k^{\nu',j'}(z,\eta')c^{\nu',j'}d\eta'\bigg)\bigg\|_{L^{\frac{5}{3}}(Q_k)}.$$

设

$$B_k(z,\eta,\eta')=\sum_{\nu,j}\sum_{\nu',j'}c^{\nu,j}b_k^{\nu,j}(z,\eta)\,c^{\nu',j'}b_k^{\nu',j'}(z,\eta'),\tag{5.45}$$

由微积分基本定理, 可以得到

$$\begin{aligned}B_k(z,\eta,\eta')&=B_k(\mathbf{0},\eta,\eta')+\int_0^{x_1}\frac{\partial B_k}{\partial u_1}((u_1,0,0),\eta,\eta')du_1\\&\quad+\cdots+\int_0^{x_1}\int_0^{x_2}\int_0^t\frac{\partial^3B_k}{\partial u_1\partial u_2\partial u_3}(u,\eta,\eta')du.\end{aligned}\tag{5.46}$$

选取 $B_k(\mathbf{0},\eta,\eta')$ 作为例子, 其他情形的证明是类似的. 注意到

$$B_k(\mathbf{0},\eta,\eta')=\sum_{\nu,j}c^{\nu,j}b_k^{\nu,j}(\mathbf{0},\eta)\sum_{\nu',j'}c^{\nu',j'}b_k^{\nu',j'}(\mathbf{0},\eta'),\tag{5.47}$$

于是仅需估计

$$\bigg\|\bigg(\int e^{i\psi^\lambda(z,\eta)}\sum_{\nu,j}c^{\nu,j}b_k^{\nu,j}(\mathbf{0},\eta)d\eta\bigg)\bigg(\int e^{i\psi^\lambda(z,\eta')}\sum_{\nu',j'}c^{\nu',j'}b_k^{\nu',j'}(\mathbf{0},\eta')d\eta'\bigg)\bigg\|_{L^{\frac{5}{3}}}.\tag{5.48}$$

根据定理 4.1, 假设相函数 $\psi^\lambda(z,\eta)$ 和 $\psi^\lambda(z,\eta')$ 满足 (4.10), 则 (5.48) 可以被下式控制:

$$\Big\|\sum_{\nu,j}c^{\nu,j}b_k^{\nu,j}(\mathbf{0},\cdot)\Big\|_{L^2}\Big\|\sum_{\nu',j'}c^{\nu',j'}b_k^{\nu',j'}(\mathbf{0},\cdot)\Big\|_{L^2}\lessapprox C\lambda\left(\sum_{\nu,j}|c^{\nu,j}|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{\nu',j'}|c^{\nu',j'}|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

下面利用角向分离条件 (5.8) 验证假设条件 (4.10). 事实上, 通过变量替换 $z\to\lambda z$, 仅需要验证 $\eta$ 和 $\eta'$ 满足 (5.8), 则 $\psi(z,\eta)$ 和 $\psi(z,\eta')$ 就满足 (4.10), 其中

$$\psi(x,t,\eta)=\phi(x,t,\eta)-\phi(0,\eta). \tag{5.49}$$

注意到 $\phi(x,t,\eta)$ 具有 (1.14) 中的形式, 即

$$\begin{cases}\phi(x,t,\eta)=\langle x,\eta\rangle+\dfrac{t}{2}\left(\dfrac{\eta_1^2}{\eta_2}\right)+\eta_2\mathcal{E}\left(x,t,\dfrac{\eta_1}{\eta_2}\right),\\ \mathcal{E}(z,s)=O(|(x,t)|^2s^2+(|x|+|t|)|s|^3).\end{cases}$$

由于 $\phi(0,\eta)$ 不依赖于 $(x,t)$, 因此可以忽略此项的影响.

为了确保 (4.10), 对变量 $\eta$ 实施角向变换来消除角向分离的尺度对 $\varepsilon_0$ 的依赖. 不失一般性, 可以假设 $\operatorname{supp}_\eta a(z,\cdot)$ 包含 $\boldsymbol{e}_2$, 一般情形可以通过命题 5.1 的证明方法处理.

在变量替换 $\eta_1\to\varepsilon_0\eta_1$ 下, 只需考虑 $\eta$ 和 $\eta'$ 分别包含在

$$\mathscr{D}_1=\left\{\eta=(\eta_1,\eta_2)\in\mathbb{R}^2:\left|\frac{\eta_1}{\eta_2}\right|\leqslant\frac{1}{10},|\eta_2-1|\leqslant\varepsilon_0\right\},$$
$$\mathscr{D}_2=\left\{\eta'=(\eta_1',\eta_2')\in\mathbb{R}^2:\left|\frac{\eta_1'}{\eta_2'}-\frac{1}{2}\right|\leqslant\frac{1}{10},|\eta_2'-1|\leqslant\varepsilon_0\right\}$$

中的情形, 此时相函数变成

$$\phi(x,t,\eta)=\varepsilon_0x_1\eta_1+x_2\eta_2+\frac{t}{2}\varepsilon_0^2\frac{\eta_1^2}{\eta_2}+\eta_2\mathcal{E}\left(x,t,\varepsilon_0\frac{\eta_1}{\eta_2}\right). \tag{5.50}$$

设 $\{R_\mu\}_\mu$ 是一组两两互不相交的边长为 $\varepsilon_0\times\varepsilon_0^2$ 的长方形, 对每个 $\mu$, 用 $x_\mu$ 表示 $R_\mu$ 的中心. 为了简单起见, 用 $R_\mu^{\varepsilon_0}$ 表示长方体 $R_\mu\times(-\varepsilon_0,\varepsilon_0)$.

通过变量替换 $x\to x_\mu+(\varepsilon_0x_1,\varepsilon_0^2x_2)$, 用 $\varepsilon_0^2\lambda$ 替换 $\lambda$, 不计余项的影响, 在新坐标系下, (5.50) 将转化成

$$\phi(x,t,\eta)=x\cdot\eta+\frac{t}{2}\frac{\eta_1^2}{\eta_2}+\varepsilon_0^{-2}\eta_2\mathcal{E}\left(x_\mu+(\varepsilon_0x_1,\varepsilon_0^2x_2),t,\varepsilon_0\frac{\eta_1}{\eta_2}\right). \tag{5.51}$$

注意到 $(x_\mu+(\varepsilon_0x_1,\varepsilon_0^2x_2),t)\in B(0,2\varepsilon_0)\subset\mathbb{R}^3$ 以及 $\varepsilon_0$ 充分小, 直接计算得

$$\begin{cases}\nabla_x\phi(x,t,\eta)=\eta+O(\varepsilon_0|\eta|^2)+O(\varepsilon_0|\eta|^3),\\ \partial_{x,\eta}^2\phi(x,t,\eta)=\mathrm{Id}+O(\varepsilon_0|\eta|),\\ \partial_t\phi(x,t,\eta)=\dfrac{1}{2}\dfrac{\eta_1^2}{\eta_2}+O(\varepsilon_0|\eta|^2)+O(\varepsilon_0|\eta|^3).\end{cases}$$

由 (4.6) 推知,

$$\nabla_\eta\partial_t\phi(x,t,\eta)=(\nabla_\eta q)(x,t,\partial_x\phi(x,t,\eta))\,\partial_{x\eta}^2\phi(x,t,\eta),$$

进而,

$$(\nabla_\eta q)(x,t,\partial_x\phi(x,t,\eta))=\left(\frac{\eta_1}{\eta_2},-\frac{\eta_1^2}{2\eta_2^2}\right)+O(\varepsilon_0|\eta|).$$

所以, 选取 $\varepsilon_0$ 充分小, 对 $\eta\in\mathscr{D}_1$ 和 $\eta'\in\mathscr{D}_2$, 有

$$(4.10)\ \text{的左边}\ \approx\left|\frac{\eta_1}{\eta_2}-\frac{\eta_1'}{\eta_2'}\right|^2+O(\varepsilon_0)\approx 1, \tag{5.52}$$

这验证了 (4.10). □

现在转向命题 5.2 的证明. 对给定的 $R=\lambda^{1/2-\varepsilon/2}$, $\varrho_R$ 在尺度为 $R$ 的球上可视为常数. 对于 $z\in Q_k$, 记

$$\mathscr{H}_{\lambda,k}^{\nu,j}f(z)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi^\lambda(z,\eta_k^{\nu,j})}\mathscr{T}_{\lambda,k}^{\nu,j}f(z).$$

