中国科学: 数学 2015 年 第 45 卷 第 3 期: 301～310
link.springer.com math.scichina.com

下临界 CMJ 过程未来代的极限性质

国洪松*, 张梅

北京师范大学数学科学学院, 数学和复杂系统实验室, 北京 100875
E-mail: hongsongguo@mail.bnu.edu.cn, meizhang@bnu.edu.cn

收稿日期: 2013-11-22; 接受日期: 2014-07-02; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 11371061) 资助项目

摘要 本文考虑有世代交叠 (overlapping generations) 现象的下临界分支过程, 也称作连续时间下临界 CMJ 过程. 在 CMJ 过程中, 个体可以在不同的年龄阶段产生后代, 等待繁殖的时间间隔不再是独立的指数分布随机变量. 因此过程一般不再具有马氏性. 本文主要研究 t 时刻未来代 (the coming generation) 人口数 $\{H_t\}$, 也即 t 时刻之后, 确定会出生的个体总数, 他们是在未来必然出生的潜在人口. 借助于更新定理, 我们得到 $\{H_t\}$ 的几个条件极限定理, 以及未来代非灭绝的充分条件.

关键词 下临界 分支过程 世代交叠 未来代
MSC (2010) 主题分类 60J80, 60F05

1 引言和主要结果

本文考虑有世代交叠 (overlapping generations) 现象的分支过程 (参见文献 [1]), 有时又称为 CMJ (Crump-Mode-Jagers) 过程. 在 CMJ 过程中, 个体可以在不同的年龄阶段产生后代, 等待繁殖的时间间隔不再是独立的指数分布随机变量. 因此过程一般不再具有马氏性. 如果不做特殊说明, 假设初始时刻只有一个祖先. 设 $I=\bigcup_{j=0}^{\infty}\mathbb{N}^j$ 是所有可能的个体构成的集合. 对于个体 $x\in I$, 记 ξ_x 为 x 的生殖点过程 (参见文献 [1, 第 120 页]). 在不强调个体 x 时简记作 ξ. 假设 $\{\xi_x\}_{x\in I}$ 为独立同分布的 (i.i.d.). 我们可以按如下方式得到过程的实现 (realization, 参见文献 [1, 第 124 页]). 祖先 (0) 是实现的, 个体 (x,k) 能够实现如果她的母亲 x 实现了并且 $\xi_x\geqslant k$. 记 x 在 $[0,t]$ 产生的后代个数为 $\xi_x(t)=\xi_x[0,t]$, $\xi_x(\infty)=\xi_x[0,\infty)$. 一个可实现的个体 (x,k) 出生当且仅当她的母亲 x 达到年龄 $\tau_x(k)$:

$$\tau_x(k)=\inf\{t:\xi_x(t)\geqslant k\},$$

并将个体 (x,k) 出生的时刻记为 $\sigma_{(x,k)}$. 定义 $\sigma_0=0$. 若 $x=(j_1,j_2,\dots,j_n)\in I$, 则有

$$\sigma_x=\tau_0(j_1)+\cdots+\tau_{(j_1,\dots,j_{n-1})}(j_n).$$

定义 1.1 (参见文献 [2,3]) 对任意的 $t\geqslant 0$, 定义未来代 (the coming generation) I_t,

$$I_t=\{x=(x',i)\in I:\sigma_{x'}\leqslant t<\sigma_x<\infty\}. \tag{1.1}$$

英文引用格式: Guo H S, Zhang M. Limit properties of subcritical CMJ processes about the coming generation (in Chinese). Sci Sin Math, 2015, 45: 301–310, doi: 10.1360/012015-12

显然, 未来代 I_t 是由 t 时刻之后确定会出生的人口构成的集合. 其实这些个体很有可能并不属于同一代, 也不在同一时刻出生. 但他们是在未来必然出生的潜在人口. 研究未来代人口的发展趋势, 可用来估计人口的演变, 并在人口控制中发挥作用.

