

三幅图像中的曲率估计

鲍炎红¹⁾ 胡茂林^{1),2)} 韦穗²⁾

¹⁾(安徽大学数学系,合肥 230039)

²⁾(安徽大学计算智能与信号处理实验室,合肥 230039)

摘要 从前两幅图像的图像特征中估计第3幅图像的特征,在计算机视觉领域中有广泛的应用,例如,视觉识别,基于模型的视觉动画、视图合成、目标检测和跟踪。Faugeras 和 Robert 指出第3幅图像的特征可以通过前面两个摄像机图像的双线性函数来进行估计,其基本上是通过基础矩阵来计算的,因而他们的方法在实际计算过程中有很大的缺陷。为此提出了一种新的估计方法,即从三焦点张量中来估计第3幅图像的特征。这一方法继承和发展了 Faugeras 等的方法。此外还给出了一个定理说明了本文的条件与 Faugeras 给出的条件是等价的,但本方法简单且更加系统。实验结果证明了该方法的可靠性。

关键词 曲率 三焦点张量 基础矩阵

中图法分类号: TP391.41 文献标识码: A 文章编号: 1006-8961(2004)04-0435-04

The Estimation of Curvatures among Three Images

BAO Yan-hong¹⁾, HU Mao-lin^{1),2)}, WEI Sui²⁾

¹⁾(Department of mathematics, Anhui University, Hefei 230039)

²⁾(Educational Department Key Lab. of IC & SP, Anhui University, Hefei 230039)

Abstract This paper considers the problem of estimating image features in an image from image features in two other images. The problem in computer vision has a wide practical appliance, such as Visual Recognition, model-based vision Animation, View Synthesis, and object detection and tracking. O. Faugeras and L. Robert have shown that features can be estimated in the third image as a bilinear function of its image in the first two cameras. Since relied on the use of the given fundamental matrix, the method has a serious deficiency that rules it out as a practical approach. In this paper, a new method was provided to estimate image features in the third image based on the trifocal tensor, and, obviously, it is continuous and development of the former. Furthermore, a theorem given in this paper shows that the condition is as weak as the one provided by O. Faugeras, but the method is simpler and more systemic. Finally, the applicability of the method was demonstrated with experiments on synthetic and real data.

Keywords curvature, trifocal tensor, fundamental matrix

1 引言

关于从已知的前两幅图像的图像特征中估计第3幅图像的特征这一问题。已经有许多人从不同角度作过研究^[1,2]。该问题在计算机视觉领域中有广泛的应用,如视觉识别,基于模型的动画视觉、视图合成、目标检测与跟踪,等等。文献[2]中指出第3幅图像的特征可以作为前面两个摄像机图像的一个双

线性函数来进行估计,且3个相应曲线的切向量的关系是一个三线性函数,进一步的结果是第3幅图像曲线的曲率可以通过前面两幅图像中相应点的曲率的一个线性函数求出。尽管这个方法有时也用于点的转移,但是基本上是利用已知基础矩阵,所以它在实际计算过程中有着很大的缺陷。这种方法有一种无效的唯一情形就是第3幅图像中两个极点重合。若在第3幅图像上,像点 p'' 和两个极点 e_{31}, e_{32} (即为第1个和第2个摄像机中心在第3幅图像上

的投影)共线,则由第1个和第2个摄像机中心 C , C' 和3维空间中的点 P 所确定的平面也过第3个摄像机的中心 C'' ,进而点 P 在3个摄像机中心确定的三焦点平面上。注意到,在这种特殊的情形下,即当3个摄像机中心共线时,三焦点平面不能被唯一确定,这种变换得不到任何点,显然此时,第3幅图像上的两个极点重合。为了克服这个缺陷,文献[2]使用了三焦点张量来研究点的转移。本文提出一个新的方法,即通过三焦点张量来估计第3幅图像中曲线的曲率,这一方法继承和发展了文献[1]、[2]中的方法。特别的,还给出了一个定理来说明本文方法的条件和文献[2]中方法的条件是等价的,但本文的方法更为简单且系统。因一开始就使用3焦点张量来描述3幅图像间的关系,从而避免了由使用基础矩阵的缺陷。