根据命题 5.1 及 $\operatorname{supp}_\eta a_{\lambda,k}^{\nu,j}(z,\cdot)$ 的紧支集性质, 容易看出

$$\begin{aligned}&\sum_{Q_k\in\mathbf{Q}}\left\|\sum_{\nu,j}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi^\lambda(\cdot,\eta_k^{\nu,j})}(\mathscr{H}_{\lambda,k}^{\nu,j}f)*\varrho_R\sum_{\nu',j'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi^\lambda(\cdot,\eta_k^{\nu',j'})}(\mathscr{H}_{\lambda,k}^{\nu',j'}f)*\varrho_R\right\|_{L^{\frac53}(Q_k)}^{\frac53}\\&\quad\lessapprox\lambda^{\frac1{10}}\left(\sum_{Q_k\in\mathbf{Q}}\left\|\left(\sum_{\nu,j}|\mathscr{T}_{\lambda,k}^{\nu,j}f|^2\right)^{\frac12}\right\|_{L^{\frac{10}3}(w_{Q_k})}^{\frac{10}3}\right)^{\frac12}\left(\sum_{Q_k\in\mathbf{Q}}\left\|\left(\sum_{\nu',j'}|\mathscr{T}_{\lambda,k}^{\nu',j'}f|^2\right)^{\frac12}\right\|_{L^{\frac{10}3}(w_{Q_k})}^{\frac{10}3}\right)^{\frac12}.\end{aligned} \tag{5.53}$$

事实上, 由 Minkowski 不等式和 $\varrho_R$ 的局部常数性质, 可得

$$\left\|\iint\varrho_R(z-y)\varrho_R(z-y')\left|\sum_{\nu,\nu',j,j'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi^\lambda(z,\eta_k^{\nu,j})}\mathscr{H}_{\lambda,k}^{\nu,j}f(y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi^\lambda(z,\eta_k^{\nu',j'})}\mathscr{H}_{\lambda,k}^{\nu',j'}f(y')\right|dydy'\right\|_{L^{\frac53}(Q_k)}.$$

选取任意的 $\bar z\in Q_k$, 上式可被

$$\iint\left\|\sum_{\nu,j}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi^\lambda(z,\eta_k^{\nu,j})}\mathscr{H}_{\lambda,k}^{\nu,j}f(y)\sum_{\nu',j'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi^\lambda(z,\eta_k^{\nu',j'})}\mathscr{H}_{\lambda,k}^{\nu',j'}f(y')\right\|_{L^{\frac53}(Q_k)}\varrho_R(\bar z-y)\varrho_R(\bar z-y')dydy'$$

控制.

利用引理 5.3, 上式可被

$$\lambda\iint\left(\sum_{\nu,j}|\mathscr{T}_{\lambda,k}^{\nu,j}f(\bar z-y)|^2\right)^{\frac12}\left(\sum_{\nu',j'}|\mathscr{T}_{\lambda,k}^{\nu',j'}f(\bar z-y')|^2\right)^{\frac12}\varrho_R(y)\varrho_R(y')dydy' \tag{5.54}$$

控制. 通过对变量 $\bar z$ 在 $Q_1$ 上取平均并忽略余项 RapDec($\lambda$) 的影响, (5.54) 可以被

$$\lambda^{\frac1{10}}\int\left\|\left(\sum_{\nu,j}|\mathscr{T}_{\lambda,k}^{\nu,j}f(\bar z-y)|^2\right)^{\frac12}\right\|_{L_{\bar z}^{\frac{10}3}(Q_k)}\varrho_R(y)dy\int\left\|\left(\sum_{\nu',j'}|\mathscr{T}_{\lambda,k}^{\nu',j'}f(\bar z-y')|^2\right)^{\frac12}\right\|_{L_{\bar z}^{\frac{10}3}(Q_k)}\varrho_R(y')dy'$$

控制. 由 Hölder 不等式, 有

$$\int\left\|\left(\sum_{\nu,j}|\mathscr{T}_{\lambda,k}^{\nu,j}f(\bar z-y)|^2\right)^{\frac12}\right\|_{L_{\bar z}^{\frac{10}3}(Q_k)}\varrho_R(y)dy\lesssim\left(\int\left(\sum_{\nu,j}|\mathscr{T}_{\lambda,k}^{\nu,j}f(z)|^2\right)^{\frac53}w_{Q_k}(z)dz\right)^{\frac3{10}},$$

这里用到了

$$\int_{\mathbb{R}^3}w_{Q_k}(z+y)\varrho_R(y)dy\lessapprox w_{Q_k}(z).$$

对 $Q_k \in \mathbf{Q}$ 求和并应用 Cauchy-Schwarz 不等式, 可得 (5.53).

若能证明

$$\left\|\left(\sum_{\nu,j}|\mathscr{T}_{\lambda,k}^{\nu,j}f|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^{\frac{10}{3}}(w_{Q_k})} \lessapprox \left\|\left(\sum_{\nu}|\mathscr{T}_{\lambda}^{\nu}f|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^{\frac{10}{3}}(w_{Q_k})} + \mathrm{RapDec}(\lambda)\|f\|_{L^{\frac{10}{3}}(\mathbb{R}^2)}, \tag{5.55}$$

则意味着 (5.34) 成立, 从而完成了命题 5.2 的证明. 因此, 下面的任务就是证明 (5.55).

### 5.3 径向黏合

本小节致力于证明 (5.55). 主要想法是, 在充分小的空间尺度内, 用延拓算子 $E$ 逼近振荡积分算子 $\mathscr{T}_\lambda$. 假设 $\delta > 0$ 和 $1 \leqslant K \leqslant \lambda^{1/2-\delta}$, 对 $\phi^\lambda$ 在点 $\bar{z}$ 附近实施 Taylor 展开, 然后进行变量替换: $\eta \to \Psi^\lambda(\bar{z},\eta) := \Psi(\bar{z}/\lambda,\eta)$, 容易推出

$$\mathscr{T}_\lambda f(z) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\langle z-\bar{z},\partial_z\phi^\lambda(\bar{z},\Psi^\lambda(\bar{z},\eta))\rangle+\varepsilon_\lambda^{\bar{z}}(z-\bar{z},\eta))} a_{\lambda,\bar{z}}(z,\eta) f_{\bar{z}}(\eta)d\eta, \quad \text{对于 } |z-\bar{z}| \leqslant K, \tag{5.56}$$

其中

$$\begin{aligned} f_{\bar{z}} &:= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi^\lambda(\bar{z},\Psi^\lambda(\bar{z},\cdot))} f \circ \Psi^\lambda(\bar{z},\cdot), \\ a_{\lambda,\bar{z}}(z,\eta) &= a_\lambda(z,\Psi^\lambda(\bar{z},\eta))|\det \partial_\eta \Psi^\lambda(\bar{z},\eta)|. \end{aligned}$$

对于 $|v| \leqslant K$,

$$\varepsilon_\lambda^{\bar{z}}(v,\eta) = \frac{1}{\lambda}\int_0^1 (1-s)\left\langle (\partial_{zz}^2\phi)\left(\frac{\bar{z}+sv}{\lambda}, \Psi^\lambda(\bar{z},\eta)\right)v, v\right\rangle ds. \tag{5.57}$$

根据 (4.1), 对任意 $\lambda \gg 1$, 有

$$\sup_{(v,\eta)\in B(0,K)\times \mathrm{supp}_\eta a_{\lambda,\bar{z}}} |\partial_\eta^\beta \varepsilon_\lambda^{\bar{z}}(v,\eta)| \leqslant 1, \quad \forall\, |v| \leqslant K, \tag{5.58}$$

其中 $\beta \in \mathbb{N}^2$, $|\beta| \leqslant N$. 鉴于 (4.2), 得到

$$\langle z, \partial_z\phi^\lambda(\bar{z},\Psi^\lambda(\bar{z},\eta))\rangle = x\eta + th_{\bar{z}}(\eta), \quad h_{\bar{z}}(\eta) := (\partial_t\phi^\lambda)(\bar{z},\Psi^\lambda(\bar{z},\eta)). \tag{5.59}$$

注意到相函数 $a(z,\eta) = a_1(z)a_2(\eta)$ 的假设, 不计空间变量的影响, 在 $\bar{z}$ 的一个充分小的邻域上, 我们可用延拓算子 $E_{\bar{z}}$:

$$E_{\bar{z}}g(z) := \int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(x\eta+th_{\bar{z}}(\eta))} a_{2,\bar{z}}(\eta)g(\eta)d\eta \tag{5.60}$$

逼近 $\mathscr{T}_\lambda$, 其中

$$a_{2,\bar{z}}(\eta) = a_2(\Psi^\lambda(\bar{z},\eta))|\det \partial_\eta \Psi^\lambda(\bar{z},\eta)|.$$

注意到 $h_{\bar{z}}(\eta)$ 是 1 次齐次函数且满足

$$\mathrm{rank}\ \partial_{\eta\eta}^2 h_{\bar{z}} = 1, \quad \forall\, \eta \in \mathrm{supp}\ a_{2,\bar{z}}. \tag{5.61}$$

考虑到 $a$ 支集的有界性和 (4.3), 我们可以假设 $\partial_{\eta\eta}^2 h_{\bar{z}}(\eta)$ 的非零特征值不依赖于 $\bar{z}$.

为了说明 (5.55), 需要建立下面两个引理.