本文主要考虑未来代中的人口数. 令 $H_t = \sharp\{x \in I : x \in I_t\}$. 则有如下分解:

$$H_t = \xi_0(\infty) - \xi_0(t) + \sum_{i=1}^{\xi_0(t)} H_t^{(i)}, \tag{1.2}$$

简单起见, 对任意 $x \in I$, $t \geqslant 0$, 定义 $\Phi_x(t) = (\xi_x(\infty) - \xi_x(t))$; 若 $t < 0$, 令 $\Phi_x(t) = 0$. 则可写为

$$H_t = \sum_{x \in I} \Phi_x(t - \sigma_x).$$

对 CMJ 过程, Jagers 在文献 [1, 第 6 章] 介绍了关于当前存活人口的条件极限定理. 文献 [2–4] 进一步研究了上临界情形, 并得出更一般化的结论. 而且未来代在上临界极限性质的研究中也发挥越来越重要的作用. 如在离散时间情形中, 未来代人口的生殖值 (the reproductive value of the coming generation)

$$N_n = \sum_{y \in I_n} \mathrm{e}^{-\alpha \sigma_y}$$

是一个 Nerman 鞅 (参见文献 [3, 5]), 并从此角度研究上临界 CMJ 过程的极限行为. 而本文主要讨论连续时间下临界 CMJ 过程未来代人口的性质, 得到非灭亡条件下未来代人口数的极限定理, 并尽可能弱化定理成立的条件, 只假设 $\beta < \infty$ 和经典的 $x \log x$ 条件 (参见文献 [6, 7]).

定义 1.2 定义生殖函数 $\mu(t) = E[\xi_x(t)]$, $x \in I$. 由独立性, $\mu(t)$ 与 x 无关. 假设 $m = \mu(\infty) = E[\xi(\infty)] < \infty$. 定义 Malthusian 参数 (参见文献 [8]) $\alpha \in \mathbb{R}$ 为下述方程的解:

$$\hat{\mu}(\alpha) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\alpha t} \mu(dt) = 1. \tag{1.3}$$

令 $\hat{\xi}(\alpha) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\alpha t} \xi(dt)$. 可知 $\alpha > 0$, $\alpha = 0$ 和 $\alpha < 0$ 分别对应着 $m > 1$, $m = 1$ 和 $m < 1$, 在这三种情形下, 分别称 CMJ 过程为上临界、临界和下临界. 令 $\check{\mu}(dt) = \mathrm{e}^{-\alpha t} \mu(dt)$. 则 $\check{\mu}$ 是 $[0, \infty)$ 上的概率测度.

定理 1.3 若 μ 为有限测度, 则对任意的 $t \geqslant 0$, 有 $E[y_t] < \infty$ 且 $m_t = E[H_t]$ 也有限, 其中 y_t 为 $[0, t]$ 内出生的总人口数. 进一步, m_t 满足

$$m_t = m - \mu(t) + \int_0^t m_{t-s} \mu(ds). \tag{1.4}$$

若 $m = \mu(\infty) < 1$ (下临界情形), 则当 $t \to \infty$ 有 $m_t \to 0$.

定理 1.4 在非格点 (not lattice) 非临界 CMJ 过程中, 若 α 为其 Malthusian 参数, 则有

$$\lim_{t \to \infty} \mathrm{e}^{-\alpha t} E H_t = \frac{\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\alpha t} [m - \mu(t)] dt}{\int_0^\infty t \mathrm{e}^{-\alpha t} \mu(dt)} = \frac{m - 1}{\alpha \beta}, \tag{1.5}$$

其中 $\beta = \int_0^\infty t \mathrm{e}^{-\alpha t} \mu(dt)$. 且若 $\beta = \infty$, (1.5) 式右端为 0.

推论 1.5 设 $\alpha \neq 0$. 则下列两极限之一存在当且仅当另一个存在, 且当极限存在时, 下述两条结论等价:

(i) $\lim_{t\to\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}P(H_t > 0) > 0$;

(ii) $\lim_{t\to\infty} E[H_t|H_t > 0] < \infty$.

注 1.6　需要说明的是, 这里的极限存在, 包括极限是正无穷大的情形. 如当 $\alpha > 0$, 即上临界情形, 则有 $\lim_{t\to\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}P(H_t > 0) = 0$ 和 $\lim_{t\to\infty} E[H_t|H_t > 0] = \infty$.