2 记号和背景知识

设 P 为一个3D射影空间中的一个点,且它在3个视图上的像分别为 p, p', p'' ,其中每个视图都是一个2D射影空间。3D空间和2D空间的关系可用3个 3×4 的矩阵来表示,即 $[I, 0]$, $[A, v']$ 和 $[B, v'']$,且有

$$p \cong [I, 0]P$$

$$p' \cong [A, v']P$$

$$p'' \cong [B, v'']P$$

其中, I 为单位矩阵, A 和 B 分别为由从第1幅视图到第2幅视图和第3幅视图的单应矩阵,向量 v' 和 v'' 为相应的极点,即向量 v' 为摄像机中心 C, C' 连线与第2幅图像的交点,向量 v'' 为摄像机中心 C, C'' 连线与第3幅图像的交点。记 $p' = (x', y', 1)^T$, $p'' = (x'', y'', 1)^T$, 且 $P = (x, y, 1, \rho)^T$, 其中, (x, y) 、 (x', y') 、 (x'', y'') 分别为3幅图像上对应点 p, p', p'' 的坐标。下面采用协-逆变向量求和的记法,即点的坐标用上标来表示 $p = (p^1, p^2, \dots)$,称为逆变向量。对偶空间中的元素称为协变向量,用下标表示,即 $s = (s_1, s_2, \dots)$,在协变和逆变位置上重复出现的指标表示对该指标求和,即: $p^i s_i = p^1 s_1 + p^2 s_2 + \dots$ 。例如,若点 p 为平面中直线 s 上的一点,则有 $p^i s_i = 0$ 。一般情况下,矩阵有两个指标(行和列),它们所表示的变换依赖于指标所在的协变,逆变位置。而三线性张量是有27个元素数组,即

$$\alpha_i^{jk} = v^j b_i^k - v''^k a_i^j \quad i, j, k = 1, 2, 3$$

其中,上标表示为逆变(即2D空间中的点,如 v'),

下标表示为协变(即2D空间中的直线,如矩阵 A 中的行),而 a_i^j 表示 A 中第 j 行,第 i 列的元素, v'^k 为 v' 中第 k 个元素,由张量 α_i^{jk} 可以得到3幅图像中点与线之间的关系

$$p^i s_j^i r_k^i \alpha_i^{jk} = 0 \quad (1)$$

其中, s_j^i 为相交于点 p' 的两条直线 s_j^1 和 s_j^2 , r_k^i 为相交于点 p'' 的两条直线 r_k^1 和 r_k^2 (如图1),不失一般性,就取 s 和 r 分别垂直和水平的两条直线,即 (s_j^i) 和 (r_k^i) 分别为

$$s = (s_j^i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x' \\ 0 & 1 & -y' \end{bmatrix} \quad r = (r_k^i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x'' \\ 0 & 1 & -y'' \end{bmatrix}$$

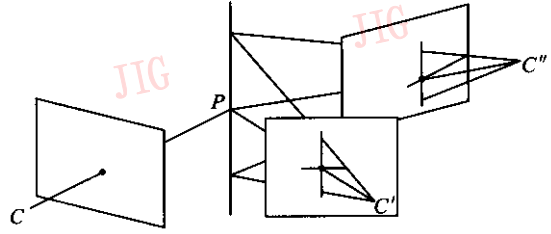


图1 4个三线性方程中任一个均描述第1幅视图中的点 p 和分别过第2幅和第3幅视图上的点 p', p'' 的两条直线之间的关系

事实上,由于自由指标 $\mu, \rho=1, 2$,所以有4个线性无关的三线性方程,而对于每一组对应点 p, p', p'' 决定了4个独立的线性方程,则有3幅视图中7个对应点唯一确定张量 α_i^{jk} (相差一个尺度因子)。因为3个摄像机的射影结构可以非常显式地通过计算3幅视图间的三焦点张量和基础矩阵来得出。所以在一定条件下,3个基础矩阵和三焦点张量可以互相推导^[3]。

定理 与3个摄像机相关的三焦点张量可以仅由3个基础矩阵确定的充要条件是3个摄像机中心不共线。

以上定理表明,通过三焦点张量求曲率的方法可以处理3个摄像机中心共线的情形,显然这比文献[2]中通过基础矩阵求曲率更为广泛。

3 曲率的估计

可以直接通过式(1)得到第3幅图像上的对应点。现在设过点 P ,三维曲线 c 在3个视图上的投影曲线为 $c_i (i=1, 2, 3)$ 。显然曲线 c_i 分别通过相应的点 p, p', p'' ,分别对曲线 c_i 的方程对各自的弧长参数进行微分,由式(1),得到4个方程