**引理 5.2** 设 $z_k$ 为 $Q_k$ 的中心, 定义延拓算子 $E_{z_k}^{\nu,j}$ 如下:

$$E_{z_k}^{\nu,j}g(z):=\int_{\mathbb{R}^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\langle x,\eta\rangle+th_{z_k}(\eta))}\rho(\lambda^{\frac12-\frac{\varepsilon}{2}}\eta-j)a_{2,z_k}^{\nu}(\eta)g(\eta)d\eta,\tag{5.62}$$

其中 $\rho$ 满足 (5.40),

$$a_{2,z_k}^{\nu}(\eta)=a_2^{\nu}(\Psi^{\lambda}(z_k,\eta))|\det\partial_\eta\Psi^{\lambda}(z_k,\eta)|,$$

则

$$\Bigg\|\Bigg(\sum_{\nu,j}|E_{z_k}^{\nu,j}g|^2\Bigg)^{\frac12}\Bigg\|_{L^{\frac{10}{3}}(w_{Q_0})}\lessapprox\Bigg\|\Bigg(\sum_{\nu}|E_{z_k}^{\nu}g|^2\Bigg)^{\frac12}\Bigg\|_{L^{\frac{10}{3}}(w_{Q_0})}+\mathrm{RapDec}(\lambda)\|g\|_{L^{\frac{10}{3}}}.\tag{5.63}$$

下面引理说明, 在充分小的空间区域内, 从某种意义上 $\mathscr{T}_\lambda$ 可视为 $E_{\bar z}$. 下面引理中的一个弱形式出现在文献 [41] 中. 它对分离性不等式是适用的, 然而对于平方函数不等式是失效的. 为此需要如下改进的点态估计版本.

**引理 5.3** 设 $0<\delta\leqslant 1/2$ 和 $1\leqslant K\leqslant\lambda^{1/2-\delta}$. 假设 (4.1) 成立, 则对任意 $N$, 只要 $|v|\leqslant K$, 就有

$$|\mathscr{T}_\lambda f(\bar z+v)|\leqslant|E_{\bar z}f_{\bar z}(v)|+\left(\frac{3}{\pi}\right)^N\sum_{\ell\in\mathbb{Z}^2\setminus\{0\}}|\ell|^{-N}|E_{\bar z}(f_{\bar z}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle 4\pi\ell,\cdot\rangle})(v)|,\tag{5.64}$$

$$|E_{\bar z}f_{\bar z}(v)|\leqslant|\mathscr{T}_\lambda f(\bar z+v)|+\left(\frac{3}{\pi}\right)^N\sum_{\ell\in\mathbb{Z}^2\setminus\{0\}}|\ell|^{-N}|\mathscr{T}_\lambda[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle 4\pi\ell,(\partial_x\phi^\lambda)(\bar z,\cdot)\rangle}f](\bar z+v)|.\tag{5.65}$$

先承认引理 5.2 和 5.3, 我们来完成 (5.55) 的证明. 设 $z_k$ 是 $Q_k$ 的中心, 由 (5.64) 可见

$$\begin{aligned}\Bigg\|\Bigg(\sum_{\nu,j}|\mathscr{T}_{\lambda,k}^{\nu,j}f|^2\Bigg)^{\frac12}\Bigg\|_{L^{\frac{10}{3}}(w_{Q_k})}&\leqslant\Bigg\|\Bigg(\sum_{\nu,j}|\mathscr{T}_{\lambda,k}^{\nu,j}f|^2\Bigg)^{\frac12}\chi_{\{|z-z_k|\leqslant\lambda^{\frac12-\frac{\varepsilon}{2}}\}}\Bigg\|_{L^{\frac{10}{3}}(w_{Q_k})}\\&\quad+\Bigg\|\Bigg(\sum_{\nu,j}|\mathscr{T}_{\lambda,k}^{\nu,j}f|^2\Bigg)^{\frac12}\chi_{\{|z-z_k|\geqslant\lambda^{\frac12-\frac{\varepsilon}{2}}\}}\Bigg\|_{L^{\frac{10}{3}}(w_{Q_k})}\\&\lesssim_N\sum_{\ell\in\mathbb{Z}^2}(1+4\pi|\ell|)^{-N}\Bigg\|\Bigg(\sum_{\nu,j}|E_{z_k}^{\nu,j}(f_{z_k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle 4\pi\ell,\cdot\rangle})|^2\Bigg)^{\frac12}\Bigg\|_{L^{\frac{10}{3}}(w_{Q_0})}\\&\quad+\mathrm{RapDec}(\lambda)\|f\|_{L^{\frac{10}{3}}}.\end{aligned}\tag{5.66}$$

需要指出的是, (5.66) 中最后不等式中的正方体 $Q_0$ 比原先的要稍微大一些. 利用 (5.63), 在忽略余项情形下, 有

$$\begin{aligned}&\sum_{\ell}(1+4\pi|\ell|)^{-N}\Bigg\|\Bigg(\sum_{\nu,j}|E_{z_k}^{\nu,j}(f_{z_k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle 4\pi\ell,\cdot\rangle})|^2\Bigg)^{\frac12}\Bigg\|_{L^{\frac{10}{3}}(w_{Q_0})}\\&\lessapprox\sum_{\ell}(1+4\pi|\ell|)^{-N}\Bigg\|\Bigg(\sum_{\nu}|E_{z_k}^{\nu}(f_{z_k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle 4\pi\ell,\cdot\rangle})|^2\Bigg)^{\frac12}\Bigg\|_{L^{\frac{10}{3}}(w_{Q_0})}\\&\lessapprox\sum_{\ell}(1+4\pi|\ell|)^{-N}\Bigg\|\Bigg(\sum_{\nu}|E_{z_k}^{\nu}f_{z_k}|^2\Bigg)^{\frac12}\Bigg\|_{L^{\frac{10}{3}}(w_{Q_0,\ell})},\end{aligned}$$

其中

$$w_{Q_0,\ell}(z)=w_{Q_0}((4\pi\ell,0)+z).$$

最后一个不等式用到了延拓算子 $E_{\bar{z}}$ 的平移不变性, 即

$$E_{\bar{z}}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle 4\pi\ell,\cdot\rangle}g](x,t)=E_{\bar{z}}g(x+4\pi\ell,t).$$

因为

$$\sum_{\ell}(1+4\pi|\ell|)^{-N}w_{Q_0,\ell}(z)\lesssim w_{Q_0}(z),$$

所以可推知,

$$\bigg\|\bigg(\sum_{\nu,j}|\mathscr{T}_{\lambda,k}^{\nu,j}f|^2\bigg)^{\frac{1}{2}}\bigg\|_{L^{\frac{10}{3}}(w_{Q_k})}\lessapprox\bigg\|\bigg(\sum_{\nu}|E_{z_k}^{\nu}f_{z_k}|^2\bigg)^{\frac{1}{2}}\bigg\|_{L^{\frac{10}{3}}(w_{Q_0})}+\mathrm{RapDec}(\lambda)\|f\|_{\frac{10}{3}}. \tag{5.67}$$

为了完成证明, 只需把 $E_{z_k}^{\nu}f_{z_k}$ 换成与其对应的振荡积分算子 $\mathscr{T}_{\lambda}^{\nu}f$. 由 Minkowski 不等式, 有

$$\begin{aligned}\bigg\|\bigg(\sum_{\nu}|E_{z_k}^{\nu}f_{z_k}|^2\bigg)^{\frac{1}{2}}\bigg\|_{L^{\frac{10}{3}}(w_{Q_0})}&\leqslant\bigg\|\bigg(\sum_{\nu}|E_{z_k}^{\nu}f_{z_k}|^2\bigg)^{\frac{1}{2}}\chi_{\{|z|\leqslant\lambda^{\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{16}}\}}\bigg\|_{L^{\frac{10}{3}}(w_{Q_0})}\\&\quad+\bigg\|\bigg(\sum_{\nu}|E_{z_k}^{\nu}f_{z_k}|^2\bigg)^{\frac{1}{2}}\chi_{\{|z|\geqslant\lambda^{\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{16}}\}}\bigg\|_{L^{\frac{10}{3}}(w_{Q_0})}\\&\lesssim_N\sum_{\ell\in\mathbb{Z}^2}(1+4\pi|l|)^{-N}\bigg\|\bigg(\sum_{\nu}|\mathscr{T}_{\lambda}^{\nu}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle 4\pi\ell,\partial_x\phi^{\lambda}(z_k,\cdot)\rangle}f)(z_k+v)|^2\bigg)^{\frac{1}{2}}\bigg\|_{L^{\frac{10}{3}}(w_{Q_0})}\\&\quad+\mathrm{RapDec}(\lambda)\|f\|_{L^{\frac{10}{3}}}.\end{aligned}$$