定理 1.7　考虑非格点、下临界且 Malthusian 参数为 α 的 CMJ 过程. 假设 $\beta < \infty$. 则极限

$$\lim_{t\to\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}P(H_t > 0)$$

存在. 如果

$$E[\hat{\xi}(\alpha)\log\xi(\infty)] < \infty, \tag{1.6}$$

则 $\lim_{t\to\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}P(H_t > 0) > 0$.

注 1.8　在这个定理中, 我们只考虑下临界情形, 即 $\alpha < 0$. 关于上临界 ($\alpha > 0$) 一般化的结论, 可见本文的参考文献 [4] 等.

2　定理的证明

作为定理证明的准备, 需要以下定义和一些引理.

定义 2.1 (参见文献 [9, 第 XIII 章第10 节] 或 [1, 第 104 页])　设 f 和 x 为 $\mathbb{R}_+$ 上的可测函数, μ 为 $\mathbb{R}_+$ 上的测度. 若 μ 为概率测度, 则关系式

$$x(t) = f(t) + \int_0^\infty x(t-u)\mu(du), \quad t \geqslant 0, \tag{2.1}$$

称为一个更新方程 (renewal equation). 也可写成卷积形式 $x = f + x * \mu$. 若 $\mu(\infty) < 1$, 则方程 (2.1) 称为亏损的更新方程 (defective renewal equation). 若 $\mu(\infty) > 1$, 则称其为过分的 (excessive).

引理 2.2 (参见文献 [1, 定理 5.2.9, 第 111 页])　设 μ 为 $\mathbb{R}_+$ 上的测度且 $\mu(\infty) < 1$, f 为有界可测函数, 且 $f(\infty) := \lim_{t\to\infty} f(t) < \infty$. 则方程 (2.1) 的解 x 存在极限

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \frac{f(\infty)}{1-\mu(\infty)}. \tag{2.2}$$

若进一步方程 (1.3) 的解 α 存在, μ 为非格点 (not lattice) 测度, f 是几乎处处连续, 且满足不等式

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sup_{0\leqslant t<1} \mathrm{e}^{-\alpha(k+t)}|f(k+t)| < \infty, \tag{2.3}$$

则有

$$\lim_{t\to\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}x(t) = \frac{\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\alpha t}f(t)dt}{\int_0^\infty t\mathrm{e}^{-\alpha t}\mu(dt)}. \tag{2.4}$$

定理 1.3 的证明　对 $x \in I$, 在 Ω 上定义作用于 $\{\xi_y; y \in I\}$ 的推移算子 (参见文献 [1, 第 125 页])

$$S_x(\{\xi_y\}; y \in I) = \{\xi_{(x,y)}, y \in I\}.$$

由方程 (1.2), 我们得

$$\begin{aligned}EH_t &= m-\mu(t)+E\bigg(\sum_{i=1}^{\xi_0(t)} H_t^{(i)}\bigg)\\ &= m-\mu(t)+\int_0^t E(H_{t-s}\circ S_{\xi_0(s)}\xi_0(ds))\\ &= m-\mu(t)+\int_0^t E(H_{t-s})\mu(ds).\end{aligned}$$

再由 (1.2) 和引理 2.2, 定理 1.3 即可得证. □

定理 1.4 的证明 设 $x(t)=\mathrm{e}^{-\alpha t}m_t$, $f(t)=\mathrm{e}^{-\alpha t}[m-\mu(t)]$. 由定理 1.3, 可得关系式 $x=f+x*\check{\mu}$ 以及