$$\frac{dp^i}{ds_1} s_j^1 r_k^1 \alpha_i^{jk} ds_1 + p^i \frac{ds_j^1}{ds_2} r_k^1 \alpha_i^{jk} ds_2 + p^i s_j^1 \frac{dr_k^1}{ds_3} \alpha_i^{jk} ds_3 = 0 \quad (2)$$

$$(\mu, \rho = 1, 2)$$

函数 $\frac{dp^i}{ds_1}, \frac{ds_j^1}{ds_2}, \frac{dr_k^1}{ds_3}$ 表示对相应的曲线弧长参数的微分, 因为 4 个线性相关的方程有非零解。所以 3×4 矩阵中的 3 个 3×3 子矩阵对应的行列式全为 0, 不失一般性, 取第 1 组的 3 个方程, 即式(2)中令 $\mu=1$, $\rho=1$; $\mu=1, \rho=2$; $\mu=2, \rho=1$ 。

定义 a, b, c 分别为

$$\begin{pmatrix} \frac{dp^i}{ds_1} s_j^1 r_k^1 \alpha_i^{jk}, \frac{dp^i}{ds_1} s_j^2 r_k^1 \alpha_i^{jk}, \frac{dp^i}{ds_1} s_j^1 r_k^2 \alpha_i^{jk} \end{pmatrix}^T$$

$$\begin{pmatrix} p^i \frac{ds_j^1}{ds_2} r_k^1 \alpha_i^{jk}, p^i \frac{ds_j^2}{ds_2} r_k^1 \alpha_i^{jk}, p^i \frac{ds_j^1}{ds_2} r_k^2 \alpha_i^{jk} \end{pmatrix}^T$$

$$\begin{pmatrix} p^i s_j^1 \frac{dr_k^1}{ds_3} \alpha_i^{jk}, p^i s_j^2 \frac{dr_k^1}{ds_3} \alpha_i^{jk}, p^i s_j^1 \frac{dr_k^2}{ds_3} \alpha_i^{jk} \end{pmatrix}^T$$

此时, 有

$$\det(a, b, c) = 0 \quad (3)$$

它对于曲线 c_3 的单位切向量的坐标是线性的, 由 3 幅图像中对应点的坐标以及前面两幅图像中对应点的单位切向量, 可以通过式(3)确定曲线 c_3 切向量的方向 t , 事实上, 该公式对于 3 个切向量的坐标是三线性的。

通过对式(3)中 3 条曲线各自的弧长参数进行全微分, 以及由 Frenet 公式的标准形式, $\frac{dt}{ds} = \kappa n$, (其中 κ 为曲线的曲率, n 为曲线的单位法向量)可知, 通过一些简单的代数运算(对于 $\mu, \rho=1, 2$, $\frac{ds_j^1}{ds_2}, \frac{dr_k^1}{ds_3}$ 只有一个非零), 就可以得到一个曲率的估计公式

$$a_1 \kappa_1 ds_1 + a_2 \kappa_2 ds_2 + a_3 \kappa_3 ds_3 = 0$$

表 1 多种三次曲线的实验结果

| | | | | |
|-----|--------------------|-------------------|--------------------|--------------------|
| | $x(t)=t^3+t+1$ | $x(t)=2t^3-2t-3$ | $x(t)=t^3+t^2+1$ | $x(t)=4t^3+t^2-3$ |
| 曲线 | $y(t)=2t^3+t^2-3$ | $y(t)=t^3+3t^2-4$ | $y(t)=-t^3+t^2-2$ | $y(t)=2t^3+4t^2+3$ |
| | $z(t)=-t^3+2t^2-1$ | $z(t)=t^3-2t+2$ | $z(t)=3t^3-2t^2-1$ | $z(t)=3t^3+4t^2-1$ |
| 计算值 | 0.335 07 | 0.154 21 | 0.368 92 | 0.254 82 |
| 实际值 | 0.334 98 | 0.154 19 | 0.368 91 | 0.254 79 |

注: 所取的曲线均是以 t 为参数的三次曲线, 且曲率均是点 $(x(0), y(0), z(0))$ 在第 3 幅图像中对应点的曲率。

(2)真实场景实验 这里仅给出一个实验如图 2 所示。按照上述步骤, 通过计算图像中的立方体来计算三焦点张量, 在 3 幅图像中确定相应的曲线, 利用事先确定的三焦点张量, 得到第 3 幅图像中对应点的切向量, 这和直接从第 3 幅图像中得到的结果