注意到情形 $\ell=0$ 是期待的估计, 我们仅需控制剩下余项. 由 (5.64) 推知,

$$\begin{aligned}&\sum_{\ell\in\mathbb{Z}^2\setminus\{0\}}\bigg(\frac{\pi|\ell|}{3}\bigg)^{-N}\bigg\|\bigg(\sum_{\nu}|\mathscr{T}_{\lambda}^{\nu}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle 4\pi\ell,\partial_x\phi^{\lambda}(z_k,\cdot)\rangle}f)(z_k+v)|^2\bigg)^{\frac{1}{2}}\bigg\|_{L^{\frac{10}{3}}(w_{Q_0})}\\&\leqslant\sum_{\ell\in\mathbb{Z}^2\setminus\{0\}}\sum_{k\in\mathbb{Z}^2\setminus\{0\}}\bigg(\frac{\pi|\ell|}{3}\bigg)^{-N}\bigg(\frac{\pi|k|}{3}\bigg)^{-N}\bigg\|\bigg(\sum_{\nu}|E_{z_k}^{\nu}f_{z_k}|^2\bigg)^{\frac{1}{2}}\bigg\|_{L^{\frac{10}{3}}(w_{Q_0}((4\pi(\ell+k),0)+\cdot))}\\&\quad+\sum_{\ell\in\mathbb{Z}^2\setminus\{0\}}\bigg(\frac{\pi|\ell|}{3}\bigg)^{-N}\bigg\|\bigg(\sum_{\nu}|E_{z_k}^{\nu}f_{z_k}|^2\bigg)^{\frac{1}{2}}\bigg\|_{L^{\frac{10}{3}}(w_{Q_0}((4\pi\ell,0)+\cdot))}\\&\leqslant\frac{1}{2}\bigg\|\bigg(\sum_{\nu}|E_{z_k}^{\nu}f_{z_k}|^2\bigg)^{\frac{1}{2}}\bigg\|_{L^{\frac{10}{3}}(w_{Q_0})},\end{aligned}$$

通过选取 $N$ 充分大可确保最后一个不等式成立. 综上所述估计可得

$$\begin{aligned}&\bigg\|\bigg(\sum_{\nu}|E_{z_k}^{\nu}f_{z_k}|^2\bigg)^{\frac{1}{2}}\bigg\|_{L^4(w_{Q_0})}\\&\leqslant\bigg\|\bigg(\sum_{\nu}|\mathscr{T}_{\lambda}^{\nu}f|^2\bigg)^{\frac{1}{2}}\bigg\|_{L^4(w_{Q_k})}+\frac{1}{2}\bigg\|\bigg(\sum_{\nu}|E_{z_k}^{\nu}f_{z_k}|^2\bigg)^{\frac{1}{2}}\bigg\|_{L^4(w_{Q_0})}+\mathrm{RapDec}(\lambda)\|f\|_{L^{\frac{10}{3}}}.\end{aligned}$$

注意到右边 $\|(\sum_{\nu}|E_{z_k}^{\nu}f_{z_k}|^2)^{1/2}\|_{L^4(w_{Q_0})}$ 可被左边吸收, 从而完成了 (5.55) 的证明.

### 5.4 引理 5.2 的证明

为证明引理 5.2, 先引入两个已知引理.

**引理 5.4** [50] 设 $\varphi$ 是支撑在以原点为中心的固定方体 $Q$ 上的光滑 bump 函数. 记 $\{O_k\}_k$ 是中心为 $\xi_k$ 且具有相同尺度的正方体, $\varphi_k(\xi)=\varphi(\xi-\xi_k)$ 是从属于方体 $Q_k$ 的 bump 函数. 对任意函数 $f$, 有如下点态估计:

$$\bigg(\sum_k |\widehat{\varphi}_k * f|^2\bigg)^{\frac{1}{2}} \leqslant C(\varphi)(\boldsymbol{M}[|f|^2])^{\frac{1}{2}}, \tag{5.68}$$

其中 $\boldsymbol{M}$ 表示 Hardy-Littlewood 极大算子, 常数 $C(\varphi)$ 依赖于维数与 $\varphi$ 的有限阶导数.

第二个引理是向量值极大函数估计, 源于 Fefferman 和 Stein [51], 或参见文献 [38].

**引理 5.5** [51] 设 $1<r, p<\infty$, $\{f_k\}_k$ 为函数序列, 则

$$\bigg\|\bigg(\sum_k |\boldsymbol{M} f_k|^r\bigg)^{\frac{1}{r}}\bigg\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leqslant C_n\, A_{p,r}\bigg\|\bigg(\sum_k |f_k|^r\bigg)^{\frac{1}{r}}\bigg\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \tag{5.69}$$

其中

$$A_{p,r}=\frac{r}{r-1}\bigg(p+\frac{1}{p-1}\bigg).$$

证明 (5.63) 的障碍在于 $w_{Q_0}$ 未必是 $A_p$ 权. 准确地说, 下面的极大函数估计:

$$\|\boldsymbol{M} f\|_{L^p(w_{Q_0})} \leqslant C\|f\|_{L^p(w_{Q_0})}, \quad 1<p<\infty \tag{5.70}$$

未必成立. 为克服该困难并保持某种局部性质, 需要进行一系列局部化. 事实上,

$$\begin{aligned}\bigg\|\bigg(\sum_{\nu,j} |E_{z_k}^{\nu,j} g|^2\bigg)^{\frac{1}{2}}\bigg\|_{L^{\frac{10}{3}}(w_{Q_0})} \leqslant{} & \bigg\|\bigg(\sum_{\nu,j} |E_{z_k}^{\nu,j} g|^2\bigg)^{\frac{1}{2}} \chi_{\{|x| \leqslant \lambda^{\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{4}}\}}\bigg\|_{L^{\frac{10}{3}}(w_{Q_0})} \\ & +\bigg\|\bigg(\sum_{\nu,j} |E_{z_k}^{\nu,j} g|^2\bigg)^{1/2} \chi_{\{|x|>\lambda^{\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{4}}\}}\bigg\|_{L^{10/3}(w_{B_0})}.\end{aligned}$$

由于权函数在 $|z| \geqslant \lambda^{1/2-\varepsilon/4}$ 之外快速衰减, 因此仅需考虑

$$\bigg\|\bigg(\sum_{\nu,j} |E_{z_k}^{\nu,j} g|^2\bigg)^{\frac{1}{2}} \chi_{\{|x| \leqslant \lambda^{\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{4}}\}}\bigg\|_{L^{\frac{10}{3}}(w_{Q_0})}. \tag{5.71}$$

固定 $t_0$, 考察

$$E_{z_k}^{\nu,j} g(x, t_0)=\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle x, \eta\rangle} \rho(\lambda^{\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{2}} \eta-j)(E_{z_k}^\nu g)^\wedge(\eta, t_0) d\eta, \tag{5.72}$$

其中 $E_{z_k}^\nu g(x, t_0)$ 如下定义:

$$E_{z_k}^\nu g(x, t_0):=\int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\langle x, \eta\rangle+t_0 h_{z_k}(\eta))} a_{z_k}^\nu(\eta) g(\eta) d\eta. \tag{5.73}$$

实施如下分解:

$$E_{z_k}^\nu g(x, t_0)=\chi_{\{|x| \leqslant \lambda^{\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{8}}\}}(x) E_{z_k}^\nu g(x, t_0)+\chi_{\{|x|>\lambda^{\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{8}}\}}(x) E_{z_k}^\nu g(x, t_0), \tag{5.74}$$

则只需估计

$$\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle x,\eta\rangle}\rho(\lambda^{\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{2}}\eta-j)(\chi_{\{|x|\leqslant\lambda^{\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{8}}\}}(\cdot)E^{\nu}_{z_k}g)^{\wedge}(\eta,t_0)d\eta. \tag{5.75}$$

事实上, 对于 $|x|\leqslant\lambda^{1/2-\varepsilon/4}$, (5.74) 的第二项对于 (5.72) 的贡献可被余项控制, 即

$$\int\frac{1}{\lambda^{1-\varepsilon}}\hat{\rho}\bigg(\frac{x-y}{\lambda^{\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{2}}}\bigg)\chi_{\{|x|>\lambda^{\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{8}}\}}(y)E^{\nu}_{z_k}g(y)dy\lesssim\mathrm{RapDec}(\lambda)\|g\|_{L^{10/3}}. \tag{5.76}$$

我们继续估计 (5.75), 由引理 5.4 推知,

$$\begin{aligned}&\bigg(\sum_{\nu,j}\bigg|\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle x,\eta\rangle}\rho(\lambda^{\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{2}}\eta-j)(\chi_{\{|\cdot|\leqslant\lambda^{\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{8}}\}}(\cdot)E^{\nu}_{z_k}g)^{\wedge}(\eta,t_0)d\eta\bigg|^2\bigg)^{\frac{1}{2}}\\&\quad\leqslant C\bigg(\sum_{\nu}\boldsymbol{M}[|\chi_{\{|\cdot|\leqslant\lambda^{\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{8}}\}}(\cdot)E^{\nu}_{z_k}g(\cdot,t_0)|^2]\bigg)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned} \tag{5.77}$$