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\alpha t}[m-\mu(t)]dt &= \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\alpha t}\int_t^\infty \mu(du)dt\\ &= \int_0^\infty\int_0^u \mathrm{e}^{-\alpha t}dt\mu(du)\\ &= \frac{\int_0^\infty(\mathrm{e}^{-\alpha u}-1)\mu(du)}{-\alpha}=\frac{1-m}{-\alpha}<\infty,\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^\infty \sup_{0\leqslant t<1}|f(k+t)| &= \sum_{k=0}^\infty \sup_{0\leqslant t<1}\{\mathrm{e}^{-\alpha(k+t)}[m-\mu(k+t)]\}\\ &\leqslant \sum_{k=0}^\infty \mathrm{e}^{-\alpha(k+1)}[m-\mu(k)]\\ &= \mathrm{e}^{-\alpha}[m-\mu(0)]+\sum_{k=1}^\infty \mathrm{e}^{-\alpha(k+1)}[m-\mu(k)]\\ &\leqslant \mathrm{e}^{-\alpha}[m-\mu(0)]+\sum_{k=1}^\infty\int_{k-1}^k \mathrm{e}^{-\alpha(t+2)}[m-\mu(t)]dt\\ &= \mathrm{e}^{-\alpha}[m-\mu(0)]+\mathrm{e}^{-2\alpha}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\alpha t}[m-\mu(t)]dt<\infty.\end{aligned}$$

将文献 [1, 第 111 页] 的定理 5.2.8 运用于 $x=f+x*\check{\mu}$, 就可得到定理 1.4. □

以下记 $1-L(t):=P(\xi(\infty)>\xi(t))$. 则有

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\alpha t}[1-L(t)]dt &= \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\alpha t}P(\xi(\infty)>\xi(t))dt\\ &\leqslant \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\alpha t}E[\xi(\infty)-\xi(t)]dt\\ &= \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\alpha t}[m-\mu(t)]dt<\infty.\end{aligned}\tag{2.5}$$

引理 2.3

$$\sum_{k=0}^\infty \sup_{0\leqslant t<1}\mathrm{e}^{-\alpha(k+t)}[1-L(k+t)]<\infty.\tag{2.6}$$

证明　注意 $1-L(t)\leqslant m-\mu(t)$, 利用 (2.5) 式和 $\mu(t)$ 的单调性可得引理 2.3. □

回忆方程 (1.2) 中的 $H_t^{(i)}$, 令 $H_t^{(0)}=\xi_0(\infty)-\xi_0(t)$, 且下文皆定义 $f(t)$ 为

$$\begin{aligned}f(t):&=\sum_{n=0}^{\infty}P(H_t^{(n)}>0)-P(H_t>0)\\&=\sum_{n=0}^{\infty}P(H_t^{(n)}>0)-P(\exists\, n\in\mathbb{N},H_t^{(n)}>0).\end{aligned}\tag{2.7}$$

与离散情形不同, 需重点说明下述引理成立.

引理 2.4　设 $f(t)$ 如 (2.7) 定义, 则有

$$0\leqslant\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\alpha t}f(t)dt<\infty,\tag{2.8}$$

和

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sup_{0\leqslant t<1}\mathrm{e}^{-\alpha(k+t)}|f(k+t)|<\infty.\tag{2.9}$$

证明　首先, 注意

$$\begin{aligned}P(H_t>0)&=P(\exists\, n\in\mathbb{N},H_t^{(n)}>0)\\&=P(H_t^{(0)}>0)-\bigg\{\sum_{n=0}^{\infty}P(H_t^{(n)}>0)-P(\exists\, n\in\mathbb{N},\text{使得 }H_t^{(n)}>0)\bigg\}+\sum_{n=1}^{\infty}P(H_t^{(n)}>0)\\&=P(\xi(\infty)>\xi(t))-f(t)+E\bigg[\sum_{n=1}^{\xi_0(t)}P(H_t^{(n)}>0)\bigg]\\&=1-L(t)-f(t)+\int_0^t E[P(H_{t-s}\circ S_{\xi_0(s)}>0)\xi_0(ds)]\\&=1-L(t)-f(t)+\int_0^t P(H_{t-u}>0)\mu(du).\end{aligned}\tag{2.10}$$

对于 $\alpha<s<0$, 有

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-st}\int_0^t P(H_{t-u}>0)\mu(du)dt&=\int_0^{\infty}\int_u^{\infty}\mathrm{e}^{-st}P(H_{t-u}>0)dt\mu(du)\\&=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-s(u+t)}P(H_t>0)dt\mu(du)\\&=\hat{\mu}(s)\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-st}P(H_t>0)dt.\end{aligned}\tag{2.11}$$

因 $\hat{\mu}(s)\leqslant 1$, 可得

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-st}f(t)dt&=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-st}[1-L(t)]dt+\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-st}\int_0^t P(H_{t-u}>0)\mu(du)dt-\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-st}P(H_t>0)dt\\&=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-st}[1-L(t)]dt+[\hat{\mu}(s)-1]\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-st}P(H_t>0)dt\\&\leqslant\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-st}[1-L(t)]dt<\infty.\end{aligned}\tag{2.12}$$

由 (2.5) 且令 $s\downarrow\alpha$, 即可得 (2.8) 式.