其中系数 $a_i (i=1, 2, 3)$ 为 3 个点 p, p', p'' 和 3 个切向量, 以及 3 个法向量 n_i 的函数, 结合式(2)消去 ds , 得到

$$A_1 \kappa_1 ds_1 + A_2 \kappa_2 ds_2 + A_3 \kappa_3 ds_3 = 0 \quad (4)$$

其中, 系数 $A_i (i=1, 2, 3)$ 为 3 个点 p, p', p'' 和 3 个切向量, 以及 3 个法向量 n_i 的函数。

这是一个 3 点对应曲线的曲率的线性方程。

综上所述, 估计第 3 幅图像中曲线的曲率可分为以下步骤:

(1)利用式(1), 通过 3 幅图像中的特征点计算三焦点张量;

(2)从前面两幅图像中相应的曲线和三焦点张量找到第 3 幅图像中对应的曲线;

(3)计算前面两幅图像中曲线的切向量和法向量, 利用式(3)计算第三幅图像中曲线的切向量和法向量;

(4)计算前面两幅图像中曲线的曲率, 且利用式(4)计算第 3 幅图像中曲线的曲率。

4 实 验

(1)模拟场景实验 实验是采用空间中给定的曲线和摄像机矩阵分别得到 3 幅图像, 然后通过前 2 幅图像中对应点的曲率, 按照本文的算法对第 3 幅图像中的点进行估计, 将所得到的计算值与直接从第 3 幅图像中计算得到的该点的曲率值进行比较。对多种三次曲线进行了实验, 比较的结果如表 1 所示。由表 1 可以看出, 计算的结果误差非常小。事实上我们发现计算过程在 P4 上运行时间大约为 1min。

相吻合。这种通过三焦点张量来计算第 3 幅图像中对应点的切向量, 显然克服了当 3 个摄像机中心共线时, 第 3 幅图像上的两个极点重合, 三焦点平面不能被唯一确定的缺陷。

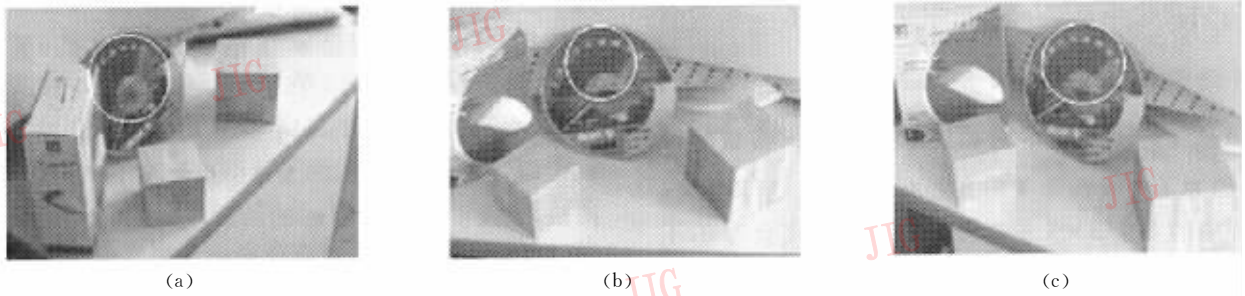


图 2 通过(a)、(b)图像中点的曲率来预测第 3 幅图像中的曲率(曲率用内切圆来表示)

参 考 文 献

1 Avidan, Shuahua A. Novel view synthesis by cascading trilinear tensors[J]. IEEE Transaction on Visualization and Computer Graphics, 1998,4(3):11~12.

2 Faugeras O, Robert L. What can two images tell us about a third one[A]. In: Proceeding of the European Conference on Computer Vision[C], Stockholm, Sweden, 1994:485~492.

3 Hartley R, Zisserman A. Multiple View Geometry in Computer Vision [M]. Combridge University Press, Combridge, UK, 2000.



鲍炎红 1981 年生,2002 年于安徽大学数学系获学士学位,现为安徽大学数学系助教。主要研究方向为计算机视觉、几何拓扑和微分几何。



胡茂林 1965 年生,1994 年于中国科学技术大学数学系获博士学位,现为安徽大学副教授。主要研究方向为计算机视觉、图像处理和偏微分方程。



韦穗 1946 年生,教授,博士生导师。1969 年毕业于南京工学院电子工程系。长期从事计算机视觉、图像处理方面的研究。多次主持过国家 75、85 攻关,“863”计划和国家自然科学基金项目,曾获中国科学院科技进步二等奖。