让 $t_0$ 变动, 把 (5.77) 代入 (5.71), 利用引理 5.5 可得

$$\begin{aligned}\bigg\|\bigg(\sum_{\nu,j}|E^{\nu,j}_{z_k}g|^2\bigg)^{\frac{1}{2}}\bigg\|_{L^{\frac{10}{3}}(w_{Q_0})}&\lesssim\bigg\|\bigg(\sum_{\nu}\boldsymbol{M}[|\chi_{\{|x|\leqslant\lambda^{\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{8}}\}}(\cdot)E^{\nu}_{z_k}g(\cdot,t_0)|^2]\bigg)^{\frac{1}{2}}\bigg\|_{L^{\frac{10}{3}}(w_{Q_0})}\\&\lessapprox\bigg\|\bigg(\sum_{\nu}|E^{\nu}_{z_k}g|^2\bigg)^{\frac{1}{2}}\bigg\|_{L^{\frac{10}{3}}(w_{Q_0})}.\end{aligned} \tag{5.78}$$

**注 5.3** 当一个不等式使用 Fefferman-Stein 的估计时, 会出现额外因子 $\lambda^{\varepsilon}$. 实际上, 这里使用了如下的不等式:

$$\bigg\|\sum_m\boldsymbol{M}g_m\bigg\|_{L^{\frac{10}{3}}(\mathbb{R}^3)}\lesssim_{\varepsilon}N^{\varepsilon}\bigg\|\sum_m|g_m|\bigg\|_{L^{\frac{10}{3}}(\mathbb{R}^3)},$$

其中 $\#\{m\}=N$, $\varepsilon>0$ 任意小. 事实上, 由 Hölder 不等式以及引理 5.5, 选取 $r'$ 充分大, 使得 $\frac{1}{r'}\leqslant\varepsilon$, 则有

$$\begin{aligned}\bigg\|\sum_m\boldsymbol{M}g_m\bigg\|_{L^{\frac{10}{3}}(\mathbb{R}^3)}&\leqslant\bigg\|\bigg(\sum_m|\boldsymbol{M}g_m|^r\bigg)^{\frac{1}{r}}\bigg\|_{L^{\frac{10}{3}}(\mathbb{R}^3)}(\#\{m\})^{\frac{1}{r'}}\\&\lesssim_r\bigg\|\bigg(\sum_m|g_m|^r\bigg)^{\frac{1}{r}}\bigg\|_{L^{\frac{10}{3}}(\mathbb{R}^3)}(\#\{m\})^{\frac{1}{r'}}\\&\lesssim_r\bigg\|\sum_m|g_m|\bigg\|_{L^{\frac{10}{3}}(\mathbb{R}^3)}(\#\{m\})^{\frac{1}{r'}}.\end{aligned}$$

### 5.5 引理 5.3 的证明

注意到 $\mathrm{supp}_{\eta}a_{\lambda,\bar{z}}(z,\cdot)\subset B(\boldsymbol{e}_2,\varepsilon_0)$, 这里不妨假设 $\varepsilon_0$ 充分小. 我们可用 $f\psi$ 去替换 $f$, 其中 $\psi$ 是支撑在 $B(\boldsymbol{e}_2,\frac{1}{5})$ 上的光滑函数且在 $B(\boldsymbol{e}_2,\frac{1}{100})$ 上等于 1, 满足

$$|\partial^{\alpha}_{\eta}\psi(\eta)|\leqslant 6^N,\quad\alpha\in\mathbb{N}^2,\quad 1\leqslant|\alpha|\leqslant N. \tag{5.79}$$

对 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varepsilon^{\bar{\bar{z}}}_{\lambda}(v,\eta)}\psi(\eta)$ 关于变量 $\eta$ 实施 Fourier 展开, 可得

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varepsilon^{\bar{\bar{z}}}_{\lambda}(v,\eta)}\psi(\eta)=\sum_{\ell\in\mathbb{Z}^2}b_{\ell}(v)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle4\pi\ell,\eta\rangle}, \tag{5.80}$$

其中

$$b_\ell(v)=2\int_{Q(\boldsymbol{e}_2,1/4)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\langle 4\pi\ell,\eta\rangle}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varepsilon_\lambda^{\bar{\bar{z}}}(v,\eta)}\psi(\eta)d\eta, \tag{5.81}$$

$Q(\boldsymbol{e}_2,1/4)$ 表示中心是 $\boldsymbol{e}_2$ 且边长是 1/2 的方体. 由 (5.58) 容易看出 $|b_0(v)|\leqslant 1$. 分部积分, 有

$$|b_\ell(v)|\leqslant 12^N(4\pi|\ell|)^{-N},\quad \text{只要 } |v|\leqslant K,\quad \ell\neq(0,0), \tag{5.82}$$

则得到 (5.64).

至于反方向的不等式, 根据

$$E_{\bar{z}}f_{\bar{z}}(v)=\int_{\mathbb{R}^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi^\lambda(\bar{z}+v,\Psi^\lambda(\bar{z},\eta))}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varepsilon_\lambda^{\bar{\bar{z}}}(v,\eta)}a_{2,\bar{z}}(\eta)f\circ\Psi^\lambda(\bar{z},\eta)d\eta, \tag{5.83}$$

通过对 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varepsilon_\lambda^{\bar{\bar{z}}}(v,\eta)}$ 关于 $\eta$ 实施 Fourier 展开, 作变量替换: $\eta\to\Psi^\lambda(\bar{z},\eta)$, 得到 (5.74).

### 5.6 关于高维情形的注记

如果对相函数施加额外的凸性条件, 则命题 5.2 的高维版本也成立. 对 $2+1$ 维情形, 非零特征根只有一个, 凸性条件是多余的. 本质上, 凸性是保证分离性条件 (4.10) 的内蕴几何条件.

设 $n\geqslant 3$, $a(z,\eta)\in C_c^\infty(\mathbb{R}^{n+1}\times\mathbb{R}^n)$ 支撑在 $B(0,\varepsilon_0)\times B(\boldsymbol{e}_n,\varepsilon_0)$ 上. 假设

$$\mathcal{C}(\boldsymbol{e}_2,\varepsilon_0):=B(\boldsymbol{e}_n,\varepsilon_0)\cap\mathbb{S}^{n-1},$$

对变量 $\eta$ 实施如下角向分解: 把 $\mathcal{C}(\boldsymbol{e}_n,\varepsilon_0)$ 分解成 $\sim N_\lambda\approx\lambda^{\frac{n-1}{2}}$ 个扇形区域 $\{\theta_\nu:1\leqslant\nu\leqslant N_\lambda\}$, 其中每个扇形 $\theta_\nu$ 张成的角度为 $\approx_{\varepsilon_0}\lambda^{-1/2}$. 用 $\kappa_\nu\in\mathbb{S}^1$ 表示扇形 $\theta_\nu$ 的中心.

令 $\{\chi_\nu(\eta)\}$ 是从属于角向分解的一列齐次度为 1 的光滑截断函数, 并且构成了 $\mathbb{R}^n\backslash 0$ 的单位分解. 准确地讲, 满足

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{0\leqslant\nu\leqslant N_\lambda}\chi_\nu(\eta)\equiv 1,\quad \forall\,\eta\in\mathbb{R}^n\setminus 0,\\ |\partial^\alpha\chi_\nu(\eta)|\leqslant C_\alpha\lambda^{\frac{|\alpha|}{2}},\quad \forall\,\alpha\in\mathbb{N}^2,\quad |\eta|=1.\end{cases}$$

定义

$$\begin{cases}\displaystyle T_\lambda f=\int\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda\phi(z,\eta)}a(z,\eta)f(\eta)d\eta=\sum_\nu T_\lambda^\nu f,\\ \displaystyle T_\lambda^\nu f(z)=\int\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda\phi(z,\eta)}a^\nu(z,\eta)f(\eta)d\eta,\end{cases} \tag{5.84}$$

其中 $a^\nu(z,\eta)=\chi_\nu(\eta)a(z,\eta)$. 直接验证得

$$T_\lambda f=\sum_\nu T_\lambda^\nu f.$$

设 $n\geqslant 3$, 在类似于命题 5.2 的条件和额外的凸性条件下, 利用之前的证明方法, 可以得到

$$\begin{aligned}&\Big\|\sum_{\nu\in\Omega}T_\lambda^\nu g\sum_{\nu'\in\Omega'}T_\lambda^{\nu'}h\Big\|_{L^{\frac{n+3}{n+1}}(\mathbb{R}^{n+1})}\\ &\quad\lessapprox_{\phi,\varepsilon}\lambda^{\frac{n-1}{2(n+3)}}\Big\|\Big(\sum_{\nu\in\Omega}|T_\lambda^\nu g|^2\Big)^{\frac12}\Big\|_{L^{\frac{2(n+3)}{n+1}}(\mathbb{R}^{n+1})}\Big\|\Big(\sum_{\nu'\in\Omega'}|T_\lambda^{\nu'}h|^2\Big)^{\frac12}\Big\|_{L^{\frac{2(n+3)}{n+1}}(\mathbb{R}^{n+1})}.\end{aligned} \tag{5.85}$$

在相差余项 RapDec($\lambda$) 的情形下, 上式意味着平方函数估计

$$\|T_\lambda f\|_{L^{\frac{2(n+3)}{n+1}}(\mathbb{R}^{n+1})} \lessapprox \lambda^{\frac{n-1}{4(n+3)}} \left\| \left( \sum_\nu |T_\lambda^\nu f|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^{\frac{2(n+3)}{n+1}}(\mathbb{R}^{n+1})}. \tag{5.86}$$

不幸的是, 我们并不能改进利用文献 [41] 中的最佳 $L^{\frac{2(n+1)}{n-1}}$ 估计和平凡 $L^2$ 估计插值所获得的估计. 失败原因是光锥方向上的变系数 Kakeya 极大函数 $L^p \to L^p$ 估计的匮乏,

$$\|\mathcal{M}_\delta\|_{L^p\to L^p} \leqslant C \max\left\{ \left(\log\frac{1}{\delta}\right)^{\frac{1}{2}}, \delta^{-\frac{n-2}{p}} \right\}, \quad 2\leqslant p\leqslant\infty, \quad n\geqslant 3. \tag{5.87}$$

众所周知, 对于 $p>2$, $L^p$-Kakeya 极大函数估计是非常困难的, 可参见文献 [17]. 综上所述, 对 $n\geqslant 3$, 在 $p\leqslant \frac{2(n+1)}{n-1}$ 的情形下, 利用双线性方法似乎很难进一步改进文献 [22] 中的结果.