其次, 记 $v_t=\sum_{n=0}^{\infty}\chi_{\{H_t^{(n)}>0\}}$, 则

$$E[v_t]=\sum_{n=0}^{\infty}P[H_t^{(n)}>0],\quad P(v_t>0)=P(\exists\, n\in\mathbb{N},H_t^{(n)}>0),$$

和

$$f(t)=E[v_t]-P(v_t>0)=E[(v_t-1)^+].$$

注意到对任意的 t,u, $\chi_{\{H_{t+u}^{(0)}>0\}}\leqslant\chi_{\{H_u^{(0)}>0\}}$ 成立, 因此有

$$\begin{aligned}v_{u+t}-v_u&\leqslant\sum_{n=1}^{\xi_0(t+u)}\chi_{\{H_{t+u}^{(n)}>0\}}-\sum_{n=1}^{\xi_0(u)}\chi_{\{H_u^{(n)}>0\}}\\&\leqslant\sum_{n=\xi_0(u)+1}^{\xi_0(t+u)}\chi_{\{H_{t+u}^{(n)}>0\}}\leqslant\xi_0(t+u)-\xi_0(u).\end{aligned}$$

所以对 $k\in\mathbb{N},0\leqslant t\leqslant 1$, 有

$$f(k+t)\leqslant f(k)+\mu(k+1)-\mu(k),$$

以及

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sup_{0\leqslant t<1}\mathrm{e}^{-\alpha(k+t)}|f(k+t)|\leqslant\sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-\alpha(k+1)}\{f(k)+\mu(k+1)-\mu(k)\}<\infty.$$

可利用类似于证明 (2.8) 式的方法, 证明最后的不等式成立. □

定理 1.7 的证明 (I) 首先, 注意

$$\mathrm{e}^{-\alpha t}P(H_t>0)\leqslant\mathrm{e}^{-\alpha t}m_t,\tag{2.13}$$

且由定理 1.4 知上不等式右侧有界. 其次, 令 $g(t):=1-L(t)-f(t)$. 由 (2.5) 式, 引理 2.3 和 2.4 知 $g(t)$ 满足 (2.3) 式. 因此利用引理 2.2, 可得极限

$$\lim_{t\to\infty}\mathrm{e}^{-\alpha t}P(H_t>0)=\frac{\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\alpha t}g(t)dt}{\beta}.$$

(II) 现在说明, 在 (1.6) 式条件下, 有

$$\lim_{t\to\infty}\mathrm{e}^{-\alpha t}P(H_t>0)>0.\tag{2.14}$$

将 CMJ 过程中第 n 代实现的个体数记为 Z_n, 则 $\{Z_n\}$ 为一个 GW 过程, 称其为嵌入 CMJ 过程的 GW 过程 (参见文献 [10,11]). 记 $q_n=P(Z_n=0)$ 是第 n 代没有个体的概率. 对 $t\geqslant 0$, 记 $h_n(t)$ 为事件 "第 n 代有一个个体, 属于 I_t, 且 $Z_{n+1}=0$" 的概率, 即

$$h_n(t)=P[Z_n=H_{t,n}=1,Z_{n+1}=0],$$

其中, $H_{t,n}$ 是第 n 代在 I_t 中的个体数, 即 $H_{t,n}=\sum_{x\in\mathbb{N}^n}\chi_{\{x\in I_t\}}$. 显然, 可得

$$\begin{aligned}P[H_t>0]&=P[\exists\, n\in\mathbb{N}_+, H_{t,n}>0]\\&\geqslant P[\exists\, n\in\mathbb{N}_+, Z_n=H_{t,n}=1, Z_{n+1}=0]\\&=\sum_{n=1}^{\infty}h_n(t),\end{aligned}$$

