研究通讯

平面二阶偏微分方程组的边值问题

为了探讨偏微分方程组边值问题的提法，我们考虑如下形式的边值问题

$$\left[A\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right]\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\ (x,\ y)\in\Omega, \tag{1}$$

$$(u-r)|_{\Gamma_1}=0,\ (v-s)|_{\Gamma_2}=0, \tag{2}$$

其中 u, v 是未知函数，r, s 是已知函数，A, B, C 是二阶常数方阵，Ω 是由分段光滑的闭曲线 Γ 所围成，Γ_1 和 Γ_2 是 Γ 上的待定部分.

吴新谋和 Вишик 分别指出（引自文献[1]）：方程组(1)对任意二次闭曲线所围成的有限域上的 Dirichlet 问题(即(2)中 $\Gamma_1=\Gamma_2=\Gamma$ 的情形)解唯一的必要条件是方程组(1)的系数矩阵适合条件（D），即对任意二实数 α 和 β，当 $\beta^2<\alpha$ 时，有 $|A+2\beta B+\alpha C|\neq 0$，显然条件（$D$）也是使边值问题(1)和(2)的解唯一的必要条件. 丁夏畦等人[1]在方程组(1)是椭圆型的情况下，证明了条件（D）是对任意有限域上 Dirichlet 问题解唯一的充分条件.

我们在不限制方程组(1)是椭圆型的情况下：(I)证明了条件（D）对方程组(1)的三种等价变换(见文献[2])保持不变；根据这个性质，按文献[2]的分类，我们求出了方程组(1)满足条件（D）的标准形，(II) 利用 Green 公式，证明存在由方程的系数矩阵和区域边界所确定的 Γ_1 和 Γ_2，使得边值问题(1)和(2)的解唯一充分必要条件是条件（D）成立. (III) 按常规方法定义了边值问题(1)和(2)的弱解，并证明它的存在唯一性.

参 考 文 献

[1] 丁夏畦等，数学学报，**10**(1960)，276-287.

[2] 华罗庚、吴兹潜、林伟，二阶两个自变量两个未知函数的常系数线性偏微分方程组，科学出版社，1979.

刘运康　　吴兹潜

(中山大学计算机科学系，广州 510275)

严格单纯 Mendelsohn 三元系的嵌入*

一个 v 阶 Mendelsohn 三元系 $MTS(v)$ 是这样一个序对（X, v），其中的 X 是一个 v 元集，**A** 是由 X 的循环有序 3-子集(称为三元组)组成的集合，使得由 X 中不同元素作成的任一序对恰好包含在唯一的一个三元组中，我们指出三元组（a,b,c）包含序对（a, b），(b,c)与（c,a）而不包含（b,a），（c,b）或（a,c）.

设(X,**A**)为一个 $MTS(v)$，如果 $\forall$（a, $b,c)\in$ **A** 都有（a,c,b）$\notin$ **A**，则称（X, **A**）为严格单纯的，习知严格单纯 $MTS(v)$ 存在的充要条件为 $v\equiv 0$ 或 $1(\mathrm{mod}\ 3)$，$v\geqslant 4$ 且 $v\neq 6$.

设（X,**A**）为一个 $MTS(v)$，若(Y,**B**)为一个 $MTS(u)$ 使得 $X\subset Y$ 且 **A**$\subset$**B**，则称（X,**A**）嵌入于（Y, **B**）. 由文献[1]知，

* 国家自然科学基金资助项目.

任一 $MTS(v)$ 可嵌入于某个 $MTS(u)$ 的充分必要条件为 $u \equiv 0$ 或 $1(\bmod 3)$ 且 $u \geqslant 2v+1$，这里的三元系不一定是严格单纯的. 本文研究严格单纯 Mendelsohn 三元系的嵌入问题并得到相应的结果. 并进一步解决了严格单纯不完全 Mendelsohn 三元系的存在性.

所谓一个不完全 Mendelsohn 三元系 $IMTS(u,v)$ 是这样一个 3-序组 (Y,X,B)，其中 Y 为一个 u 元集，X 为 Y 的 v-子集，B 为由 Y 的循环有序 3-子集(称为三元组) 组成的集合，使得由 Y 的不同属于 X 的不同元素组成的任一序对都恰好包含在唯一的一个三元组中，而由同属于 X 的元素组成的任一序对不包含在任何三元组中，如果 $\forall(a,b,c)\in \mathrm{B}$ 都有 $(a,c,b)\notin \mathrm{B}$, 则称此 $IMTS(u,v)$ 为严格单纯的. 我们用差集法证明了

定理 1 严格单纯 $IMTS(u,v)$ 存在的充分必要条件为

$$(u-v)(u-2v-1)\equiv 0(\bmod 3),$$
$$u\geqslant 2v+1 \text{ 且}(u,v)\neq(3,1),(6,1).$$

作为上述定理的一个推论，我们得到下述结果:

定理 2 一个严格单纯 $MTS(v)$ 可嵌入于严格单纯 $MTS(u)$ 的充分必要条件为 $u\equiv 0$ 或 $1(\bmod 3)$ 且 $u\geqslant 2v+1$.

参 考 文 献

[1] Hoffman, D.G. and Lindner, C. C., *Ars Combinatoria* **11**(1981), 265—269.

沈 灏

(上海交通大学应用数学系，上海 200030)

关于图的垂-平可嵌入性的一般理论结果

在一些类型的电路设计中，提出这样的问题：给定一个非负整数 k，是否可以将一个电路布置在一个平板上使得元件作为节点，两个节点间之导线只能沿水平和铅垂的走向连接并且至多有 k 个折，所谓折即指出现在一条连线上的一个垂角的顶点. 事实上，希望这样的 k 尽量小.

在数学上，就是将一个图嵌入到平面上使得每条边为由铅垂和水平的线段组成的折线段. 称图的这样的一种平面嵌入为垂-平嵌入. 如果一个图有一个垂-平嵌入使得每条边所用的折数不超过 k，则称它是 k-可嵌入的，或确切地说，垂-平 k-可嵌入的. 当然，这个 k 是愈小愈好.

本文得到如下结果:

定理 A 一个平面图是 k-可嵌入的，$k\geqslant 3$，当且仅当它的每个节点的度皆不超过 4.

由此可见，对于节点的度不过 4 的平面图 $k=3$ 就够了，即它们全是 3-可嵌入的. 同时，我们发现正八面体所相应的图(记 i 为 H)，不是 k-可嵌入的，$k<3$. 进而，我们还得到了:

定理 B 一个节点度不超过 4 的平面图为 2-可嵌入的，当且仅当它不与 H 同构.

$k=1$ 的情形比较复杂，将另行报道. 另外，还有一个指标在实际上是很有用的. 它就是垂-平嵌入中所用的总的折数. 记 t_n^* 为所有 n 阶的平面图的垂-平嵌入中那个用总折数最少的嵌入中的总折数. 本文得到了 t_n^* 的一个上界.

定理 C $t_n^*\leqslant 2n$.

由于 H 使这个不等式取等号. 故它是最好的可能. 当然，如果对于定理 B 中所示的图类，也就是说，除去 H. 则，定理 C 中之上界还可严格地减少. 关于 t_n^* 对于各种图类的上界估计我们将另行报道.