## 6 关于 Fourier 积分算子的局部光滑效应的进一步讨论

本节考虑 Fourier 积分算子的局部光滑性估计与振荡积分算子的 $L^p$ 估计之间的联系. 考虑如下振荡积分算子:

$$T_\lambda f(z) := \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda\phi(z,\eta)} a(z,\eta) f(\eta) d\eta, \tag{6.1}$$

其中 $\phi\in C^\infty(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^{n-1})$, $a\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^{n-1})$. 相函数满足如下 Carleson-Sjölin 条件:

($\mathrm{H}_1$) 对所有的 $(z,\eta)\in \operatorname{supp} a$, 有 $\operatorname{rank} \partial^2_{z\eta}\phi(z,\eta) = n-1$;

($\mathrm{H}_2$) 定义 Gauss 映射 $G: \operatorname{supp} a\to\mathbb{S}^{n-1}$ 如下: $G(z,\eta) := \frac{G_0(z,\eta)}{|G_0(z,\eta)|}$, 其中

$$G_0(z,\eta) := \bigwedge_{j=1}^{n-1} \partial_{\eta_j}\partial_z\phi(z,\eta), \tag{6.2}$$

总满足曲率条件

$$\operatorname{rank} \partial^2_{\eta\eta}\langle \partial_z\phi(z,\eta), G(z,\eta_0)\rangle\,|_{\eta=\eta_0} = n-1, \quad \forall\,(z,\eta_0)\in\operatorname{supp} a. \tag{6.3}$$

设 $\operatorname{rank} \partial^2_{\eta\eta}\psi(\eta) = n-1$, 显然, (6.1) 可视为下面延拓性算子:

$$Ef(x,t) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(x\eta+t\psi(\eta))} a(x,t,\eta) f(\eta) d\eta \tag{6.4}$$

的推广. 类似于限制性猜想, 对于振荡积分算子 $T_\lambda$, Hörmander 提出了下面的猜想:

**猜想 6.1** [40] (Hörmander 猜想) 对于 $\frac{1}{q} < \frac{n-1}{2n}$, $\frac{1}{q} \leqslant \frac{n-1}{n+1}\frac{1}{p'}$, 相函数满足条件 ($\mathrm{H}_1$) 和 ($\mathrm{H}_2$), 则

$$\|T_\lambda f\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \lesssim \lambda^{-n/q} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^{n-1})}. \tag{6.5}$$

Hörmander 猜想是非常强的. 如果 Hörmander 猜想成立, 则意味着 Bochner-Riesz 猜想和限制性猜想成立. Hörmander [40] 证明了 $n=2$ 的情形; 对 $n\geqslant 3$, Stein [6] 证明了 $q\geqslant\frac{2(n+1)}{n-1}$ 时的最优结果. 然而令人惊奇的是, Bourgain [42] 通过构造反例否定了 Hörmander 猜想, 并且指出当 $n$ 是奇数时, Stein 得到的结果是最优的. 下面是 1991 年 Bourgain 所举的反例:

**例 6.1** 设相函数

$$\varphi(x,y)=x_1y_1+x_2y_2+2x_3y_1y_2+x_3^2y_1^2,$$

则当 $n=3$ 时, 对任意的 $q<4$, (6.5) 不成立.

**证明** 先来验证相函数 $\varphi$ 满足条件 ($\mathrm{H}_1$) 和 ($\mathrm{H}_2$). 简单计算可得

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2y_2+4x_3y_1\\ 0 & 1 & 2y_1\end{pmatrix}.$$

显然,

$$\operatorname{rank}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}=2.$$

设 $\theta\in S^2$, 则有

$$\theta\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\theta_1y_1+\theta_2y_2+\theta_3(2y_1y_2+2x_3y_1^2), \tag{6.6}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\theta\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)=\begin{pmatrix}\theta_1+2\theta_3(y_2+2x_3y_1)\\ \theta_2+2\theta_3y_1\end{pmatrix}, \tag{6.7}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\theta\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)=\begin{pmatrix}4x_3 & 2\theta_3\\ 2\theta_3 & 0\end{pmatrix}. \tag{6.8}$$

如果 $\theta\neq 0$, 则 (6.7) 和 (6.8) 不等于 0. 令 $f(y)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda y_2^2}\chi(y)$, 其中 $\chi$ 为光滑截断函数, 使得

$$T_\lambda f(x)=\int_{\mathbb{R}^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda(x_1y_1+x_2y_2+(y_2+x_3y_1))^2}a(x,y)dy.$$

令 $(z_1,z_2):=(y_1,y_2+x_3y_1)$, 考虑曲面 $S:=\{x:x_1=x_2x_3\}$. 对 $x\in S$, 有

$$T_\lambda f(x)=\int_{\mathbb{R}^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda(x_2z_2+z_2^2)}\tilde{a}(x,z)dz_1dz_2=\int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda(x_2z_2+z_2^2)}\bar{a}(x,z_2)dz_2.$$

相函数存在一个非退化临界点 ($z_2=-\frac{1}{2}x_2$), 由驻相分析引理推知,

$$\begin{cases}|T_\lambda f(x)|\sim\dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}, & x\in\mathbb{R}^3,\\ |\nabla_xT_\lambda f(x)|\approx\lambda|T_\lambda f(x)|\lesssim\sqrt{\lambda}, & x\in\mathbb{R}^3.\end{cases}$$

因此, 对 $x\in\lambda_{1/\lambda}(S)$, 有

$$|T_\lambda f(x)|\gtrsim\frac{1}{\sqrt{\lambda}}.$$

由此推出

$$\|T_\lambda f\|_q\gtrsim\frac{C}{\sqrt{\lambda}}|\mathrm{N}_{1/\lambda}(S)|^{\frac{1}{q}}\sim\lambda^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{q}},\quad\|f\|_p\sim C.$$

只有当 $\frac{3}{q}\leqslant\frac{1}{2}+\frac{1}{q}$, 即 $q\geqslant 4$ 时, 才会有 $\|T_\lambda\|_{p\to q}\lesssim\lambda^{-\frac{3}{q}}$. □

当 $n$ 是偶数时, 文献 [52] 证明了 (6.5) 成立的必要条件是 $q\geqslant\frac{2(n+2)}{n}$. 在不计端点的情形下, Bourgain 和 Guth [53] 证明了该条件还是充分的.

**定理 6.1** [6, 53] 假设算子 $T_\lambda$ 满足条件 ($\mathrm{H}_1$) 和 ($\mathrm{H}_2$), 对任意 $\varepsilon>0$, $\lambda\geqslant 1$,

$$p\geqslant 2\frac{n+1}{n-1},\quad n \text{ 为奇数}, \tag{6.9}$$

$$p\geqslant 2\frac{n+2}{n},\quad n \text{ 为偶数}, \tag{6.10}$$

总成立

$$\|T_\lambda f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\lesssim_\varepsilon \lambda^{-\frac{n}{p}+\varepsilon}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^{n-1})}. \tag{6.11}$$

简单地讲, 当 $n$ 是奇数时, $|T_\lambda f|$ 可能聚积在 $\frac{n+1}{2}$ 维代数簇 $Z$ 的 1 邻域内; 而当 $n$ 是偶数时, $\frac{n+1}{2}$ 不再是整数, 此时 $|T_\lambda f|$ 仅可能集中在 $\frac{n}{2}+1$ 维代数簇 $Z$ 的 1 邻域内. 上述观察与 Kakeya 压缩现象有关, 而在 Euclid 空间中, 如果 Kakeya 猜想成立, 则 Kakeya 压缩现象不会出现.

下面考虑 Fourier 积分算子与振荡积分算子之间的联系.

**定理 6.2** [41] 设 $\frac{2n}{n-1}\leqslant p<\infty$, 如果对所有满足电影型曲率条件的 FIOs, 存在 $1/p$- 阶局部光滑性, 则对同样指标 $p$, 以及所有满足 Carleson-Sjölin 条件的相函数 $\phi$, (6.5) 成立.