这是因为, 若存在某 $n_0\in\mathbb{N}_+$ 使 $h_{n_0}(t)$ 对应的事件发生, 则任意的 $n\neq n_0$, $h_n(t)$ 对应的事件一定不发生. 因此接下来只需证

$$\lim_{t\to\infty}\mathrm{e}^{-\alpha t}\sum_{n=1}^{\infty}h_n(t)>0.$$

记 $H_{t,n}^{(k)}=\sum_{x\in\mathbb{N}^{n-1}}\chi_{\{(k,x)\in I_t\}}$. 回忆推移算子 S_x, $x\in I$. 对于 $n\geqslant 2$, 有

$$\begin{aligned}h_n(t)&=\sum_{k=1}^{\infty}P(H_{t,n}^{(k)}=Z_n=1, Z_{n+1}=0)\\&=E\left\{\sum_{\tau_0(k)\leqslant t}P(H_{t-\tau_0(k),n-1}\circ S_k=Z_{n-1}\circ S_k=1, Z_n\circ S_k=0|\xi_0)q_{n-1}^{\xi_0(\infty)-1};\xi_0(\infty)\geqslant 1\right\}\\&=\int_0^t h_{n-1}(t-u)E[q_{n-1}^{\xi(\infty)-1}\xi(du);\xi(\infty)\geqslant 1]\\&=\int_0^t h_{n-1}(t-u)\mu(du)-\int_0^t h_{n-1}(t-u)E[(1-q_{n-1}^{\xi(\infty)-1})\xi(du);\xi(\infty)\geqslant 1].\end{aligned}$$

记

$$\eta_n(dt)=E[(1-q_n^{\xi(\infty)-1})\xi(dt);\xi(\infty)\geqslant 1],\quad n\geqslant 1.$$

则有

$$h_n=h_{n-1}*\mu-h_{n-1}*\eta_{n-1},\quad n>1.$$

利用此式进行递推, 并去掉其中的某些正项放缩, 然后求和, 可得对于 $n>k$, 有

$$\sum_{n>k}h_n\geqslant h_k*\sum_{n=0}^{\infty}\mu^{*n}-h_k-h_k*\sum_{n=0}^{\infty}\mu^{*n}*\sum_{j\geqslant k}\eta_j. \tag{2.15}$$

若记

$$h_{k\alpha}(t)=\mathrm{e}^{-\alpha t}h_k(t),\quad \nu=\sum_{n=0}^{\infty}\mu^{*n},\quad \nu_\alpha(dt)=\mathrm{e}^{-\alpha t}\nu(dt),\quad \lambda_j(dt)=\mathrm{e}^{-\alpha t}\eta_j(dt),$$

则有

$$\mathrm{e}^{-\alpha t}\sum_{n>1}h_n(t)\geqslant h_{k\alpha}*\nu_\alpha(t)-h_{k\alpha}(t)-h_{k\alpha}*\nu_\alpha(t)*\sum_{j\geqslant k}\lambda_j(t).$$

与离散情形类似, 利用文献 [1] 中的方法, 可得

$$\mathrm{e}^{-\alpha t}\sum_{n=1}^{\infty}h_n(t)\geqslant\left[h_{k\alpha}*\nu_\alpha*\left(\check{\mu}-\sum_{j\geqslant k}\lambda_j\right)\right](t). \tag{2.16}$$

因为 $0\leqslant h_k(t)\leqslant E(H_{t,k})\leqslant m^k$, 可由控制收敛定理得 $\lim_{t\to\infty}h_k(t)=0$. 注意

$$h_{k\alpha}*\nu_\alpha=h_{k\alpha}+h_{k\alpha}*\nu_\alpha*\check{\mu}, \tag{2.17}$$