假设相函数 $\varphi$ 满足额外的凸性假设, 即

($\mathrm{H}_3'$) 对所有 $(z,\eta_0)\in\operatorname{supp} a$, 满足如下的曲率条件:

$$\operatorname{rank}\partial^2_{\eta\eta}\langle\partial_z\phi(z,\eta),G(z,\eta_0)\rangle\,|_{\eta=\eta_0}=n-1,\quad \text{且所有特征根为正}. \tag{6.12}$$

当 $q\geqslant\frac{2(n+2)}{n}$ 时, Lee [18] 利用双线性方法证明了 (6.5). 随后, Bourgain 和 Guth [53] 发展了多尺度归纳, 利用多线性方法进一步改进了 (6.5). 最近, Guth 等 [49] 利用多项式分解技术证明了如下最佳估计:

**定理 6.3** [49] 假设算子 $T_\lambda$ 满足条件 ($\mathrm{H}_1$)、($\mathrm{H}_2$) 和 ($\mathrm{H}_3'$), 则对任意 $\varepsilon>0$, $\lambda\geqslant 1$,

$$p\geqslant 2\frac{3n+1}{3n-3},\quad n \text{ 为奇数}, \tag{6.13}$$

$$p\geqslant 2\frac{3n+2}{3n-2},\quad n \text{ 为偶数}, \tag{6.14}$$

总有如下估计:

$$\|T_\lambda f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\lesssim_\varepsilon \lambda^{-\frac{n}{p}+\varepsilon}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^{n-1})}. \tag{6.15}$$

值得注意的是, 除端点之外, 利用 $\varepsilon$ 消失性准则, 可获得不具有 $\lambda^\varepsilon$ 损失的估计.

对于 Fourier 积分算子而言, 若相函数满足凸性假设, 即

($\mathrm{H}_3$) 定义 Gauss 映射 $G:\operatorname{supp} a\to\mathbb{S}^n$ 为 $G(z,\eta):=\frac{G_0(z,\eta)}{|G_0(z,\eta)|}$, 其中

$$G_0(z,\eta):=\bigwedge_{j=1}^{n}\partial_{\eta_j}\partial_z\phi(z,\eta), \tag{6.16}$$

对所有的 $(z,\eta_0)\in\operatorname{supp} a$,

$$\partial^2_{\eta\eta}\langle\partial_z\phi(z,\eta),G(z,\eta_0)\rangle\,|_{\eta=\eta_0} \tag{6.17}$$

有 $n-1$ 个正的特征根.

Riemann 流形上的波动方程 (1.6) 对应的半波算子是满足 ($\mathrm{H}_3$) 的典型 Fourier 积分算子. 鉴于 Fourier 积分算子与振荡积分算子之间的联系, 有如下著名的猜想:

**猜想 6.2** 设 Fourier 积分算子 $\mathscr{F} \in I^{\mu-1/4}$, 其中

$$\mu < -(n-1)\left|\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right| + \frac{1}{p}.$$

设相函数满足条件 ($\mathrm{H}_1$) 和 ($\mathrm{H}_3$), 则对任意

$$p \geqslant 2\frac{3n+1}{3n-3}, \quad n \text{ 为奇数}, \tag{6.18}$$

$$p \geqslant 2\frac{3n+2}{3n-2}, \quad n \text{ 为偶数}, \tag{6.19}$$

有如下局部光滑性估计:

$$\|\mathscr{F}f\|_{L^p(\mathbb{R}^{n+1})} \leqslant C\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

**致谢** 感谢审稿专家提出的修改建议.

## 参考文献


1 Chen S. Pseudodifferential Operators, 2nd ed (in Chinese). Beijing: Higher Education Press, 2006 [陈恕行. 拟微分算子 (第 2 版). 北京: 高等教育出版社, 2006]
2 Miao C. Lectures on the Modern Harmonic Analysis and Applications (in Chinese). Beijing: Higher Education Press, 2018 [苗长兴. 现代调和分析及其应用讲义. 北京: 高等教育出版社, 2018]
3 Lax P. Asymptotic solutions of oscillatory initial value problems. Duke Math J, 1957, 24: 627–646
4 Hörmander L. Fourier integral operators. I. Acta Math, 1971, 127: 79–183
5 Stein E. Harmonic Analysis: Real-Variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals. Princeton: Princeton University Press, 2016
6 Stein E. Oscillatory integrals in Fourier analysis. In: Beijing Lectures in Harmonic Analysis. Annals of Mathematics Studies, vol. 112. Princeton: Princeton University Press, 1986, 307–355
7 Duistermaat J, Hörmander L. Fourier integral operators. II. Acta Math, 1972, 128: 183–269
8 Qiu Q, Chen S, Shi J, et al. The Theory of Fourier Integral Operators and Its Applications (in Chinese). Beijing: Science Press, 1985 [仇庆久, 陈恕行, 是嘉鸿, 等. 傅立叶积分算子理论及其应用. 北京: 科学出版社, 1985]
9 Chen S, Qiu Q, Li C. Introduction to Paradifferential Operators (in Chinese). Beijing: Science Press, 1987 [陈恕行, 仇庆久, 李成章. 仿微分算子引论. 北京: 科学出版社, 1987]
10 Qi M. Introduction to Linear Partial Differential Operators, vol. 1 (in Chinese). Beijing: Science Press, 1986 [齐民友. 线性偏微分算子引论 (上). 北京: 科学出版社, 1986]
11 Qi M, Xu C. Introduction to Linear Partial Differential Operators, vol. 2 (in Chinese). Beijing: Science Press, 1992 [齐民友, 徐超江. 线性偏微分算子引论 (下). 北京: 科学出版社, 1992]
12 Egorov Y. The canonical transformations of pseudodifferential operators. Uspekhi Mat Nauk, 1969, 24: 235–236
13 Hörmander L. The spectral function of an elliptic operator. Acta Math, 1968, 121: 193–218
14 Maslov V. Theory of Perturbations and Asymptotic Methods. Moscow: Moscow State University Press, 1965
15 Sogge C. Hangzhou Lectures on Eigenfunctions of the Laplacian. Annals of Mathematics Studies, vol. 188. Princeton: Princeton University Press, 2014
16 Zelditch S. Eigenfunctions of the Laplacian on a Riemannian Manifold. Providence: Amer Math Soc, 2017
17 Sogge C. Fourier Integrals in Classical Analysis, 2nd ed. Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 210. Cambridge: Cambridge University Press, 2017
18 Lee S. Linear and bilinear estimates for oscillatory integral operators related to restriction to hypersurfaces. J Funct Anal, 2006, 241: 56–98
19 Peral J. $L^p$ estimates for the wave equation. J Funct Anal, 1980, 36: 114–145
20 Miyachi A. On some estimates for the wave equation in $L^p$ and $H^p$. J Fac Sci Univ Tokyo Sect IA Math, 1980, 27: 331–354
21 Sogge C. Propagation of singularities and maximal functions in the plane. Invent Math, 1991, 104: 349–376
22 Mockenhaupt G, Seeger A, Sogge C. Local smoothing of Fourier integral operators and Carleson-Sjölin estimates. J Amer Math Soc, 1993, 6: 65–130
23 Wolff T. Local smoothing type estimates on $L^p$ for large $p$. Geom Funct Anal, 2000, 10: 1237–1288