且 $h_{k\alpha}$ 满足更新定理的条件. 事实上, 一方面有

$$\begin{aligned}\int_0^\infty h_{k\alpha}(t)dt&=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\alpha t}h_k(t)dt\\&\leqslant\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\alpha t}E(H_{t,k})dt\\&=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\alpha t}\int_0^t[m-\mu(t-u)]\mu^{*(k-1)}(du)dt\\&=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\alpha u}\mu^{*(k-1)}(du)\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\alpha t}[m-\mu(t)]dt<\infty.\end{aligned}$$

另一方面还有

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\sup_{0\leqslant t<1}h_{k\alpha}(n+t)&\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}\sup_{0\leqslant t<1}\mathrm{e}^{-\alpha(n+t)}E[H_{n+t,k}]\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\sup_{0\leqslant t<1}\mathrm{e}^{-\alpha(n+t)}\int_0^{n+t}[m-\mu(n+t-u)]\mu^{*(k-1)}(du)\\&\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-\alpha(n+1)}\int_0^{n+1}[m-\mu(n-u)]\mu^{*(k-1)}(du)\\&\leqslant \mathrm{e}^{-\alpha}[m-\mu(0)]+\sum_{n=1}^{\infty}\int_{n-1}^{n}\int_0^{t+2}\mathrm{e}^{-\alpha(t+2)}[m-\mu(t-u)]\mu^{*(k-1)}(du)dt\\&=\mathrm{e}^{-\alpha}[m-\mu(0)]+\mathrm{e}^{-2\alpha}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\alpha u}\mu^{*(k-1)}(du)\int_{-2}^{\infty}\mathrm{e}^{-\alpha t}[m-\mu(t)]dt<\infty,\end{aligned}$$

这里记 $\mu(t)=\mu(0)$ 如果 $t<0$. 将引理 2.2 运用于 (2.17) 式, 则有

$$\lim_{t\to\infty}h_{k\alpha}*\nu_\alpha(t)=\frac{\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\alpha t}h_k(t)dt}{\beta}. \tag{2.18}$$

并且在 (1.6) 式条件下, 有 (文献 [1, 第 161 页])

$$\sum_{j=0}^{\infty}\lambda_j(\infty)<\infty.$$

回忆 $\check{\mu}(\infty)=1$. 若 $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\alpha t}h_k(t)dt>0$, 则由文献 [1] 的引理 5.2.10, 不等式 (2.16) 得到, 对足够大的 k,

$$\lim_{t\to\infty}\mathrm{e}^{-\alpha t}\sum_{n>1}h_n(t)\geqslant\frac{\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\alpha t}h_k(t)dt}{\beta}\left[1-\sum_{j\geqslant k}\lambda_j(\infty)\right]>0.$$

因此只需讨论积分 $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\alpha t}h_k(t)dt$. 若 $p_1>0$. 先假设 $P[\xi(0)=1|\xi(\infty)=1]<1$. 在文章的最后将给出关于这一假设的解释. 则存在 r 和 R, $0<r<R\leqslant\infty$, 使得 $P[\xi(R)-\xi(r)=1|\xi(\infty)=1]>0$. 因此可知,

$$\int_0^\infty P[Z_1=H_{t,1}=1]dt\geqslant p_1 rP[\xi_0(\infty)-\xi_0(r)=1|\xi_0(\infty)=1]>0,$$

且

$$\begin{aligned}\int_0^\infty h_k(t)dt&=\int_0^\infty P[Z_k=h_{t,k}=1,Z_{k+1}=0]dt\\&=p_0\int_0^\infty P[Z_k=h_{t,k}=1]dt\\&=p_0\int_0^\infty E\bigg[\sum_{\tau_0(i)\leqslant t}P(Z_{k-1}\circ S_i=H_{t-\sigma_i,k-1}=1)\bigg]dt\\&=p_0E\bigg[\int_0^\infty\int_0^t P(Z_{k-1}=H_{t-u,k-1}=1)\xi(du)dt\bigg]\\&=p_0m\int_0^\infty P(Z_{k-1}=H_{t,k-1}=1)dt\\&=\cdots=m^{k-1}p_0\int_0^\infty P(Z_1=H_{t,1}=1)dt>0.\end{aligned}$$

从而有

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\alpha t}h_k(t)dt\geqslant\int_0^\infty h_k(t)dt>0.$$