24 Garrigós G, Schlag W, Seeger A. Improvements in Wolff's inequality for decompositions of cone multipliers. Https://webs.um.es/gustavo.garrigos/papers/GSS7bis.pdf
25 Garrigós G, Seeger A. On plate decompositions of cone multipliers. Proc Edinb Math Soc (2), 2009, 52: 631–651
26 Łaba I, Wolff T. A local smoothing estimate in higher dimensions. J Anal Math, 2002, 88: 149–171
27 Bourgain J, Demeter C. The proof of the $l^2$ decoupling conjecture. Ann of Math (2), 2015, 182: 351–389
28 Bourgain J, Demeter C, Guth L. Proof of the main conjecture in Vinogradov's mean value theorem for degrees higher than three. Ann of Math (2), 2016, 184: 633–682
29 Guth L, Wang H, Zhang R. A sharp square function estimate for the cone in $\mathbb{R}^3$. Ann of Math (2), 2020, 192: 551–581
30 Córdoba A. Geometric Fourier analysis. Ann Inst Fourier (Grenoble), 1982, 32: 215–226
31 Katz N, Tao T. Recent progress on the Kakeya conjecture. Publ Mat, 2000, 46: 161–179
32 Grafakos L. Modern Fourier Analysis, 2nd ed. Graduate Texts in Mathematics, vol. 250. New York-Heidelberg-Dordrecht-London: Springer, 2008
33 Mattila P. Fourier Analysis and Hausdorff Dimension. Cambridge: Cambridge University Press, 2015
34 Tao T. Some recent progress on the restriction conjecture. In: Fourier Analysis and Convexity. Boston: Birkhäuser, 2004, 217–243
35 Tao T. The Bochner-Riesz conjecture implies the restriction conjecture. Duke Math J, 1999, 96: 363–375
36 Wolff T. Recent work connected with the Kakeya problem. In: Prospects in Mathematics (Princeton, NJ, 1996). Providence: Amer Math Soc, 1999, 129–162
37 Wolff T. Lectures on Harmonic Analysis. Providence: Amer Math Soc, 2003
38 Grafakos L. Classical Fourier Analysis, 2nd ed. Graduate Texts in Mathematics, vol. 249. New York-Heidelberg-Dordrecht-London: Springer, 2008
39 Tao T, Vargas A. A bilinear approach to cone multipliers, II: Applications. Geom Funct Anal, 2000, 10: 216–258
40 Hörmander L. Oscillatory integrals and multipliers on $FL^p$. Ark Mat, 1973, 11: 1–11
41 Beltran D, Hickman J, Sogge C. Variable coefficient Wolff-type inequalities and sharp local smoothing estimates for wave equations on manifolds. Anal PDE, 2020, 13: 403–433
42 Bourgain J. $L^p$-estimates for oscillatory integrals in several variables. Geom Funct Anal, 1991, 1: 321–374
43 Wolff T. A sharp bilinear cone restriction estimate. Ann of Math (2), 2001, 153: 661–698
44 Gao C, Miao C, Yang J. Improved variable coefficient square functions and local smoothing of Fourier integral operators. arXiv:1901.01487, 2019
45 Gao C, Miao C, Yang J. Square function inequality for a class of Fourier integral operators satisfying cinematic curvature conditions. Forum Math, 2020, 32: 1375–1394
46 Lee J. A trilinear approach to square function and local smoothing estimates for the wave operator. Indiana Univ Math J, 2020, 69: 2005–2033
47 Lee S, Vargas A. On the cone multiplier in $\mathbb{R}^3$. J Funct Anal, 2012, 263: 925–940
48 Córdoba A. A note on Bochner-Riesz operators. Duke Math J, 1979, 46: 505–511
49 Guth L, Hickman J, Iliopoulou M. Sharp estimates for oscillatory integral operators via polynomial partitioning. Acta Math, 2019, 223: 251–376
50 Rubio de Francia J. Estimates for some square functions of Littlewood-Paley type. Publ Mat, 1983, 27: 81–108
51 Fefferman C, Stein E. Some maximal inequalities. Amer J Math, 1971, 93: 107–115
52 Wisewell L. Kakeya sets of curves. Geom Funct Anal, 2005, 15: 1319–1362
53 Bourgain J, Guth L. Bounds on oscillatory integral operators based on multilinear estimates. Geom Funct Anal, 2011, 21: 1239–1295

## 附录 A

本附录详细说明如何从平方函数不等式获得局部光滑性估计, 并列举一些尚未解决的公开问题. 固定 $\bar{p}=\frac{2n}{n-1}$. 根据 Littlewood-Paley 分解, 猜想 2.1 可归结为证明

$$\|\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\sqrt{-\Delta}}f\|_{L^{\bar{p}}(B_R^{n+1})}\leqslant C_\varepsilon R^{(n-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\bar{p}})+\varepsilon}\|f\|_{L^{\bar{p}}(\mathbb{R}^n)},\quad \mathrm{supp}\hat{f}\subset \mathrm{A}(1). \tag{A.1}$$

假设建立了如下反向平方函数不等式:

$$\Big\|\sum_\nu \mathrm{e}^{\mathrm{i}t\sqrt{-\Delta}}f_\nu\Big\|_{L^{\bar{p}}(B_R^{n+1})}\leqslant C_\varepsilon R^\varepsilon\Big\|\Big(\sum_\nu|\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\sqrt{-\Delta}}f_\nu|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big\|_{L^{\bar{p}}(B_R^{n+1})}, \tag{A.2}$$

则局部光滑性估计进一步归结为证明

$$\bigg\|\bigg(\sum_\nu |e^{it\sqrt{-\Delta}}f_\nu|^2\bigg)^{\frac{1}{2}}\bigg\|_{L^{\bar p}(B_R^{n+1})} \leqslant_\varepsilon R^{\frac{1}{\bar p}+\varepsilon}\|f\|_{L^{\bar p}(\mathbb{R}^n)}. \tag{A.3}$$

为此, 用 $K_\nu$ 表示 $e^{it\sqrt{-\Delta}}f_\nu$ 的核函数

$$K_\nu(x,t,y) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(\langle x-y,\xi\rangle+t|\xi|)}\chi_\nu(\xi)d\xi. \tag{A.4}$$

对任意 $N\in\mathbb{N}$, 由驻相分析技术推出

$$|K_\nu(x,t,y)| \leqslant \frac{C_N R^{-\frac{n-1}{2}}}{(1+|(x-y)\cdot\kappa_\nu+t|+R^{-\frac{1}{2}}|\Pi_{\kappa_\nu}^{\perp}(x-y)|)^N}, \tag{A.5}$$

其中 $\Pi_{\kappa_\nu}$ 是向以 $\kappa_\nu$ 为法向的超平面的投影. 利用 Riesz 表示定理, 有

$$\bigg\|\bigg(\sum_\nu |e^{it\sqrt{-\Delta}}f_\nu|^2\bigg)^{\frac{1}{2}}\bigg\|^2_{L^{\bar p}(B_R^{n+1})} = \sup_{\|g\|_{L^n_{x,t}(\mathbb{R}^{n+1})=1}} \int_{\mathbb{R}^{n+1}}\sum_\nu |e^{it\sqrt{-\Delta}}f_\nu|^2 g(x,t)dxdt, \tag{A.6}$$

由 Hölder 不等式, 可得

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^{n+1}}\sum_\nu |e^{it\sqrt{-\Delta}}f_\nu|^2 g(x,t)dxdt\\
&\lesssim \int_{\mathbb{R}^n}\sum_\nu |f_\nu(y)|^2 \sup_\nu\bigg|\int_{\mathbb{R}^{n+1}} K_\nu(x,t,y)g(x,t)dxdt\bigg|dy\\
&\lesssim \bigg\|\sum_\nu |f_\nu|^2\bigg\|_{L^{\frac{n}{n-1}}(\mathbb{R}^n)}\bigg\|\sup_\nu\bigg|\int_{\mathbb{R}^{n+1}} K_\nu(x,t,y)g(x,t)dxdt\bigg|\bigg\|_{L^n(\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned}$$

为了完成证明, 需要建立两个不等式, 其一是平方函数不等式

$$\bigg\|\bigg(\sum_\nu |f_\nu|^2\bigg)^{\frac{1}{2}}\bigg\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \lesssim R^\varepsilon\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad 2\leqslant p\leqslant \tfrac{2n}{n-1}. \tag{A.7}$$

当 $n=2$ 时, Córdoba [30] 证明了 (A.7), 但是高维情形仍是公开的. 其二是极大 Nikodym 函数, 事实上,

$$\bigg\|\sup_\nu\bigg|\int_{\mathbb{R}^{n+1}} K_\nu(x,t,y)g(x,t)dxdt\bigg|\bigg\|_{L^n(\mathbb{R}^n)} \lesssim_\varepsilon R^{1-\frac{1}{n}+\varepsilon}. \tag{A.8}$$

(A.8) 是下面 Nikodym 极大函数猜想的直接推论.

**猜想 A.1** 设

$$\mathcal{T}_\nu := \{(x,t): x\in B_R^n(0), 0\leqslant t\leqslant R, |x\cdot\kappa_\nu+t|\leqslant 1, |\Pi_{\kappa_\nu}^{\perp}(x)|\leqslant R^{\frac{1}{2}}\}, \tag{A.9}$$

则

$$\bigg(\int_{\mathbb{R}^n}\sup_\nu\bigg|\frac{1}{|\mathcal{T}_\nu|}\int_{\mathcal{T}_\nu} g(y-x,t)dxdt\bigg|^n dy\bigg)^{\frac{1}{n}} \lesssim_\varepsilon R^{-\frac{1}{n}+\varepsilon}\|g\|_{L^n(\mathbb{R}^{n+1})}. \tag{A.10}$$

迄今为止, Mockenhaupt 等 [22] 证明了 $n=2$ 对应的最优结果, 然而, 高维损失太多, 与期待的猜想尚有相当的差距.

# Local smoothness of Fourier integral operators and related research

Chuanwei Gao & Changxing Miao

**Abstract** In this survey, we are devoted to reviewing local smoothing estimates and the related research of Fourier integral operators satisfying the cinematic curvature conditions, which contain non-degenerate conditions and curvature conditions. We focus on how to establish a variable coefficient version of the square function inequality through the bilinear method, and then improve the local smoothing estimates established by Mockenhaupt-Seeger-Sogge. At the same time, the difficulty and the possible ways of solving the local smoothing conjecture, and connections with other well-known mathematical conjectures are also discussed.

**Keywords** **Fourier integral operator, local smoothing estimates, square function inequality, bilinear method, cinematic curvature condition**

**MSC(2020)** **35S30, 35L15**

**doi: 10.1360/SSM-2020-0173**