若 $p_1=0$, 可定义一个新的过程, 祖先 (0) 以 $\frac{1}{2}$ 的概率在 $t=0$ 时刻繁殖一个后代并不再繁殖, 以 $\frac{1}{2}$ 的概率按照点过程 ξ_0 繁殖. 其他个体 $x\in I$ 类似, 以 $\frac{1}{2}$ 的概率在 $t=\sigma_x$ 时刻繁殖一个后代并结束繁殖, 以 $\frac{1}{2}$ 的概率按照点过程 ξ_x 繁殖. 新的过程未来代记为 $\widetilde{I}_t$, 则 $\widetilde{H}_t=\sharp\widetilde{I}_t$ 是以 $\widetilde{\mu}=\frac{1}{2}+\frac{\mu}{2}$ 为生殖函数的分支过程. 因此 α 也为新过程的 Malthusian 参数, 且有

$$E[\hat{\widetilde{\xi}}(\alpha)\log\widetilde{\xi}(\infty)]=\frac{1}{2}\times 0+\frac{1}{2}E[\hat{\xi}(\alpha)\log\xi(\infty)]<\infty.$$

因此对于任意的 t, $\widetilde{H}_t$ 与 H_t 同分布. 从而

$$\lim_{t\to\infty}\mathrm{e}^{-\alpha t}P[H_t>0]=\lim_{t\to\infty}\mathrm{e}^{-\alpha t}P[\widetilde{H}_t>0]>0.$$

证毕. □

注 2.5 为什么假设 $P[\xi(0)=1|\xi(\infty)=1]<1$? 因为

$$H_t=\sum_{x\in I}\chi_{\{\sigma_x\leqslant t\}}[\xi_x(\infty)-\xi_x(t-\sigma_x)],$$

若 $P[\xi(0)=1|\xi(\infty)=1]=1$, 则对任意的 t, 独生子的母亲对 H_t 和 I_t 没有贡献. 而这些母体, 会被她们唯一的后代立即取代.

致谢 感谢审稿人和副主编的修改建议.

参考文献

1 Jagers P. Branching Processes with Biological Applications. New York: John Wiley & Sons, 1975
2 Jagers P, Nerman O. The growth and composition of branching populations. Adv Appl Probab, 1984: 221–259
3 Nerman O. On the convergence of supercritical general (CMJ) branching processes. Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete, 1981, 57: 365–395
4 Olofsson P. The $x \log x$ condition for general branching processes. J Appl Probab, 1998, 35: 537–544
5 Jagers P, Sagitov S. General branching processes in discrete time as random trees. Bernoulli, 2008, 14: 949–962
6 Heathcote C R, Seneta E, Vere-Jones D. A refinement of two theorems in the theory of branching processes. Theor Probab Appl, 1967, 12: 297–301
7 Lyons R, Pemantle R, Peres Y. Conceptual proofs of $l \log l$ criteria for mean behavior of branching processes. Ann Probab, 1995, 23: 1125–1138
8 Pollak E, Kempthorne O. Malthusian parameters in genetic populations. I. Haploid and selfing models. Theor Popul Biol, 1970, 1: 315–345
9 Feller W. An Introduction to Probability Theory and Its Applications II. New York: John Wiley & Sons, 1966
10 Athreya K B, Ney P E. Branching Processes. Berlin: Springer-Verlag, 1972
11 Harris T E. The Theory of Branching Processes. New York: Dover Publications, 2002

Limit properties of subcritical CMJ processes about the coming generation

GUO HongSong & ZHANG Mei

Abstract In this paper, we consider the subcritical branching processes with overlapping generations in continuous time, which is sometimes referred to as subcritical CMJ processes in continuous time. CMJ processes depict populations of individuals who can produce offsprings at different ages, and the time interval of the next two reproductions is no longer of exponential type. We mainly study the count of "the coming generation" at time t, which is called $\{H_t\}$. The coming generation is the "potential population" that are sure to be born at sometime in the future. With the help of renewal theorem, we obtain some conditional limit theorems for $\{H_t\}$.

Keywords **subcritical, branching process, overlapping generation, the coming generation**

MSC(2010) **60J80, 60F05**

doi: 10.1360/012015-12